8. Случайная переменная и закон её распределения. Распределение хи-квадрат.

Переменная x, с областью возможных значений X, называется случайной, если каждое ее значение суть результат случайного события $A: x = q$, где q – элемент множества X.

Законом распределения случайной величины x называется скалярная функция $P_x(q)$скалярного аргумента q, которая определена на всей числовой оси и характеризует объективную возможность (вероятность) появления в опыте события $x = q$. (Объяснение от Бывшего смотри **пункт 7**).

Распределение χ^2 **(хи-квадрат)** с n степенями свободы — это распределение суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — совместно независимые стандартные нормальные случайные величины, то есть: $X_i \sim N(0,1)$. Тогда случайная величина $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы, обозначаемое $\chi^2(n)$.

9. Случайная переменная и закон её распределения. Распределение Стьюдента Квантиль t крит уровня и её расчёт в Excel.

Переменная x, с областью возможных значений X, называется случайной, если каждое ее значение суть результат случайного события $A: x = q$, где q – элемент множества X.

Законом распределения случайной величины x называется скалярная функция $P_x(q)$скалярного аргумента q, которая определена на всей числовой оси и характеризует объективную возможность (вероятность) появления в опыте события $x = q$. (Объяснение от Бывшего смотри **пункт 7**).

Пусть $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ – независимые стандартные нормальные случайные величины, такие что $Y_i \sim N(0,1), i = 1, \dots, n$. Тогда распределение случайной величины t, где

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}}$$

называется распределением Стьюдента с n степенями свободы. Пишут $t \sim t(n)$. Её распределение абсолютно непрерывно и имеет плотность:

$$f_t(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

, где $\Gamma -$ гамма-функция Эйлера.

Пусть F_n — функция распределения Стьюдента $t(n)$ с n степенями свободы, и $\alpha \in [0,1]$. Тогда $\alpha -$ квантилью этого распределения называется число $t_{\alpha,n}$ такое, что $F_n(t_{\alpha,n}) = 1 - \alpha$.

Расчет в Excel: =СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(вероятность,степени_свободы) (T.INV.2T())

Вероятность: $1-\alpha = 1-0,95$
Степени свободы: $n-(k+1)$.

10. Ковариация $Cov(x,y)$ и коэффициент корреляции, $Cor(x,y)$ пары случайных переменных (x,y).

Пусть x и y пара случайных переменных. Характеристика взаимосвязи расчитывается по формуле и называется ковариацией:

$$Cov(x,y) = E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)$$

Если ковариация положительная, то с ростом x возрастает y и наоборот. Если x и y независимые, то ковариация равна 0.

Нормированная ковариация вычисляется по формуле и носит название коэффициента корреляции:

$$Cor(x,\ y) = \rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

11. Случайная переменная и закон её распределения. Закон распределения Фишера. Квантиль $F_{\text{крит}}$ уровня и её расчёт в Excel.

Переменная x, с областью возможных значений X, называется случайной, если каждое ее значение суть результат случайного события A: $x=q$, где q – элемент множества X.

Законом распределения случайной величины x называется скалярная функция $P_x(q)$скалярного аргумента q, которая определена на всей числовой оси и характеризует объективную возможность (вероятность) появления в опыте события $x=q$. (Объяснение от Бывшего смотри **пункт 7**).

Пусть Y_1, Y_2 – две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат: $Y_i \sim \chi^2(d_i)$, где $d_i \in \mathbb{N}, i=1,2$. Тогда распределение случайной величины $F = \dfrac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$, называется распределением Фишера со степенями свободы d_1 и d_2. Пишут $F \sim \mathrm{F}(d_1, d_2)$.

$$GQ = \frac{ESS_1}{ESS_2} \sim P_F(q) \tag{1}$$

Эта дробь является статистикой критерия проверяемой гипотезы о гомоскедастичности случайного возмущения. Величина GQ имеет распредение Фишера с кол-ом степеней свободы m, n.

