Algoritmos voraces

Alberto Verdejo

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación
Universidad Complutense de Madrid

Bibliografía

- R. Neapolitan. *Foundations of Algorithms*. Quinta edición. Jones and Bartlett Learning, 2015.
  Capítulo 4
- E. Horowitz, S. Sahni y S. Rajasekaran. *Computer Algorithms*. Tercera edición. Computer Science Press, 1998.
  Capítulo 4
- N. Martí Oliet, Y. Ortega Mallén y A. Verdejo. *Estructuras de datos y métodos algorítmicos: 213 ejercicios resueltos*. Segunda edición, Garceta, 2013.
  Capítulo 12

Método voraz

Las características generales de los algoritmos voraces son las siguientes:

- Para construir la solución se dispone de un conjunto de candidatos. A medida que avanza el algoritmo se van formando dos conjuntos: el conjunto de candidatos seleccionados (formarán parte de la solución), y el conjunto de candidatos rechazados definitivamente.
- Existe una función de selección que indica cuál es el candidato más prometedor de entre los aún no considerados.
- Existe un test de factibilidad que comprueba si un candidato es compatible con la solución parcial construida hasta el momento.
- Existe un test de solución que determina si una solución parcial forma una solución “completa”.
- Con frecuencia, se trata de problemas de optimización, es decir, se tiene que obtener una solución óptima según una función objetivo que asocia un valor a cada solución.

Método voraz

- El funcionamiento general consiste en añadir a los seleccionados el candidato devuelto por la función de selección si así se sigue cumpliendo el test de factibilidad. Si no, rechazarlo.

Método voraz

- El funcionamiento general consiste en añadir a los seleccionados el candidato devuelto por la función de selección si así se sigue cumpliendo el test de factibilidad. Si no, rechazarlo.

fun `voraz`$(\mathit{datos} : \mathit{conjunto})$ **dev** $S : \mathit{conjunto}$
var $\mathit{candidatos} : \mathit{conjunto}$
  $S := \emptyset$ { en S se va construyendo la solución }
  $\mathit{candidatos} := \mathit{datos}$
  mientras $\mathit{candidatos} \neq \emptyset \wedge \neg$`es-solución?`$(S)$ **hacer**
    $x :=$ `seleccionar`$(\mathit{candidatos})$
    $\mathit{candidatos} := \mathit{candidatos} - \{x\}$
    si `es-factible?`$(S \cup \{x\})$ **entonces** $S := S \cup \{x\}$ **fsi**
  fmientras
ffun

Demostración de corrección

- Lo fundamental es que cada candidato se trata una sola vez, es decir, no hay posibilidad de replantearse una decisión tomada.
- Los algoritmos son sencillos y eficientes.

Demostración de corrección

- Lo fundamental es que cada candidato se trata una sola vez, es decir, no hay posibilidad de replantearse una decisión tomada.
- Los algoritmos son sencillos y eficientes.
- Importante: demostración de corrección.
- Método de reducción de diferencias: comparar una solución óptima con la solución obtenida por el algoritmo voraz. Si ambas soluciones no son iguales, se va transformando la solución óptima de partida de forma que continúe siendo óptima, pero siendo más parecida a la del algoritmo voraz.

Maximizar número de programas

Consideremos n programas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que debemos almacenar en un disco. El programa P_i requiere s_i megabytes de espacio de disco, y la capacidad del disco es D megabytes. Queremos maximizar el *número de programas* almacenados en el disco.

Maximizar número de programas

Consideremos n programas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que debemos almacenar en un disco. El programa P_i requiere s_i megabytes de espacio de disco, y la capacidad del disco es D megabytes. Queremos maximizar el *número de programas* almacenados en el disco.

Supondremos que $D < \sum_{i=1}^{n} s_i$. Consideramos los programas de menor a mayor tamaño: si el programa cabe en el espacio de disco todavía no utilizado, grabar el programa y pasar al siguiente; y si el programa no cabe, descartarlo y terminar.

Maximizar número de programas

Consideremos n programas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que debemos almacenar en un disco. El programa P_i requiere s_i megabytes de espacio de disco, y la capacidad del disco es D megabytes. Queremos maximizar el *número de programas* almacenados en el disco.

