

v302

elektrische Brückenschaltungen

Benedikt Nelles
benedikt.nelles@tu-dortmund.de

Tom Bollig
tom.bollig@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.2023

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	allgemeine Formeln	3
1.2	Wheatstonsche Brückenschaltung	3
1.3	Kapazitätsmessbrücke	3
1.4	Induktivitätsmessbrücke	4
1.5	Maxwell-Brücke	4
1.6	Wien-Robinson-Brücke	4
1.7	Klirrfaktor	4
1.8	Fehlerrechnung	5
2	Aufbau und Durchführung	6
2.1	Aufbau	6
2.2	Durchführung	7
2.3	Wheatstonesche Brückenschaltung	7
2.4	Kapazitive Brückenschaltung	7
2.5	Induktive Brückenschaltung	7
2.6	Maxwellsche Brückenschaltung	7
2.7	Wien-Robinson Brückenschaltung	7
3	Auswertung	7
3.1	Wheatstonsche Brückenschaltung	7
3.2	Kapazitätsmessbrücke	8
3.3	Induktivitätsmessbrücke	8
3.4	Maxwell Brückenschaltung	8
3.5	Klirrfaktor	8
4	Diskussion	12
4.1	Wheatstonesche Brückenschaltung	12
4.2	Kapazitätsmessbrücke	12
4.3	Induktivitätsmessbrücke	12
4.4	Maxwell	12
4.5	Vergleich der Induktiven und Maxwell Brückenschaltung	12
4.6	Klirrfaktor	13

1 Theorie

1.1 allgemeine Formeln

Das ohmsche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der Spannung an einem Leiter mit der Stromstärke.

$$U = R \cdot I \quad (1)$$

Die kirchhoffschen Gesetze beschreiben das Verhalten von Strom in einem geschlossenen Stromkreis. Die Knotenregel besagt, dass alle einem Knoten hinzugefügten Ladungen gleich der abgegebenen Ladungen sein müssen.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (2)$$

Die Maschenregel besagt, dass die Summe aller einzelnen Spannungen in einer Masche gleich 0 ist. Das liegt daran, dass die zugeführte und abgegebene elektrische Arbeit gleich groß sein muss.

$$\sum_{i=1}^n U_{0,i} - \sum_{j=1}^m U_{ab,j} = 0 \quad (3)$$

1.2 Wheatstonsche Brückenschaltung

Die Wheatstonsche Brücke ist eine Schaltung, die genutzt wird, um ohmsche Widerstände zu messen. Dabei ist eine Spannung an zwei parallel geschalteten Paaren aus Widerständen angeschlossen, wobei nach dem ersten Widerstand jeweils ein Kabel an einem Oszilloskop angeschlossen ist. 1a Drei der Widerstände sind bekannt, der andere ist mit der Formel

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4)$$

zu bestimmen.

1.3 Kapazitätsmessbrücke

Hier werden, im Gegensatz zu der Wheatstonsche Brückenschaltung, vor die beiden Widerstände auf der linken Seite jeweils ein Kondensator in Reihe geschaltet. Dabei hat der nach der Verbindung zum Oszilloskop eine bekannte Kapazität, wohingegen der der bei dem unbekannten Widerstand installierte eine zu bestimmende Kapazität besitzt. Der Aufbau ist in Abbildung 1b dargestellt. Den unbekannten Widerstand berechnet man mit Gleichung 4. Die unbekannte Kapazität wird mit

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (5)$$

ausgerechnet.

1.4 Induktivitätsmessbrücke

Der Aufbau der Induktivitätsmessbrücke ist analog zu dem der Kapazitätsmessbrücke, außer dass die Kondensatoren durch Spulen ausgetauscht werden. Anschaulich kann man dies in Abbildung 1c erkennen. Damit gilt für die Berechnung des ohmschen Widerstandes wieder Gleichung 4 und die Induktivität der Spule, die bestimmt werden soll, wird mit

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (6)$$

berechnet.

