

B^AS_TX: curso básico de L^AT_EX

Actividad formativa FDI-UCM

Oficina de Software Libre y Tecnologías Abiertas



OFICINA DE **SOFTWARE LIBRE**

VICERRECTORADO DE TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

UNIVERSIDAD **COMPLUTENSE** MADRID

Tema 3

-Modificadores 2 y matemáticas-

Conceptos que se aprenderán

En este tema de introducción se aprenderán los siguientes conceptos:

- Poner una página en landscape.
- Paquete multicols.
- Matemáticas MMI.
- Licenciar documentos.
- Paquete fancyhdr.

Índice

	Página
1. Poner una página en landscape	3
2. Paquete multcols	3
2.1. Separación de columnas	4
2.2. Columnas des-balanceadas	5
2.3. Delimitando con líneas verticales	6
3. Matemáticas MMI	7
3.1. Modo matemático	7
3.2. Tablas de símbolos básicos	9
3.3. Fórmulas simples	11
3.4. Estructuras matemáticas: límites, sumatorios	13
3.5. Estructuras matemáticas: fracciones y raíces	15
3.6. Estructuras matemáticas: integrales	18
3.7. Estructuras matemáticas: matrices, determinantes	19
3.8. Estructuras matemáticas: textificación	21
3.9. Estructuras matemáticas: Sistemas de ecuaciones	23
4. Licenciar documentos	25
5. Paquete fancyhdr	26

1. Poner una página en landscape

Para poner una página en landscape primero, definiremos en el preámbulo el paquete `landscape`, y posteriormente, ya podremos utilizar el entorno.

Listing 1: Código landscape

```
1 \usepackage{landscape}
2
3 \begin{landscape}
4
5 \end{landscape}
```

2. Paquete multicol

Otra forma de poner columnas es mediante el paquete `multicol`. Una vez que lo nombramos en el preámbulo creamos el entorno `multicol`, para ello abrimos el entorno con `\begin{multicol}{número columnas}` y cerramos el entorno con `\end{multicol}`. Este entorno tiene las siguientes características:

- Número de columnas.
- **Texto de título:** Se puede colocar entre corchetes.

Vamos a poner un ejemplo para ilustrar este apartado:

Ejemplo multicol

David Pacios

14 de febrero de 2019

1. Ejemplo sección

Este texto se va a colocar en dos co- Se puede distribuir de muchas formas.
lumnas.

Figura 1: Ejemplo de texto en multicol

Listing 2: Código paquete multicol

```
1 \documentclass{article}
2 \usepackage[utf8]{inputenc}
3 \usepackage[spanish]{babel}
4 \usepackage{multicol}
```

```

5 \title{Ejemplo multicol}
6 \author{David Pacios}
7 \begin{document}
8 \maketitle
9 \section{Ejemplo sección}
10 \begin{multicol}{2}
11 \noindent
12 Este texto se va a colocar en dos columnas.\\
13 Se puede distribuir de muchas formas.
14 \end{multicol}
15 \end{document}

```

2.1. Separación de columnas

Además de dar formato a las columnas, podemos darle una cierta separación con el comando `\columnsep` dentro del comando `\setlength` para determinar la separación y entre corchetes, ponemos la separación que queremos.

Para tenerlo más claro ponemos un ejemplo:

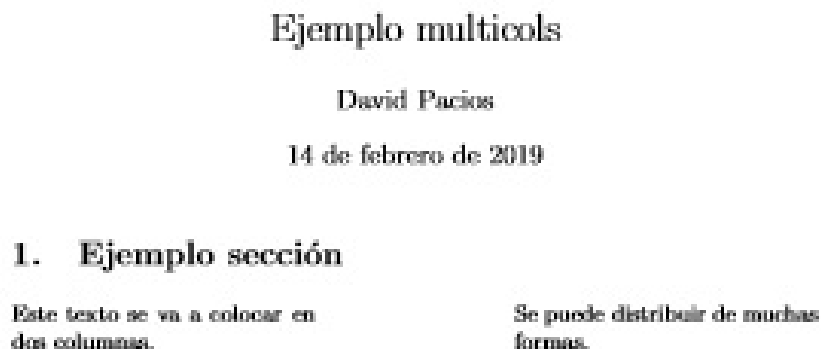


Figura 2: Ejemplo de texto en multicol con separación

Listing 3: Código paquete multicol con separación

```

1 \documentclass{article}
2 \usepackage[utf8]{inputenc}
3
4 \usepackage[spanish]{babel}
5 \usepackage{multicol}
6 \setlength{\columnsep}{3 cm}
7 \title{Ejemplo multicol}
8 \author{David Pacios}
9
10
11 \begin{document}

```

```

12 \maketitle
13 \section{Ejemplo sección}
14 \begin{multicols}{2}
15 \noindent
16 Este texto se va a colocar en dos columnas.\\
17 Se puede distribuir de muchas formas.
18 \end{multicols}
19 \end{document}

```

2.2. Columnas des-balanceadas

Cuando queremos quitar el formato estándar de distribución de texto utilizamos el `*`. Para tenerlo más claro vamos a poner un ejemplo:

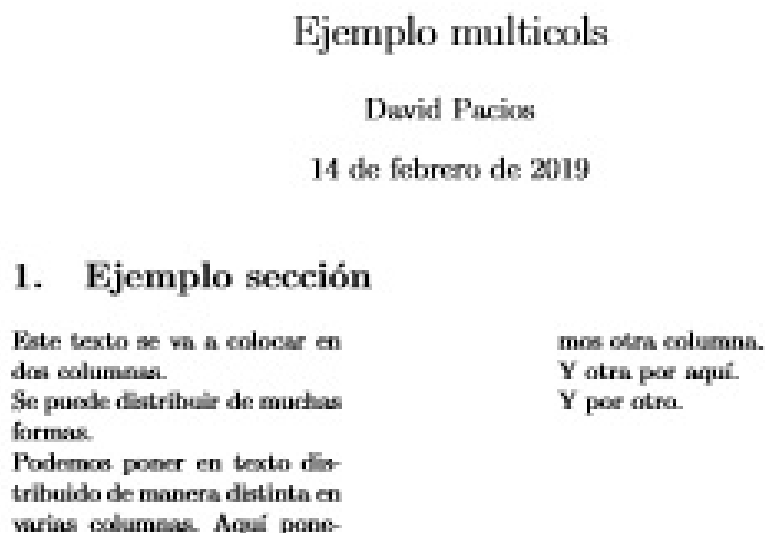


Figura 3: Ejemplo de multicols sin formato estándar

Listing 4: Código paquete multicols sin formato estándar

```

1 \documentclass{article}
2 \usepackage[utf8]{inputenc}
3
4 \usepackage[spanish]{babel}
5 \usepackage{multicol}
6 \setlength{\columnsep}{3 cm}
7 \title{Ejemplo multicols}
8 \author{David Pacios}

```

```

11 \begin{document}
12 \maketitle
13 \section{Ejemplo sección}
14
15 \begin{multicols*}{2}
16 \noindent
17 Este texto se va a colocar en dos columnas.\\
18 Se puede distribuir de muchas formas.\\
19 Podemos poner en texto distribuido de manera distinta en varias
    columnas.
20 \columnbreak
21 Aquí ponemos otra columna.\\
22 Y otra por aquí.\\
23 Y por otro.
24 \end{multicols*}
25 \end{document}

```

2.3. Delimitando con líneas verticales

Podemos colocar líneas verticales con colores para ello vamos a utilizar el comando `\def\columnseprulecolor{\color{color elegido}}`. Es importante definir el paquete `color` antes de añadirle el comando. Para ello, vamos a poner un ejemplo:

Ejemplo multicols

David Pacios

February 14, 2019

1 Ejemplo sección

Este texto se va a colocar en dos columnas.	Podemos poner en texto distribuido de manera distinta en varias columnas.	columna.
Se puede distribuir de muchas formas.	Aquí ponemos otra	Y otra por aquí.
		Y por otro.

Figura 4: Ejemplo de multicols con líneas verticales azules

Listing 5: Código paquete multicols con líneas verticales azules

```

1 \documentclass{article}
2 \usepackage[utf8]{inputenc}
3 \usepackage[english]{babel}
4 \usepackage{multicol}

```

```

5 \usepackage{color}
6
7 \setlength{\columnseprule}{1pt}
8 \def\columnseprulecolor{\color{blue}}
9
10 \title{Ejemplo multicol}
11 \author{David Pacios}
12
13 \begin{document}
14 \maketitle
15 \section{Ejemplo sección}
16 \begin{multicols}{3}
17 \noindent
18 Este texto se va a colocar en dos columnas.\\
19 Se puede distribuir de muchas formas.\\
20 Podemos poner en texto distribuido de manera distinta en varias
    columnas.
21 \columnbreak
22 Aquí ponemos otra columna.\\
23 Y otra por aquí.\\
24 Y por otro.
25 \end{multicols}
26 \end{document}

```

Por último, podemos definir el comando `\columnbreak`, que realiza una separación entre distintas columnas.

3. Matemáticas MMI

3.1. Modo matemático

Para entrar en el modo matemático es muy importante definir en el preámbulo el paquete `\usepackage{amsmath}`, ya que, sin este paquete no nos funcionará el modo matemático y nos dará error.

Una vez lo hayamos definido, nos permitirá utilizar todos los comandos para poder escribir nuestras fórmulas matemáticas. Seguidamente, vamos a listar todos los comandos que se pueden utilizar:

- `$`: Entrar y salir en el modo matemático en el modo texto. Es decir, que las fórmulas matemáticas están escritas dentro de un texto. Además de este comando, hay otro comando que se puede utilizar en el modo texto, que es el comando `\(\)`.
- `$$`: Entrar y salir del modo matemático resaltado, ya que, las funciones matemáticas están fuera del texto con un tamaño mayor. Además de este comando, hay otro comando que se puede utilizar para el modo de texto resaltado que es `\[\]`.

- Otro entorno que se puede utilizar para escribir las ecuaciones que es el [equation](#). Cuyos comandos son `\begin{equation}` y `\end{equation}`. De esta forma, también escribiremos nuestra fórmula de un modo resaltado, es decir, fuera del texto. Este modo nos permite enumerar nuestras ecuaciones, y en el caso de que no queramos siempre podemos añadirle el símbolo `*` al principio del comando.

Posteriormente, después de describir los comandos vamos a ver una serie de ejemplos para ver cómo se escriben las fórmulas:

La función de la recta pendiente es $y = mx + b$ tangente a la recta.

Listing 6: Ejemplo de función matemática con el texto

```
1 La funcion de la recta pendiente es $y=mx+b$ tangente a la recta.
```

La función de la recta pendiente es $y = mx + b$ tangente a la recta.

Listing 7: Ejemplo de función matemática con el texto resaltado

```
1 La funcion de la recta pendiente es \(\mathit{y=mx+b}\) tangente a la recta
.
```

La función de la recta pendiente es

$$y = mx + b$$

tangente a la recta.

Listing 8: Ejemplo de función matemática con el texto resaltado

```
1 La funcion de la recta pendiente es $$\mathit{y=mx+b}$$ tangente a la recta
.
```

La función de la recta tangente es

$$y = mx + b$$

es tangente a la recta.

Listing 9: Ejemplo de función matemática con el texto resaltado

```
1 La funcion de la recta tangente es
2 \[
3 \mathit{y=mx+b}
4 \]
5 es tangente a la recta.
```

La función de la recta tangente es:

$$y = mx + b$$

es tangente a la recta.

