План

1. Структурная форма модели Маршалла-Вальраса;
2. Функция косвенной полезности;
3. Проверка $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлом занятии мы обсудили понятие функции полезности. И отметили её свойства. Сейчас это понятие мы привлечём в процессе обсуждения модели поведения потребителя. Суть этой модели следующая:

Потребитель приобретает такой набор благ: $\vec{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, который с одной стороны ему максимально полез, а с другой стороны по карману (модель Маршалла-Вальраса):

$$\begin{cases} u = u(x_1, \ldots, x_n) \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \le M \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

Экзогенными переменными в этой модели Маршалла-Вальраса являются:

$$(M \; - \text{бюджет}, p_1, \ldots, p_n \; (- \text{цена})) \tag{2}$$

Эндлогенными переменными в этой модели Маршалла-Вальраса являются наборы благ:

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Модель (1) служит примером задачи математического программирования на условный экстремум (Смотри lec_01).

К приведённой форме модель (1) трансформируется методом Лагранжа:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = u(x_1, \ldots, x_n) + l \left(M - \sum\limits_i p_i \, x_i \right)$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = 0; \\ i = (1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3}$$

3. Эти условия представляют систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ переменной.

Система (3) решается либо аналитически, либо численно. Итогом решения является: $\vec{x}^* = \vec{x}^{M-B}(M, p_1, \ldots, p_n)$ и множитель Лагранжа $l = l(M, p_1, \ldots, p_n)$.

Задача.

Пусть функцией полезности потребителя служит логарифм Бернулли в ситуации двух благ эта функция имеет уравнение:

$$u = a_1 (= 0.1) \cdot \ln x_1 + a_2 (= 0.2) \cdot \ln x_2$$

Дано:

$\vec{x} = (x_1$ (= молоко)$, x_2$ (= хлеб)$)$

$M = 200$

$p_1 = 50$ р/кг

$p_2 = 75$ р/л

Найти:

Набор благ который приобретёт потребитель.

$$u = a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln x_2 + l(M - (50x_1 + 75x_2)) =$$
$$= a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln x_2 + Ml - 50x_1 l - 75x_2 l$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1} - 50l = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2} - 75l = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = M - 50x_1 - 75x_2 = 0; \end{cases}$$

$$M - \frac{50a_1}{50l} - \frac{75a_2}{75l} = 0$$

$$M = \frac{a_1}{l} + \frac{a_2}{l}$$

$$Ml = a_1 + a_2$$

Таким образом по правилам (5) рассчитывается спрос потребителя по Маршалу-Вальрасу. Доведём до чисел:

$$l = \frac{a_1 + a_2}{M} = \frac{0.3}{200} = 0.0015 \tag{4}$$

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1} = \frac{0.1 \times 200}{0.3 \times 50} = 1.3 \tag{5}$$

$$x_2^* = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2} = \frac{0.2 \times 200}{0.3 \times 75} = 1.77 \tag{5'}$$

Рассчитаем значение функции полезности:

$$u \;=\; a_1\,\ln x_1 \;+\; a_2\,\ln x_2 \;=\; 0.1\;\ln\,1.3\;\; +\; 0.2\;\ln 1.77 \;=\; 0.14$$

Замечание. Подстановка вектора $\overrightarrow{x^*}$ превращает эту функцию:

$$u \;=\; u\,(x_1^*,\;\cdots\;,\;x_n^*) \;=\; u(M,\;p_1,\;\cdots\;,\;p_n) \tag{6}$$

в функцию экзогенных переменных. Экономисты называют эту функцию *функцией косвенной полезности* потребителя, в нашем примере значение этой косвенной функции полезности оказалось равной значению 0.14.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ рассчитать спрос потребителя по модели Маршала-Вальраса принимая в качестве функции полезности неоклассическую функцию:

$$u \;=\; a_0\,(a_0\;=1)\;\cdot\;x_1^{a_1}\;\cdot\;x_2^{a_2} \tag{6'}$$

Параметры этой функции и значения переменных принять такими же как в аудиторных задачах.

Свойства спроса потребителя по модели Маршала-Вальраса

Показать что спрос потребителя остаётся неизменным, если его бюджет и цены благ изменяются одновременно в некоторое кол-во k.

Доказательство привести с помощью формулы (5):

$$x_1^* \;=\frac{a_1\;Mk}{(a_1+a_2)p_1k} \tag{7}$$

$$x_2^* \;=\; \frac{a_2\;Mk}{(a_1+a_2)p_2k} \tag{7'}$$

Следовательно спрос не изменится. Свойство (7) остаётся справедливым для любой функции полезности. Математики называют такое свойство *свойством однородности нулевой степени по Маршалу-Вальрасу*.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Показать, что и для неоклассической функции свойство однородности сохраняется.

$$u \;=\; a_0\,(a_0\;=1)\;\cdot\;x_1^{a_1}\;\cdot\;x_2^{a_2}$$

Задача

Вычислить экономический смысл множителя Лагранджа (l). (Заглянем в 1 и 2 занятие).

Решение:

Вернёмся к выражению

$$u\;=a_1\cdot\,\ln x_1\;+\;a_2\cdot\,\ln\;x_2$$

и с учётом выражения (5) получим выражение этой функции:

$$u^* = a_1 \ \cdot \ln\left(\frac{a_1\ M}{(a_1+a_2)p_1}\right) \ + a_2 \ \cdot \ln\left(\frac{a_2\ M}{(a_1+a_2)p_2}\right) \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Можно показать, что предельное значение y^* по бюджету потребителя в точности равно множителю Лагранджа.

Дадим трактовку множителю l. $l -$ дополнительная полезность по Маршалу-Вальрасу, которая возникает в ответ на дополнительную еденичу денежных средств (M).