Производственная функция с постоянной эластичностью замещения. Функция Соллоу или CES.

План

1. Уравнение CES функции и иследование её основных свойств.
2. Уравнение изоквант CES функции.
3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлом занятии обсудили понятие производственной функции и рассмотрели три примера (Функция Кобба-Дугласа, функция Леонтьева и линейная).
На сегодняшнем мы рассмотрим функцию со следующим уравнением:

$$y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + \ldots + a_n \cdot x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}} \tag{1}$$

$$a_i > 0,\ \rho > 0, h > 0, i = 1, 2,\ \ldots, n \tag{2}$$

которая называется производственной функцией с постоянной эластичностью замещения. Можно показать, что обсуждённые на прошлом занятии функции получены из уравнения (1), как предельные значения по параметру ρ.
Изучим основные **свойства** CES функции:

☑ **Свойство 1.**

$$F_{CES}(0, 0) = 0 \tag{3}$$

Рассматривая уравнение (1) при $n = 2$, мы обнаружим, что в точке 0 функция (1) неопределена, то есть имеет особенность. Мы сейчас покажем, что в 0 CES функция имеет устранимую особенность это значит, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0^+ \\ x_2 \to 0^+}} F_{CES}(x_1, x_2) = 0 \tag{3'}$$

Перепишем уравнение (1):

$$y = \frac{a_0}{\left(\frac{a_1}{x_1^\rho} + \frac{a_2}{x_2^\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}} \tag{1'}$$

Пусть в знаменателе уравнения (1') переменная x_1 стремится к 0^+, тогда $\frac{a_i}{x_i^\rho}$ стремится к ∞ и весь знаменатель следоваетельно стремится к ∞. Тогда вся дробь стремится к 0.Тогда

$$y = \begin{cases} a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}, \text{при } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Обратим внимание каждый проищведственный фактор необходим в том смысле, что при нулевом уровне какого-то из этих факторов, весь выпуск равен 0.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Проверить, что в функции Коббла-Дугласа и Леонтьева, каждый фактор необходим. ? Так ли это в линейной функции.

☑ **Свойство 2.** Выпуск продукции возрастает при росте факторов:

$$M_y(x_i) > 0 \tag{4}$$

$M_y(x_i)$ *предельный продукт* i-ого фактора. Добавим предельные величины рассчитываются как производные:

$$\frac{\partial F_{CES}(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$$

Удобно прологорифмировать уравнение CES функции:

$$\ln y = -\frac{h}{\rho} \ln\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + \ln a_0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_1 \cdot x^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Проверить предельное значение выпуска по второму фактору. А так же доказать **третье свойство** производсенной функции. $M_y(x_i) \downarrow x_i \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$

Другими словами производсенная функция выпукла вверх.

Итог: CES функция удовлетворяет основным требованиям производсенных функций фирмы.

Уравнение изокванты

Вспомним понятие изокванты производственной функции так принято называть множество комбинаций значений факторов производства при которых уровень выпуска остаётся неизменным. Обозначим символом $y_0 \ = 2$. Тогда уравнение изокванты для производсвтенной функции имеет вид:

$$F_{CES}(x_1, x_2) = y_0 \tag{6}$$

Мы можем данное уравнение разрешить относительно велечины x_2, то есть найти:

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \tag{6'}$$

Задача. Построить уравнение изокванты CES функции:

1. $y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}$
2. $\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) = \left(\dfrac{y}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}}$
3. $x_2^{-\rho} = \dfrac{1}{a_2}\left(\left(\dfrac{y}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)$

4. $x_2 = \left(\frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)\right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (6'')$

(6") - *уравнение изокванты.* У изокванты имеются асимптоты.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Исследовать (6") уравнение изокванты и найти её горизонтальную и вертикальную ассимптоты. Построить график изокванты при значениях:

$$y_0 = 2,\ a_0 = 0.45,\ a_1 = 0.5, a_2 = 0.1, \rho = h = 1$$