v101

Das Trägheitsmoment

AUTOR A
benedikt.nelles@tu-dortmund.de

AUTOR B
tom.bollig@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2023

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Das Trägheitsmoment $\underline{\underline{\boldsymbol{I}}}$ ist eine Tensorgröße, die starren Körpern zugeordnet werden kann und beschreibt, wie ein Körper sich bei Rotationsbewegungen verhält. Dabei setzt er die Winkelgeschwindigkeit eines Objektes mit dem resultierenden Drehimpuls in Beziehung mit

$$\vec{L} = \underline{\underline{I}}\vec{\omega}. \tag{1}$$

Die Komponenten des Trägheitsmoments $\underline{\underline{\boldsymbol{I}}}$ sind dabei über die Gleichung

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \tag{2}$$

bestimmt, für den Fall, dass die Drehachse durch den Schwerpunkt des Objekts verläuft. Falls dies nicht der Fall sein sollte, wird der steinersche Satz verwendet.

$$I = I_\omega + \mathrm{md}^2 \tag{3}$$

$\boldsymbol{m}$ ist die Masse des Objekts und $\boldsymbol{d}$ der Abstand zur Drehachse.

Für einen Schwingenden Körper kann mit ihm auch die Schwingungsdauer bestimmt werden über

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathrm{D}}}. \tag{4}$$

Dabei beschreibt $\boldsymbol{D}$ die sogenannte Winkelrichtgröße. Sie ist eine Konstante, die die Probortionalität zwischen dem Auslenkungswinkel des Objekts und dem rückstellenden Drehmoment wiedergibt.

$$M = \mathrm{D}\varphi \tag{5}$$

Hierbei beschreibt $\boldsymbol{M}$ jetzt den Betrag des Drehmoments und φ den Auslenkungswinkel. Alternativ ist das Drehmoment außerdem mit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6}$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \tag{7}$$

beschreibbar.

Die Trägheitsmomente von Zylindern sehen dann entsprechend Gleichung 2 für unterschiedliche Drehachsen so aus.

$$I = \frac{\mathrm{mR}^2}{2} \tag{8}$$

Wenn die Rotationsachse senkrecht auf den Kreisoberflächen steht.

$$I = \mathrm{m}(\frac{\mathrm{R}^2}{4} + \frac{\mathrm{h}^2}{12}) \tag{9}$$

Wenn die Rotationsachse senkrecht auf der Mantelfläche steht.

Und für Kugeln so.

$$I = \frac{2}{5}\mathrm{mR}^2 \tag{10}$$

Insofern Mittelwerte einer Größe benötigt werden, bestimmt man diese mithilfe von

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{11}$$

und den entsprechenden Fehler mit

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-1)}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}))} \tag{12}$$

Den Fehler in Variablen, die dann von mehreren fehlerbehafteten Größen abhängt wird dann so bestimmt

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{(}\mathrm{n})(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2(\Delta x_i)^2} \tag{13}$$

[**sample**]

2 Versuchsaufbau

Ziel des Versuches ist, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Dafür wird der Körper auf einer Achse befestigt, die die Rotation des Körpers ermöglicht. Diese Drillachse ist mit einer an einem festen Rahmen angebrachten Spiralfeder verbunden. Auf der Halterung befindet sich eine Scheibe auf der sich der Auslenkwinkel ablesen lässt. Der Körper kann nun zum Schwingen gebracht werden und die Schwingunsdauer T wird mit einer Stoppuhr gemessen. Aus der Schwingunsdauer T, der Winkelrichtgröße D und dem Eigenträgheitsmoment der Drillachse I_D kann dann das Trägheismoment I des Körpers bestimmt werden.

