

v101

# Das Trägheitsmoment

AUTOR A

benedikt.nelles@tu-dortmund.de

AUTOR B

tom.bollig@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2023

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Bestimmung von $D$ . . . . .	4
3.2	Bestimmung von $I_D$ . . . . .	5
3.3	Bestimmung von $I$ verschiedener Körper . . . . .	5
3.4	Bestimmung von $I$ einer Holzpuppe . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Winkelrichtgröße . . . . .	5
4.2	Eigenträgheitsmoment . . . . .	5
4.3	Figuren . . . . .	8
4.4	Trägheitsmoment der Puppe . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>9</b>

# 1 Theorie

In diesem Versuch soll mithilfe der Schwingungsdauer von einer Kugel, eines Zylinders und einer Puppe an einer Drillachse ihr Trägheitsmoment bestimmt und mit ihren theoretischen Werten verglichen werden.

Das Trägheitsmoment  $\underline{I}$  ist eine Tensorgröße, die starren Körpern zugeordnet werden kann und beschreibt, wie ein Körper sich bei Rotationsbewegungen verhält. Dabei setzt er die Winkelgeschwindigkeit eines Objektes mit dem resultierenden Drehimpuls in Beziehung mit

$$\vec{L} = \underline{I}\vec{\omega}. \quad (1)$$

Die Komponenten des Trägheitsmoments  $\underline{I}$  sind dabei über die Gleichung

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

bestimmt, für den Fall, dass die Drehachse durch den Schwerpunkt des Objekts verläuft. Falls dies nicht der Fall sein sollte, wird der steinersche Satz verwendet.

$$I = I_{\omega} + m d^2 \quad (3)$$

$m$  ist die Masse des Objekts und  $d$  der Abstand zur Drehachse.

Für einen schwingenden Körper kann mit ihm auch die Schwingungsdauer bestimmt werden über

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (4)$$

Dabei beschreibt  $D$  die sogenannte Winkelrichtgröße. Sie ist eine Konstante, die die Proportionalität zwischen dem Auslenkungswinkel des Objekts und dem rückstellenden Drehmoment wiedergibt.

$$M = D\varphi \quad (5)$$

Hierbei beschreibt  $M$  jetzt den Betrag des Drehmoments und  $\varphi$  den Auslenkungswinkel. Alternativ ist das Drehmoment außerdem mit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6)$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \quad (7)$$

beschreibbar.

Die Trägheitsmomente von Zylindern sehen dann entsprechend Gleichung 2 für unterschiedliche Drehachsen so aus.

$$I = \frac{mR^2}{2} \quad (8)$$

Wenn die Rotationsachse senkrecht auf den Kreisoberflächen steht.

$$I = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \quad (9)$$

Wenn die Rotationsachse senkrecht auf der Mantelfläche steht.

Und für Kugeln so.

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \quad (10)$$

Insofern Mittelwerte einer Größe benötigt werden, bestimmt man diese mithilfe von

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (11)$$

und den entsprechenden Fehler mit

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)} \quad (12)$$

Den Fehler in Variablen, die dann von mehreren fehlerbehafteten Größen abhängt wird dann so bestimmt

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2} \quad (13)$$

## 2 Versuchsaufbau

Ziel des Versuches ist, die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu bestimmen. Dafür wird der Körper auf einer Achse befestigt, die die Rotation des Körpers ermöglicht. Diese Drillachse ist mit einer an einem festen Rahmen angebrachten Spiralfeder verbunden. Auf der Halterung befindet sich eine Scheibe auf der sich der Auslenkwinkel ablesen lässt. Der Körper kann nun zum Schwingen gebracht werden und die Schwingungsdauer  $T$  wird mit einer Stoppuhr gemessen. Aus der Schwingungsdauer  $T$ , der Winkelrichtgröße  $D$  und dem Eigenträgheitsmoment der Drillachse  $I_D$  kann dann das Trägheitsmoment  $I$  des Körpers bestimmt werden.

