

Метод математического моделирования изучения экономики.

План

1. Известные и искомые характеристики изучаемого объекта, запись взаимосвязей этих характеристик математическим языком. Спецификация (подробное описание математической модели) модели Баумоля-Тобина спроса на наличные деньги (модель управления наличностью, модель оптимального остатка денежных средств на счёте);
2. Трансформация модели Баумоля-Тобина к приведённой форме методом Лагранжа;
3. Домашнее задание;

Изучение экономики (и реально мира вообще) базируется на записи мат. языком взаимосвязей известных характеристик изучаемого объекта (экзогенных переменных) и искомых характеристик (эндогенных переменных). Такая запись именуется записью **экономической моделью** и в этой модели искомые и известные характеристики связаны между собой воедино. В процессе записи математическим языком возникает структурная форма модели и если во взаимосвязях содержится некоторое требование оптимальности у искомым значениям эндогенных переменных, то такая модель называется оптимизационной.

$$\begin{cases} P(\vec{y}, \vec{x}) \rightarrow \text{ext}(\min | \max) \\ \vec{y} \in Y_{\vec{x}} \end{cases} \quad (1)$$

В верхней строчке записано требование оптимальности искомым значений к эндогенным переменным.

В экономики (езде) требование минимальных издержек или требование максимального дохода.

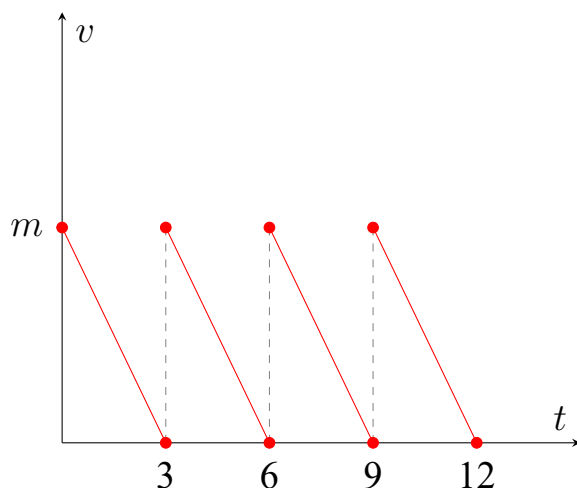
Во второй строчке лаконично записано условие допустимости значения эндогенных переменных, которое это условие содержит также во взаимосвязях. Символом Y мы обозначили множество допустимых значений y и это множество в общем случае зависит от экзогенных переменных. В математике такие задачи называются *задачами математического программирования*. Добавим, что слева от стрелки находится функция экзогенных и эндогенных переменных, которая в математике называется *целевой* и в экономике значение этой функции всегда имеют смысл, либо издержек, либо дохода.

Задача Баумоля-Тобина. Изучаемым объектом является операционная деятельность (по производству сметаны), которая требует в наличных денег.

1. M - требуемый уровень денежных средств в течение года ($M = \$52$ млн.)
Для обеспечения денежными средствами фирма в начале года открывает в банке расчетный счёт и размещает на этом счёте некоторое кол-во денег m . Как правило эти деньги фирма берёт в кредит или же получает в итоге продажи своих ценных бумаг. При такой продаже фирма имеет издержки на известном уровне c малое.
2. c - величина издержек. ($c = \$0.05$ млн.) Деньги m находящиеся на расчётном счёте не приносят ей доход, а между тем, если эти деньги фирма разместила на депозите (инвестировала в депозит), то эти деньги приносили бы доход r малое и называется у экономистов нормой альтернативных затрат.
3. r - норма альтернативных затрат ($r = 0.07 = 7\%$). Деньги размещённые на счёте фирмы не приносят доход и этот доход носит название альтернативных затрат, альтернативные затраты всегда экономисты включают в общие затраты фирмы. Таким образом исходными данными являются:
 - M - требуемый уровень денежных средств в течение года ($M = \$52$ млн.)
 - c - величина издержек. ($c = \$0.05$ млн.)
 - r - норма альтернативных затрат ($r = 0.07 = 7\%$)

Искомыми величинами:

1. Величина остатка денежных средств на счёте в момент его пополнения (m)
2. Кол-во пополнений (на рис ниже $n = 4$)



В начале года остаток m , по мере расчёта остаток снижается до 0 и затем пополняется. m и n - эндогенные переменные. Взаимосвязи отражены словесно:

1. Общие затраты фирмы (ϕ) должны быть минимальными.
2. Величины m и n должны быть такими чтобы они удовлетворяли требуемому уровню M .

Начнём с записи общих затрат ϕ помня, что эти слагаемые состоят из двух частей: ϕ_1 и это слагаемое состоит из общей величины издержек $\phi_1 = c \times n$, второе слагаемое это упущенный доход (альтернативные издержки) (ϕ_2)

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_1 = c \cdot n,$$

$$\phi_2 = \frac{m}{2} \cdot r$$

Оптимизированная модель Баумоля в структурной форме:

$$\begin{cases} \phi = c \cdot n + \frac{r}{2} \cdot m \rightarrow \min \\ n \cdot m = M, \\ n \geq 0, m \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

С точки зрения математики оптимизационная модель Баумоля-Тобеля относится к классическим задачам математического программирования на условный экстремум. Решить такую задачу означает трансформировать модель к приведённой форме.

Метод Лагранжа состоит из 3 шагов:

- Составляется функция Лагранжа на условный экстремум:

$$L = c \cdot n + \frac{r}{2} \cdot m + l \cdot (M - n \cdot m) \quad (3)$$

В функции символом l обозначен множитель Лагранжа.

- Для функции Лагранжа все производные должны быть равны нулю.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n} = c - l \cdot m = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial m} = \frac{r}{2} - l \cdot n = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial l} = M - n \cdot m = 0 \end{cases} \quad (4)$$

- Составленная система решается численно (на практике как правило), либо аналитически.

Приведённая форма модели Баумоля:

Формулы Уилсона

$$\begin{cases} m = \frac{c}{l}, \\ n = \frac{r}{2 \cdot l}, \\ M - \frac{r}{2 \cdot l} \cdot \frac{c}{l} = 0 \Rightarrow l^2 = \frac{r \cdot c}{2 \cdot M} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{r \cdot c}{2 \cdot M}}. \end{cases} \quad (5)$$

Приведённая форма модели (формулы Уилсона):

$$m^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot M}{r}}, n^* = \sqrt{\frac{r \cdot M}{2 \cdot c}} \quad (6)$$

Д/з. С упомянутыми значениями экзогенных переменных рассчитать эндогенные значения m^* и n^* . Подставить правые части формул Уилсона в уравнение формул издержек и получить значение, как явную функцию экзогенных переменных. Отдельно рассчитать издержки и упущенный доход (ϕ_1 и ϕ_2). Рассчитать по формуле значение множителей Лагранжа.