3 Durchführung

3.1 Bestimmung von D

Die Winkelrichtgröße D wird mit der Formel $\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}}{\varphi}$ berechnet. Um diese Größen zu messen wird erst eine Eisenstange, die senkrecht zu Drehachse ausgerichtet ist, in der Halterung für die Körper befestigt. Nun wird eine Federwage in der Entfernung $r = 20$cm von der Drehachse eingehängt. Dann wird diese um den Winkel φ ausgelenkt und die Kraft wird an der Federwage abgelesen. Dabei muss die Federwage senkrecht zur Eisenstange sein, da dadurch die Formel zu $\frac{r\cdot F}{\varphi}$ vereinfacht wird. Die Messung wurde 11 mal durchgeführt und das arithmetische Mittel bestimmt um einen genaueren Wert zu erhalten.

3.2 Bestimmung von I_D

Um das Eigenträgheitsmoment I_D zu bestimmen werden nun Gewichte an der Eisenstange angebracht. Diese wird daraufhin um den Winkel $\varphi = 90°$ausgelenkt und zum schwingen gebracht. Jetzt wird $5 \cdot T$ mit der Stoppuhr gemessen. Der Faktor 5 wird verwendet um das Messen zu vereinfachen. Diese Messung wird 10 mal für verschiedene Abstände a durchgeführt. Das Eigenträgheitsmoment der Drillachse wird nun nach auftragen von T^2 zu a^2 durch lineare Regression bestimmt.

3.3 Bestimmung von I verschiedener Körper

Die beiden Körper werden an der Halterung befestigt und um einen Winkel von $\varphi = 90°$ ausgelenkt. Mit der Stoppuhr wird $5 \cdot T$ bestimmt. Dies wird 10 mal durchgeführt und das arithmetische Mittel bestimmt. Da T nun bekannt ist kann mithilfe der Formel (Referenz aus dem Theorieteil einfügen) I ausgerechnet werden.

3.4 Bestmmung von I einer Holzpuppe

Analog zur Bestimmung der anderen beiden Körper wird das Trägheismoment einer Holzpuppe für zwei verschiedene Stellungen bestimmt. Jedoch werden nun 5 Messungen mit $\varphi = 90°$d 5 mit $\varphi = 120°$ aufgenommen. Die erste Stellung entspricht der aus (Referenz zu Abbildung 1 einfügen) und die zweite der aus (Referenz zu ABB 2 einfügen) Zusätzlich wird das Trägheitsmoment der Holzpuppe theoretisch bestimmt. Um dieses auszurechnen, werden die einzelnen Körperteile als Körper, dessen Trägheitsmomente bekannt sind, genähert. Der Kopf, der linker und rechter Arm, sowie der Oberkörper und das linke und rechte Bein werden hier jeweils als Zylinder angenährert. Dazu wird die Höhe und der Durchmesser des jeweiligen Teils mit einer Schieblehre gemessen. Der Wert wird nun mit dem theoretisch bestimmten Wert verglichen.

4 Auswertung

4.1 Winkelrichtgröße

Die gemessene Kraft in Abhängigkeit vom dem Auslenkungswinkel wird in der Tabelle 1 dargestellt. Mit der Formel $\frac{r \cdot F}{\varphi}$ wird D berechnet. Mithilfe der gemessen Werte für F und φ kann mit $r = 20\,\mathrm{cm}$ nun D bestimmt werden. Die einzelnen Werte von D sind ebenfalls in 1 eingetragen. Mit $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ wird nun das arithmetische Mittel gebildet. Einsetzen der Werte für D und $n = 11$ ergibt $\overline{D} = 0.02\,\mathrm{N\,m}$.

4.2 Eigenträgheitsmoment

In 2 wird das quadrat des Abstandes der Gewichte von der Drehachse zu dem Quadrat der Schwingungsdauer aufgetragen.