1.5 Maxwell-Brücke

Die Maxwell-Brücke wird ebenfalls zur Bestimmung der Induktivität einer Spule benutzt. Sie besitzt aber keine Spule L_2 in Reihe zu R_2 , sondern stattdessen einen Kondensator, der parallel zu R_4 geschaltet ist. R_4 ist nun ein verstellbarer Widerstand. Das ist damit zu begründen, dass ein Kondensator mit geringen Verlusten einfacher zu realisieren ist, als eine Spule mit wenig Verlusten. Die Schaltskizze davon ist Abbildung 1d. Die Berechnung von L_x erfolgt nun über

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (7)$$

und die von R_x über Gleichung 4.

1.6 Wien-Robinson-Brücke

Die Wien-Robinson-Brücke wird verwendet, um eine konstante Frequenz ω aus einem Frequenzspektrum rauszufiltern. Aufgebaut wird diese wie in Abbildung 1e und besitzt vier bekannte Widerstände, wobei zwei den Widerstand R , einer den Widerstand R' und einer den doppelten Widerstand von R' besitzt. Für den Betrag des Spannungsverhältnis von der Brückenspannung und der Eingangsspannung gilt

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right| = \sqrt{\frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}} \quad (8)$$

mit

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \quad (9)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (10)$$

1.7 Klirrfaktor

Der Klirrfaktor stellt dar, wie fehlerfrei eine Sinusspannung ist. Damit das das Überlagern der Spannung mit anderen Wellen gemeint. Der Klirrfaktor selbst wird durch das

Verhältnis von der Sinus-Schwingung mit Überlagerungsschwingungen aufgestellt. Dieser kann mit der Wien-Robinson-Brücke gemessen werden. Die Berechnung erfolgt mit

$$k = \frac{1}{U_1} \sqrt{\sum_i^n U_i^2} \quad (11)$$

mit

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{\sqrt{\frac{1}{9} \frac{(2^2-1)^2}{(1-2^2)^2 + 9 \cdot 2^2}}} \quad (12)$$

1.8 Fehlerrechnung

Der Mittelwert einer Werteverteilung wird mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (13)$$

bestimmt.

Den Fehler einer Größe berechnet man mit

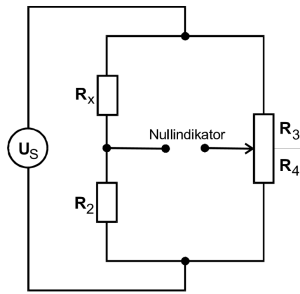
$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)} \quad (14)$$

Für Größen, die von mehreren Variablen, die jeweils einen Fehler besitzen, abhängen, berechnet man mit

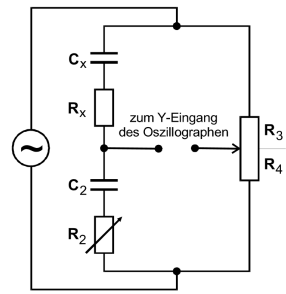
$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2} \quad (15)$$

2 Aufbau und Durchführung

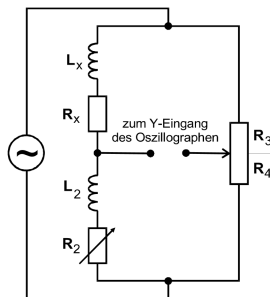
2.1 Aufbau



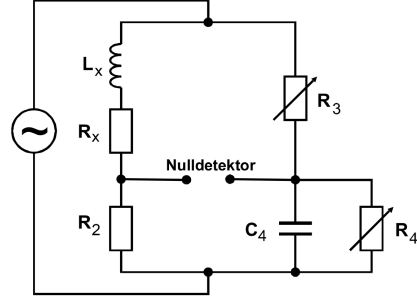
(a) Wheatstonesche Brückenschaltung



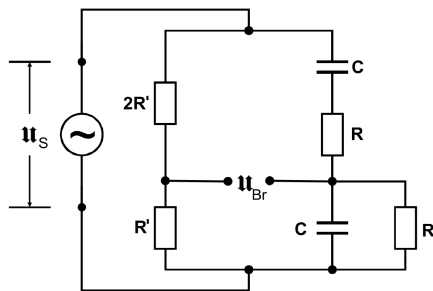
(b) Kapazitive Brückenschaltung



(c) Induktive Brückenschaltung



(d) Maxwellsche Brückenschaltung



(e) Wien-Robinson Brückenschaltung

[v302]

Die Schaltkreise, entsprechend der Schaltbilder, werden mit vorgefertigten Bauteilen zusammengefügt, wobei bestimmte Elemente unbekannte Werte haben. Als Spannungsmessgerät wird ein Oszilloskop verwendet. R_3 und R_4 sind Potentiometer, wobei für die ersten drei Schaltungen gilt, dass $R_3 + R_4 = 1000 \Omega$ ist.