## 3 Durchführung

### 3.1 Bestimmung von $D$

Die Winkelrichtgröße  $D$  wird mit der Formel  $\frac{r \times F}{\varphi}$  berechnet. Um diese Größen zu messen wird erst eine Eisenstange, die senkrecht zu Drehachse ausgerichtet ist, in der Halterung für die Körper befestigt. Nun wird eine Federwage in der Entfernung  $r = 20\text{cm}$  von der Drehachse eingehängt. Dann wird diese um den Winkel  $\varphi$  ausgelenkt und die Kraft wird an der Federwage abgelesen. Dabei muss die Federwage senkrecht zur Eisenstange sein, da dadurch die Formel zu  $\frac{r \cdot F}{\varphi}$  vereinfacht wird. Die Messung wurde 11 mal durchgeführt und das arithmetische Mittel bestimmt um einen genaueren Wert zu erhalten.

### 3.2 Bestimmung von $I_D$

Um das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  zu bestimmen werden nun Gewichte an der Eisenstange angebracht. Diese wird daraufhin um den Winkel  $\varphi = 90^\circ$  ausgelenkt und zum schwingen gebracht. Jetzt wird  $5 \cdot T$  mit der Stoppuhr gemessen. Der Faktor 5 wird verwendet um das Messen zu vereinfachen. Diese Messung wird 10 mal für verschiedene Abstände  $a$  durchgeführt. Das Eigenträgheitsmoment der Drillachse wird nun nach auftragen von  $T^2$  zu  $a^2$  durch lineare Regression bestimmt.

### 3.3 Bestimmung von $I$ verschiedener Körper

Die beiden Körper werden an der Halterung befestigt und um einen Winkel von  $\varphi = 90^\circ$  ausgelenkt. Mit der Stoppuhr wird  $5 \cdot T$  bestimmt. Dies wird 10 mal durchgeführt und das arithmetische Mittel bestimmt. Da  $T$  nun bekannt ist kann mithilfe der Formel (Referenz aus dem Theorieteil einfügen)  $I$  ausgerechnet werden.

### 3.4 Bestimmung von $I$ einer Holzpuppe

Analog zur Bestimmung der anderen beiden Körper wird das Trägheitsmoment einer Holzpuppe für zwei verschiedene Stellungen bestimmt. Jedoch werden nun 5 Messungen mit  $\varphi = 90^\circ$  und 5 mit  $\varphi = 120^\circ$  aufgenommen. Die erste Stellung entspricht der aus Abbildung ?? und die zweite der aus Abbildung ?? Zusätzlich wird das Trägheitsmoment der Holzpuppe theoretisch bestimmt. Um dieses auszurechnen, werden die einzelnen Körperteile als Körper, dessen Trägheitsmomente bekannt sind, genähert. Der Kopf, der linker und rechter Arm, sowie der Oberkörper und das linke und rechte Bein werden hier jeweils als Zylinder angenähert. Dazu wird die Höhe und der Durchmesser des jeweiligen Teils mit einer Schieblehre gemessen. Der Wert wird nun mit dem theoretisch bestimmten Wert verglichen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Winkelrichtgröße

Die gemessene Kraft in Abhängigkeit vom dem Auslenkungswinkel wird in der Tabelle 1 dargestellt. Mit der Formel  $\frac{r \cdot F}{\varphi}$  wird  $D$  berechnet. Mithilfe der gemessenen Werte für  $F$  und  $\varphi$  kann mit  $r = 20 \text{ cm}$  nun  $D$  bestimmt werden. Die einzelnen Werte von  $D$  sind ebenfalls in 1 eingetragen. Mit  $\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  wird nun das arithmetische Mittel gebildet. Einsetzen der Werte für  $D$  und  $n = 11$  ergibt  $\bar{D} = 0.02 \text{ N m}$ .

### 4.2 Eigenträgheitsmoment

In Tabelle 2 wird das Quadrat des Abstandes der Gewichte von der Drehachse zu dem Quadrat der Schwingungsdauer aufgetragen.

