Семинар №3

Завершение темы №2 и правило ранга

$$(R_i)_{L_i\times(G\times K)} \Longrightarrow \overline{A} = (A|B)$$

Правило ранга

Если $a = 1$, то i индетифицируемо тогда и только тогда, если ранг матрицы:

$$rang\left(\overline{A}\cdot R_i^T\right) = G-1 \tag{2.6}$$

Ранг матрицы определяется следующим образом:

$$\overline{A}_{G\times(G+K)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot R^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}\cdot R = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -c \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$rang(\overline{A}\cdot R) = 1$$

, но по правилу ранга: $rang(\overline{A}\cdot R) = 1 \neq G-1 = 3-1 = 2$

Следовательно, уравнение не идентифицируемо

В системе уравнений $K = 2$, то в первом уравнении:

$i = 1 : K - K_1 = 2-2 \ = 0 \geqslant G_1 - 1 \ = \ 2-1$ – необходимое условие ложно для первого уравнения

Тема №3. Достаточное условие, состоятельность МНК оценок структурных параметров в ЛМОУ. Инструменетальные переменные

Рассмотрим проблему линейной индетификации оценок. Предположим, что уравнения идентифецируемы, тогда как дела с параметрами модели?

$$\begin{cases} y_t^d = a_0 + a_1 p_t + u_t; \\ y_t^s = b_0 + b_1 p_{t-1} + v_t; \\ y_t^d = y_t^s; \\ a_0, b_0, b_1 > 0,\ a_1 < 0 \begin{pmatrix}\text{нормальность - зависимость} \\ \text{спроса от цены прямая}\end{pmatrix}; a_2 > 0 \\ E(u_t) = 0,\ Var\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2 \\ E(v_t) = 0,\ Var\left(v_t^2\right) = \sigma_v^2 \\ Cov(u_i, u_j) = 0;\ i \neq j \\ Cov(v_i, v_j) = 0;\ i \neq j \end{cases} \tag{3.1}$$

Предполагаем, что модель (3.1) идентифицируема и поэтому встаёт вопрос о оценке параметров.

Оцениваются 6 параметров:

$$\left(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_v\right) - ? \tag{3.2}$$

$$(y_1, p_1, p_0), \ \ldots, (y_n, p_n, p_{n-1}) - \text{массив данных} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 p_1 + u_1 \\ \ldots \\ y_n = a_0 + a_1 p_n + u_n \end{cases} \Longrightarrow \tag{3.4}$$

$$\Longrightarrow \left(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{\sigma}_u\right) - \text{для первого уравнения} \tag{3.5}$$

Схема Гаусса-Маркова для 1-ого уравнения:

$$(3.1) \Longrightarrow p_t = \frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} p_{t-1} + \frac{x_t - u_t}{a_1} - \text{приведённая форма уравнения цены} \tag{3.6}$$

Для полного получения приведённой форме необходимо подставить (3.6) в (3.1)

Последнее слагаемое в цене (3.6) говорит, что цена зависит от случайного возмущения, то есть не нулевая:

$$\Longrightarrow \begin{cases} Cov(p_t, u_t) \neq 0 \\ Cov(p_{t-1}, u_t) \neq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Следовательно, нарушается предпосылка №4 теоремы Гаусса-Маркова. Тогда нарушается свойство состоятельности.

Замечание. Процедура МНК позволяет сформулировать достаточное условие состоятельности оценок параметров поведенческого уравения модели. В ситуации зависимости матрицы X от вектора случаных переменных:

$$X(\vec{u}_t)$$

Вот условия:

$$1)\ P \cdot \lim\left(\frac{1}{n} \cdot X^T \cdot \vec{u}\right) = 0 \tag{3.8}$$

$$2)\ \exists\, M_{X,X} = P \cdot \lim\left(\frac{1}{n} \cdot X^T \cdot X\right)^{-1} \tag{3.9}$$

$$3)\ \sigma_u^2 = P \cdot \lim\left(\frac{1}{n} \cdot \vec{u}^T \cdot \vec{u}\right) \tag{3.10}$$

Именно отсутствие свойства (3.8) индуцировало (пораждало) несостоятнельность МНК оценок a_0, a_1.

Условия (3.8) - (3.10) остаются справедливыми для состоятельности МНК оценок параметров произвольной линейной модели, в случае зависимости регрессоров от случайного возмущений.

Инструментальные переменные

Существует ли метод вычисления состоятельных оценок параметров модели (3.1)?

Ответ: да и не единственный, один из них 2 МНК (двушаговый метод наименьших квадратов).

Рассмотрим линейные модели множественной регрессии:

$$y_1 = a_1 x_{1t} + \ldots + a_k x_{Kt} + u_t \tag{3.11}$$
$$E(u_t) = 0,\ Var\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2$$