2.2 Durchführung

2.3 Wheatstonesche Brückenschaltung

In der Wheatstoneschen Brückenschaltung (1a) müssen R_3 und R_4 variiert werden, bis im Oszilloskop die Brückenspannung auf 0 V fällt. Dann werden die entsprechenden Widerstände notiert.

2.4 Kapazitive Brückenschaltung

In der Kapazitiven Schaltung wird die Brückenspannung nur auf ein Minimum gebracht, da störende Frequenzen in der Wechselspannung verhindern, dass diese auf 0 V fällt. Hierzu werden wieder R_3 und R_4 variiert. Wenn das Minimum erreicht wurde, werden wieder die Widerstände notiert.

2.5 Induktive Brückenschaltung

Für die Induktive Brückenschaltung wird wie bei der kapazitiven die Brückenspannung wieder minimiert durch variieren der bekannten Widerstände. Auch hier werden die Widerstände notiert.

2.6 Maxwellsche Brückenschaltung

In der maxwellschen Brückenschaltung wird wieder die Brückenspannung minimiert mit R_3 und R_4 , allerdings gilt hier nichtmehr, dass deren Summe $1000\ \Omega$ ergibt. Dabei ist es auch wichtig, dass man diese abwechselnd variiert, bis das Ändern beider Widerstände die Spannung nicht mehr verringert. Die Widerstände werden notiert.

2.7 Wien-Robinson Brückenschaltung

Mit der Wien-Robinson Schaltung werden nun nur Bauteile mit bekannten Größen gewählt und die Frequenz f der Eingangsspannung geändert. Zu jeder betrachteten Frequenz wird dann die Brückenspannung aufgetragen. Bis 500 Hz wird die Frequenz in 50 Hz Schritten aufgenommen und danach in 500 Hz Schritten bis 5000 Hz.

3 Auswertung

3.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Für R_2 wurde ein Widerstand mit $R_2 = (332,00 \pm 9,96)\ \Omega$ verwendet. Der Fehler der Bauteile wird im Folgenden immer als $\pm 3\%$ angenommen. Der zu bestimmende Widerstand war Wert 13. Durch das variieren der Widerstände R_3 und R_4 , bis die Brückenspannung den Wert 0 annimmt, wurden für diese bei der ersten Messung die Werte $R_3 = 490\ \Omega$ und $R_4 = 510\ \Omega$ bestimmt, mit dem Verhältnis $\frac{R_3}{R_4} = 0,961 \pm 0,005$. Für den Fehler des Verhältnisses wurde $\pm 0,5\%$ angenommen. Mit Gleichung 4 ergibt sich $R_{13} = 318,98\ \Omega$. Der Fehler dieser Größe wird mit Formel 15 berechnet. Damit ergibt sich

