

Лекция №1: Метод математического моделирования в экономике

Список литературы

- Экономико-математическое моделирование Дрогобыцкого И.Н.
- Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория.
- Нуреев Р.М. Курс микроэкономики: учебник.

План

1. Экономика как объект изучения и как наука (Нуреев);
2. Метод математического моделирования экономики (Модель, типы переменных в модели, два класса моделей, две формы модели);
3. Предельные величины и эластичность в экономике;

Экономика как объект изучения и как наука

Экономика как объект изучения представляет собой совокупность или множество институтов, деятельность которых направлена на деятельность удовлетворения потребностей населения в ситуации ограниченных ресурсов. Основными объектами микроэкономики являются:

1. Фирмы, производящие блага (товары или услуги) и продающие эти блага на рынке;
2. Домашние хозяйства являющиеся потребителями благ и в нашем курсе мы будем изучать методом математического моделирования поведение потребителей благ и фирм при их взаимодействии на рынке;

Экономика как наука занимается изучением упомянутых выше институтов с целью улучшения их деятельности. Как наука экономика по традиции разделяется на микроэкономику и макроэкономику.

В любом изучаемом экономическом объекте мы будем выделять известные характеристики:

$$x_1, x_2, \dots, x_k \quad (1)$$

, искомые характеристики

$$y_1, y_2, \dots, y_m \quad (2)$$

и взаимосвязи величин (1) и (2)

$$F(\vec{y}, \vec{x}) \quad (3)$$

Экономика как наука представляет собой сформулированные взаимосвязи наиболее значимых известных и искомых характеристик микро- и макро- экономических объектов.

В методе математического моделирования изучения экономики упомянутые выше взаимосвязи описываются математическим языком и в результате такой записи возникает математическая модель объекта.

Определение. Экономико-математическая модель (ЭММ) объекта - это некоторое математическое выражение (график или таблица, уравнение или система уравнений, дополненная, возможно, неравенствами, условие экстремума), связывающее воедино известные характеристики объекта (1) и его искомые характеристики (2)

Терминология. Известные характеристики (1) - это экзогенные переменные модели, искомые величины (2) - это эндогенные переменные модели.

ЭКЗ. ПЕРЕМЕННЫЕ \Rightarrow МОДЕЛЬ \Rightarrow ЭНД. ПЕРЕМЕННЫЕ

Два класса экономико-математических моделей

Всё множество математических моделей, математических объектов можно разделить на два класса. В первый класс относятся модели, которые описывают изучаемые объекты такими какими эти объекты являются в реальности модели входящие в этот класс принято называть дескриптивными (описательными) моделями. Вот самый общий вид таких моделей:

$$F(\vec{y}, \vec{x}) = 0; \quad (4)$$

Здесь символом \vec{y} обозначен набор эндогенных переменных (2), символом \vec{x} набор экзогенных переменных (1), символом F обозначены записанные математическим языком взаимосвязи величин (1) и (2). Модель (4) задаёт эндогенные переменные \vec{y} , как неявные функции экзогенных переменных \vec{x} . Выражение (4) это всегда система уравнений (линейные алгебраические, нелинейные, дифференциальные уравнения и возможно интегральные уравнения). Количество уравнений непременно совпадает с количеством эндогенных переменных. Дескриптивные модели.

Во второй класс включаются модели в которых отыскиваются такие значения эндогенных переменных, которые удовлетворяют некоторому требованию оптимальности, вот самый общий вид таких моделей:

$$\begin{cases} \phi = \phi(\vec{x}; \vec{y}) \rightarrow \text{ext}(\min, \max), \\ \vec{y} \in Y_{\vec{x}} \end{cases} \quad (5)$$

В первой строчке выражения (5) записано требование оптимальности к значениям эндогенных переменных \vec{y} . Во второй строчке минимальные требования к эндогенным переменным. Символом Y мы обозначили множество допустимых

значений \vec{y} и это множество в общем случае зависит от экзогенных переменных \vec{x} . Модели входящие во второй класс принято именовать *оптимизационными* в математике такие модели называются задачами математического программирования на условный экстремум. Функция ϕ именуется целевой функцией или иногда критерием. Добавим к сказанному, что выражения (4) и (5) принято называть структурной формой соответственно дискриптивные и оптимизационной модели.

Приведённая форма модели предельные величины и эластичность в экономике

Для расчёта по модели (4) или (5) её необходимо трансформировать к приведённой форме: $\vec{y} = f(\vec{x})$. Пример трансформации модели (4) к приведённой форме обсуждён на занятиях (семинар №1 и №2). Приведённая форма модели позволяет получить взаимосвязь заданных изменений экзогенных переменных с возникающими в ответ изменениями эндогенных переменных.

$$\Delta \vec{y} = f'(\vec{x}) \cdot \Delta \vec{x} \quad (6)$$

Символом $f'(\vec{x})$ обозначена матрица частных производных, которая в математике называется *матрица Якоби*; её элементы имеют смысл изменений эндогенных переменных в ответ $\Delta \vec{y}$ в ответ на единичные изменения экзогенных переменных и называются такие элементы *предельными значениями эндогенных переменных*.

Проиллюстрируем понятие предельных величин экономики на примере простейшей модели спроса на некоторое благо.

$$y_t^d = a_0 + a_1 p + a_2 x$$

Коэффициент a_1 имеет смысл изменения спроса на данное благо в ответ на повышение цены на одну единицу. Этот коэффициент носит название *предельного спроса по цене*. Коэффициент a_2 имеет смысл изменения спроса на данное благо в ответ на увеличение дохода потребителя x на единицу. Его можно посчитать по следующему правилу

$$M_y(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = a_2$$

$$M_y(p) = \frac{\partial y}{\partial p} = a_1$$

Формула (6) подробно выглядит так:

$$\Delta y = a_0 + \frac{\partial y}{\partial p} p + \frac{\partial y}{\partial x} x$$

Матрица

$$f'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Вектор

$$\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

Определение эластичности

Помимо предельных величин в экономике в процессе анализа объекта методом математического моделирования постоянно используется эластичность эндогенных переменных по экзогенным. Эластичность определяется по следующему правилу:

$$E_{y_i}(x_j) = \frac{\Delta y_i}{y_i} : \frac{\Delta x_j}{x_j} \quad (7)$$

является безразмерной величиной, позволяет вычислить относительные изменения эндогенной переменной в ответ на заданное изменение соответствующей экзогенной переменной $\frac{\Delta x_j}{x_j}$. Эластичность имеет смысл относительного изменения эндогенной переменной в % в ответ на относительное изменение экзогенной переменной на 1%.

Из определения эластичности можно получить следующую формулу для её расчёта.

$$E_{y_i}(x_j) = \frac{\Delta y_i}{x_j} : \frac{y_i}{x_j} = M_{y_i}(x_j) : A_{y_i}(x_j)$$

Делитель в правой части имеет среднее значение $\frac{y_i}{x_j}$

Итог. При изучении экономического объекта методом математического моделирования создаётся модель одного из двух классов: дискриптивная или оптимизационная. Искомые характеристики объекта и анализ объекта осуществляются при помощи приведённой формы модели.