**Tabelle 1:** Kraft in Abhängigkeit zum Auslenkungswinkel

$F / \text{N}$	$\varphi / ^\circ$	$D / \text{N m}$
0,016	20	0,009
0,046	30	0,018
0,066	40	0,019
0,089	50	0,020
0,11	60	0,021
0,134	70	0,022
0,162	80	0,023
0,176	90	0,022
0,18	100	0,021
0,2	110	0,021
0,23	120	0,022

**Tabelle 2:** Zeitquadrat vom Abstandsquadrat

$a^2 \text{cm}$	$T^2 \text{s}$
2,5	12,75
5	13,84
7,5	15,69
10	18,03
15	23,54
20	29,81
22,5	32,53
25	35,84
27,5	38,87
30	41,81

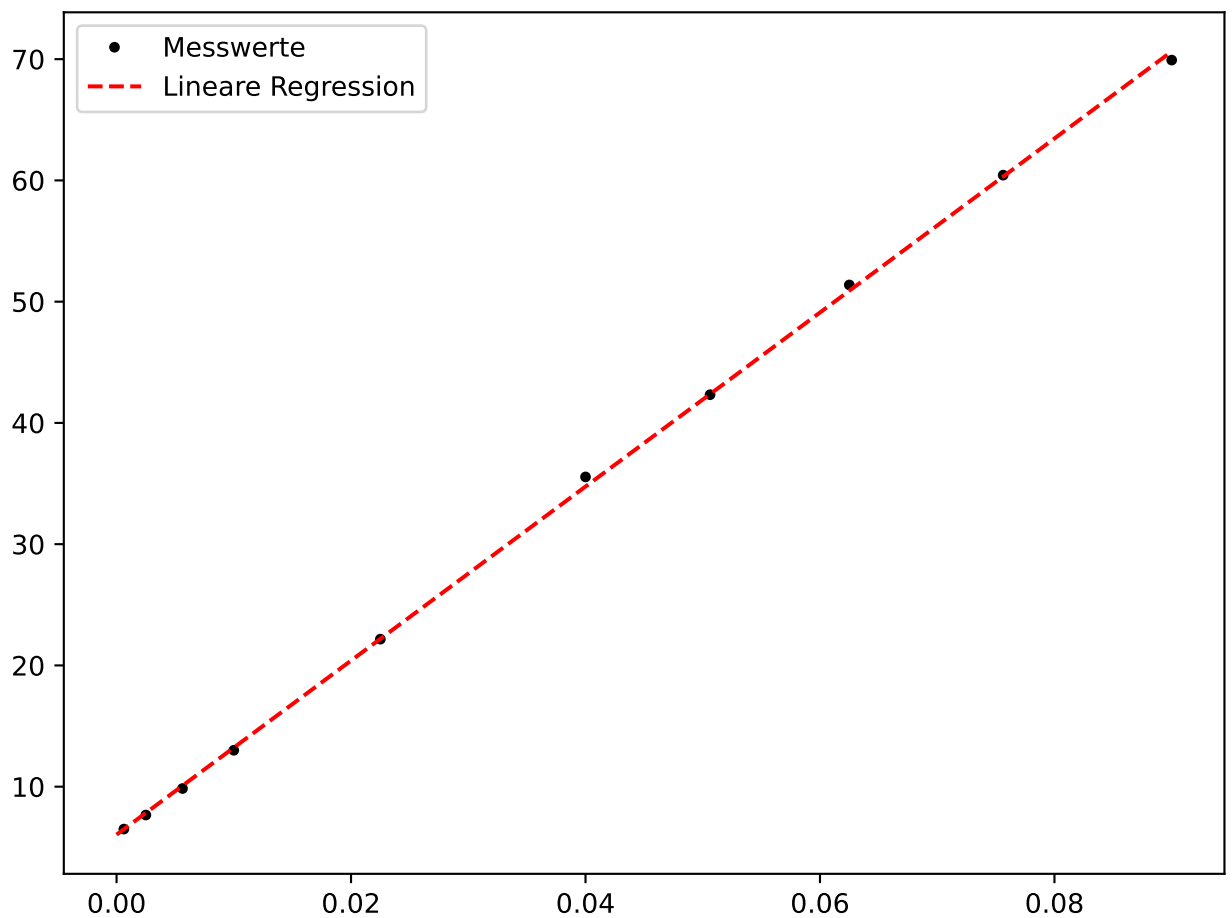
Mit dem Verhältnis

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} I_D + \frac{m\pi^2}{D} (2R^2 + \frac{2}{3}h^2 + 8a^2) \quad (14)$$