hier $\Delta R_{13} = \sqrt{\left(\frac{R_3}{R_4}\right)^2 (\Delta R_2)^2 + (R_2)^2 \left(\Delta \frac{R_3}{R_4}\right)^2}$. Demnach gilt $R_{13} = (318,98 \pm 9,71) \Omega$. Dies wurde für einen weiteren unbekannten Widerstand, Wert 11, durchgeführt. Hier ergibt sich $R_3 = 596 \Omega$, $R_4 = 404 \Omega$ und $\frac{R_3}{R_4} = 1,475 \pm 0,007$. Daraus folgt mit Formel 4 und 15 $R_{11} = (490 \pm 15) \Omega$.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Für R_2 wird hier der selbe Wert, wie bei der Wheatstonschen Brücke, genutzt und die Kapazität des Kondensators C_2 ist $C_2 = (750,0 \pm 22,5) \text{ nF}$. Die unbekannte Kapazität war hier Wert 8. Durch das Variieren von R_3 und R_4 bis ein Minimum gefunden wurde, wurden die Werte $R_3 = 675 \Omega$ und $R_4 = 325 \Omega$ aufgenommen. Das Verhältnis der Werte beträgt $\frac{R_3}{R_4} = 2,08 \pm 0,01$. Mit Gleichung 4 und 15 ergibt sich $R_8 = (690 \pm 21) \Omega$. Die Kapazität C_8 kann mit Gleichung 5 und der Fehler mit Gleichung 15 berechnet werden. Der Fehler ist also $\Delta C_8 = \sqrt{\left(\frac{R_4}{R_3}\right)^2 (\Delta C_2)^2 + \left(-C_2 \frac{R_4^2}{R_3^2}\right)^2 \left(\Delta \frac{R_3}{R_4}\right)^2}$. Damit gilt $C_8 = (361 \pm 11) \text{ nF}$.

Dies wird analog mit Wert 9 durchgeführt. Damit ist $R_3 = 595 \Omega$ und $R_4 = 405 \Omega$. Einsetzen in Formel 4 und 15 ergibt $R_9 = (488 \pm 15) \Omega$. Die Kapazität hat nach Einsetzen in Formel 5 und 15 den Wert $C_9 = (511 \pm 7) \Omega$.

3.3 Induktivitätsmessbrücke

Auch hier wird für R_2 der selbe Wert, wie bei der Wheatstonschen Brücke, benutzt. Für L_2 gilt hier $L_2 = (27,500 \pm 0,825) \text{ mH}$. Die zu bestimmende Induktivität hat den Wert 18. Das Minimum der Brückenspannung wurde hier für die Widerstände $R_3 = 554 \Omega$ und $R_4 = 446 \Omega$ gefunden. Der Quotient der Werte beträgt $\frac{R_3}{R_4} = 1,242 \pm 0,006$. R_{18} hat mit den Gleichungen 4 und 15 den Wert $R_{18} = (412 \pm 13) \Omega$. Für L_{18} ergibt sich mit 4 $L_2 = 34 \text{ mH}$ mit dem Fehler $\sqrt{\left(\frac{R_3}{R_4}\right)^2 (\Delta L_2)^2 + L_2^2 \left(\Delta \frac{R_3}{R_4}\right)^2}$. Mit Einsetzen der Werte erhält man $L_{18} = (34,16 \pm 1,04) \text{ mH}$.

3.4 Maxwell Brückenschaltung

R_2 ist hier immer noch der selbe Wert und $R_x = R_{13}$ wird auch hier mit 4 berechnet. Es wird wieder der Schaltblock Wert 18 verwendet. Hier gilt beim Brückenspannungsminimum, dass $R_3 = (370,0 \pm 11,1) \Omega$ und $R_4 = (335,00 \pm 10,05) \Omega$ sind und somit $\frac{R_3}{R_4} = 1,105 \pm 0,005$ ist. Es folgt, dass $R_{13} = (366,687 \pm 11,130) \Omega$ ist. Für die Induktivität gilt jetzt Gleichung 7. Dabei ist $C_4 = (450,0 \pm 13,5) \text{ nF}$ und es folgt, dass $L_x = (55,278 \pm 2,872) \text{ mH}$ ist.

3.5 Klirrfaktor

Für die Eingangsspannung gilt hier $U_s = 1 \text{ V}$, die Kapazität der Kondensatoren beträgt jeweils 994 nF und 992 nF und wird hier auf 993 nF gemittelt, da eigentlich gelten müsste,