Listing 10: Ejemplo de función matemática con el entorno de la ecuación sin numerar

```

1 La funcion de la recta tangente es:
2 \begin{equation*}
3 y=mx+b
4 \end{equation*}
5 es tangente a la recta.
```

La función de la recta tangente es

$$y = mx + b \quad (1)$$

es tangente a la recta.

Listing 11: Ejemplo de función matemática con el entorno de la ecuación numerado

```

1 La funcion de la recta tangente es
2 \begin{equation}
3 y=mx+b
4 \end{equation}
5 es tangente a la recta.
```

Como podemos ver, con este último entorno, se puede numerar la ecuación y si hacemos un índice de ecuaciones, nos aparecerá en este índice.

3.2. Tablas de símbolos básicos

Para poder usar los símbolos en L^AT_EX es necesario escribir en el preámbulo el paquete `\usepackage{amssymb}`.

Una vez escrito, podemos escribir los siguientes símbolos:

α :\alpha	θ :\theta	\varnothing :\o	τ :\tau
β :\beta	ϑ :\vartheta	π :\pi	v :\upsilon
γ :\gamma	ι :\iota	ϖ :\varpi	ϕ :\phi
δ :\delta	κ :\kappa	ρ :\rho	φ :\varphi
ϵ :\epsilon	λ :\lambda	ϱ :\varrho	χ :\chi
ε :\varepsilon	μ :\mu	σ :\sigma	ψ :\psi
ζ :\zeta	ν :\nu	ς :\varsigma	ω :\omega
η :\eta	ξ :\xi	Σ :\Sigma	Ψ :\Psi
Γ :\Gamma	Λ :\Lambda	Υ :\Upsilon	Ω :\Omega
Δ :\Delta	Ξ :\Xi	Φ :\Phi	
Θ :\Theta	Π :\Pi		

Cuadro 1: Letras griegas

F :\digamma	\varkappa :\varkappa
---------------	------------------------

Cuadro 2: Letras griegas AMS

\leftarrow : <code>\leftarrow</code>	\longleftarrow : <code>\longleftarrow</code>	\uparrow : <code>\uparrow</code>
\Leftarrow : <code>\Leftarrow</code>	\Longleftarrow : <code>\Longleftarrow</code>	\Uparrow : <code>\Uparrow</code>
\rightarrow : <code>\rightarrow</code>	\longrightarrow : <code>\longrightarrow</code>	\downarrow : <code>\downarrow</code>
\Rightarrow : <code>\Rightarrow</code>	\Longrightarrow : <code>\Longrightarrow</code>	\Downarrow : <code>\Downarrow</code>
\leftrightarrow : <code>\leftrightarrow</code>	\longleftrightarrow : <code>\longleftrightarrow</code>	\updownarrow : <code>\updownarrow</code>
\Leftrightarrow : <code>\Leftrightarrow</code>	\Longleftrightarrow : <code>\Longleftrightarrow</code>	\Updownarrow : <code>\Updownarrow</code>
\mapsto : <code>\mapsto</code>	\longmapsto : <code>\longmapsto</code>	\nearrow : <code>\nearrow</code>
\hookrightarrow : <code>\hookrightarrow</code>	\hookleftarrow : <code>\hookleftarrow</code>	\searrow : <code>\searrow</code>
\leftharpoonup : <code>\leftharpoonup</code>	\rightharpoonup : <code>\rightharpoonup</code>	\swarrow : <code>\swarrow</code>
\leftharpoondown : <code>\leftharpoondown</code>	\rightharpoondown : <code>\rightharpoondown</code>	\nwarrow : <code>\nwarrow</code>
\rightleftharpoons : <code>\rightleftharpoons</code>	\leadsto : <code>\leadsto</code>	\rightarrow : <code>\to</code>

Cuadro 3: Símbolos flechas

\dashrightarrow : <code>\dashrightarrow</code>	\dashleftarrow : <code>\dashleftarrow</code>
\leftrightsquigarrow : <code>\leftrightsquigarrow</code>	\rightleftarrows : <code>\rightleftarrows</code>
\Lleftarrow : <code>\Lleftarrow</code>	\twoheadleftarrow : <code>\twoheadleftarrow</code>
\leftarrowtail : <code>\leftarrowtail</code>	\looparrowleft : <code>\looparrowleft</code>
\leftrightharpoons : <code>\leftrightharpoons</code>	\curvearrowleft : <code>\curvearrowleft</code>
\circlearrowleft : <code>\circlearrowleft</code>	\Lsh : <code>\Lsh</code>
\upuparrows : <code>\upuparrows</code>	\upharpoonleft : <code>\upharpoonleft</code>
\downharpoonleft : <code>\downharpoonleft</code>	\multimap : <code>\multimap</code>
\leftrightsquigarrow : <code>\leftrightsquigarrow</code>	\rightrightarrows : <code>\rightrightarrows</code>
\rightleftarrows : <code>\rightleftarrows</code>	\twoheadrightarrows : <code>\twoheadrightarrows</code>
\rightarrowtail : <code>\rightarrowtail</code>	\looparrowright : <code>\looparrowright</code>
\rightleftharpoons : <code>\rightleftharpoons</code>	\curvearrowright : <code>\curvearrowright</code>
\circlearrowright : <code>\circlearrowright</code>	\Rsh : <code>\Rsh</code>
\downdownarrows : <code>\downdownarrows</code>	\upharpoonright : <code>\upharpoonright</code>
\downharpoonright : <code>\downharpoonright</code>	\rightsquigarrow : <code>\rightsquigarrow</code>

Cuadro 4: Flechas AMS

\nleftarrow : <code>\nleftarrow</code>	\nrightarrow : <code>\nrightarrow</code>	\nLeftarrow : <code>\nLeftarrow</code>
\nRightarrow : <code>\nRightarrow</code>	\nleftrightarrow : <code>\nleftrightarrow</code>	\nLeftrightarrow : <code>\nLeftrightarrow</code>