Гипотеза о гомоскедастичности принимается как не противоречащая реальным данным, если оказываеются справедливыми следующие два неравенства:

$$\begin{cases} GQ \overset{?}{\le} F_{\text{крит}} \\ \dfrac{1}{GQ} \overset{?}{\le} F_{\text{крит}} \end{cases}$$

Где символом $F_{\text{крит}}$ мы обозначаем квантиль распределения Фишера заданного уровня $1-\alpha$, например $1-\alpha\ = 0.95$.
Расчет в Excel: =F.ОБР(вероятность; степени_свободы1; степени_свободы2) (F.INV())
Вероятность: $1-\alpha = 1-0,05$
Степени_свободы1: m_1
Степени_свободы2: m_2

12. Случайный вектор и его основные количественные характеристики. Случайный вектор левых частей схемы Гаусса–Маркова при гомоскедастичном неавтокоррелированном случайном возмущении.

Упорядоченный набор случайных переменных принято называть ***случайным вектором***:

$$\vec{x}^T = (x_1,\ x_2\ \dots,\ x_n) \tag{2}$$

Для практики важны следующие две случайные характеристики:
1. Математической ожидание случайного вектора

$$E\left(\vec{x}^T\right) = \vec{m}_{\vec{x}}^T = (m_1, m_2,\ \dots,\ m_n) \tag{3}$$

– это веткор из математический ожиданий случайных компонент.
Математическое ожидание – это среднее значение. Математическое ожидание – это *константа*.
2. Коварционная матрица:

$$Cov(\vec{u},\vec{u}) = \Omega_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & {\sigma_2}^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

так принято называть квадратную симметричную матрицу, на главной диагонали которой располагаются дисперсии компонент случайного вектора, а недиагональные элементы – это ковариации компонент. Ковариация, например σ_{1n}, это *константа* характризующая взаимосвязь компоненты x_1 и x_n. Если x_1 и x_n независимые, то $\sigma_{1n}\ =\ 0.$

Компактная запись схемы Гаусса-Маркова:

$$\vec{y} = X\vec{a} + \vec{u}$$
$$,\ \text{где}:$$
$$\vec{y} = (y_1,\ \dots, y_n)^T$$
$$\vec{u} = (u_1,\ \dots, u_n)^T$$
$$\vec{a} = (a_0, a_1,\ \dots, a_n)^T$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

Свойство операции вычисления ожидаемого вектора: если обобщить свойство

$E(c_1x + c_2y) = c_1E(x) + c_2E(y)$ на аффинное преобразование случайного вектора $\vec{a}$ в случайный вектор $\vec{y} = X\vec{a} + \vec{u}$, то оно примет вид $E(\vec{y}) = X\vec{a}$.
Свойство операции вычисления ковариационной матрицы случайного вектора: Если же обобщить свойство $Var(c_1x + c_2y) = c_1^2Var(x) + c_2^2Var(y) + 2c_1c_2Cov(x, y) = \vec{c}^T Cov(\vec{x}, \vec{x})\vec{c}$ на аффинное преобразование случайного вектора $\vec{a}$ в случайный вектор $\vec{y} = X\vec{a} + \vec{u}$, то оно примет вид $Cov(\vec{y}, \vec{y}) = Cov(\vec{u}, \vec{u}) = \sigma_u^2 \cdot I$.

13. Основные количественные характеристики аффинного преобразования случайного вектора (на примере вектора МНК – оценок коэффициентов линейной модели при гомоскедастичном неавтокоррелированном случайном возмущении).

Афинное преобразование – это линейное неоднородное преобразование. Пусть символом $\vec{x}$ обозначен случайный вектор. Аффинным преобразованием этого вектора принято называть вектор $\vec{y}$, который вычисляется по следующему правилу:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} + \vec{b};$$

Здесь символом A обозначена матрица коэффициентов, символом $\vec{b}$ обозначен вектор свободных членов.
Отметим правила расчёта основных характеристик аффинного преобразования:

$$E(\vec{y}) = A \cdot E(\vec{x}) + \vec{b};$$
$$Cov(\vec{y}, \vec{y}) = A \cdot Cov(\vec{x}, \vec{x}) \cdot A^T;$$

При сделанных предположениях (предпосылках) теоремы Гаусса–Маркова оптимальные оценки коэффициентов функции регрессии вычисляются по правилу:

$$\tilde{\vec{a}} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{y}; \qquad (*)$$