Tabelle 1: Brückenspannung in Abhängigkeit von der Frequenz

$f[Hz]$	$U_{Br}[mV]$
50	230
100	100
150	15
200	50
250	100
300	130
350	160
400	200
450	200
500	220
1000	280
1500	300
2000	300
2500	300
3000	310
3500	310
4000	310
4500	310
5000	310

dass diese gleich sind, dies aber nicht realisierbar war. Desweiteren beträgt $R' = 332\,\Omega$ und $R = 1\,\text{k}\Omega$. Die Bezeichnungen dieser Größen finden sich in 1e wieder. Zur bestimmung des Klirrfaktors wird hier nur die zweite Oberwelle betrachtet. In Gleichung 11, zu dessen Berechnung, vereinfacht sich die Summe dann zu zu einem U_2^2 . Also vereinfacht sich die Berechnung des Faktors zu

$$k = \frac{U_2}{U_1} , \quad (16)$$

wobei U_1 hier die Eingangsspannung U_s ist. U_2 wird dann mithilfe von Gleichung 12 berechnet, wobei $j = \Omega = 2$ ist. Damit lässt sich der Klirrfaktor berechnen als

$$k = 3 \frac{U_{\text{Br}}}{U_1} \sqrt{\frac{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}{(\Omega^2 - 1)^2}} \quad (17)$$

mit $\Omega = 2$. Die einzusetzende Brückenspannung wird dann über den Vergleich zwischen f und f_0 bestimmt, wobei f_0 die Frequenz ist, die die Brückenspannung insgesamt minimiert. Durch die Anwendung von 9 zeigt sich, dass

$$f = 2f_0 \quad (18)$$

für die zweite Oberwelle gelten muss.

Aus 1 ist abzulesen, dass $f_0 = 150\,\text{Hz}$ ist, woraus folgt, dass die Brückenspannung, wenn $\Omega = 2$ gilt, bei $f = 300\,\text{Hz}$ abgelesen werden muss. Somit wird für k mit $U_{\text{Br}} = 130\,\text{mV}$ gerechnet. Eingesetzt in 17 ist dann $k = 0.87$.

