

v101

# Das Trägheitsmoment

AUTOR A

authorA@udo.edu

AUTOR B

authorB@udo.edu

Durchführung: 14.11.2023

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Bestimmung von $D$ . . . . .	4
3.2	Bestimmung von $I_D$ . . . . .	4
3.3	Bestimmung von $I$ verschiedener Körper . . . . .	4
3.4	Bestimmung von $I$ einer Holzpuppe . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Winkelrichtgröße . . . . .	5
4.2	Eigenträgheitsmoment . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>8</b>

# 1 Theorie

Das Trägheitsmoment  $\underline{I}$  ist eine Tensorgröße, die starren Körpern zugeordnet werden kann und beschreibt, wie ein Körper sich bei Rotationsbewegungen verhält. Dabei setzt er die Winkelgeschwindigkeit eines Objektes mit dem resultierenden Drehimpuls in Beziehung mit

$$\vec{L} = \underline{I}\vec{\omega}. \quad (1)$$

Die Komponenten des Trägheitsmoments  $\underline{I}$  sind dabei über die Gleichung

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

bestimmt, für den Fall, dass die Drehachse durch den Schwerpunkt des Objekts verläuft. Falls dies nicht der Fall sein sollte, wird der steinersche Satz verwendet.

$$I = I_{\omega} + m d^2 \quad (3)$$

$m$  ist die Masse des Objekts und  $d$  der Abstand zur Drehachse.

Für einen schwingenden Körper kann mit ihm auch die Schwingungsdauer bestimmt werden über

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (4)$$

Dabei beschreibt  $D$  die sogenannte Winkelrichtgröße. Sie ist eine Konstante, die die Proportionalität zwischen dem Auslenkungswinkel des Objekts und dem rückstellenden Drehmoment wiedergibt.

$$M = D\varphi \quad (5)$$

Hierbei beschreibt  $M$  jetzt den Betrag des Drehmoments und  $\varphi$  den Auslenkungswinkel. Alternativ ist das Drehmoment außerdem mit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6)$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \quad (7)$$

beschreibbar.

Die Trägheitsmomente von Zylindern sehen dann entsprechend Gleichung 2 für unterschiedliche Drehachsen so aus.

$$I = \frac{mR^2}{2} \quad (8)$$

Wenn die Rotationsachse senkrecht auf den Kreisoberflächen steht.

$$I = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \quad (9)$$

Wenn die Rotationsachse senkrecht auf der Mantelfläche steht.

Und für Kugeln so.

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \quad (10)$$

[sample]

## 2 Versuchsaufbau

Ziel des Versuches ist, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Dafür wird der Körper auf einer Achse befestigt, die die Rotation des Körpers ermöglicht. Diese Drillachse ist mit einer an einem festen Rahmen angebrachten Spiralfeder verbunden. Auf der Halterung befindet sich eine Scheibe auf der sich der Auslenkwinkel ablesen lässt. Der Körper kann nun zum Schwingen gebracht werden und die Schwingungsdauer  $T$  wird mit einer Stoppuhr gemessen. Aus der Schwingungsdauer  $T$ , der Winkelrichtgröße  $D$  und dem Eigenträgheitsmoment der Drillachse  $I_D$  kann dann das Trägheitsmoment  $I$  des Körpers bestimmt werden.

## 3 Durchführung

### 3.1 Bestimmung von $D$

Die Winkelrichtgröße  $D$  wird mit der Formel  $\frac{r \times F}{\varphi}$  berechnet. Um diese Größen zu messen wird erst eine Eisenstange, die senkrecht zu Drehachse ausgerichtet ist, in der Halterung für die Körper befestigt. Nun wird eine Federwage in der Entfernung  $r = 20\text{cm}$  von der Drehachse eingehängt. Dann wird diese um den Winkel  $\varphi$  ausgelenkt und die Kraft wird an der Federwage abgelesen. Dabei muss die Federwage senkrecht zur Eisenstange sein, da dadurch die Formel zu  $\frac{r \cdot F}{\varphi}$  vereinfacht wird. Die Messung wurde 11 mal durchgeführt und das arithmetische Mittel bestimmt um einen genaueren Wert zu erhalten.