Вышеуказанные правила расчета основных характеристик аффинного преобразования случайного вектора дают основу определения математического ожидания вектора оценок коэффициентов.
В правой части уравнения (*) матрица X является константой или фиксированной величиной, а вектор $\vec{y}$ является случайным значением в силу того, что:

$$\vec{y} = X \cdot \vec{a} + \vec{u}; \qquad (**)$$

в правой части (**) первое слагаемое $X \cdot \vec{a} = \alpha$ – это вектор констант, а второй вектор случайный $\vec{u}$ и мы можем трактовать вектор $\vec{y}$ выражения (**), как афинное преобразование ветора $\vec{u}$.
Следовательно, так как $\vec{y}$ является случайным, то и оптимальные оценки коэффициентов вектора $\vec{a}$ из уравнения коэффициентов (**), так же будут случайными оценками.
Найдём математическое ожидание от оценок коэффициентов $\vec{a}$.

Для нахождения математического ожидания от оценок коэффициентов $\vec{a}$. Перепишем уравнение (*) в другую форму:

$$\tilde{\vec{a}} = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot (X \vec{a} + \vec{u}) =$$
$$= \left(X^T X\right)^{-1} \cdot \left(X^T X\right) \cdot \vec{a} + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u} =$$
$$= \left[\text{Вспомним, что } \left(X^T X\right)^{-1} \cdot \left(X^T X\right) = I\left(\text{еденичной матрице}\right)\right] =$$
$$= \vec{a} + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}$$

Возьмём математическое ожидание от левой и правой части и получим, вспоминая свойство вектора $\vec{u}$, а именно, что $E(\vec{u}) = 0$:

$$E\left(\tilde{\vec{a}}\right) = E(\vec{a}) + E\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}\right) = E(\vec{a}) + \left(X^T X\right)^{-1} X^T E(\vec{u}) = E(\vec{a}) = \vec{a}$$

Коварицонная матрица вектора $\tilde{\vec{a}}$ по определению равна:

$$Cov\left(\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}}\right) = E\left(\left(\tilde{\vec{a}} - \vec{a}\right)\left(\tilde{\vec{a}} - \vec{a}\right)^T\right) = \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\vec{a}}_1}^{\;2} & \sigma_{\tilde{\vec{a}}_1, \tilde{\vec{a}}_2} & \cdots & \sigma_{\tilde{\vec{a}}_1, \tilde{\vec{a}}_n} \\ \sigma_{\tilde{\vec{a}}_2, \tilde{\vec{a}}_1} & \sigma_{\tilde{\vec{a}}_2}^{\;2} & \cdots & \sigma_{\tilde{\vec{a}}_2, \tilde{\vec{a}}_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sigma_{\tilde{\vec{a}}_n, \tilde{\vec{a}}_1} & \sigma_{\tilde{\vec{a}}_n, \tilde{\vec{a}}_2} & \cdots & \sigma_{\tilde{\vec{a}}_n}^{\;2} \end{pmatrix}$$

Её диагональные элементы равны $\sigma_{\tilde{\vec{a}}_1} = Var\left(\tilde{\vec{a}}_1\right)$ дисперсиям оценок отдельных коэффициентов. А диагональные элементы равны ковариациям оценок $\sigma_{\tilde{\vec{a}}_1, \tilde{\vec{a}}_2} = Cov\left(\tilde{\vec{a}}_1, \tilde{\vec{a}}_2\right)$. Заметим, что $\sigma_{\tilde{\vec{a}}_i, \tilde{\vec{a}}_j} = \sigma_{\tilde{\vec{a}}_j, \tilde{\vec{a}}_i}$, то есть матрица $Cov\left(\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}}\right)$ симметричная относительно главной диагонали. Далее по выведенной нами формуле вычислим:

$$\tilde{\vec{a}} - \vec{a} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}$$

И подставим в формулу ковариации выше получим:

$$E\left(\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}\right)\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}\right)^T\right) =$$
$$= E\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \left(\vec{u} \cdot \vec{u}^T\right) X \left(X^T X\right)^{-1}\right) =$$
$$= \left(X^T X\right)^{-1} X^T E\left(\vec{u} \cdot \vec{u}^T\right) X \left(X^T X\right)^{-1} =$$
$$= \left[\text{вспомним, что } E\left(\vec{u} \cdot \vec{u}^T\right) = \sigma_u^2 \cdot I\left(\text{еденичная матрица}\right)\right] =$$
$$= \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1} X^T X \left(X^T X\right)^{-1} = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}.$$

Следовательно ковариация равна:

$$Cov\left(\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}}\right) = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1} = \sigma^2 \cdot Q$$

14. Случайный вектор, веса компонент случайного вектора и факторизация его ковариационной матрицы. Случайный вектор в схеме Гаусса – Маркова при гетероскедастичном неавтокоррелированном случайном возмущении.