Supondremos que $D < \sum_{i=1}^{n} s_i$. Consideramos los programas de menor a mayor tamaño: si el programa cabe en el espacio de disco todavía no utilizado, grabar el programa y pasar al siguiente; y si el programa no cabe, descartarlo y terminar.

```
// S[0] ⩽ S[1] ⩽ ... ⩽ S[n − 1] ∧ D < Σ_{i=0}^{n−1} S[i]
vector<bool> programas_en_disco(vector<int> const& S, int D) {
    vector<bool> solucion(S.size(), false);
    int acumula = 0;
    for (int i = 0; acumula + S[i] <= D; ++i) {
        solucion[i] = true;
        acumula += S[i];
    }
    return solucion;
}
```

Maximizar número de programas, demostración de corrección

Demostramos que la estrategia conduce siempre a una solución óptima, comparando la solución devuelta por la estrategia voraz, X, con otra solución óptima, Y.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

Demostramos que la estrategia conduce siempre a una solución óptima, comparando la solución devuelta por la estrategia voraz, X, con otra solución óptima, Y.

En una solución cualquiera $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_i = 0$ indica que el programa P_i no se coge, mientras que $z_i = 1$ indica que P_i forma parte de la solución. El número de programas seleccionados es $\sum_{i=1}^{n} z_i$.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

Demostramos que la estrategia conduce siempre a una solución óptima, comparando la solución devuelta por la estrategia voraz, X, con otra solución óptima, Y.

En una solución cualquiera $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_i = 0$ indica que el programa P_i no se coge, mientras que $z_i = 1$ indica que P_i forma parte de la solución. El número de programas seleccionados es $\sum_{i=1}^{n} z_i$.

La estrategia voraz propuesta escoge solo los k primeros programas. Entonces, en la solución X se tiene $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant k : x_i = 1$ y $\forall i : k < i \leqslant n : x_i = 0$.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

Demostramos que la estrategia conduce siempre a una solución óptima, comparando la solución devuelta por la estrategia voraz, X, con otra solución óptima, Y.

En una solución cualquiera $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_i = 0$ indica que el programa P_i no se coge, mientras que $z_i = 1$ indica que P_i forma parte de la solución. El número de programas seleccionados es $\sum_{i=1}^{n} z_i$.

La estrategia voraz propuesta escoge solo los k primeros programas. Entonces, en la solución X se tiene $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant k : x_i = 1$ y $\forall i : k < i \leqslant n : x_i = 0$.

Empezando a comparar (de izquierda a derecha) con Y, sea $j \geqslant 1$ la primera posición donde $x_j \neq y_j$.

Se tiene la siguiente situación:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_k & x_{k+1} & \ldots & x_l & \ldots & x_n \\
= & = & \ldots & \neq & & & & & \neq & & \\
y_1 & y_2 & \ldots & y_j & \ldots & y_k & y_{k+1} & \ldots & y_l & \ldots & y_n
\end{array}
$$

Maximizar número de programas, demostración de corrección

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots & x_l & \dots & x_n \\
= & = & \dots & \neq & & & & & \neq & & \\
y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_k & y_{k+1} & \dots & y_l & \dots & y_n
\end{array}$$

Si $y_j \neq x_j = 1$, tenemos $y_j = 0$, y $\sum_{i=1}^{j} y_i = j - 1 < j = \sum_{i=1}^{j} x_i$.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots & x_l & \dots & x_n \\ = & = & \dots & \neq & & & & & \neq & & \\ y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_k & y_{k+1} & \dots & y_l & \dots & y_n \end{array}$$

Si $y_j \neq x_j = 1$, tenemos $y_j = 0$, y $\sum_{i=1}^{j} y_i = j - 1 < j = \sum_{i=1}^{j} x_i$.
Como Y es óptima, $\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Existe $l > k \geqslant j$ tal que $y_l = 1$.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots & x_l & \dots & x_n \\
= & = & \dots & \neq & & & & & \neq & & \\
y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_k & y_{k+1} & \dots & y_l & \dots & y_n
\end{array}
$$

Si $y_j \neq x_j = 1$, tenemos $y_j = 0$, y $\sum_{i=1}^{j} y_i = j - 1 < j = \sum_{i=1}^{j} x_i$.
Como Y es óptima, $\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Existe $l > k \geqslant j$ tal que $y_l = 1$.
Por la ordenación de los programas sabemos que $s_j \leqslant s_l$, es decir, que si P_l cabe en el disco, podemos poner en su lugar P_j sin sobrepasar la capacidad total.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots & x_l & \dots & x_n \\
= & = & \dots & \neq & & & & & \neq & & \\
y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_k & y_{k+1} & \dots & y_l & \dots & y_n
\end{array}
$$

