Семинар №5

Шаг №1. Есть данные из выборки в рамках модели (2.1), которые сведены в:

$$\begin{cases} Y_{n\times G} = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{G1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & \dots & y_{Gn} \end{pmatrix} \quad U_{n\times G} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{G1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{Gn} \end{pmatrix} (4.4) \\ X_{n\times K} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{Kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{Kn} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$A_{G\times G} \cdot Y^T_{G\times n} + B_{G\times K} \cdot X^T_{K\times n} = u^T_{G\times n} \tag{4.3}$$

$$Y_{n\times G} = X_{n\times K} \cdot M^T{}_{K\times G} + V_{n\times G}, \text{ где} \tag{4.5}$$

$$M^T = -\left(A^{-1}_{G\times G} \cdot B_{G\times K}\right)^T \tag{4.6}$$

$$V_{n\times G} = U_{n\times G} \times \left(A^{-1}\right)^T_{G\times G} \tag{4.7}$$

Шаг №2. По результатам наблюдений переменная y_{it} и значение случайных величин u_{it} образуют вектора

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{in} \end{pmatrix}; \ \vec{u}_{G\times 1} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{in} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Шаг №3. Результаты наблюдений $y_t(i_j),\ x_t(i_j)$:

$$\begin{cases} Y_i = \begin{pmatrix} y_1(i_1) & \dots & y_1(i_{Gi}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(i_1) & \dots & y_n(i_{G1}) \end{pmatrix} \\ X_i = \begin{pmatrix} x_1(i_1) & \dots & x_1(i_{Ki}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(i_1) & \dots & x_n(i_{K1}) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.9}$$

$y_1(i_m),\ t = j = 1, \dots, n,\ y_t(i_m)$ входящую в правую часть 4.1, аналогично:

$$x_j(i_m),\ t = j = 1, \dots, n,\ x_t(i_m)$$

предопределённых регрессоров входящую в правую часть (4.1).

В силу (4.5) матрицу Y_t модно записать в виде:

$$Y_i = X \cdot M^T_i + V_i,\ i = 1, \dots, n \tag{4.10}$$

$M^T_i,\ V_i$ соответствующие части матриц: $M^T,\ V$.

Шаг №4. Согласно (4.1) векторы (4.8) и матрицы (4.9) связаны схемой Гаусса-Маркова можно записать следующим образом:

$$\vec{y}_i = Y_i \cdot \vec{\alpha}_i + X_i \cdot \vec{\beta}_i + \vec{u}_i = (Y_i|X_i) \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{u}_i \tag{4.11}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_i \\ \hline \vec{\beta}_i \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Однако располагая данной схемой применить МНК не предоставляется возможным (ответить почему), так как $y_t(i_j)$ коррелирует с случайным остатком u_{it}.

$$Cov(y_t(i_j), u_{it}) \neq 0$$

Состоятельные оценки коэффициентов (4.12) позволяют получить процедура 2МНК.

Теорема 4.1. Условия:

1. Пусть уравнение (4.1) модели (2.1) идентифицируемо
2. Ранг матрицы X равен k: $rang(X) = k$
3. Для матриц $X(4.2),\ U(4.4)$ справедливо следующее равенство:

$$P\lim\left(\frac{1}{n}\cdot X^T\cdot u\right) = 0 \tag{4.13}$$

$$\exists\, M_{X,X} = P\cdot\lim\left(\frac{1}{n}\cdot X^T\cdot X\right)^{-1} \tag{4.14}$$

5. Компоненты вектора U вектора некоррелируют, то есть выполняется:

$$\begin{cases} Cov(u_i, u_j) = 0 \\ E\left(u^2\right) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

Тогда:

1. Уравнение (4.1) процедура оценивания параметров 2 МНК:

$$\tilde{y}_i = X\cdot\widetilde{M}_i^T = X\left(X^TX\right)^{-1}X^TY_i$$

$$\vec{\tilde{\gamma}}_i = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_i \\ \hline \vec{\beta}_i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{y}_i^T\tilde{y}_i & \tilde{y}_i^T x_i \\ \hline x_i^T\tilde{y}_i & x_i^T x_i \end{array}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_i^T \\ \hline X_I^T \end{pmatrix}\cdot\vec{y}_i \tag{4.15}$$

2. Состоятельная оценка ковариационной матрицы вычисляется по правилу:

$$Cov\left(\vec{\tilde{\gamma}}_i, \vec{\tilde{\gamma}}_i\right) = \tilde{\sigma}^2\cdot Q \tag{4.16}$$

$$\text{где}: \tilde{\sigma}_i^2 = \frac{\tilde{u}_{i1}^2 + \ldots + \tilde{u}_{in}^2}{n-(G_i-1+)} =$$

$$= \frac{\left(\vec{y}_i - Y_i\vec{\tilde{\alpha}}_i - X_i\vec{\tilde{\beta}}_i\right)^T\left(\vec{y}_i - Y_i\vec{\tilde{\alpha}}_i - X_i\vec{\tilde{\beta}}_i\right)}{n-(G_i-1+K_i)} \tag{4.17}$$

Таким образом,

1. сформулируем алгоритм, оценить параметры текущей формы модели включённую в правую часть уравнения (4.11)
2. оценить МНК параметры уравнение (4.11) рассматривая МНК оценки $\tilde{y}_i$

вместе со значениями X_i

3. вычислить оценку диспресии по правилу (4.17).
4. найти состоятельную оценку коэффициентов уравнение (4.1)

2 МНК применяется при оценивании параметров поведенческих уравнений модели в случае корреляции текущих эндогенных со случайными параметрами, если корреляция отсутствует, то параметрпы оцениваются МНК.