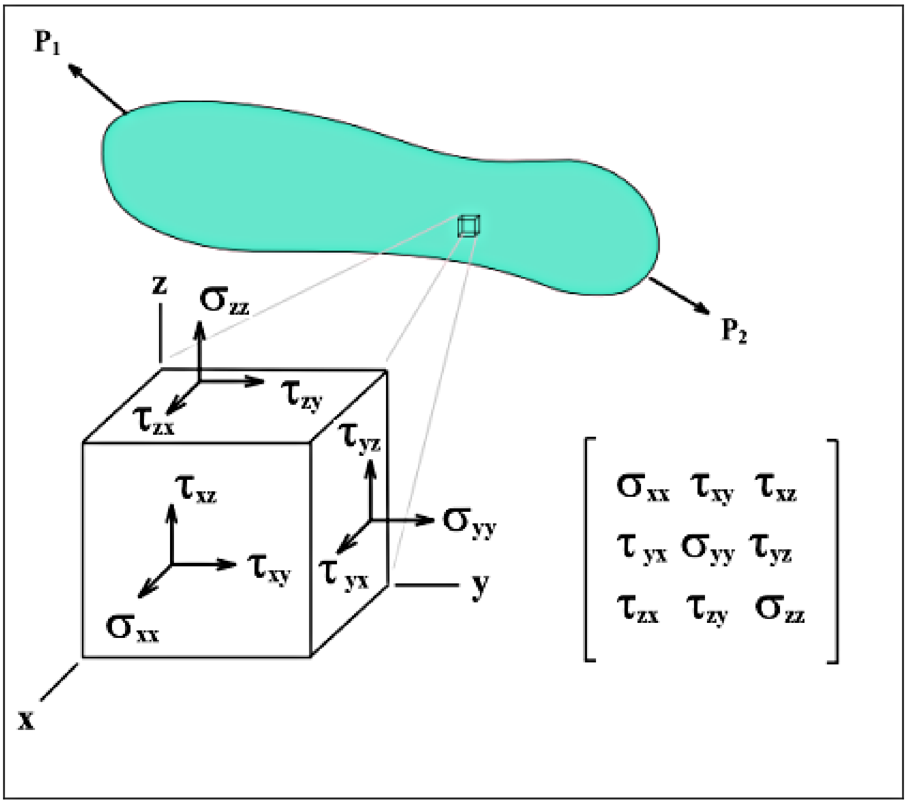
Описание напряженного состояния упругого тела

Тензор напряжений (тензор Коши)

Тензор напряжений — это симметричный тензор, который описывает распределение внутренних сил в материале. Он показывает, какие напряжения (силы на единицу площади) действуют на бесконечно малые площадки, проходящие через данную точку тела.



Компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \text{где :}$$

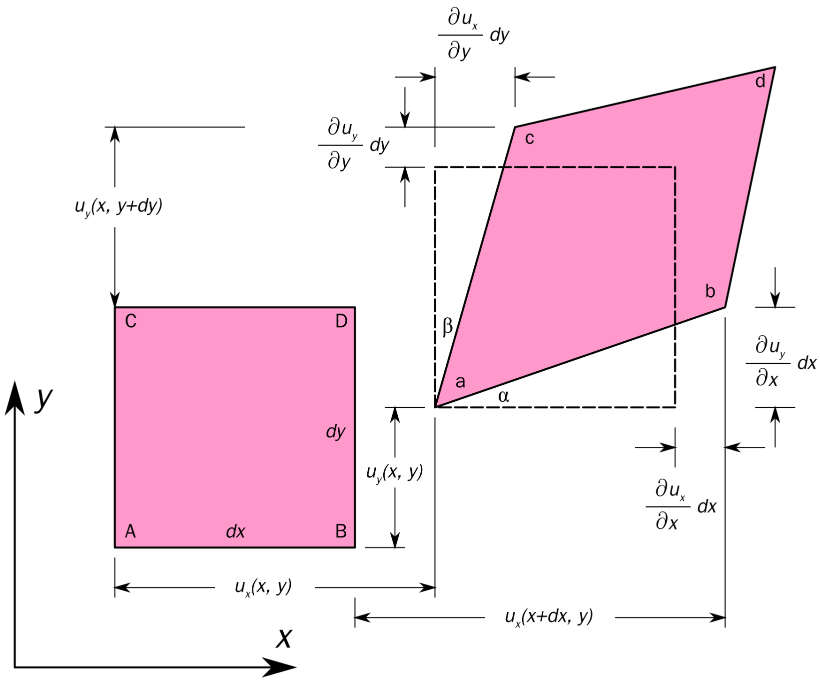
- Диагональные компоненты $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ — нормальные напряжения (растяжение/сжатие).
- Недиагональные компоненты σ_{xy}, σ_{yz} и т.д. — касательные (сдвиговые) напряжения.
- По закону парности касательных напряжений: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Т.е. тензор симметричен, и содержит 6 независимых компонент.

Если через точку провести площадку с нормалью $\vec{n}$, то вектор напряжений на этой площадке:

$$\vec{T}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$$

Тензор деформаций

Тензор деформаций - это симметричный тензор, который описывает изменения формы и размеров бесконечно малого элемента тела (удлинения, сдвиги).



Компоненты тензора малых деформаций в декартовой системе координат

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \text{где :}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{2}$$

- $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ — относительные удлинения (нормальные деформации),
- $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}$ — половина угла сдвига в плоскости (xy),
- Аналогично для других компонент.

Связь между тензорами напряжений и деформаций - физические уравнения

Для линейно упругих тел связь между напряжениями и деформациями задаётся законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl},$$

где C_{ijkl} — тензор упругих постоянных. Он содержит 81 компонент, которые в общем случае (анизотропное тело) сводятся к 21 упругой константе, а для изотропного тела — к 2: модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Для изотропного материала закон Гука в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx} \end{cases}$$

где λ, μ — коэффициенты, которые называют постоянными Ламе. Через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона v параметры Ламе выражаются следующим образом:

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

Второй коэффициент Ламе μ также называют модулем сдвига и обозначают G.

Общая форма уравнений равновесия

В случае отсутствия сил инерции и при условии статического равновесия уравнения записываются так:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

где f_x, f_y, f_z — это объемные силы, например, компоненты силы тяжести

Граничные условия

Граничные условия обычно задаются по поверхности деформированного тела. Тело условно делится на две части: на одной частb граничные условия задаются через нагрузки, на другой - через перемещения.

Итого

Приведенные выше соотношения составляют систему уравнений для трехмерного упругого тела в прямоугольной системе координат: соотношения между деформациями и перемещениями (1) и (2), уравнения равновесия, физические зависимости и граничные условия. Всего имеются 15 неизвестных: 6 напряжений, 6 деформаций и 3 перемещения. В этой системе уравнений часто прибегают к замене отдельных групп уравнений. На различные вариационные принципы, например:

- прицип возможных перемещений (стационарность полной потенциальной энергии);
- метод Рэлея-Ритца;
- смешанные вариационные принципы.