MDL - Tema 1

David Pacios

Inducción y Recursión

Phaidoari Afairynghor

Números Naturales

Definiremos los **números naturales** ($\mathbb{N}$) como todos los números que usaremos para pedir hamburguesas en el Burguer King. En este sitio puedes pedir 1 hamburguesa, 2 hamburguesas pero no puedes pedir $\frac{3}{4}$ o $\sqrt{3{,}5}$ hamburguesas porque posiblemente te metan un **buco en la cara**.

Como situación especial, **usaremos también el 0**, para poder **representar el caso** de que el **número de objetos contado sea nulo** (por ejemplo el dinero que tienes en la cartera es nulo, se representaría con el 0).

Vamos a poner los números naturales **de esta forma**: $\rightarrow n$. Esta es la **"n"** ahora sois amigos.

La **"n"** representa cualquier número natural y se pone de la siguiente forma: $n \in \mathbb{N}$.

Otros conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$

También existen otros conjuntos: Los enteros $\mathbb{Z}$, reales $\mathbb{R}$ y racionales $\mathbb{Q}$ pero como no los vamos a usar, vamos a ser "racistas de conjuntos" y vamos a sudar de ellos.

Concepto de función

En varios temas vamos a ver el concepto de función esto se refiere a una correspondencia de un conjunto A en un conjunto B, de forma que a cada elemento de A se le hace corresponder un elemento de B. Tenemos un par de formas de expresar conceptos con esta mierda de definición.

- Si f es una **función de A en B** se escribirá así $f : A \rightarrow B$ (Esto significa que existen dos conjuntos o dos grupos de números: uno llamado A y otro llamado B. Se llega de A a B gracias a la función f, a pastar)
- Si **gracias a la función f se hace corresponder un elemento** "a" de A con un elemento "b" en B se escribirá así: $f(a) = b$ (esto significa literalmente: aplicando la función *"loquesea"* en "a" me da "b" como resultado)

Inducción Simple

La inducción servirá para demostrar una propiedad P **(EN LOS NÚMEROS NATURALES SIEMPRE)** sobre una función, sumatorio, productorio, cosa...

Por lo que se dice que, para toda propiedad P de los **números naturales**, se verifica que:

- Se **cumple** un caso base.
- Al **cumplirse** un caso base se plantea una hipótesis de inducción.
- Se **intenta demostrar para el valor** $(k+1)$.

Por lo que los pasos a seguir para resolver estos problemas serán:

- Comprobar el cumplimiento de la **propiedad** para el **caso base**, demostrando que si **el caso base** es **"x"** el resultado de sustituir la **"x"** en la propiedad da lo mismo que la función en ese valor.
- Una vez comprobado, se tendrá que plantear que "funciona para todos los valores k (k es un número mágico que le encanta a los profesores de esta asignatura)" y comprobaremos lo mismo para (k+1) y en algún momento mágico tendremos que usar la igualación de que todos los k primeros números son igual a la hipótesis de inducción. Al operar, saldrá la hipótesis de inducción pepino en (k+1).

Esto que se entiende horriblemente mal. Se entiende mejor con unos cuantos ejercicios.

Ejercicio 1. Diciembre 2015 [2,5 puntos]. Demuestra por inducción que para todo n natural se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

① **Identificar Cosos:** Como cosa excepcional, en este ejercicio vamos a identificar las partes del problema.

- $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$: **Esto es un sumatorio**, también se puede expresar de forma un poco más vistosa así:

  $$\underbrace{2}_{1\cdot 2^1} + \underbrace{8}_{2\cdot 2^2} + \cdots + i \cdot 2^i$$

  Que indica la suma de todos los números del coso de arriba para cada valor empezando en $i = 1$.

- $(n-1)2^{n+1} + 2$: Esta es tu amiga, **la propiedad**.
  Como calcular la posición 50 de la mierda de sumatorio de arriba es horrible y no tengo 420 horas para hacerlo a mano, alguien muy amable ha dicho que sea cual sea la posición, la sustituimos arriba y nos da el resultado. Y ahora pensareis, coño es un mago, pero no... Es un cabrón porque nos obliga a comprobar que funciona de verdad.

2 **Caso Base:** Aquí miraremos el valor inicial, en este caso el sumatorio nos marca que es 1 (Esto siempre nos lo tienen que dar de una forma u otra).

Una vez tengamos el valor inicial lo sustituimos en la propiedad y calculamos el valor en esa posición del sumatorio para ver si coinciden mágicamente.

$$\forall i = 1 \rightarrow 2^1 = (1-1)2^{1+1} + 2 \rightarrow 2 = 2\checkmark$$

Se **verifica** el **Caso Base.**

2 **Hipótesis de Inducción**: Como se verifica para el caso base, digo que se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

En algún momento en la demostración llegaremos a ese sumatorio y usaremos la igualdad para cambiar lo de la izquierda por lo de la derecha y operar.

