Лекция №8
Обобщение метода наименьших квадратов
План

1. Завершение доказательства оптимальности оценок коэффициентов модели методом наименьших квадратов и его обобщение (обощённым методом наименьших квадратов)
2. Доказательство утверждения D уравнения Гаусса-Маркова и смысл символа (сигма) σ_0^2в выражении ковариационной матрицы вектора оценок коэффициентов.
3. Доказательства утверждения C теоремы Гаусса-Маркова, метод наименьших квадратов, как частный случай обобщённого метода наименьших квадратов. Взаимосвязь метода наименьших квадратов хи метода максимального правдоподобия при нормально расспределении случайного возмущения.

Приступаем к первому вопросу. На прошлой лекции мы приступили к доказательству утверждения A в предположении, что $Cov(\vec{u}, \vec{u})$имеет общую структуру $\sigma_0^2 \cdot P^{-1}$.

Значит дисперсия: $Var\left(\widetilde{y}_0\right) = \sigma_0^2 \cdot \vec{m}^T \cdot P^{-1} \cdot \vec{m}$ (отказ от предпосылки 2) и недиагональные элементы (ковариации компонент) могут быть не нулевыми. При справедливых предпосылках 2 и 3 ковариационная матрица имеет структуру $Cov(\vec{u}, \vec{u}) = \sigma_u^2 \cdot I$.

Наше доказательство A мы осуществим в процессе поиска <u>оптимальной линейной процедуры</u> оценивания значения y_0 производьной линейной функции веркторa истинных значений вектора $\vec{a}$ коэффициентов. $\left(y_0 = \vec{x}_0^T \cdot \vec{a}\right)$ Линейная процедура оценивания имеет вид: $\widetilde{y_0} = \vec{m}^T \cdot \vec{y}$, где строка $\vec{m}^T$ состоятельности. В первой строчке выражения

$$\begin{cases} E\left(\widetilde{y}_0\right) = y_0 = \vec{x}_0^T \cdot \vec{a} \\ Var\left(\widetilde{y}_0\right) \rightarrow \min \end{cases} \tag{5.11}$$

определим левую часть поэтому строка $\vec{m}^T$ обязана удовлетворять:

$E\left(\widetilde{y}_0\right) = \vec{m} \cdot X \cdot \vec{a}, \ \Rightarrow \vec{m}^T \cdot X = \vec{a} = \vec{x}_0^T \cdot \vec{a}$

Так как $\vec{a}$ произвольный вектор, то строка может быть найдена, как система уравнений 5.12

$$\vec{m}^T \cdot X = \vec{x}_0^T, \ \Leftrightarrow X^T \cdot \vec{m} = \vec{x}_0 \tag{5.12}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Сколько уравнений в системе 5.12 и является ли эта система недоопределённой?

Промежуточный итог: искомый вектор коэффициентов m согласно первому треованию оптимальности обязан быть решением 5.12.
Перейдём в левую часть второй строки 5.11 дисперсию находим по теореме

Фишера.

$$Var\left(\tilde{y}_0\right) = \sigma_0^2 \cdot \vec{m}^T \cdot P^{-1} \cdot \vec{m} \tag{5.13}$$

Соеденим требования 5.13 и 5.12 в требование оптимальности 5.11. Следовательно, искомые коэффициенты $\vec{m}$ могут быть вычислены, как решение следующей задачи мат. программирования:

$$\begin{cases} \vec{m}^T \cdot P^{-1} \cdot \vec{m} \to \min \\ X^T \cdot \vec{m} = \vec{x}_0 \end{cases} \tag{5.11'}$$

Задачу 5.11' решаем методом Лагранжа:
Шаг 1. Составим функция Лагранжа:

$$L(\vec{m}, \vec{l}) = \vec{m}^T \cdot P^{-1} \cdot \vec{m} + \vec{l}^T \cdot \left(\vec{x}_0 - X^T \cdot \vec{m}\right)$$

символом l обозначен множитель Лагранжа.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Сколько этих l

Шаг 2. Составим необходимые условия экстремума функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \vec{m}} = 2 \cdot P^{-1} \cdot \vec{m} - X \cdot \vec{l} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = \vec{x}_0 - X^T \cdot \vec{m} = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Шаг 3. Система 5.14 решается аналитически или методом подстановки:

$$\vec{m} = P \cdot X \cdot \left(X^T \cdot P \cdot X\right)^{-1} \cdot \vec{x}_0 \tag{5.15}$$

Следовательно, наилучшая оценка расчитавается по правилу 5.16:

$$\tilde{y}_0 = \vec{m}^T \cdot \vec{y} = \vec{x}_0^T \cdot \left(X^T \cdot P \cdot X\right)^{-1} \cdot \vec{y} \tag{5.16}$$

И последнее дейстие

$$y_0 = \vec{x}_0^T \cdot \vec{a} \Rightarrow \tilde{\vec{a}} = \left(\left(X^T \cdot P \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T\right)(= M) \cdot P \cdot \vec{y} \blacksquare$$

Какие размеры имеет матрица $\vec{m}$. Показать, что мат. ожидание 5.17 совпадает с вектором $\vec{a}$. Каждый элемент имеет наименьшую дисперсию в классе линейных процедур.

Следствие. Если матрица P является еденичной, что соответсвует события ..., то формула 5.17 превращается в формулу.

...

Обратимся к 5.17 и увидим, что