

## Лекция №18

### Понятие вложенных моделей и тест Вальда вложенностей моделей

#### План

##### 1. Понятие вложенной модели. Тест Вальда;

В процессе проверки адекватности модели нередко возникает задача по удалению из модели незначущих переменных. Удаление из модели таких переменных (незначущих) может быть осуществлено с помощью либо t-теста (лекция от 9 декабря), либо при помощи теста Вальда. И в том и в другом случае в основании этих тестов лежит понятие вложенной модели. Вот определение этого понятия: модель  $M_1$  называется вложенной в модель  $M_2$ :

$$M_1 \quad y = a_0 + a_1 x_1 + u \quad (5)$$

$$M_2 \quad y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + v \quad (6)$$

если для модели  $M_2$  справедлива гипотеза:

$$H_0 : a_2 = 0; a_3 = 0; \quad (7)$$

Модель  $M_1$  иногда также называется *моделью  $M_2$  в которой справедливо ограничение (7)*.

Модель  $M_2$  следует предпочесть, если справедлива гипотеза 8:

$$H_1 : a_2 \neq 0 \cup a_3 \neq 0. (\text{хотя бы одна является значащей})$$

Гипотеза  $H_1$  является отрицанием гипотезы  $H_0$ . Тест Вальда исследует гипотезу (7) против альтернативы (8). Он состоит из следующих шагов:

**Шаг 1.** МНК оценивается модель (5) и отмечается значение суммы квадратов оценок случайных возмущений.

**Шаг 2.** Оценивается модель (6) МНК и отмечается  $ESS_2$ .

И шаг 1 и шаг 2 осуществляется по одной и той же выборке.

**Шаг 3.** По правилу (9) вычисляется статистика критерия гипотезы  $H_0$ :

$$W = (ESS_1 - ESS_2) / (ESS_2 / (n - k_2)) \quad (9)$$

$$W \sim \chi_r^2 \text{ при } n \rightarrow \infty; r - \text{число}$$

Пусть справедливы все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова при произвольном законе распределения случайных возмущений. Если справедлива гипотеза  $H_0$ , то статистика асимптотически (с ростом объема выборки) имеет распределение хи-квадрат с числом степеней свободы  $r$ , где  $r$  число ограничений (7) в модели (6).

**Шаг 4.** Гипотеза  $H_0$  отвергается в пользу гипотезы  $H_1$  (т.е. принимается модель (6)), если значение статистики превосходит квантиль распределения  $\chi_r^2$  уровня  $1 - \alpha$ :

$$W > \chi_r^2(1 - \alpha)$$

**Следствие.** Если случайное возмущение в модели  $M_2$  имеет нормальный закон распределения, то:

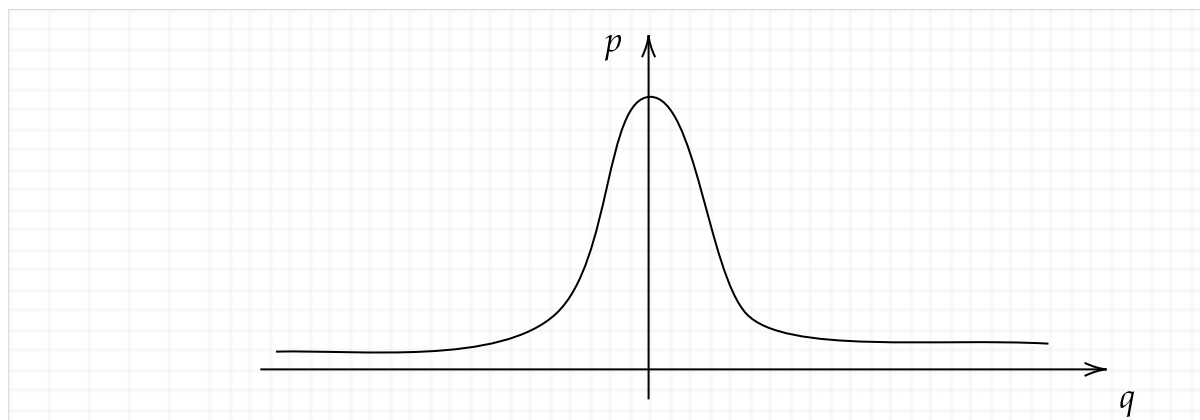
$$\frac{W}{r} \sim F_{r, n-k_2} \quad (10)$$

В такой ситуации гипотеза  $H_0$  отвергается, если справедливо следующее

неравенство:

$$\frac{W}{r} > F_{r,n-k_2}(1-\alpha)$$

Квантиль:



**Итог:** тест Вальда является рашириным вариантом  $t$  – теста, причём последний  $t$  – тест совпадает с тестом Вальда при  $r = 1$ .

Схема построения эконометрической модели состоит из 4 этапов главным из которых является этап спецификации модели, то есть этап записи математическим языком взаимосвязей известных характеристик объекта и искомых характеристик объекта. В итоге такой записи появляется структурная форма модели. После использования всех принципов спецификации модели, структурная форма модели имеет следующий вид:

$$F(\vec{y}_t, \vec{x}_t) = \vec{u}_t;$$

Самым важным на практике случаем является линейные эконометрические модели. Базовая модель экометрики имеет спецификацию

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots a_k \cdot x_k + u_t \\ E(u_t) = 0; E(u_t^2) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

и называется линейной моделью множественной регрессии.

МНК является оптимальной статистической процедурой оценивания параметров базовой модели эконометрики.

$$A) \vec{a} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{y} = Q \cdot X^T \cdot \vec{y};$$

$$B) \tilde{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i^2}{n - (k + 1)}, \text{ наилучшая оценка с минимальной дисперсией, где символом } \tilde{u}_i.$$

Все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова исследуются следующими тестами: 0 предпосылка методом дополнительной регрессии, 1 предпосылка - тестом Ремзи, 2 предпосылка - тест Голдфелда-Кванта, 3 предпосылка - тест Дарбина-Уотсона.

Если функция регрессии (точнее модель функции регрессии) оказывается

нелинейной по коэффициентам

$$\begin{cases} Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^u; \\ A > 0; 0 < \alpha; 0 < \beta; \\ E(u) = 0; Var(u) = \sigma_u^2; \end{cases}$$

и после логорифмирования она трансформируется к базовой модели эконометрики.

$$\begin{cases} \ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L + u; \\ \quad \quad \quad \underset{y}{\ln} \quad \quad \quad \underset{a_0}{\ln} \quad \quad \quad \underset{x_1}{\ln} \quad \quad \quad \underset{x_2}{\ln} \\ E(u) = 0; Var(u) = \sigma_u^2; \end{cases}$$

Подчеркнём, что в экзаменационные билеты входят задачи со следующей структурой:

1. Составить спецификаю модели;
2. Оценить параметры модели по обучающей выборки;
3. Выполнить тот или иной тест с оценённой моделью (например, тест Дарбина-Уотсона);