Si $y_j \neq x_j = 1$, tenemos $y_j = 0$, y $\sum_{i=1}^{j} y_i = j - 1 < j = \sum_{i=1}^{j} x_i$.
Como Y es óptima, $\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Existe $l > k \geqslant j$ tal que $y_l = 1$.
Por la ordenación de los programas sabemos que $s_j \leqslant s_l$, es decir, que si P_l cabe en el disco, podemos poner en su lugar P_j sin sobrepasar la capacidad total.
Realizando este cambio en Y, obtenemos otra solución Y' en la cual $y'_j = 1 = x_j$, $y'_l = 0$ y para el resto $y'_i = y_i$. Esta nueva solución es más parecida a X, y tiene el mismo número de programas que Y, por lo que sigue siendo óptima.

Maximizar número de programas, demostración de corrección

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_k & x_{k+1} & \ldots & x_l & \ldots & x_n \\
= & = & \ldots & \neq & & & & & \neq & & \\
y_1 & y_2 & \ldots & y_j & \ldots & y_k & y_{k+1} & \ldots & y_l & \ldots & y_n
\end{array}$$

Si $y_j \neq x_j = 1$, tenemos $y_j = 0$, y $\sum_{i=1}^{j} y_i = j - 1 < j = \sum_{i=1}^{j} x_i$.
Como Y es óptima, $\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Existe $l > k \geqslant j$ tal que $y_l = 1$.
Por la ordenación de los programas sabemos que $s_j \leqslant s_l$, es decir, que si P_l cabe en el disco, podemos poner en su lugar P_j sin sobrepasar la capacidad total.
Realizando este cambio en Y, obtenemos otra solución Y' en la cual $y'_j = 1 = x_j, y'_l = 0$ y para el resto $y'_i = y_i$. Esta nueva solución es más parecida a X, y tiene el mismo número de programas que Y, por lo que sigue siendo óptima.
Repitiendo este proceso, podemos ir igualando los programas en la solución óptima a los de la solución voraz X, hasta alcanzar la posición k.

Ruta en carretera

Un viajante de comercio tiene que viajar en coche desde Valencia a Lisboa siguiendo una ruta preestablecida. Con el depósito lleno, su coche puede recorrer un máximo de M kilómetros.

El viajante dispone de un mapa de carreteras en el que figuran las distancias entre las gasolineras en su ruta, y desea utilizar esta información para, suponiendo que parte de Valencia con el depósito lleno, realizar en su recorrido un *número mínimo de paradas* para repostar combustible.

¿En qué gasolineras debe parar?

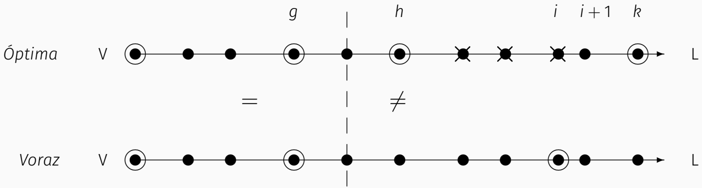
Ruta en carretera, estrategia voraz

- Suponemos las gasolineras de la ruta numeradas de 0 a n, siendo g_0 la correspondiente a Valencia y g_n la de Lisboa.
- Las distancias entre gasolineras adyacentes vienen dadas en un vector $D[0..n)$ de forma que $D[i] = distancia(g_i, g_{i+1})$.
- Suponemos que todas las distancias $D[i]$ entre gasolineras adyacentes en la ruta son menores o iguales que M, pues en otro caso el problema no tiene solución.

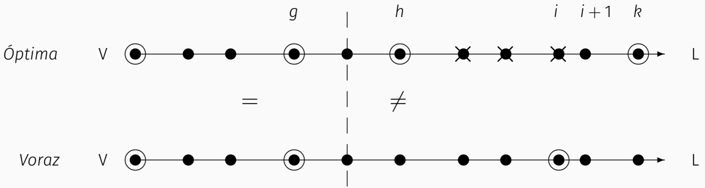
Ruta en carretera, estrategia voraz

- Suponemos las gasolineras de la ruta numeradas de 0 a n, siendo g_0 la correspondiente a Valencia y g_n la de Lisboa.
- Las distancias entre gasolineras adyacentes vienen dadas en un vector $D[0..n)$ de forma que $D[i] = distancia(g_i, g_{i+1})$.
- Suponemos que todas las distancias $D[i]$ entre gasolineras adyacentes en la ruta son menores o iguales que M, pues en otro caso el problema no tiene solución.
- La estrategia voraz consiste en no parar mientras no haga falta; es decir, al llegar a cada gasolinera, si hay gasolina suficiente en el depósito para llegar hasta la siguiente, se continúa, y si no, se para y se llena el depósito.