Cuadro 5: Flechas negación AMS

\pm : <code>\pm</code>	\cap : <code>\cap</code>	\diamond : <code>\diamond</code>	\oplus : <code>\oplus</code>
\mp : <code>\mp</code>	\cup : <code>\cup</code>	\triangleup : <code>\bigtriangleup</code>	\ominus : <code>\ominus</code>
\times : <code>\times</code>	\uplus : <code>\uplus</code>	\triangledown : <code>\bigtriangledown</code>	\otimes : <code>\otimes</code>
\div : <code>\div</code>	\sqcap : <code>\sqcap</code>	\triangleleft : <code>\triangleleft</code>	\oslash : <code>\oslash</code>
\ast : <code>\ast</code>	\sqcup : <code>\sqcup</code>	\triangleright : <code>\triangleright</code>	\odot : <code>\odot</code>
\star : <code>\star</code>	\vee : <code>\vee</code>	\triangleleft : <code>\lhd</code>	\bigcirc : <code>\bigcirc</code>
\circ : <code>\circ</code>	\wedge : <code>\wedge</code>	\triangleright : <code>\rhd</code>	\dagger : <code>\dagger</code>
\bullet : <code>\bullet</code>	\setminus : <code>\setminus</code>	\triangleleft : <code>\unlhd</code>	\ddagger : <code>\ddagger</code>
\cdot : <code>\cdot</code>	\wr : <code>\wr</code>	\triangleleft : <code>\unrhd</code>	\amalg : <code>\amalg</code>

Cuadro 6: Operadores binarios

\sum : <code>\sum</code>	\bigcap : <code>\bigcap</code>	\bigodot : <code>\bigodot</code>
\prod : <code>\prod</code>	\bigcup : <code>\bigcup</code>	\bigotimes : <code>\bigotimes</code>
\coprod : <code>\coprod</code>	\bigsqcup : <code>\bigsqcup</code>	\bigoplus : <code>\bigoplus</code>
\int : <code>\int</code>	\bigvee : <code>\bigvee</code>	\biguplus : <code>\biguplus</code>
\oint : <code>\oint</code>	\bigwedge : <code>\bigwedge</code>	∞ : <code>\infty</code>

Cuadro 7: Operadores de tamaño variable

\leq : <code>\leq</code>	\geq : <code>\geq</code>	\equiv : <code>\equiv</code>	\models : <code>\models</code>
\prec : <code>\prec</code>	\succ : <code>\succ</code>	\sim : <code>\sim</code>	\perp : <code>\perp</code>
\preceq : <code>\preceq</code>	\succeq : <code>\succeq</code>	\simeq : <code>\simeq</code>	\mid : <code>\mid</code>
\ll : <code>\ll</code>	\gg : <code>\gg</code>	\asymp : <code>\asymp</code>	\parallel : <code>\parallel</code>
\subset : <code>\subset</code>	\supset : <code>\supset</code>	\approx : <code>\approx</code>	\bowtie : <code>\bowtie</code>
\subseteq : <code>\subseteq</code>	\supseteq : <code>\supseteq</code>	\cong : <code>\cong</code>	\Join : <code>\Join</code>
\sqsubset : <code>\sqsubset</code>	\sqsupset : <code>\sqsupset</code>	\neq : <code>\neq</code>	\smile : <code>\smile</code>
\sqsubseteq : <code>\sqsubseteq</code>	\sqsupseteq : <code>\sqsupseteq</code>	\doteq : <code>\doteq</code>	\frown : <code>\frown</code>
\in : <code>\in</code>	\ni : <code>\ni</code>	\propto : <code>\propto</code>	$=:=$
\vdash : <code>\vdash</code>	\dashv : <code>\dashv</code>	$<:<$	$>:>$
$::$	\cdot : <code>\cdot</code>		

Cuadro 8: Operadores de relación

$,$	$;$	$:$: <code>\colon</code>	\cdot : <code>\ldotp</code>	\cdot : <code>\cdotp</code>
-----	-----	---------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Cuadro 9: Signos de puntuación

\sqrt{x} : <code>\sqrt{x}</code>	$\sqrt[y]{x}$: <code>\sqrt[y]{x}</code>
------------------------------------	--

Cuadro 10: Otros símbolos

Hay más símbolos de los que se han explicado arriba, si queréis buscar más sólo tenéis que buscarlos en cualquier página web especializada en L^AT_EX como ShareL^AT_EX y Overleaf.

3.3. Fórmulas simples

Ahora vamos a explicar cómo poner unas fórmulas simples, que son aquellas que tienen multiplicaciones y divisiones. Además de estas fórmulas simples, vamos a ver cómo elevar algún número y cómo poner los subíndices.

Primero, vamos a poner una fórmula simple, como por ejemplo:

$$3 \times 2 = 6$$

$$10 \div 2 = 5$$

Listing 12: Ejemplo del código de fórmulas simples

¹ `\usepackage{amsmath}`, definir antes de utilizar cualquier formula

```

2 \[
3 3\times 2=6
4 \]
5 \[
6 10\div 2=5
7 \]

```

Con esta sencilla estructura, podemos crear unas fórmulas matemáticas que incluyan: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Seguidamente, vamos a explicar cómo se elevan los números y cómo se ponen los subíndices.

Para elevar los números vamos a utilizar el comando `^{\}`, y entre los corchetes ponemos el número que queremos elevar. Para verlo más claro, vamos a poner varios ejemplos:

$$5^2 = 25$$

Listing 13: Ejemplo del código de elevación de números

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 5^2=25
4 \]

```

$$x^xy = x^{xy}$$

Listing 14: Ejemplo del código de elevación de números

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 x^xy=x^{\{xy\}}
4 \]

```

Como podemos ver en este segundo ejemplo, es muy importante poner entre corchetes los números que tienen estar elevados, sino, si hay dos números que se quieren elevar, sólo se elevará el primero y no el segundo.