Tabelle 1: Tabelle 1

F / N	φ / °	$\boldsymbol{D}$ / N m
0,016	20	0,009
0,046	30	0,018
0,066	40	0,019
0,089	50	0,020
0,11	60	0,021
0,134	70	0,022
0,162	80	0,023
0,176	90	0,022
0,18	100	0,021
0,2	110	0,021
0,23	120	0,022

Tabelle 2: Messwerte

a^2cm	T^2s
2,5	12,75
5	13,84
7,5	15,69
10	18,03
15	23,54
20	29,81
22,5	32,53
25	35,84
27,5	38,87
30	41,81

Mit dem Verhältnis

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathrm{D}} I_D + \frac{m\pi^2}{\mathrm{D}}(2\mathrm{R}^2 + \frac{2}{3}h^2 + 8a^2) \tag{14}$$

,welches aus den Formeln 4, 9 und 3 bestimmt werden kann, kann das Eigenträgheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. In 1 wird T^2 zu a^2 aufgetragen. Die Steigung der Regressionsgerade beträgt dabei 717,69 $\mathrm{s^2/m^2}$ und der $\mathrm{T^2}$-Achsenabschnitt beträgt 6,04 $\mathrm{s^2}$. Entsprechend lässt sich ablesen, dass sich das Eigenträgheitsmoment ausdrücken lässt als

$$I_D = \frac{\mathrm{D} \cdot 6.04}{4\pi^2} - \frac{1}{2}\mathrm{mR}^2 - \frac{1}{6}\mathrm{mh}^2. \tag{15}$$

Die Höhe der Zylinder beträgt dabei 2 cm, der Radius 4,32 cm und die Masse 261 g. Entsprechend ergibt sich für das Eigenträgheitsmoment ein Wert von 0,003 $\mathrm{kg\,m^2}$.