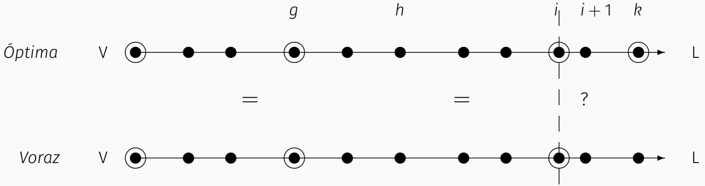
Demostración de la optimalidad por reducción de diferencias



Demostración de la optimalidad por reducción de diferencias



se transforma en



Implementación

```
int gasolineras(vector<int> const& D, int M, vector<bool> & G) {
    int N = D.size();
    G[0] = true; // sale con el depósito lleno
    int paradas = 0;
    int km = D[0]; // kilómetros andados desde la última parada
    for (int i = 1; i < N; ++i) { // estamos en g_i
        if (km + D[i] <= M) {
            G[i] = false;  // no paramos
        } else {
            G[i] = true;   // hay que parar
            ++paradas;
            km = 0;
        }
        km += D[i];  // seguimos hasta g_{i+1}
    }
    return paradas;
}
```

Tareas con plazo y beneficio

El tío Facundo posee una serie de huertas, cada una con un tipo diferente de árboles frutales. Las frutas ya han madurado y es hora de recolectarlas. La recolección de una huerta exige un día completo.

El tío Facundo conoce, para cada una de las huertas, el beneficio que obtendría por la venta de lo recolectado. También sabe los días que tardan en pudrirse los frutos de cada huerta.

Queremos decidir qué debe recolectarse y cuándo debe hacerse, para maximizar el beneficio total obtenido.

Tareas con plazo y beneficio, estrategia voraz

- Cada una de las n huertas lleva asociado un beneficio positivo b_i que solo podrá contabilizarse si la huerta es recolectada sin superar el plazo correspondiente p_i.

Tareas con plazo y beneficio, estrategia voraz

- Cada una de las n huertas lleva asociado un beneficio positivo b_i que solo podrá contabilizarse si la huerta es recolectada sin superar el plazo correspondiente p_i.
- Un conjunto de huertas es factible si existe alguna secuencia de recolección admisible que permita recolectar todas las huertas del conjunto dentro de sus respectivos plazos.
- Una permutación $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de las huertas de un conjunto es admisible si

$$\forall j : 1 \leqslant j \leqslant k : p_{i_j} \geqslant j$$

(el plazo correspondiente es posterior al momento en que se recolecta).

Tareas con plazo y beneficio, estrategia voraz

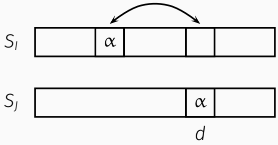
- Cada una de las n huertas lleva asociado un beneficio positivo b_i que solo podrá contabilizarse si la huerta es recolectada sin superar el plazo correspondiente p_i.
- Un conjunto de huertas es factible si existe alguna secuencia de recolección admisible que permita recolectar todas las huertas del conjunto dentro de sus respectivos plazos.
- Una permutación $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de las huertas de un conjunto es admisible si

  $$\forall j : 1 \leqslant j \leqslant k : p_{i_j} \geqslant j$$

  (el plazo correspondiente es posterior al momento en que se recolecta).
- La estrategia voraz consiste en ir seleccionando las huertas de forma que, en cada etapa, se escoge la huerta aún no considerada con mayor beneficio, con la condición de que el subconjunto formado siga siendo *factible*.

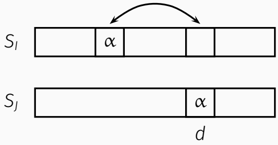
Demostración de la optimalidad por reducción de diferencias

Llamamos I a la solución del algoritmo y J a una solución óptima.
Sean S_I y S_J secuencias admisibles de las huertas de los subconjuntos I y J.
Primero transformamos S_I y S_J de tal forma que las huertas comunes se recolecten en los mismos días.