Y por último, vamos a ver cómo poner los subíndices, para realizarlo, vamos a utilizar el comando `_{\}`, y colocando entre los corchetes el número que queremos colocar el subíndice. Para verlo en acción vamos a poner varios ejemplos:

$$x_1 + x_2 = x_3$$

Listing 15: Ejemplo del código de subíndice de números

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 x_1+x_2=x_3
4 \]

```

$$y_{xyz} + x_{xyz} + z_{xyz} = 2xyz_x yz$$

Listing 16: Ejemplo del código de subíndice de números

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 y_{\{xyz\}}+x_{\{xyz\}}+z_{\{xyz\}}=2xyz_x yz
4 \]
```

Como podemos ver, al igual que al hacer las elevaciones, si hay más de un número que queremos llevar al subíndice los tendremos que colocar entre los corchetes, sino nos pasará como en el ejemplo, que no todos los números se coloquen en el subíndice.

3.4. Estructuras matemáticas: límites, sumatorios

En este capítulo vamos a explicar dos tipos de estructuras matemáticas: los límites y los sumatorios.

Primero vamos a empezar con los límites cuyo comando es `\lim_{x\to}`. En el subíndice vamos a colocar hacia donde tiene el límite y arriba colocaremos nuestro límite. Y su comportamiento es diferente dependiendo del modo matemático donde estemos. Para visualizarlo, vamos a poner diferentes ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Listing 17: Ejemplo del código de límites

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty
4 \]
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Ejemplo del código de límites

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{center}
3 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$
4 \end{center}
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Listing 18: Ejemplo del código de límites

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{equation*}
3 \lim_{x\rightarrow 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty
4 \end{equation*}
```

Como podemos ver, si estamos en distintos modos matemáticos, los límites no se van a comportar de la misma manera, ya que, cambia la posición del subíndice y el ancho del límite. Además, podemos ver que siguen una estructura muy sencilla que es muy fácil de seguir.

Seguidamente, vamos a explicar cómo se realizan los sumatorios. Para realizarlo, utilizamos el comando `\sum_{ }^{\ }`, y su tamaño depende del modo matemático que estemos utilizando. Para tenerlo más claro, vamos a poner varios ejemplos con todos los modos matemáticos para ver cómo se comporta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Listing 19: Ejemplo del código de sumatorio

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{center}
3 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}=1$
4 \end{center}
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Listing 20: Ejemplo del código de sumatorio

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}=1
4 \]
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Listing 21: Ejemplo del código de sumatorio

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{equation*}
3 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}=1
4 \end{equation*}
```

Como podemos observar, el sumatorio no se comporta igual en todos los modos matemáticos.

Por ejemplo, si queremos cambiar la posición de los subíndices o los superíndices en el

modo texto, vamos a utilizar el comando `\limits` a continuación de la operación. Vamos a aplicar este comando al ejemplo anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Listing 22: Ejemplo del código de sumatorio con los subíndices cambiados

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{center}
3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}=1$
4 \end{center}
```

Por el contrario, si queremos que los subíndices se hagan a un lado en el modo texto resaltado vamos a utilizar el comando `\nolimits`. Vamos a aplicar este comando nuevo al ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Listing 23: Ejemplo del código de sumatorio con los subíndices a un lado

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}=1
4 \]
```

Como podemos ver, los sumatorios no se comportan igual en todos los modos matemáticos, esto se puede aplicar igual a los operadores de tamaño variable y a funciones como son los límites.

Los operadores de tamaño variable se pueden encontrar en el capítulo de símbolos matemáticos.

3.5. Estructuras matemáticas: fracciones y raíces

En este capítulo vamos a explicar las fracciones y las raíces, tienen estructuras sencillas, pero si queremos añadirle algún elemento tipo paréntesis su estructura cambia y además, también cambian según el modo matemático en el que estemos.

Primero vamos a explicar las fracciones, las cuales podemos expresar por dos comandos, el comando `\frac{numerador}{denominador}` y `\dfrac{numerador}{denominador}`. La diferencia que hay entre estos dos comandos es que en el comando `\frac{numerador}{denominador}`, la fracción va estar expresada de una manera estándar y el comando `\dfrac{numerador}{denominador}` expresa la fracción en el modo `displaystyle`, este modo disminuye un poco el tamaño de la fracción respecto al anterior. Para tener más clara esta diferencia vamos a verlo con varios ejemplos:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

Listing 24: Ejemplo del código de los dos comandos de fracciones

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \dfrac{1}{2}x=\frac{1}{2}x
4 \]
```

Además de lo anterior, la fracción cambia de tamaño según el modo matemático en el que estemos, ya que, no se va a representar en el modo texto que en el resaltado. Para verlo de una manera más clara vamos a poner un ejemplo que contenga una fracción en estos dos modos:

La fracción $\frac{1}{2}x$ es igual a:

$$\frac{1}{2}x$$

Y esta última es de una envergadura similar a:

$$\frac{1}{2}x$$

Listing 25: Ejemplo del código de la fracción en los distintos entornos matemáticos

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 La fraccion $\frac{1}{2}x$ es igual a:
3 \[
4 \frac{1}{2}x
5 \]
6 Y esta ultima es de un envergadura similar a:
7 \begin{equation*}
8 \frac{1}{2}x
9 \end{equation*}
```

Como podemos observar, el tamaño de la fracción no es el mismo en los distintos modos. Este cambio de tamaño en los distintos modos es más fácil de ver con el comando `\frac{numerador}{denominador}` que con el comando `\dfrac{numerador}{denominador}`. Además de tener estos problemas de tamaño según el modo en el que estemos, también nos encontramos con otro problema, el tamaño de los paréntesis o corchetes no se corresponde con nuestra fracción. Para verlo vamos a poner un ejemplo:

$$(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

Listing 26: Ejemplo del código del tamaño desigual de los delimitadores

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 (\dfrac{1}{2}x)^2=\dfrac{1}{4}x^2
4 \]
```

Cuando nos encontremos con este problema, tenemos dos opciones:

- Escribir al inicio del delimitador el comando `\left` y al final del delimitador el comando `\right` para que se ajuste automáticamente al tamaño de la fracción.
- Por otro lado, podemos poner el comando `\Big` para hacer más grande el delimitador.

Para ver como actúan los dos comandos vamos a corregir el ejemplo anterior:

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

Listing 27: Ejemplo del código corrigiendo el tamaño de los delimitadores con left y right

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2=\dfrac{1}{4}x^2
4 \]
```