### 3.2 Bestimmung von $I_D$

Um das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  zu bestimmen werden nun Gewichte an der Eisenstange angebracht. Diese wird daraufhin um den Winkel  $\varphi = 90^\circ$  ausgelenkt und zum Schwingen gebracht. Jetzt wird  $5 \cdot T$  mit der Stoppuhr gemessen. Der Faktor 5 wird verwendet um das Messen zu vereinfachen. Diese Messung wird 10 mal für verschiedene Abstände  $a$  durchgeführt. Das Eigenträgheitsmoment der Drillachse wird nun nach auftragen von  $T^2$  zu  $a^2$  durch lineare Regression bestimmt.

### 3.3 Bestimmung von $I$ verschiedener Körper

Die beiden Körper werden an der Halterung befestigt und um einen Winkel von  $\varphi = 90^\circ$  ausgelenkt. Mit der Stoppuhr wird  $5 \cdot T$  bestimmt. Dies wird 10 mal durchgeführt und das arithmetische Mittel bestimmt. Da  $T$  nun bekannt ist kann mithilfe der Formel (Referenz aus dem Theorieteil einfügen)  $I$  ausgerechnet werden.

### 3.4 Bestimmung von $I$ einer Holzpuppe

Analog zur Bestimmung der anderen beiden Körper wird das Trägheitsmoment einer Holzpuppe für zwei verschiedene Stellungen bestimmt. Jedoch werden nun 5 Messungen mit  $\varphi = 90^\circ$  und 5 mit  $\varphi = 120^\circ$  aufgenommen. Die erste Stellung entspricht der aus (Referenz zu Abbildung 1 einfügen) und die zweite der aus (Referenz zu ABB 2 einfügen)

Zusätzlich wird das Trägheitsmoment der Holzpuppe theoretisch bestimmt. Um dieses auszurechnen, werden die einzelnen Körperteile als Körper, dessen Trägheitsmomente bekannt sind, genähert. Der Kopf, der linker und rechter Arm, sowie der Oberkörper und das linke und rechte Bein werden hier jeweils als Zylinder angenähert. Dazu wird die Höhe und der Durchmesser des jeweiligen Teils mit einer Schieblehre gemessen. Der Wert wird nun mit dem theoretisch bestimmten Wert verglichen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Winkelrichtgröße

Die gemessene Kraft in Abhängigkeit vom dem Auslenkungswinkel wird in der Tabelle 1 dargestellt. Mit der Formel  $\frac{r \cdot F}{\varphi}$  wird D berechnet. Mithilfe der gemessenen Werte für  $F$  und  $\varphi$  kann mit  $r = 20 \text{ cm}$  nun D bestimmt werden. Die einzelnen Werte von D sind ebenfalls in 1 eingetragen. Mit  $\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  wird nun das arithmetische Mittel gebildet. Einsetzen der Werte für D und  $n = 11$  ergibt  $\bar{D} = 0.02 \text{ N m}$ .

**Tabelle 1:** Tabelle 1

$F / \text{N}$	$\varphi / ^\circ$	$D / \text{N m}$
0,016	20	0,009
0,046	30	0,018
0,066	40	0,019
0,089	50	0,020
0,11	60	0,021
0,134	70	0,022
0,162	80	0,023
0,176	90	0,022
0,18	100	0,021
0,2	110	0,021
0,23	120	0,022

### 4.2 Eigenträgheitsmoment

In 2 wird das Quadrat des Abstandes der Gewichte von der Drehachse zu dem Quadrat der Schwingungsdauer aufgetragen.

Mit dem Verhältnis

$$T^2 = \frac{4\pi^2 D}{g} + \frac{2}{3} \frac{h^2}{g} + \frac{8a^2}{g} \quad (11)$$

**Tabelle 2:** Messwerte

$a^2/\text{cm}$	$T^2/$
2,5	12,75
5	13,84
7,5	15,69
10	18,03
15	23,54
20	29,81
22,5	32,53
25	35,84
27,5	38,87
30	41,81