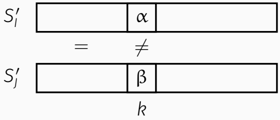


Demostración de la optimalidad por reducción de diferencias

Llamamos I a la solución del algoritmo y J a una solución óptima.
Sean S_I y S_J secuencias admisibles de las huertas de los subconjuntos I y J.
Primero transformamos S_I y S_J de tal forma que las huertas comunes se recolecten en los mismos días.



Comparemos ahora las secuencias S_I' y S_J'



- $b_\alpha > b_\beta$ imposible, mejoraríamos J.
- $b_\alpha < b_\beta$ imposible, el algoritmo habría considerado antes β que α.
- $b_\alpha = b_\beta$. Se puede cambiar β por α en J.

Comprobación de la factibilidad, primera posibilidad

Para determinar si un conjunto de huertas es factible, basta con encontrar una secuencia de recolección admisible.
Es suficiente comprobar la secuencia que ordena las huertas correspondientes por plazos crecientes.

Comprobación de la factibilidad, primera posibilidad

Para determinar si un conjunto de huertas es factible, basta con encontrar una secuencia de recolección admisible.
Es suficiente comprobar la secuencia que ordena las huertas correspondientes por plazos crecientes.

Lema Un conjunto H de huertas es factible si y solo si la secuencia de las huertas de H ordenadas de forma creciente según plazo es admisible.

Demostración: La implicación hacia la izquierda es trivial, así que nos limitamos a demostrar la implicación hacia la derecha, lo que se hará por contrarrecíproco. Sea $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ con $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_k$, tal que la secuencia $h_1, h_2, \ldots, h_k$ no es admisible, es decir, existe alguna huerta $h_r, r \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $p_r < r$. Pero entonces se cumple que

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_{r-1} \leqslant p_r \leqslant r - 1,$$

lo que muestra que hay r huertas cuyos plazos son menores o iguales que $r - 1$, y por tanto es imposible recolectar todas las huertas dentro de su plazo, por lo que se concluye que el conjunto H no es factible.

Comprobación de la factibilidad, segunda posibilidad

Lema Un conjunto H de huertas es factible si y solo si la secuencia de las huertas de H donde estas se recolectan "lo más tarde posible", es admisible.

Comprobación de la factibilidad, segunda posibilidad

Lema Un conjunto H de huertas es factible si y solo si la secuencia de las huertas de H donde estas se recolectan "lo más tarde posible", es admisible.

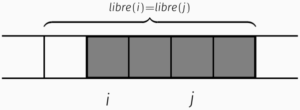
Demostración: Comenzamos formalizando el concepto de "lo más tarde posible", que se refiere a que para cada huerta se elige el día libre más tardío y que no se pase de plazo; es decir, que para cada huerta h_i el día elegido será

$$d(i) = \max\{\, d \mid 1 \leqslant d \leqslant \min(n, p_i) \ \wedge\ (\forall j : 1 \leqslant j < i : d \neq d(j))\,\}.$$

Como en el lema anterior, la implicación hacia la izquierda es trivial y demostraremos la implicación hacia la derecha por contrarrecíproco. Supongamos que existe alguna huerta en H tal que todos los días antes de que expire su plazo p están ocupados. Para $l = \min(n, p)$ sea $r > l$ el primer día libre; entonces en H hay al menos r huertas ($r - 1$ puestas más la que se está intentando colocar) con plazo menor que r, siendo por tanto imposible recolectar todas las huertas de H dentro de su plazo, por lo que el conjunto H no es factible.

Tareas con plazo y beneficio, implementación

Para implementar este test de factibilidad definimos una relación de equivalencia sobre los días de recolección.
Si definimos $libre(i) = \text{máx}\{ d \leqslant i \mid d \text{ libre} \}$, es decir, el primer predecesor libre de i, entonces i y j estarán en la misma clase si y solo si $libre(i) = libre(j)$.



Para que $libre(i)$ esté definido incluso si todos los días están ocupados, se considera también el día 0, que permanecerá siempre libre.
La idea es que cada huerta h_i debería recolectarse en el día $libre(p_i)$, porque representa el último día libre que respeta su plazo.

Tareas con plazo y beneficio, implementación

$libre(i)$ va cambiando a medida que se va planificando la recolección de las huertas.