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

Listing 28: Ejemplo del código corrigiendo el tamaño de los delimitadores con Big

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \Big(\dfrac{1}{2}x\Big)^2=\dfrac{1}{4}x^2
4 \]
```

Lo que podemos observar de los ejemplos anteriores es que el comando `\Big` no se ajusta igual que los comandos `\left` y `\right` a la fracción, ya que con el comando no es capaz de ajustar su tamaño al de la fracción. El usuario tendrá que decir que tipo de comando `\Big` quiere ajustar a su fracción.

Por otro lado, tenemos las raíces que pueden ser expresadas por los comandos `\sqrt{}` o `\sqrt[{}]{}`. Depende de qué tipo de raíz estemos haciendo elegir un comando u otro, ya que, si vamos a hacer una raíz cuadrada elegiremos el comando `\sqrt{}` o si vamos a hacer una raíz cúbica o cuarta vamos a escoger el comando `\sqrt[{}]{}`. Para ver más clara la diferencia entre estos dos comandos vamos a realizar dos ejemplos:

$$\sqrt{2} \text{ es la raíz cuadrada de 2.}$$

$$\sqrt[4]{2} \text{ es la raíz cuarta de 2.}$$

Listing 29: Ejemplo del código de la diferencia entre los comandos de las raíces

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{center}
3 $\sqrt{2}$ es la raíz cuadrada de 2.\\
4 $\sqrt[4]{2}$ es la raíz cuarta de 2.
5 \end{center}
```

Como podemos ver, una vez sabemos el código de las fracciones y las raíces podemos expresarla de una manera muy sencilla.

3.6. Estructuras matemáticas: integrales

En este capítulo vamos a explicar cómo realizar todo tipo de integrales, desde las simples pasando por las integrales en dos puntos y terminando con las dobles.

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es el comando de la integral que es `\int`, ya sólo con esto seremos capaces de realizar una integral inmediata como la del siguiente ejemplo:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$$

Listing 30: Ejemplo del código de una integral inmediata

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \int x^6 dx=\dfrac{x^7}{7}+C
4 \]
```

Una vez tengamos claro como hacer una integral inmediata, podemos pasar a realizar una integral en dos puntos. Para ello vamos a utilizar el siguiente comando `\int_{P1}^{P2}` para delimitarla entre dos puntos. Para tenerlo más claro vamos a poner un ejemplo:

$$\int_0^2 (2x + 2 - x^2 - 2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Listing 31: Ejemplo del código de una integral en dos puntos

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \int_{0}^{2} (2x+2-x^2-2) dx=\left[x^2-\dfrac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}
   =4-\dfrac{8}{3}=\dfrac{4}{3}
4 \]
```

Seguidamente, si queremos realizar integrales dobles y triples utilizaremos comandos como `\iint` y `\iiint`. Para ver cómo serían estas integrales vamos a poner dos ejemplos:

$$\iint f(x) = \iiint g(x)$$

Listing 32: Ejemplo del código de las integrales dobles y triples

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \iint f(x)=\iiint g(x)
4 \]
```

Además, si queremos juntar una integral junto con algún elemento más como una fracción, no quedará de todo bien. Como lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

$$x = \frac{\int_x^y f(x)dx}{g(x)}$$

Listing 33: Ejemplo del código de la integral junto con una fracción

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 x=\dfrac{\int_{x}^y f(x) dx}{g(x)}
4 \]
```

Si queremos solucionar este problema, utilizaremos el comando `\displaystyle` para que la integral esté bien dispuesta en la fracción. Con esto, vamos a solucionar este ejemplo:

$$x = \frac{\int_x^y f(x) dx}{g(x)}$$

Listing 34: Ejemplo del código de la integral junto con una fracción con la integral bien dispuesta

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 x=\dfrac{\displaystyle \int_{x}^y f(x) dx}{g(x)}
4 \]
```

Y por último, si queremos realizar integrales cerradas simples. Y para representarlas utilizaremos el comando `\oint`. Para verlo más claro vamos a hacer un ejemplo:

$$\oint_x = \int x$$

Listing 35: Ejemplo del código de la integral cerrada simple

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \oint_x = \int x
4 \]
```

3.7. Estructuras matemáticas: matrices, determinantes

Para la realización de matrices y determinantes de matrices vamos a utilizar los comandos `\begin{array}{c}` y `\end{array}`, y entre estos comandos se encontrarán los delimitadores. Para ver cómo se forma una matriz vamos a realizar un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Listing 36: Ejemplo del código de una matriz

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
```

```

2 \[A=\left(\begin{array}{cc}
3   1   & 2 \\
4   2   & 1 \\
5 \end{array}\right)
6 \]
```

Las `{ccc}` representan las columnas que tiene la matriz, si tiene por ejemplo, dos columnas se representará como `{cc}`. Por tanto, las `c` representan el número de columnas.

Otra forma de realizar matrices es mediante el comando `\bmatrix`. Este comando nos permite poner matrices entre corchetes. De esta manera tenemos el siguiente ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Listing 37: Ejemplo del código de matriz entre corchetes

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[I=\begin{bmatrix}
3   1 & 0 & 0 \\
4   0 & 1 & 0 \\
5   0 & 0 & 1 \\
6 \end{bmatrix}
7 \]
```

