Семинар №6

Тема №5. КМНК

Изученный на предыдущем занятии двухшаговый метод наименьших квадратов, позволяющий получать состоятельные оценки параметров идентифицируемых уравнений эконометрической модели (2.1). Состоятельные оценки коэффициентов идентифицируемой модели можно получить (при тех же условиях) и КМНК. Чтобы понять его существо, предположим на время, что известна матрица M коэффициентов приведённой формы модели (2.1). В силу (4.6) матрица M связана с расширенной матрицей структурной формы данной модели уравнением.

$$A \cdot M + B = 0 \tag{5.1}$$

Это уравнение можно переписать ввиде:

$$\left(M^T | I\right) \cdot \overline{A}^T = 0 \tag{5.2}$$

где $I-$ еденичная матрица размера $K \cdot K$. Следовательно, вектор (2.10) коэффициентов $i-$ ой строчки матрицы удовлетворяет с учётом ограничений (2.9) и условия нормализации (2.7) следующей системе линейных уравнений]

$$\begin{cases} \left(M^T | I\right) \cdot \vec{a}_i = 0 \\ R \cdot \vec{a}_i = 0 \\ a_{ii} = 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

Систему (5.4) можно интерпретировать как систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно искомого вектора (2.10); вот компактная запись данной системы:

$$D \cdot \vec{a}_1 = \vec{d} \tag{5.4}$$

Здесь $D-$ матрица, имеющая $(K + L_i + 1)$ строк и $(K + G)$ столбцов; $d-$ вектор свободных членов (размерности $(K + L_i + 1) \times 1$), из которых последний член равен 1, а остальные - нулю.

Если (и только если) $i-$ ое уравнение модели (2.1) идентифицируемо, то система (5.4) имеет единственное решение - вектор (2.10). Значит, в таком случае матрица D системы (5.4) имеет ранг, а именно: $rk(D) = K + G$. В этом случае возможны две ситуации с количеством ограничений L_i.

<u>В первой ситуации</u>, где справедливо равенство:

$$L_i = G - 1 \tag{5.5}$$

говорят о *точной идентифицируемости* $i-$ го уравнения модели (2.1). Действительно, в данной ситуации имеющая, по предположению, единственное решение система (5.4) неоднородных линейных алгебраических уравнений включает в себя уравнений с таким же количеством искомых неизвестных элементов вектора (2.10). Матрица D этой системы обладает полным рангом, так что количество уравнений необходимо и достаточно для однозначного определения вектора (2.10). Добавим, что этот вектор может быть вычислен по правилу:

$$\vec{a}_1 = D^{-1} \cdot \vec{d} \tag{5.6}$$

Во второй ситуации, где имеет место неравенство:

$$L_i > G - 1$$

говорят о сверхидентифицируемости $i-$ го уравнения модели (2.1). В этой ситуации количество уравнений в системе (5.4) превышает количество её неизвестных, то есть система (5.4) является переопределённой и совместной; подчеркнём, что матрица D при этом вертикальная (строк больше, чем столбцов). Другими словами, помимо необходимого для определения вектора (2.10) числа, уравнений в системе (5.4) имеются ещё и избыточные уравнения в количестве $L_i - (G-1)$, которым тоже удовлетворяет искомый вектор (2.10).

Как в ситуации (5.7) отыскать вектор (2.10)? Можно поступить следующим образом.

1. Отобрать из общего количества $(K + L_i + 1)$, уравнений системы (5.4) $K + G$ линейно-независимых уравнений (в набор этих уравнений входят последние уравнений системы (5.4)). В силу существования и единственности решения переопределённой системы (5.4) такой выбор всегда возможен, но не является единственным. Вот компактная запись системи отобранных уравнений с квадратной невырожденной матрицей:

$$D_0 \cdot \vec{a}_1 = \vec{d}_0$$

2. Решить систему (5.8), например, по правилу:

$$\vec{a}_1 = D_0^{-1} \cdot \vec{d}_0 \tag{5.9}$$

Подчеркнём, что система (5.8) с невырожденной матрицей неединственная, но все такие системы имеют одинаковое решение - вектор (2.10). Другими словами, решение этих систем инвариантно относительно выбора соответствующей пары $D_0, \vec{d}_0$ Добавим, что в случае (5.5) система (5.8), очевидно, единственна.

Теперь всё готово для обсуждения алгоритма косвенного метода наименьших квадратов (КМНК). Как было отмечено выше, для отыскания в процессе решения системы (5.4) вектора (2.10) нужно знать матрицу M^T, которая, не известна. Однако, её МНК- оценку можно вычислить:

$$\widetilde{M}^T = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \tag{5.10}$$

Эту оценку мы ставим на место матрицы M^T. В итоге получаем систему линейныйх алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left(\widetilde{M}^T | I\right) \cdot \vec{a}_i = 0 \\ R_i \cdot \vec{a}_i = 0 \\ a_{ii} = 1 \end{cases} \tag{5.11}$$

Её решение:

$$\vec{\tilde{a}}_i = \widetilde{D}_0^{-1} \cdot \vec{d}_0 \tag{5.12}$$