Inicialmente, como no se ha planificado ninguna recolección, se tiene $\forall i : 0 \leqslant i \leqslant n : libre(i) = i$ (cada día está en una clase de equivalencia diferente).

Si recolectamos la huerta h_i en el día $libre(p_i)$ (siempre que este no sea 0), al ocupar dicho día hay que *unir* la clase de equivalencia a la que pertenece $libre(p_i)$ con la correspondiente al día anterior.

Tareas con plazo y beneficio, implementación

```
struct Huerta { int benef, plazo, id; };
bool operator>(Huerta const& a, Huerta const& b) {
    return a.benef > b.benef;
}

bool resuelveCaso() { // O(N log N), N es el número de huertas
    int N;
    cin >> N;
    if (N == 0) return false;

    vector<Huerta> huertas(N);
    for (int i = 0; i < N; ++i) {
        cin >> huertas[i].benef >> huertas[i].plazo;
        huertas[i].id = i + 1;
    }
    sort(huertas.begin(), huertas.end(), greater<Huerta>());

    vector<int> seleccion = resolver(huertas);
    for (int i = 0; i < seleccion.size(); ++i)
        cout << (i > 0 ? " " : "") << seleccion[i];
    cout << '\n';
    return true;
}
```

Tareas con plazo y beneficio, implementación

```
// las huertas están ordenadas de mayor a menor beneficio
vector<int> resolver(vector<Huerta> const& huertas) {
   int N = huertas.size();
   vector<int> libre(N+1);
   vector<int> plan(N+1); // 0 es que no está usado

   ConjuntosDisjuntos particion(N+1);

   for (int i = 0; i <= N; ++i) {
      libre[i] = i;
   }

   // recorrer las huertas de mayor a menor beneficio
   for (int i = 0; i < N; ++i) {
      int c1 = particion.buscar(min(N, huertas[i].plazo));
      int m = libre[c1];
      if (m != 0) { // podemos colocar la huerta i
         plan[m] = huertas[i].id;
         int c2 = particion.buscar(m-1);
         particion.unir(c1, c2);
         libre[c1] = libre[c2];
      }
   }
```

Tareas con plazo y beneficio, implementación

```
   // compactamos la solución
   vector<int> sol;
   for (int i = 1; i <= N; ++i) {
      if (plan[i] > 0)
         sol.push_back(plan[i]);
   }
   return sol;
}
```

Problema de la mochila real

Cuando Alí-Babá consigue por fin entrar en la Cueva de los Cuarenta Ladrones encuentra allí gran cantidad de objetos muy valiosos. A pesar de su pobreza, Alí-Babá conoce muy bien el peso y valor de cada uno de los objetos en la cueva.

Debido a los peligros que tiene que afrontar en su camino de vuelta, solo puede llevar consigo aquellas riquezas que quepan en su pequeña mochila, que soporta un peso máximo conocido.

Suponiendo que los objetos son fraccionables, determinar qué objetos debe elegir Alí-Babá para maximizar el valor total de lo que pueda llevarse en su mochila.

Problema de la mochila real

- Hay n objetos, cada uno con un peso $p_i > 0$ y un valor $v_i > 0$ para todo i entre 1 y n.
- La mochila soporta un peso total máximo $M > 0$.

Problema de la mochila real

- Hay n objetos, cada uno con un peso $p_i > 0$ y un valor $v_i > 0$ para todo i entre 1 y n.
- La mochila soporta un peso total máximo $M > 0$.
- El problema consiste en maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

con la restricción

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant M,$$

donde x_i es la fracción del objeto i tomada, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$.

Problema de la mochila real

- Hay n objetos, cada uno con un peso $p_i > 0$ y un valor $v_i > 0$ para todo i entre 1 y n.
- La mochila soporta un peso total máximo $M > 0$.
- El problema consiste en maximizar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

  con la restricción

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant M,$$

  donde x_i es la fracción del objeto i tomada, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$.
- Ya que el caso en el que todos los objetos caben juntos en la mochila no tiene mucho interés, consideraremos el caso en el que $\sum_{i=1}^{n} p_i > M$.
- En ese caso la solución óptima deberá llenar la mochila por completo: $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M$.