Упорядоченный набор случайных переменных принято называть ***случайным вектором***:

$$\vec{x}^T = (x_1,\ x_2\ \dots,\ x_n)$$

Веса компонент случайного вектора и факторизация его коварицонной матрицы

Пусть $\vec{x}^T = (x_1,\ x_2\ \dots,\ x_n)$ случайный вектор, пусть x_i какая-то компонента вектора; вес компонент x_i – это константа, которая вычисляется по следующему правилу:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

где σ_0^2 обозначена произвольная, но фиксированная положительная константа. Тогда

$$\Omega_{\vec{u}} = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{pmatrix}^2$$

Ковариационная матрица вектора в этой схеме является диагональной, но диагональные элементы (дисперсии случайных остатков) этой матрицы теперь ***неодинаковы*** (следует от гетероскедастичности).

Составим уравнения наблюдений в рамках трансформированной модели:

$$\begin{cases} \sqrt{p} \cdot y = \sqrt{p} \cdot a_0 + \sqrt{p} \cdot a_1 x_1 + \sqrt{p} \cdot a_2 x_2 + \ldots + \sqrt{p} \cdot a_k x_k + \sqrt{p} \cdot u \\ E\left(\sqrt{p} \cdot u\right) = 0;\ \ E\left(\left(\sqrt{p} \cdot u\right)^2\right) = \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{p} \cdot u$$

$$\begin{cases} \sqrt{p} \cdot y = \sqrt{p} \cdot a_0 + \sqrt{p} \cdot a_1 x_1 + \sqrt{p} \cdot a_2 x_2 + \ldots + \sqrt{p} \cdot a_k x_k + v \\ E(v) = 0;\ \ E\left(v^2\right) = \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\boxed{P^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{y}}}_{\vec{y}'} = \underbrace{\boxed{P^{\frac{1}{2}} \cdot X}}_{X'} \cdot \vec{a} + \vec{v} \qquad (6.4.5)$$

Символом $P^{\frac{1}{2}}$ обозначена следующая квадратная матрица:

$$P^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{\vec{v}} = \sigma_0^2 \cdot E - \text{скалярная}$$

$$\Omega_{\vec{u}} = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \qquad (6.4.6)$$

Получается, что уравнения наблюдений (6.4.5) удовлетворяют всем предпосылкам и это значенит, что по всем этим уравнениям мы можем оценить параметры с помощью МНК.

Утверждение A), B), C), D) теоремы Гаусса-Маркова применительно к уравнениям наблюдения 6.4.5 превращаются в следующие утверждения:

$$A)\tilde{\vec{a}} = \left(X^T \cdot P \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot P \cdot \vec{y} = Q \cdot X^T \cdot P \cdot \vec{y} \qquad (6.4.7)$$

$$B)\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^2}{n-(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \tilde{u}_i^2}{n-(k+1)} \qquad (6.4.8)$$

$$\tilde{u}_i = y_i - \left(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cdot x_{1,i} + \ldots + \tilde{a}_k \cdot x_{k,i}\right) \qquad (6.4.9)$$

$$\tilde{v}_i = \sqrt{p_i} \cdot \tilde{u}_i \qquad (6.4.10)$$

$$C) \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \tilde{u}_i^2 \to \min \qquad (6.4.11)$$

$$D) \begin{cases} S\tilde{a}_j = \tilde{\sigma}_0 \cdot \sqrt{q_{j+1\;j+1}} \\ j = 0, 1, \ldots, k \end{cases} \qquad (6.4.12)$$

Свойство $C)$ оценок из утверждения $A)$ принято называть *взвешанными наименьшими квадратами,* что является причиной общепринятого названия формулы процедуры (6.4.7) ВМНК.