Микроэкономика
Домашняя работа №4 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Рассчитать спрос потребителя по модели Маршала-Вальраса принимая в качестве функции полезности *неоклассическую* функцию:

$$u = a_0 \ (a_0 = 1) \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$

Параметры этой функции и значения переменных принять такими же как в аудиторных задачах.

Решение:

Для начала в качестве напоминания приведём определение модели Маршала-Вальраса. **Суть** этой модели следующая: потребитель приобретает такой набор благ $\vec{x}^* = \left(x_1^*, \ \dots, \ x_n^*\right)$, который с одной стороны ему максимально полез, а с другой стороны по карману. Математическая запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} u = u(x_1, \ \dots, \ x_n) \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M \\ x_1 \ge 0, \ \dots, \ x_n \ge 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы расчитать спрос потребителя необходимо трансформировать модель к приведённой форме методом Лагранжа:

$$L = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} + l(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} - p_1 l = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a_2 x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} - p_2 l = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему методом подстановки:

$$l = \frac{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}}{p_1}$$

Делаем подстановку во второе уравнение:

$$a_2 x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} - p_2 \frac{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}}{p_1} = 0$$

$$\frac{a_2 x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} p_1}{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} p_2} = 1 \Rightarrow \frac{a_2 x_1 p_1}{a_1 x_2 p_2} = 1 \Rightarrow x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2}$$

Подствалям в третье уравнение:

$$M - \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2} - p_2 x_2 = 0 \Rightarrow M - p_2 x_2 \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \right) = 0$$

$$\frac{M a_2}{a_1 + a_2} = p_2 x_2 \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{M a_2}{(a_1 + a_2) p_2}}$$

Теперь вычислим x_1^*:

$$x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2} \Rightarrow x_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2 p_1} \Rightarrow x_1^* = \frac{a_1 \frac{M a_2}{(a_1 + a_2) p_2} p_2}{a_2 p_1} = \boxed{\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}}$$

Подставим значения в x_1^*, x_2^*:

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} = \frac{0.1 \cdot 200}{0.3 \cdot 50} = 1.33$$

$$x_2^* = \frac{M a_2}{(a_1 + a_2) p_2} = \frac{200 \cdot 0.2}{(0.1 \ + 0.2) \cdot 75} = 1.77$$

Расчитаем функцию полезности:

$$u = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = 1.33^{0.1} \cdot 1.77^{0.2} = 1.15340...$$

Задача №2. Показать, что и для неоклассической функции свойство однородности сохраняется.

Решение:

Требуется показать, что спрос потребителя остаётся неизменным, если его бюджет и цены благ изменяются одновременно в некоторое кол-во k.

Для этого воспользуемся ранее полученными результами и увериличим p и M в k раз:

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \Rightarrow \frac{a_1 M \cdot k}{(a_1 + a_2) p_1 \cdot k} = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}$$

$$x_2^* = \frac{M a_2}{(a_1 + a_2) p_2} \Rightarrow \frac{a_2 M \cdot k}{(a_1 + a_2) p_2 \cdot k} = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \blacksquare$$

Задача №3. Можно показать, что предельное значение u^* по бюджету потребителя M в точности равно множителю Лагранжа.

Решение:

Вычислим производую от неоклассической функции потребления по бюджету M:

$$u = a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln x_2$$

$$u^* = a_1 \cdot \ln \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \right) + a_2 \cdot \ln \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = \frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M} = \frac{a_1 + a_2}{M} = \frac{0.3}{200} = 0.0015 \blacksquare$$

Трактовка множителя l следующая: это дополнительная полезность по Маршалу-Вальрасу, которая возникает в ответ на дополнительную еденичу денежных средств

M.