Problema de la mochila real, ejemplo

$M = 100$, $n = 5$

	1	2	3	4	5
p_i	10	20	30	40	50
v_i	20	30	66	40	60

Seleccionar	x_i					valor
máx v_i	0	0	1	0,5	1	146

Problema de la mochila real, ejemplo

$M = 100$, $n = 5$

	1	2	3	4	5
p_i	10	20	30	40	50
v_i	20	30	66	40	60

Seleccionar	x_i					valor
máx v_i	0	0	1	0,5	1	146
mín p_i	1	1	1	1	0	156

Problema de la mochila real, ejemplo

$M = 100$, $n = 5$

	1	2	3	4	5
p_i	10	20	30	40	50
v_i	20	30	66	40	60
$\frac{v_i}{p_i}$	2	1,5	2,2	1	1,2

Seleccionar	x_i					valor
máx v_i	0	0	1	0,5	1	146
mín p_i	1	1	1	1	0	156
máx $\frac{v_i}{p_i}$	1	1	1	0	0,8	164

Problema de la mochila real, demostración de optimalidad

Suponemos que los objetos están ordenados en forma decreciente respecto a su valor por unidad de peso:

$$\frac{v_1}{p_1} \geqslant \frac{v_2}{p_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{v_n}{p_n},$$

y sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la solución construida por el algoritmo voraz. Si todos los x_i son 1, la solución es claramente óptima. En caso contrario, sea j el menor índice tal que $x_j < 1$. Debido a como funciona el algoritmo, sabemos que

$$\begin{aligned} x_i &= 1 \qquad \text{si } i < j \\ 0 \leqslant x_j &< 1 \\ x_i &= 0 \qquad \text{si } i > j. \end{aligned}$$

Problema de la mochila real, demostración de optimalidad

Comparamos con una solución óptima $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Si no todos los objetos caben, podemos asumir que $\sum_{i=1}^{n} y_i p_i = M$.
Sea k la menor posición diferente.
Por como funciona el algoritmo, se debe cumplir que $k \leqslant j$ y por tanto $y_k < x_k$:

- $k < j$, entonces $x_k = 1$, y por tanto, $y_k < x_k$.
- $k = j$, entonces $y = 1$ para $1 \leqslant i < k$, por lo que $y_k > x_k$ implicaría $\sum_{i=1}^{n} y_i p_i > M$, lo que es imposible.
- $k > j$ es imposible porque si no $\sum_{i=1}^{n} y_i p_i > M$.

Problema de la mochila real, demostración de optimalidad

Modificamos la solución óptima *aumentando* y_k para hacerlo igual a x_k y *decrementando* tantos $y_{k+1}, \ldots, y_n$ como haga falta para hacer que la capacidad total usada sea M.
La nueva solución $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ cumple que $z_i = x_i$ para $1 \leqslant i \leqslant k$ y

$$\sum_{i=k+1}^{n} p_i(y_i - z_i) = p_k(z_k - y_k).$$

Y Z sigue siendo óptima:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} v_i z_i &= \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + v_k(z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^{n} v_i(y_i - z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + \frac{v_k}{p_k} p_k(z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{v_i}{p_i} p_i(y_i - z_i) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + \underbrace{\left(p_k(z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i(y_i - z_i) \right)}_{0} \frac{v_k}{p_k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i y_i.
\end{aligned}$$

Problema de la mochila real, implementación

```
void resolver(vector<Objeto> const& objetos, double M,
              vector<double> & sol, double & valor) {  // O(N log N)
    int N = objetos.size();
    vector<Densidad> D(N);
    for (int i = 0; i < N; ++i) {
        D[i].densidad = objetos[i].valor / objetos[i].peso;
        D[i].id = i;  // para saber a qué objeto corresponde
    }
    sort(D.begin(), D.end(), greater<Densidad>());

    double peso = 0, valor = 0;
    int i;
    for (i = 0; i < N && peso + objetos[D[i].id].peso <= M; ++i) {
        sol[D[i].id] = 1;  // el objeto D[i].id cabe completo
        peso += objetos[D[i].id].peso;
        valor += objetos[D[i].id].valor;
    }
    if (i < N) { // partir el objeto D[i].id
        sol[D[i].id] = (M - peso) / objetos[D[i].id].peso;
        valor += sol[D[i].id] * objetos[D[i].id].valor;
    }
}
```

Problemas

- 50 - Agujeros en la mangera
- 51 - Esquiando en Alaska
- 52 - Los Broncos de Boston
- 53 - Carreras de coches
- 54 - ¡En primera línea de playa!
- 55 - Maratón de cine de terror
- 56 - Semana de la Informática
- 57 - El alienígena infiltrado