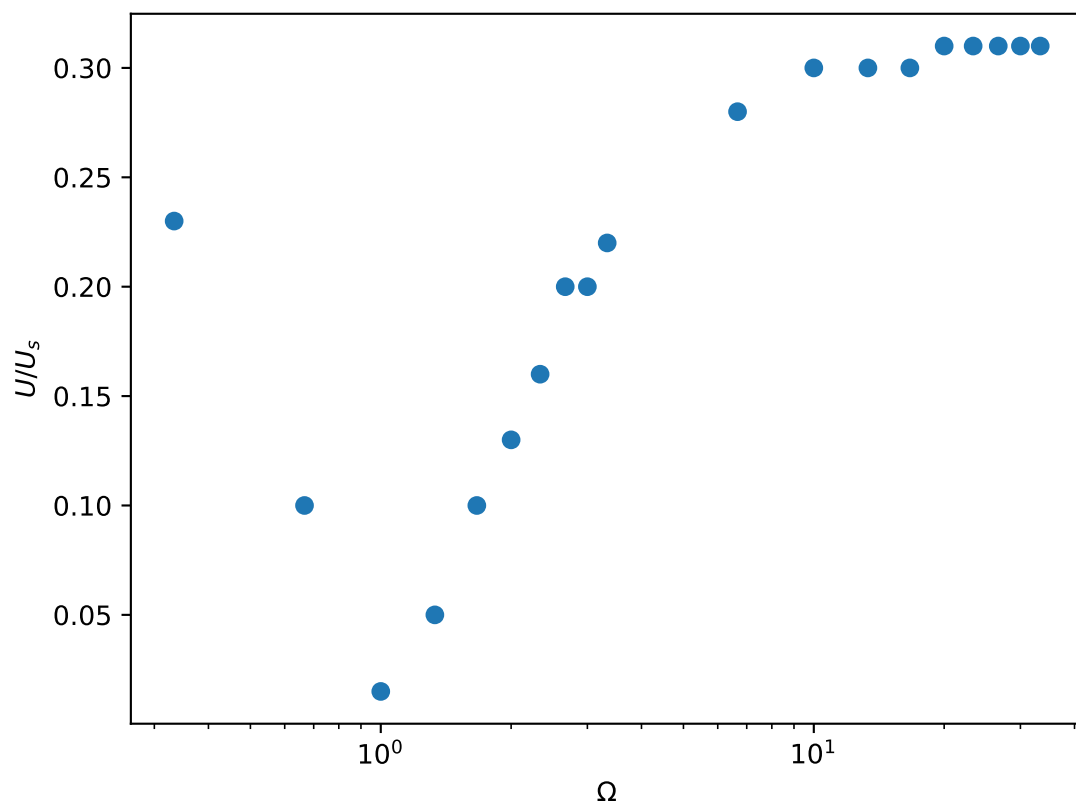


Abbildung 2: Brückenspannung gegen Frequenzen

4 Diskussion

4.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Für den Widerstand, der mit der Wheatstoneschen Brücke bestimmt wurde, ergibt sich ein Wert von $R_{13} = (318,98 \pm 9,71) \Omega$. Der tatsächliche Wert von Wert 13 wird hier als R'_{13} definiert und beträgt $R'_{13} = 319 \Omega$. Für den Quotienten von bestimmten Wert und Realwert gilt $\frac{R_{13}}{R'_{13}} = 0,9999373 \pm 0,0304389$.

Für Wert 11 ergibt sich mit $R_{11} = (490 \pm 15) \Omega$ und $R'_{11} = 489,9 \Omega$ $\frac{R_{11}}{R'_{11}} = 1,002 \pm 0,031$.

4.2 Kapazitätsmessbrücke

Der, mit der Kapazitätsmessbrücke bestimmte Widerstand, hat den Wert $R_8 = (690 \pm 21) \Omega$. Die hier bestimmte Kapazität $C_8 = (361 \pm 11) \text{ nF}$. Die realen Werte sind $R'_8 = 564 \Omega$ und $C'_8 = 294,1 \text{ nF}$. Die damit gebildeten Quotienten sind $\frac{R_8}{R'_8} = 1,223 \pm 0,037$ und $\frac{C_8}{C'_8} = 1,227 \pm 0,037$. Bei Wert 9 sind die gemessenen Werte $R_9 = (488 \pm 15) \Omega$ und $C_9 = (511 \pm 7) \text{ nF}$. Für die tatsächlichen Werte gilt $R'_9 = 464,9 \Omega$ und $C'_9 = 433,71 \text{ nF}$. Damit sind die Verhältnisse $\frac{R_9}{R'_9} = 1,05 \pm 0,03$ und $\frac{C_9}{C'_9} = 1,178 \pm 0,016$.

4.3 Induktivitätsmessbrücke

Bei der Induktivitätsmessbrücke wurde mit Realwerten von $R'_{18} = 360,5 \Omega$ und $L'_{18} = 48,82 \text{ mH}$ und den gemessenen Werten ebenfalls die Quotienten berechnet. Die eingesetzten gemessenen Werte sind dabei $R_{18} = (412 \pm 13) \Omega$ und $L_{18} = (34,16 \pm 1,04) \text{ mH}$. Es ergibt sich $\frac{R_{18}}{R'_{18}} = 1,143 \pm 0,036$ und $\frac{L_{18}}{L'_{18}} = 0,6997 \pm 0,0213$.

4.4 Maxwell

Der hier ausgerechnete Widerstand beträgt $R_{18} = (366,687 \pm 11,130) \Omega$ und die Induktivität $L_{18} = (55,278 \pm 2,872) \text{ mH}$. Verglichen mit den Bereits oben genannten Angaben für Wert 18 ergibt sich, dass $\frac{R_{18}}{R'_{18}} = 1,02 \pm 0,03$ ist und $\frac{L_{18}}{L'_{18}} = 1,132 \pm 2,872$.

4.5 Vergleich der Induktiven und Maxwell Brückenschaltung

Im Gegensatz zu den anderen Methoden ist mit der Wheatstoneschen Brückenschaltung die genaueste Bestimmung des Widerstandes gelungen. Das könnte daran liegen, dass in den anderen Aufbauten Kondensatoren und Spulen verbaut sind. Diese werden hier nämlich als widerstandslos angenommen, jedoch sind perfekte Kondensatoren und Spulen nicht zu realisieren. Das könnte der Grund für die Größeren Abweichungen bei den anderen Methoden sein.

4.6 Klirrfaktor

Der Klirrfaktor $k = 0.87$ zeigt hier das Verhältnis zwischen den Amplituden der Grundschwingung und der zweiten Oberschwingung, da nur die zweite betrachtet wird. Entsprechend gilt dann, dass die Amplitude von U_2 87 % von U_1 beträgt.