3 **Paso Inductivo:** Demostración para (k+1) Ahora en este paso cambiamos todas las "n" por "k" para que el toc del profesor se calme. Realizaremos el sumatorio en lugar de hasta k, hasta k+1.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot 2^i$$

Que esto es de la forma...

$$2 + 8 + \cdots + i \cdot 2^i + (i+1) \cdot 2^{i+1}$$

Vamos a ver las partes de esta mierda:

$$\underbrace{2 + 8 + \cdots + i \cdot 2^k}_{\sum_{i=1}^{k} i \cdot 2^i} + \underbrace{(k+1) \cdot 2^{k+1}}_{\text{Elemento siguiente}}$$

Gracias a la **Hipótesis de Inducción** sabemos que toda la primera parte, que corresponde al sumatorio inicial sin tonterías de k+1, es igual a la propiedad. Entonces vamos a sustituirlo.

$$\underbrace{(k-1)2^{k+1} + 2}_{\text{Por Hipótesis de Inducción}} + \underbrace{(k+1) \cdot 2^{k+1}}_{\text{Elemento siguiente}}$$

La parte de escribir en el ejercicio que el cambio lo haces por Hipótesis de inducción, hay que ponerla, si no, el profesor te hace llorar.

Ahora operamos para intentar que nos quede la **hipótesis de inducción en k+1**:

$$(k+1) \cdot 2^{k+1} + (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$$

Lo he reordenado de forma fascista para poder sacar factor común y que se vea mejor.

$$(k+1) \cdot 2^{k+1} + (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 \rightarrow (k+1+k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$$
$$(2k) \cdot 2^{k+1} + 2 \rightarrow k \cdot 2^{k+1} \cdot 2 + 2$$

Quedando

$$k \cdot 2^{n+2} + 2$$

Entonces queda demostrada la propiedad. Ya que esa sería la **hipótesis de inducción** para k+1.

Inducción Completa

No todo va a ser difícil. También tenemos las inducciones completas que suelen dar mucho miedo pero que son mil veces más sencillas. Solo asustan un poco al verlas si no estás acostumbrado (de que me sonará esto).

En la **Inducción Completa** hay que comprender el concepto fascista de "definición recursiva" que nos va a ser útil para identificar los casos de inducción completa.

Definición recursiva

Se dice que algo esta definido recursivamente si para conocer su valor tenemos que hacer alusión a valores del pasado:

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 2$$
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \forall n \geq 2$$

Esto viene a significar que para saber el valor de n para n mayor o igual que 2, necesitamos si o si saber el valor de los elementos $f(0)$ y $f(1)$ porque hace alusión a mierda del pasado.

¿Cómo identificar un ejercicio de Inducción Completa?

A. Pueden tener más de un caso base, no es obligatorio que se cumpla esto.

B. Si o si son de alusión recursiva.

C. No son sumatorios (hay pocos ejemplos en que si).

D. Lo pone en el enunciado.

Vamos a hacer un ejemplo para explicar la inducción completa.

Ejercicio 2. Consideramos la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida como:

$$f(n) \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{n} = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \text{n} = 1 \\ f(n-2) + 4\dfrac{f(n-1)}{n-1} & \text{si} \quad \text{n} \geq 2 \end{cases}$$

Demuestra que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = n^2$.

Como podemos ver, esto hace alusiones a valores del pasado, está definido de forma recursiva y tiene varios casos base. Usaremos inducción completa.

① **PASO 1:** Aquí identificaremos los casos base y la propiedad, recordemos que la inducción, ya sea simple o completa se usa para probar propiedades sobre los números naturales.

Podemos observar que la propiedad que tiene que cumplir es n^2 y que los casos base (los casos inmediatos) son: $n = 0 \to 0$ y $n = 1 \to 1$

② Ahora continuaremos como si fuera una inducción simple normal. Primero con el caso base:

$$n = 0 \to 0 \text{ y } 0^2 = 0 \checkmark$$

$$n = 1 \to 1 \text{ y } 1^2 = 1 \checkmark$$

Se cumple en ambos casos, por lo que podemos decir que se cumple para los casos base. Ahora planteamos la hipótesis de inducción, que es algo distinta a la simple.

③ **Hipotesis de Inducción:** Como se cumple para el caso base decimos que se cumple para todos y aplicaremos la propiedad en los casos recursivos.

Esta gilipollez viene a decir que si nuestra propiedad es n^2 aplicaremos el cuadrado a todo lo que haya dentro de nuestras funciones recursivas:

$$f(n-2) \to (n-2)^2$$

$$f(n-1) \to (n-1)^2$$

④ Operamos el resultado una vez aplicada la hipótesis de inducción.

$$f(n-2) + 4\frac{f(n-1)}{n-1}$$

$$(n-2)^2 + 4\frac{(n-1)^2}{n-1}$$

$$(n-2)^2 + 4(n-1)$$

$$n^2 - 4n + 4 + 4n - 4$$

$$n^2 \checkmark$$

Siempre se acaba cumpliendo y nos queda la hipótesis de inducción al operar.