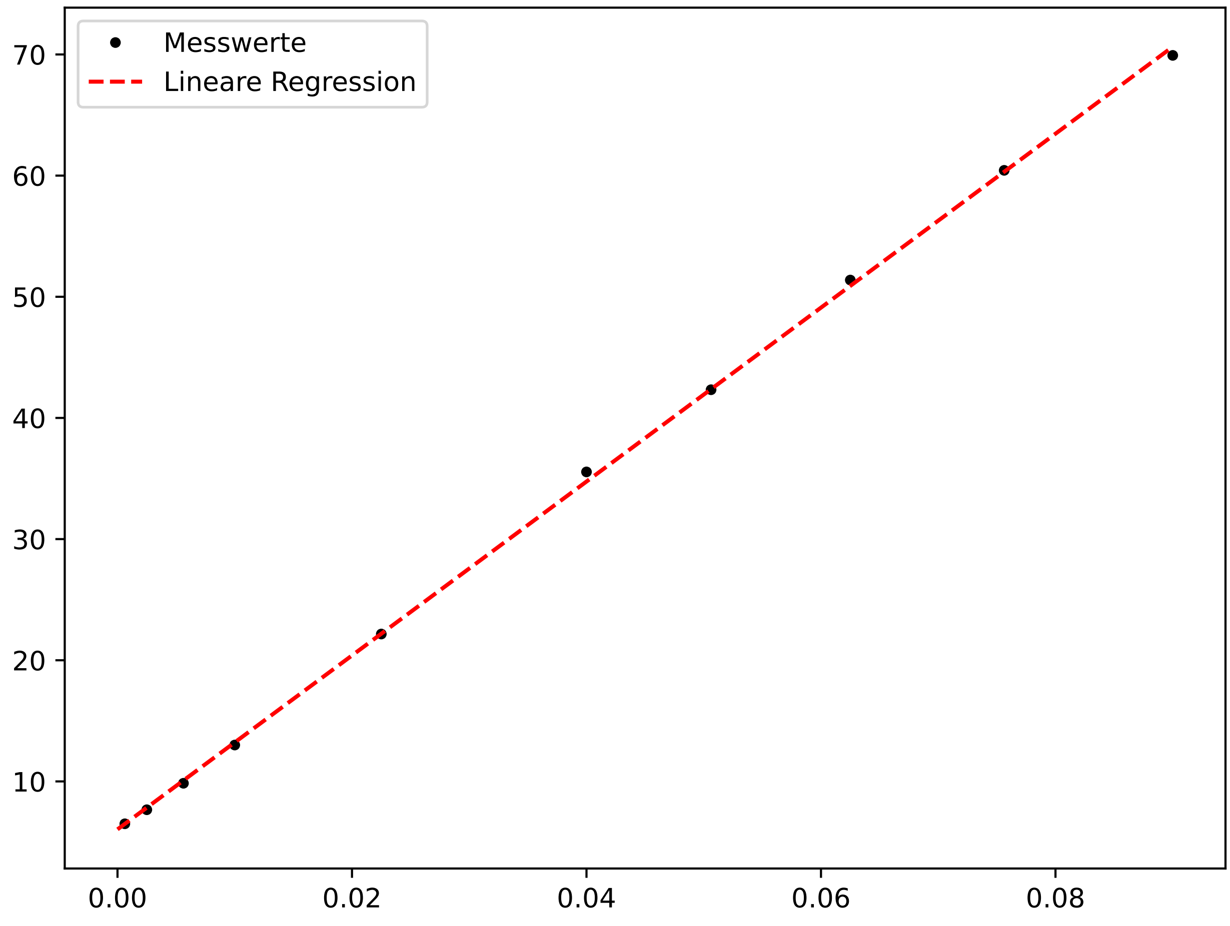

Abbildung 1: Plot.

Tabelle 3: Schwingungsdauern der Figuren mit einer Auslenkung von 90°

n	T[s]
1	9,12
2	9,37
3	9,37
4	9,35
5	9,41

n	T[s]
1	9,22
2	9,32
3	9,50
4	9,15
5	9,22

4.3 Figuren

Die Mittlere Periodendauer der Kugel beträgt hier$(9{,}324 \pm 0{,}052)$ seconds Mithilfe von Gleichungn 4, 15 beträgt das Trägheitsmoment der Kugel $(0{,}041 \pm 0{,}008)\,\mathrm{kg\,m^2}$ und das des Zylinders $(0{,}041 \pm 0{,}002)\,\mathrm{kg\,m^2}$ unter beachtung des Eigenträgheitsmoments.

4.4 Trägheitsmoment der Puppe

Um das Trägheitsmoment der Puppe zu berechnen wurden der Kopf, der Oberkörper und die einzelnen Arme und Beine als Zylinder genähert. Dabei wurde die Höhe der Zylinder einmal abgemessen. Der Durchmesser wurde beim Kopf über 5 und bei den anderen Körperteilen über 10, an verschiedenen Stellen gemessenen, Werte gemittelt. Für die Höhen wurden folgende Werte gemessen:
$h_K = 49{,}9\,\mathrm{mm}$ $h_O = 100{,}9\,\mathrm{mm}$
$h_A = 130{,}3\,\mathrm{mm}$ $h_B = 148{,}6\,\mathrm{mm}$
Die Werte der Durchmesser sind in der Tabelle 4 aufgeführt.

Tabelle 4: Durchmesser der Zylinder der Puppe

$d_K$mm	$d_O$mm	$d_A$mm	$d_B$mm
26,9	40,9	15	15,8
27,95	37,7	12,8	18,9
24,8	25,8	15,7	16,5
21,7	31,2	13,3	15,7
11,6	38,6	11,8	12
	33,1	14,4	16,9
	42	15,1	15,2
	26	12,6	13,2
	33,3	10,1	9,3
	31,9	13,9	14,8

Mit Formel 11 wurden dann Werte für die Durchmesser bestimmt und durch 2 geteilt, um den Radius zu erhalten:
$R_K = 11{,}3\,\mathrm{mm}$
$R_O = 17{,}01\,\mathrm{mm}$
$R_A = 6{,}23\,\mathrm{mm}$
$R_B = 7{,}12\,\mathrm{mm}$

5 Diskussion