Por otro lado, tenemos el comando `\pmatrix`, que nos permite poner a la matriz entre paréntesis. Para ver cómo se usa vamos a realizar un ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Listing 38: Ejemplo del código de matriz entre paréntesis

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[M=\begin{pmatrix}
3   1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
4   6 & 7 & 8 & 9 & 6 \\
5 \end{pmatrix}
6 \]
```

Dentro del entorno de la matriz encontramos dos elementos a destacar:

- `&`: Para separar las columnas de la matriz.
- `\\`: Para separar filas.

Además de poder realizar matrices, podemos realizar operaciones con matrices como multiplicaciones, divisiones... Además, podemos combinar distintos entornos de matrices como podemos ver en el siguiente ejemplo:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Listing 39: Ejemplo de código de operaciones entre matrices

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[A\cdot B=\begin{pmatrix}
3 1 & 0 \\
4 0 & 1 \\
5 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{cc}
6 2 & 0 \\
7 0 & 2 \\
8 \end{array}\right)=\begin{pmatrix}
9 2 & 0 \\
10 0 & 2 \\
11 \end{pmatrix}
12 \]
```

Por otro lado, para representar los determinantes de estas matrices cambiaremos los delimitadores a `\left|` y `\right|` para cambiar el paréntesis a este delimitador. Para ver el cambio de la matriz al determinante vamos a poner un ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Listing 40: Ejemplo del código de un determinante

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[|A|=\left|\begin{array}{cc}
3 1 & 2 \\
4 2 & 1 \\
5 \end{array}\right|
6 \]
```

3.8. Estructuras matemáticas: textificación

En este capítulo vamos a ver cómo poner texto en nuestras ecuaciones y otros tipos de construcciones que podemos realizar en el modo matemático.

Primero, para colocar texto en nuestro modo matemático usaremos el comando `\text{}`, si no ponemos este comando, el texto saldrá mal. Para verlo más claro vamos a poner un ejemplo:

$$y = mx + b \text{ es la ecuación de la recta}$$

Listing 41: Ejemplo del código de un texto dentro del modo matemático

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 y=mx+b\quad\text{es la ecuacion de la recta}
4 \]
```

Como podemos ver en el ejemplo, con el comando nuestro texto se coloca perfectamente y con su espaciado, como si estuviera fuera del modo matemático.

Por otro lado, vamos a ver ciertas construcciones que nos pueden ser útiles para el modo matemático. Entre estas construcciones destacan el `\overbrace{Texto o función}` que pone un brazo por encima del texto y `\underbrace{Texto o función}` colocará un brazo por debajo del texto o de la función. Además, si queremos poner algo por debajo del brazo sólo tendremos que añadirle el comando `_{}` o si queremos ponerle algo por arriba del brazo superior tendremos que añadirle el comando `^{}` . Para verlo más claro vamos a poner varios ejemplos:

$$\overbrace{x^2 + x}^{x(x+1)} = \underbrace{x^2 + x}_{x(x+1)}$$

Listing 42: Ejemplo del código de brazo superior y brazo inferior

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \overbrace{x^2+x}^{x(x+1)}=\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}
4 \]
```

Como podemos ver, con estos brazos podemos añadir lo que queramos abajo o arriba de la función o el texto. Además, podemos combinar estos brazos con textos. Vamos a realizar un ejemplo con esta combinación:

$$\overbrace{x^2 + x}^{x(x+1)} = \underbrace{x^2 + x}_{\text{Lo mismo que en el anterior}}$$

Listing 43: Ejemplo del código de brazo superior y brazo inferior con texto

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \overbrace{x^2+x}^{x(x+1)}=\underbrace{x^2+x}_{\text{Lo mismo que en el anterior}}
4 \]
```

Estas expresiones se pueden concatenar de la siguiente manera:`\underbrace{Texto}_\underbrace{Texto}`. Para tenerlo más claro vamos a poner un ejemplo en el que se concatenen varias de estas expresiones:

$$\overbrace{x^2 + x}^{x(x+1)}$$

$$\overbrace{\text{Texto cualquiera}}_{\text{Texto cualquiera}}$$

Listing 44: Ejemplo del código de brazo superior y brazo inferior con texto y concatenados

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[
3 \underbrace{x^2+x}_{\underbrace{x(x+1)}_{1}}
4 \]
5 \[
6 \overbrace{\text{Texto cualquiera}}^{\overbrace{\text{Texto
   cualquiera}}}
7 \]
```

Otra construcción que podemos ver es el vector que utilizará el comando `\Vec{}`, y entre los corchetes pondremos nuestro vector. Para verlo mejor vamos a poner un ejemplo:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x}_3$$

3.9. Estructuras matemáticas: Sistemas de ecuaciones

Hay varias formas de representar los sistemas de ecuaciones, una es mediante el entorno `array` y otra es mediante el entorno `eqnarray` donde las ecuaciones se nos representan respecto al `=`.

Primero vamos a ver cómo se representan las ecuaciones mediante el entorno `array`, y para ello, vamos a utilizar los comandos `\begin{array}{ll}` donde las `ll` representan el número de ecuaciones y terminando con el comando `\end{array}`. Separaremos las ecuaciones mediante el comando `\\`. Además, intepondremos una llave mediante el comando `\left\{` si la llave está a la izquierda o mediante el comando `\right\}` si está a la derecha, en el caso que esté la llave a uno de los lados, en el otro lado se usará el comando `\left.` o `\right.`. Para tenerlo más claro, vamos a poner un ejemplo, uno con la llave a la izquierda y otra con la llave a la derecha:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 45 \\ 2x + 4y + 18z = 145 \\ 47x + 23y + 89z = 1089 \end{array} \right.$$

Listing 45: Ejemplo del código de sistemas de ecuaciones con llave a la izquierda

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \left\{\begin{array}{l}
3 x+y+2z=45\\
4 2x+4y+18z=145\\
5 47x+23y+89z=1089
6 \end{array}\right.
7 \]
```