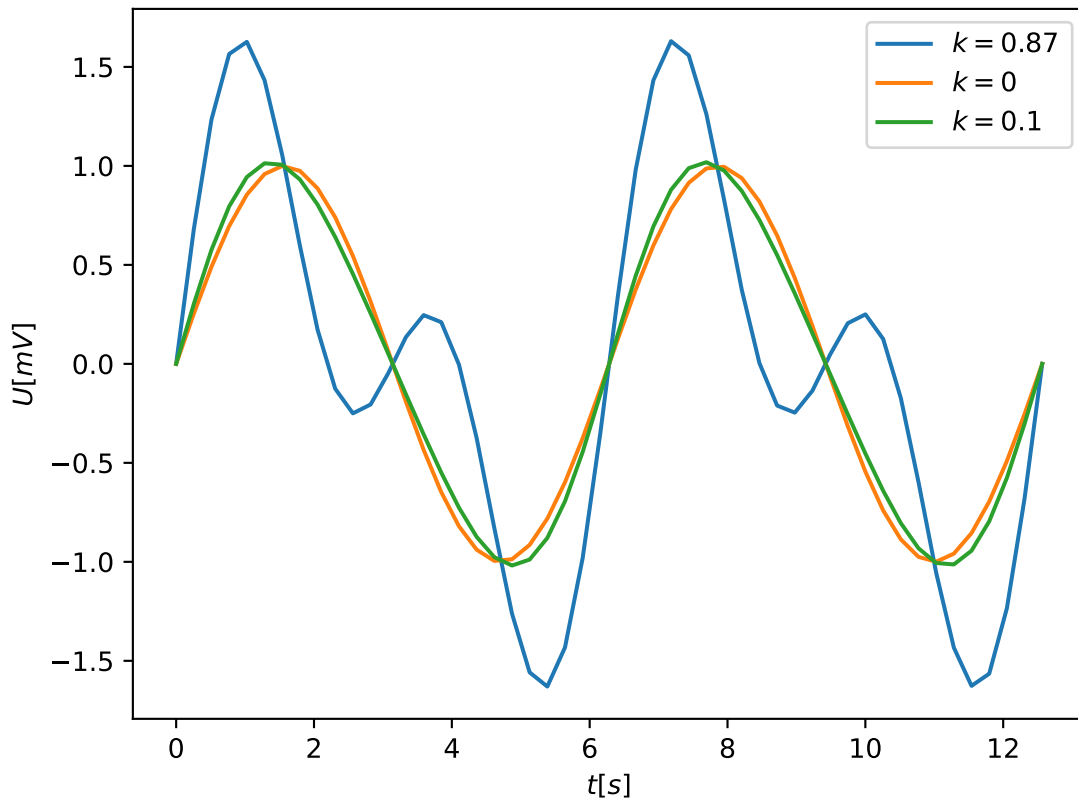


Abbildung 3: Modellierung von Sinusschwingungen für unterschiedliche Werte von k

Wie 3 modellhaft zeigt, hat ein solch großer Wert von k einen signifikanten Einfluss auf den Spannungsverlauf, einen Verlauf, der auf dem Oszilloskop so nicht sichtbar war. Allerdings wurden für die Berechnung von k störende Frequenzen höherer Ordnung vernachlässigt, was den Wert von k weiter verändern würde und die obige einfache Beziehung zwischen U_2 und U_1 ermöglichen würde. Desweiteren ist es möglich, dass das Spannungsminimum nicht bei 150 Hz liegt, da die Frequenz nur in groben Schritten gemessen wurde verglichen mit einer größeren Steigung in diesem Frequenzintervall, wie in 2 dargestellt ist. Der theoretische Wert von f_0 , welcher über die Eigenfrequenz über 10 berechenbar ist, beträgt $(160,27 \pm 6,80)$ Hz, was nahelegen würde, dass f_0 größer ist, als der aus 1 genommene Wert. Entsprechend ist es wahrscheinlich, dass diese Ungenauigkeiten k größer werden

lassen haben, als er eigentlich ist, oder das Vernachlässigen der höheren Frequenzen das Spannungsbild zu stark verändert hat.