Семинар №6

$$\begin{cases} C_{2003} \ = \ a_0 \ + \ a_1 \ \cdot Y_{2002} \ + \ a_2 \ \cdot Cr_{2003} \ + \ a_3 \ \cdot San_{2003} \ + \ u_{2003}; \\ C_{2017} \ a_0 \ + \ a_1 \ \cdot Y_{2016} \ + \ a_2 \ \cdot Cr_{2017} \ + \ a_3 \ \cdot San_{2017} \ + \ u_{2017}; \end{cases}$$

$$P \ = \left(a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3; \ \sigma_u^2\right)$$

Компактная запись:

$$\vec{y} \ = \ X \ \cdot \overrightarrow{a} \ + \ \vec{u};$$

Ситуации уравнений (2) наблюдений составить формулу в компактную запись (4) этих уравнений.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_{2003} \\ \dots \\ C_{2017} \end{pmatrix}; \ \vec{a} \ = \ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; X \ = \ \begin{pmatrix} 1 & Y_{2002} & Gr_{2003} & San_{2003} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Y_{2016} & Gr_{2017} & San_{2017} \end{pmatrix}; \vec{u} \ = \ \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix}$$

Обратим внимание, что первый столбец матрицы X, состоит из 1 тогда и только тогда, когда есть сводный член a_0. Вспоминая действия с матрицами мы проверим, что элементы компактной записи (5), модели (2), идентичны системе (2).

Тогда в итоге получится:

$$\begin{pmatrix} C_{2003} \\ \dots \\ C_{2017} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & Y_{2002} & Gr_{2003} & San_{2003} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Y_{2016} & Gr_{2017} & San_{2017} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \ + \ \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ составить элементы компактной запись, остальных двух элементов модифицированной модели Самуэльсона-Хикса.

Случайный вектор и его основные характеристики

Обратимся к компактной записи (4) и подчеркнём, что вектор случайных возмущений $\vec{u}$ предсавляет собой набор величин случайного вектора. У случайного вектора есть две важнейшие для практики количественные характеристики:

1. Математическое ожидание

$$E\left(\vec{u}\right) \ = \ \begin{pmatrix} E(u_1) \\ \dots \\ E(u_n) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \vec{0};$$

2. Ковариация:

$$Cov(\vec{u},\vec{u}) \; = \; V(\vec{u}) \; = \; \begin{pmatrix} \sigma_{u_1}^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{u_2}^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{u_n}^2 \end{pmatrix}$$

Обычно постурируется некоррелированность элементов случайного вектора (вектора случайных возмущений) и поэтому коварционная матрица в вкекторе случайных возмущений (2) будет выглядить так:

$$Cov(\vec{u},\vec{u}) \; = \; \sigma_u^2 \; \cdot \; I \; \text{(еденичная матрица)}$$

Основные количественные характеристики аффинного преобразования случайного вектора

$$\vec{v} \; = \; A \; \cdot \vec{u} \; + \; \vec{b}$$

Аффинным преобразование $\vec{u}$ является вектор $\vec{v}$, который рассчитывается по формуле (8).

Вот важное для практики правила рассчёта основных характеристик вектора $\vec{b}$.

$$E(\vec{v}) \; = \; A \; \cdot \; E(\vec{u}) \; + \; b;$$
$$Cov(\vec{u},\vec{u}) \; = \; A \; \cdot \; Cov(\vec{u},\vec{u}) \; \cdot \; A^T;$$

Пусть в схеме Гаусса-Маркова (4) вектор $\vec{u}$ является случайным с остальными характеристиками и коварционная матрица имеет вид (7'), $\vec{a}$ и X является не случайными, показать:

1. Что вектор $\vec{y}$ будет случайным;
2. Определить его характеристики;

В правой части (4) первое слагаемое $X \cdot \vec{a} \; = \; \alpha$ −это вектор констант, его смысл смотри ниже, а второй вектор случайный $\vec{u}$ и мы можем трактовать вектор $\vec{y}$ выражения (4), как афинное преобразование ветора $\vec{u}$. Рассматривая уравнение (4) мы убеждаемя, что матрица A является единичной и мы можем использовать вот эти важные для практики формулы:

$$E(\vec{y}) \; = \alpha \; + \; I \cdot E(\vec{u}) (= 0) \; = \; \alpha$$

Первое слагаемое в правой части (4) имеет смысл ожидаемого значения вектора $\vec{y}$, т.е. первое слагаемое состоит из компонент равных ожидаемых значений ($E(\vec{y})$) эндогенной переменной модели.

Тогда:

$$Cov(\vec{y},\; \vec{y}) = I \; \cdot \; Cov(\vec{u},\vec{u}) \; \cdot \; I^T \; = \; Cov(\vec{u},\vec{u}) \, ; \; = \; \sigma_u^2 \; \cdot \; I$$

Свойство оценок параметров методом наименьших квадратов

На сегодняшней лекции мы сформулируем важный для практики результат ,состоящая в том, что оптимальные оценки коэффициентов вектора $\vec{a}$ из уравнения коэффициентов (4) вычисляются по правилу (11):

$$\widetilde{\vec{a}} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{y};$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Показать, что вектор $\widetilde{\vec{a}}$ является случайным и опираясь на форммулы (9) найти ожидаемое значение вектора ($E\left(\widetilde{\vec{a}}\right) - ?$) и его коварриционную матрицу ($Cov\left(\widetilde{\vec{a}}, \widetilde{\vec{a}}\right) -?$).