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 20y + 80z = 2000 \\ 2x + 8y + 50z = 45 \\ 11x + 44y + 63z = 78 \end{array} \right\}$$

Listing 46: Ejemplo del código de sistemas de ecuaciones con llave a la derecha

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[ \left. \begin{array}{l} 111 \end{array} \right\}
3 10x+20y+80z=2000 \\
4 2x+8y+50z=45 \\
5 11x+44y+63z=78
6 \end{array} \right\}
7 ]

```

Además de poder darle estos formatos, también podemos realizar el sistema de ecuaciones sin llaves. Para ello, utilizaremos los comandos `\left.` y `\right.`. Y vamos a demostrarlo con un ejemplo:

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= 10 \\
 2x + 45y + 14z &= 89 \\
 588x + 789y + 123z &= 1023 \\
 89x + 74y + 45z &= 630
 \end{aligned}$$

Listing 47: Ejemplo del código de sistemas de ecuaciones sin llave

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \[ \left. \begin{array}{l} 1111 \end{array} \right\}
3 x+y+z=10 \\
4 2x+45y+14z=89 \\
5 588x+789y+123z=1023 \\
6 89x+74y+45z=630
7 \end{array} \right.
8 ]

```

Por otro lado, tenemos el entorno `eqnarray` donde se nos colocará el sistema de ecuaciones con un `=` en medio y con la misma separación en todas las operaciones. Aquí no nos hace falta indicar el número de ecuaciones que vamos a poner, eso sí, para separar las ecuaciones vamos a utilizar el comando `\\` y para colocar las ecuaciones utilizaremos `&=&` para separar las ecuaciones. Para ilustrar todo lo anterior vamos a poner un ejemplo:

$$\begin{aligned}
 y &= x & (2) \\
 x^2 + 2y &= 3x^2 + 2y & (3) \\
 (x + y)(2x - y) &= 3x - y & (4)
 \end{aligned}$$

Listing 48: Ejemplo del código del entorno eqnarray

```

1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{eqnarray}
3 y&=x \\
4 x^2+2y&=3x^2+2y \\
5 (x+y)(2x-y)&=3x-y
6 \end{eqnarray}

```


Y por último, a este entorno `eqnarray` se le puede añadir cajas sin marco como `\mbox{}` para colocar un texto en nuestro sistema de ecuaciones. Para verlo lo podemos colocar en el siguiente ejemplo:

$$y = x \quad (5)$$

$$x^2 + 2y = 3x^2 + 2y \text{(Ecuación a destacar)} \quad (6)$$

$$(x + y)(2x - y) = 3x - y \quad (7)$$

Listing 49: Ejemplo del código del entorno `eqnarray` con caja `mbox`

```
1 \usepackage{amsmath}, definir antes de utilizar cualquier formula
2 \begin{eqnarray}
3 y&=x\\
4 x^2+2y&=3x^2+2y\mbox{(Ecuacion a destacar)}\\
5 (x+y)(2x-y)&=3x-y
6 \end{eqnarray}
```

4. Licenciar documentos

Para licenciar documentos vamos a utilizar dos paquetes, el `verbatim` para indicar la licencia al final y el `doclicense` para ajustar la licencia.



Figura 5: Documento con licencia

Listing 50: Código licencia

```

1 \documentclass{article}
2 \usepackage[utf8]{inputenc}
3 \usepackage[spanish]{babel}
4 \usepackage{verbatim}
5
6 \usepackage[
7     type={CC},
8     modifier={zero},
9     version={1.0},
10 ]{doclicense}
11
12 \title{Licencia}
13 \author{David Pacios}
14
15
16 \begin{document}
17
18 \maketitle
19
20 \begin{verbatim}
21 Título del documento
22 Enero 2019
23 Ult. actualización 14 de Enero de 2019
24 \end{verbatim}
25 \LaTeX{} {\verb lic. LPPL} \& powered by OTEA -- \textsc{CC-ZERO}
26 \doclicenseThis
27 \end{document}

```

Con el comando `modifier` podremos modificar el tipo de licencia y con el comando `version` podremos modificar la versión. Es muy importante definir el paquete `verbatim` antes de compilar la licencia.

5. Paquete fancyhdr

Con este paquete podemos darle estilo a la página, podemos cambiar los encabezados y los pies de página.

Primero definiremos en el preámbulo el paquete `fancyhdr`, y seguidamente, en el mismo preámbulo si queremos poner el encabezado definiremos el comando `\fancyhead[]{}` y por otro lado, definiremos el comando `\fancyfoot[]{}` , y entre corchetes, pondremos lo siguiente:

- **E**: Página par.
- **O**: Página impar.
- **L**: Campo izquierdo.

- **R**: Campo derecho.
- **H**: Encabezado.
- **F**: Pie de página.

Y finalmente, si queremos cambiar o quitar la línea decorativa utilizaremos el comando `\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}`.

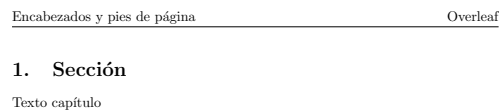


Figura 6: Encabezado y pie de página

Listing 51: Código encabezado y pie de página

```

1 \documentclass{article}
2 \usepackage[spanish]{babel}
3 \usepackage[utf8]{inputenc}
4 \usepackage{fancyhdr}

```

```
5 \pagestyle{fancy}
6 \fancyhf{}
7 \rhead{Overleaf}
8 \lhead{Encabezados y pies de página}
9 \rfoot{Página \thepage}
10
11 \begin{document}
12
13 \section{Sección}
14 \noindent
15 Texto capítulo
16
17 \end{document}
```

Tema 3: Modificadores 2 y matemáticas

Febrero 2019

Ult. actualización 15 de febrero de 2019

L^AT_EX 1ic.LPPL & powered by OTEA – CC-ZERO

Este documento esta realizado bajo licencia Creative Commons “CC0 1.0 Universal”.

