

Семинар №6. Двойственный характер модели поведения потребителя и уравнение Слуцкого

План

1. Взаимосвязь спроса потребителя по Маршаллу-Вальрасу и по Хиксу. Уравнение Слуцкого;
2. Рассчёт изменения спроса потребителя (по уравнениям Слуцкого) в ответ на изменение цен благ;
3. ДЗ

На 4-ом и 5-ом занятиях рассчитали соответственно спрос потребителя по Маршаллу-Вальрасу:

$$\begin{cases} \vec{x}^{M-B}(\vec{p}, M) = \vec{x}^D = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}; \\ u(\vec{x}^D) = 0.14; \\ M = 200 \text{руб.}; \\ p_1 = 50; p_2 = 75; \end{cases}$$

$$u = a_1 (= 0.1) \cdot \ln x_1 + a_2 (= 0.2) \cdot \ln x_2$$

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}; \\ u_0 = 0.14, p_1 = 50, p_2 = 75; \\ M^* = M(\vec{p}, u_0) = p_1 x_1^H + p_2 x_2^H = 200 \text{руб.}; \end{cases}$$

Случайно ли это? Совпадение спроса по Хиксу со спросом по Маршаллу-Вальрасу в ситуации, когда экзогенно заданный уровень дохода потребителя равен стоимости спроса по Хиксу $M = M(\vec{p}, u_0) = M^*$ совпадение не случайно. Справедливо следующее тождество по p и u_0 :

$$\vec{x}^D(\vec{p}, M(\vec{p}, u_0)) \equiv \vec{x}^H(\vec{p}, u_0)$$

Тождество можно дифференцировать по p :

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}(n \times n) + \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n \times 1) \cdot \frac{\partial M}{\partial \vec{p}}(1 \times n) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n \times n)$$

Уравнение (4) носит название основных уравнений теории полезностей или уравнение Слуцкого.

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^D}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Уравнение Slutsky связывают между собой значение предельного спроса по Хиксу (правая часть) со значением предельного спроса по Маршаллу-Вальрасу.

Замечание. Можно показать, что в левой части уравнения (4) производная $\frac{\partial M}{\partial p_j}$ в точности равна спросу по Хиксу и в силу тождества (3):

$$\frac{\partial M}{\partial p_j} = x_j^H = x_j^D$$

Экономисты называют уравнение (5) леммой Шепорта.

ДЗ (необязательное). Доказать уравнение (5) опираясь; проверить справедливость (5) в условиях домашней задачи. Продифференцировать по $p_1 x_1^H + p_2 x_2^H$. С учётом равенства (5) уравнение Slutsky приобретает следующий вид (с учётом (5)):

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}(n \times n) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n \times n) - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n \times 1) \cdot (\vec{x}^D)^T(1 \times n)$$

Вывод: модели Маршалла-Вальраса и Хикса связаны между собой тождеством двойственности (3). Дифференцирование этого тождества по p приводит к уравнению Slutsky (4), которые связывают между собой предельный спрос по Маршаллу-Вальрасу с предельным спросом по Хиксу. В правой части равенства (4) находится симметричная матрица, которая называется матрицей Slutsky и обозначается:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n \times n)$$

Расчёт изменение спроса потребителя в ответ на изменение цен товара (по уравнениям Slutsky)

Вернёмся к условиям наших задач отмеченных в выражениях (1) и (2) и предположим, что цены изменились на некоторую величину $\Delta \vec{p}$; предположим, что $\Delta \vec{p}_1$ не изменилась, $\Delta \vec{p}_2$ увеличилось.

$$\Delta \vec{p} = \begin{pmatrix} \Delta \vec{p}_1 \\ \Delta \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix};$$

Требуется рассчитать изменение спрос по М-В и Хиксу.

Порядок расчёта:

1.

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} \cdot \Delta \vec{p} (= \Delta \vec{x}^D) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \Delta \vec{p} (= \vec{x}^H) - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n \times 1) \cdot (\vec{x}^D)^T(1 \times n) \cdot \Delta \vec{p} (= \Delta \vec{x}^{YE})$$

$\Delta \vec{x}^{YE}$ вычитаемое экономисты называют эффектом дохода. $\vec{x}^H = \vec{x}^{SE}$ — эффект замещения. $\vec{x}^D = \vec{x}^{GE}$ — генеральное.

2.

$$\Delta \vec{x}^D = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sum a_i} \cdot \frac{M}{p_1} \\ \frac{a_2}{\sum a_i} \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{M}{p_1} \\ 0.67 \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{M}{p_1} & 0 \\ 0 & 0.67 \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix}$$

ДЗ Дать экономескую трактовку столбцам матрицы

$$\Delta \vec{x}^D = \Delta \vec{x}^{GE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} \cdot \Delta \vec{p} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{200}{50^2} & 0 \\ 0 & 0.67 \cdot \frac{200}{75^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^D \\ \Delta x_2^D \end{pmatrix}$$

ДЗ Посчитать.

3. Вернёмся к (6). Нам будет удобно на третьем шаге рассчитать вычитаемое в правой части (6) эффект дохода.

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} = \begin{pmatrix} \frac{0.33}{\frac{p_1}{p_2}} \\ \frac{0.67}{\frac{p_1}{p_2}} \end{pmatrix} (= S); \quad \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} \cdot (\vec{x}^D)^T = \begin{pmatrix} \frac{0.33}{\frac{p_1}{p_2}} \\ \frac{0.67}{\frac{p_1}{p_2}} \end{pmatrix} \cdot (1.3 \quad 1.8) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0.33}{\frac{p_1}{p_2}} \cdot 1.3 & \frac{0.33}{\frac{p_1}{p_2}} \cdot 1.8 \\ \frac{0.67}{\frac{p_1}{p_2}} \cdot 1.3 & \frac{0.67}{\frac{p_1}{p_2}} \cdot 1.8 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \vec{x}^{YE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} \cdot (\vec{x}^D)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. ДЗ Вычисляем вычисление спроса по Хиксу по правилу:

$$\vec{x}^H = \vec{x}^{SE} = \Delta \vec{x}^D + \Delta \vec{x}^{YE}$$