,welches aus den Formeln 4, 9 und 3 bestimmt werden kann, kann das Eigenträgheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. In 1 wird  $T^2$  zu  $a^2$  aufgetragen. Die Steigung der Regressionsgerade beträgt dabei  $717,69 \text{ s}^2/\text{m}^2$  und der  $T^2$ -Achsenabschnitt beträgt  $6,04 \text{ s}^2$ . Entsprechend lässt sich ablesen, dass sich das Eigenträgheitsmoment ausdrücken lässt als

$$I_D = \frac{D \cdot 6.04}{4\pi^2} - \frac{1}{2}mR^2 - \frac{1}{6}mh^2. \quad (15)$$

Die Höhe der Zylinder beträgt dabei 2 cm, der Radius 4,32 cm und die Masse 261 g. Entsprechend ergibt sich für das Eigenträgheitsmoment ein Wert von  $0,003 \text{ kg m}^2$ .



**Abbildung 1:** lineare Regression von  $T^2$  abhängig von  $a^2$

**Tabelle 3:** Schwingungsdauern der Figuren mit einer Auslenkung von  $90^\circ$ 

$n$	$5T[\text{s}]$	$n$	$5T[\text{s}]$
1	9,12	1	9,22
2	9,37	2	9,32
3	9,37	3	9,50
4	9,35	4	9,15
5	9,41	5	9,22

### 4.3 Figuren

Die Mittlere Periodendauer der Kugel beträgt hier  $(9,324 \pm 0,052)$  seconds Mithilfe von den Gleichungen 4 und 15 beträgt das Trägheitsmoment der Kugel  $(0,041 \pm 0,008) \text{ kg m}^2$  und das des Zylinders  $(0,041 \pm 0,002) \text{ kg m}^2$  unter beachtung des Eigenträgheitsmoments.

### 4.4 Trägheitsmoment der Puppe

#### 4.4.1 experimentelle Bestimmung von Stellung 1

Um das Trägheitsmoment zu bestimmen wurden 5 Werte mit einem Auslenkungswinkel von  $\varphi = 90^\circ$  und 5 mit  $\varphi = 120^\circ$  aufgenommen. Diese Werte sind in Tabelle ?? eingetragen.

**Tabelle 4:** Schwingungsdauern der Puppe in Stellung 1 mit einer Auslenkung von  $90^\circ$  /  $120^\circ$ 

$n$	$5T[\text{s}]$	$n$	$5T[\text{s}]$
1	3	1	2,78
2	2,9	2	3
3	2,87	3	2,94
4	2,9	4	3,18
5	2,97	5	3,07

Die Mittlere Periodendauer ist  $5T = 2,961$  seconds Durch die Gleichungen 4 und 15 lässt sich, wie bei Kugel und Zylinder, das Trägheitsmoment berechnen. Dieses beträgt also mit  $I_1 - I_D = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$   $I_1 = -29,82 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

#### 4.4.2 experimentelle Bestimmung von Stellung 2

Die in der zweiten Stellung bestimmten Werte sind in Tabelle ?? aufgelistet.

Die Mittlere Periodendauer ist  $5T = 4,023$  seconds Analog zu Stellung 1 kann  $I_2$  berechnet werden. Demnach gilt  $I_2 - I_D = 3,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$  und  $I_2 = -29,67 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .



**Tabelle 5:** Schwingungsdauern der Puppe in Stellung 2 mit einer Auslenkung von  $90^\circ$   
/  $120^\circ$

$n$	$5T[s]$	$n$	$5T[s]$
1	4	1	3,97
2	4,1	2	3,94
3	4	3	3,93
4	4,16	4	4,06
5	3,94	5	4,13

#### 4.4.3 Berechnung des Trägheitsmomentes

Um das Trägheitsmoment der Puppe zu berechnen wurden der Kopf, der Oberkörper und die einzelnen Arme und Beine als Zylinder genähert. Dabei wurde die Höhe der Zylinder einmal abgemessen. Der Durchmesser wurde beim Kopf über 5 und bei den anderen Körperteilen über 10, an verschiedenen Stellen gemessenen, Werte gemittelt. Für die Höhen wurden folgende Werte gemessen:

$$h_K = 49,9 \text{ mm} \quad h_O = 100,9 \text{ mm}$$

$$h_A = 130,3 \text{ mm} \quad h_B = 148,6 \text{ mm}$$

Die Werte der Durchmesser sind in der Tabelle 4 aufgeführt.

**Tabelle 6:** Durchmesser der Zylinder der Puppe

$d_K \text{ mm}$	$d_O \text{ mm}$	$d_A \text{ mm}$	$d_B \text{ mm}$
26,9	40,9	15	15,8
27,95	37,7	12,8	18,9
24,8	25,8	15,7	16,5
21,7	31,2	13,3	15,7
11,6	38,6	11,8	12
	33,1	14,4	16,9
	42	15,1	15,2
	26	12,6	13,2
	33,3	10,1	9,3
	31,9	13,9	14,8

Mit Formel 11 wurden dann Werte für die Durchmesser bestimmt und durch 2 geteilt, um den Radius zu erhalten:

$$R_K = 11,3 \text{ mm} \quad R_O = 17,01 \text{ mm}$$

$$R_A = 6,23 \text{ mm} \quad R_B = 7,12 \text{ mm}$$

Für die Berechnung der Trägheitsmomente sind die Massen der einzelnen Körperteile notwendig. Dafür wurde mit einer Waage zuerst die Gesamtmasse der Puppe gemessen:  $m_{ges} = 169,3 \text{ g}$  Für die Massen der einzelnen Körperteile wurden dann die Annahme getroffen, dass die Massenverteilung in der Puppe vollständig homogen ist. Mithilfe dieser Annahme können die Teilmassen, mit dem Anteil des jeweiligen Volumens an dem des gesamten Körpers, berechnet werden. Für die Volumina gilt:

$$V_{ges} = 151,29 \text{ cm}^3$$

$$V_K = 20 \text{ cm}^3 \text{ Anteil am Gesamtvolumen: } 13,23 \%$$

$$V_O = 91,72 \text{ cm}^3 \text{ Anteil am Gesamtvolumen: } 60,62 \%$$

$$V_A = 15,89 \text{ cm}^3 \text{ Anteil am Gesamtvolumen: } 10,5 \%$$

$$V_B = 23,67 \text{ cm}^3 \text{ Anteil am Gesamtvolumen: } 15,64 \%$$

Für die einzelnen Massen gilt damit:

$$m_K = 22,4 \text{ g}$$

$$m_O = 102,63 \text{ g}$$

$$m_A = 17,78 \text{ g}$$

$$m_B = 26,48 \text{ g}$$

#### 4.4.4 Berechnung des Trägheitsmomentes für Stellung 1

Hier wird die Puppe so aufgestellt, wie in (...) gezeigt. Das Gesamtträgheitsmoment setzt sich aus  $I_{ges} = I_K + I_O + 2I_A + 2I_B - I_D$  zusammen. Nun kann das Trägheitsmoment des Kopfes und des Oberkörpers mit Formel 8 berechnet werden. Dadurch ergibt sich:

$$I_K = 1,43 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

$$I_O = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Für das Trägheitsmoment des Beins muss Formel 8 und der Satz von Steiner angewendet werden, da der Schwerpunkt des Beines nicht in der Drehachse liegt. Daraus folgt  $I_B = m_B(\frac{R_B^2}{2} + a_B^2)$ . Hier entspricht  $a_B$  der Entfernung vom Schwerpunkt des Beins zur Drehachse, was in dieser Stellung  $a_B = 11,35 \text{ mm}$  entspricht. Mit dem Einsetzen aller Werte in die Formel ergibt sich  $I_B = 4,11 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ .

Bei dem Arm muss Formel 9 und ebenfalls der Satz von Steiner verwendet werden. Dabei ergibt sich die Formel  $I_A = m_A(\frac{R_A^2}{4} + \frac{h_A^2}{12} + a_A^2)$ . Hier entspricht mit  $a_A = R_O + \frac{h_A}{2}$   $a_A = 73,75 \text{ mm}$ . Daraus folgt  $I_A = 1,09 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

$$\text{Mit } I_{ges} = I_K + I_O + 2I_A + 2I_B - I_D \text{ folgt } I_{ges1} - I_D = 2,43 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$I_{ges1} = -2,76 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

#### 4.4.5 Berechnung des Trägheitsmomentes für Stellung 2

Jetzt wird die Puppe wie in (...) aufgestellt. Hier kann das Trägheitsmoment des Kopfes und des Oberkörpers völlig analog zu Stellung 1 berechnet werden.

Für das Trägheitsmoment des Beins muss Formel 9 und der Satz von Steiner angewendet werden, da der Schwerpunkt des Beines nicht in der Drehachse liegt. Daher gilt  $I_B = m_B(\frac{R_B^2}{4} + \frac{h_B^2}{12} + a_B^2)$ . In dieser Stellung ist  $a_B = \sqrt{11.35^2 + (\frac{h_B}{2})^2} = 75,16 \text{ mm}$ . Mit dem Einsetzen aller Werte in die Formel ergibt sich  $I_B = 1,99 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

Bei dem Arm kann die Berechnung wieder mit  $I_A = m_A(\frac{R_A^2}{4} + \frac{h_A^2}{12} + a_A^2)$  durchgeführt werden.  $a_A$  wird mit  $a_A = \sqrt{(R_0 + R_A)^2 + (\frac{h_A}{2})^2} = 69,17 \text{ mm}$ . Damit entspricht  $I_A = 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

Mit  $I_{ges} = I_K + I_O + 2I_A + 2I_B - I_D$  folgt  $I_{ges2} - I_D = 6,22 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$   
 $I_{ges2} = -2,34 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

## 5 Diskussion

### 5.1 negative Trägheitsmomente

Dass die die Trägheitsmomente für die Figuren und Puppe negativ sind ist physikalisch nicht möglich. Dies war bei den gemessenen und berechneten Werten jedoch der Fall. Da dies auch bei den berechneten Werten auffällt, ist davon auszugehen, dass der Fehler in der Berechnung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse liegt.  $I_D$  war nämlich der einzig negative Term in der Berechnung. Außerdem war dieser der einzige Wert, der in beiden Methoden zur Bestimmung des Trägheitsmomentes verwendet wurde. Das Eigenträgheitsmoment wurde unter der Annahme, dass das Trägheitsmoment, des zur Drehachse senkrechten Eisenstabes, vernachlässigbar sei, berechnet. Dies ist eine mögliche Quelle des Fehlers, neben möglichen Fehlern bei der Messung und Fehlern bei der Regression.

### 5.2 Vergleich mit berechneten Werten

Im folgenden werden daher die Werte ohne Einbeziehen des Eigenträgheitsmomentes betrachtet. In Stellung 1 entspricht der experimentell bestimmte Wert im Vergleich zum berechneten  $\frac{I_1}{I_{ges1}} = 73,25 \%$ . In Stellung 2 ist das Verhältnis  $\frac{I_2}{I_{ges2}} = 52,73 \%$ .

Verglichen mit dem theoretisch bestimmten Wert weicht der experimentell bestimmte also in Stellung 1 um 26,75 % und in Stellung 2 um 47,27 % ab. Dies kann zwar auf Messfehler hinweisen, jedoch sollte die grobe Näherung der Puppe, mit den Körperteilen als Zylinder, eine relativ große Fehlerquelle bei dem theoretisch bestimmten Wert darstellen. Zudem kann hier auch das Vernachlässigen des Trägheitsmomentes der Drillachse zu einem Fehler führen.