Метод математического моделирования изучения экономики.

План

1. Известные и искомые характеристики изучаемого объекта, запись взаимосвязей этих характеристик математическим языком. Спецификация (подробное описание математической модели) модели Баумоля-Тобина спроса на наличные деньги (модель управления наличностью, модель оптимального остатка денежных средств на счёте);

2. Трансформация модели Баумоля-Тобина к приведённой форме методом Лагранжа;

3. Домашнее задание;

Изучение экономики (и реально мира вобще) базируется на записи мат. языком взаимосвязей известных характеристик изучаемого объекта (экзогенных переменных) и искомых характеристик (эндогенных переменных). Такая запись именуется записью **экономической моделью** и в этой модели искомые и известные характеристики связаны между собой воедино. В процессе записи математическим языком возникает структурная форма модели и если во взаимосвязях содержится некоторое требование оптимальности у искомым значениям эндогенных переменных, то такая модель называется оптимизационной.

$$\begin{cases} P(\vec{y}, \vec{x}) \to ext(\min \mid \max) \\ \vec{y} \in Y_{\vec{x}} \end{cases} \tag{1}$$

В верхней строчке записано требование оптимальности искомых значений к эндогенным переменным.
В экономики (везде) требование минимальных издержек или требование максимального дохода.
Во второй строчке лаконично записано условие допустимости значения эндогенных переменных, которое это условие содержит также во взаимосвязях. Символом Y мы обозначили множество допустимых значений $\vec{y}$ и это множество в общем случае зависит от экзогенных переменных $\vec{x}$. В математике такие задачи называются *задачами математического программирования*. Добавим, что слева от стрелки находится функция экзогенных и эндогенных переменных, которая в математике называется *целевой* и в экономике значение этой функции всегда имеют смысл, либо издержек, либо дохода.
Задача Баумоля-Тобина. Изучаемым объектом является опреционная деятельность (по производству сметаны), которая требует в наличных денег.

1. M - требуемый уровень денежных средств в течение года (M = \$52 млн.) Для обеспечения денежными средствами фирма в начале года открывает в банке расчетный счёт и размещает на этом счёте некоторое кол-во денег m. Как правило эти деньги фирма берёт в кредит или же получает в итоге продажи своих ценных бумаг. При такой продаже фирма имеет издержки на известном уровне c малое.

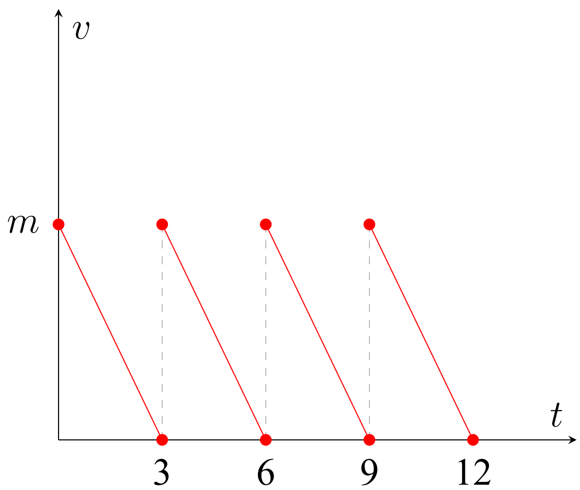
2. c - величина издержек. (c = \$0.05 млн.) Деньги m находящиеся на расчётном счёте не приносят ей доход, а между тем, если эти деньги фирма разместила на депозите (инвестировала в депозит), то эти деньги приносили бы доход r малое и называется у экономистов нормой альтернативных затрат.

3. r - норма альтернативных затрат (r = 0.07 = 7%). Деньги размещённые на счёте фирмы не приносят доход и этот доход носит название альтернативных затрат, альтернативные затраты всегда экономисты включают в общие затраты фирмы. Таким образом исходными данными являются:

- M - требуемый уровень денежных средств в течение года (M = \$52 млн.)
- c - величина издержек. (c = \$0.05 млн.)
- r - норма альтернативных затрат (r = 0.07 = 7%)

Искомыми величинами:

1. Величина остатка денежных средств на счёте в момент его пополнения (m)
2. Кол-во пополнений (на рис ниже n = 4)



В начале года остаток m, по мере расчёта остаток снижается до 0 и затем пополняется. m и n - эндогенные переменные. Взаимосвязи отражены словесно:

1. Общие затраты фирмы (ϕ) должны быть минимальными.
2. Величины m и n должны быть такими чтобы они удовлетворяли требуемему уровню M.

Начнём с записи общих затрат ϕ помня, что эти слагаемые состоят из двух частей: ϕ_1 и это слагаемое состоит из общей величины издержек $\phi_1 = c \times n$, второе слагаемое это упущенный доход (альтернативные издержки) (ϕ_2)
$\phi = \phi_1 + \phi_2$
$\phi_1 = c \cdot n,$
$\phi_2 = \frac{m}{2} \cdot r$

Оптимизированная модель Баумоля в структурной форме:

$$\begin{cases} \phi = c \cdot n + \dfrac{r}{2} \cdot m \to \min \\ n \cdot m = M, \\ n \geq 0, m \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

С точки зрения математики оптимизационная модель Баумоля-Тобеля отпносится к классическим задачам математического программирования на условный экстремум. Решить такую задачу означает трансформировать модель к приведённой форме.

Метод Лагранжа состоит из 3 шагов:

- Составляется функция Лагранжа на условный экстремум:

$$L = c \cdot n + \frac{r}{2} \cdot m + l \cdot (M - n \cdot m) \tag{3}$$

  В функции символом l обозначен множитель Лагранжа.

- Для функции Лагранжа все производные должны быть равны нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial n} = c - l \cdot m = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial m} = \dfrac{r}{2} - l \cdot n = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = M - n \cdot m = 0 \end{cases} \tag{4}$$

- Составленная система решается численно (на практике как правило), либо аналитически.

Приведённая форма модели Баумоля:
Формулы Уилсона

$$\begin{cases} m = \dfrac{c}{l}, \\ n = \dfrac{r}{2 \cdot l}, \\ M - \dfrac{r}{2 \cdot l} \cdot \dfrac{c}{l} = 0 \Rightarrow l^2 = \dfrac{r \cdot c}{2 \cdot M} \Rightarrow l = \sqrt{\dfrac{r \cdot c}{2 \cdot M}}. \end{cases} \tag{5}$$

Приведённая форма модели (формулы Уилсона):

$$m^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot M}{r}}, n^* = \sqrt{\frac{r \cdot M}{2 \cdot c}} \tag{6}$$

$\boxed{\text{Д/з.}}$ С упомянутыми значениями экзогенных переменных расчитать эндогенные значения m^* и n^*. Подставить правые части формул Уилсона в уравнение формул издержек и получить значение, как явную функцию экзогенных переменных. Отдельно рассчитать издержки и упущенный доход (ϕ_1 и ϕ_2). Рассчитать по формуле значение множителей Лагранжа.