,welches aus den Formeln 4, 9 und 3 bestimmt werden kann kann das Eigenträgheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. In 1 wird  $T^2$  zu  $a^2$  aufgetragen. Die Steigung der Regressionsgerade beträgt 6,04<sup>2</sup>. Entsprechend lässt sich ablesen, dass sich das Eigenträgheitsmoment ausdrücken lässt als

$$I_D = \frac{Db}{4\pi^2} - \frac{1}{6}mR^2. \quad (12)$$

Da der Radius der beiden Zylinder nicht bekannt ist, er sich aber zwischen 0cm und 10cm

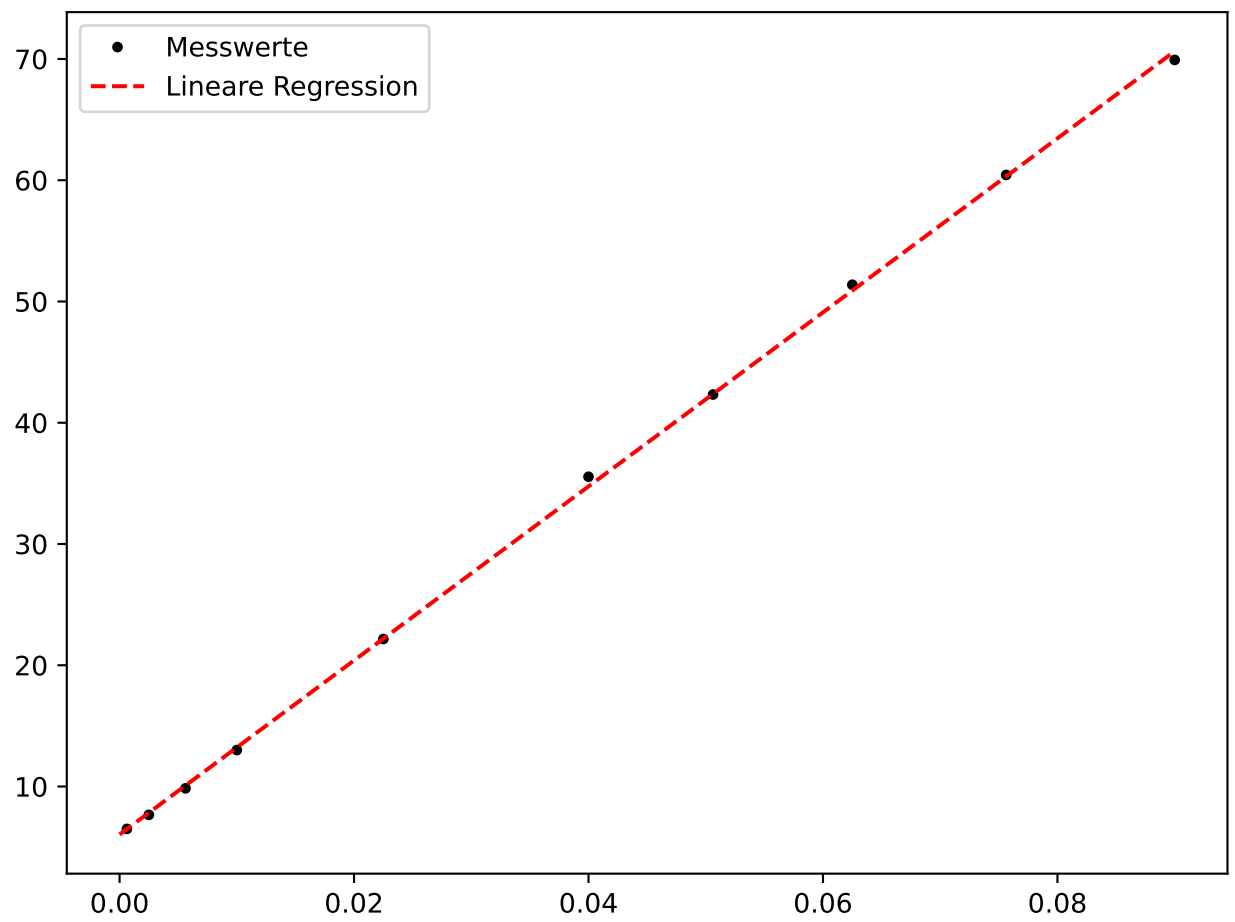


Abbildung 1: Plot.

## 5 Diskussion