Семинар №6. Двойственный характер модели поведения потребителя и уравнение Слутского

План

1. Взаимосвязь спроса потребителя по Маршаллу-Вальрассу и по Хиксу. Уравнение Слутского;

2. Рассчёт изменения спроса потребителя (по уравнениям Слутского) в ответ на изменнение цен благ;

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На 4-ом и 5-ом занятиях рассчитали соответственно спрос потребителя по Маршалу-Вальрассу:

$$\begin{cases} \vec{x}^{M-B}\left(\vec{p}, M\right) = \vec{x}^{D} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}; \\ u\left(\vec{x}^{D}\right) = 0.14; \\ M = 200\text{руб.}; \\ p_1 = 50;\ p_2 = 75; \end{cases} \tag{1}$$

$$\boxed{u = a_1\,(= 0.1)\cdot \ln x_1 + a_2(= 0.2)\cdot \ln\ x_2}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{H} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}; \\ u_0 = \underline{0.14},\ p_1 = 50,\ p_2 = 75; \\ M^* = M\left(\vec{p}, u_0\right) = p_1 x_1^H + p_2 x_2^H = 200 \text{ руб.}; \end{cases} \tag{2}$$

Случайно ли это? Совпадение спроса по Хиксу со спросом по Маршалу-Вальрассу в ситуации, когда экзогенно заданный уровень дохода потребителя равен стоимости спроса по Хиксу $M = M\left(\vec{p}, u_0\right) = M^*$ совпадение не случайно. Справедливо слудующее тождество по p и u_0:

$$\boxed{\vec{x}^{D}\left(\vec{p}, M\left(\vec{p}, u_0\right)\right) \equiv \vec{x}^{H}\left(\vec{p},\ u_0\right)} \tag{3}$$

Тождество можно дифференцировать по p:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}(n\times n) + \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n\times 1)\ \cdot\ \frac{\partial M}{\partial \vec{p}}(1\ \times n) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n\times n) \tag{4}$$

Уравнение (4) носит название основных уравнений теории полезностей или уравнение Слутского.

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^D}{\partial M}\cdot\frac{\partial M}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}\ i = 1, 2,\ \ldots n, \tag{4'}$$

Уравение Слутского связывают между собой значение предельного спроса по Хиксу (правая часть) со значением предельного спроса по Маршаллу-Вальрассу.

Замечание. Можно показать, что в левой части уравения (4) производная $\dfrac{\partial M}{\partial p_j}$ в точности равна спросу по Хиксу и в силу тождества (3):

$$\frac{\partial M}{\partial p_j} = x_j^H = x_j^D \tag{5}$$

Экономисты называют уравнение (5) леммой Шепорта.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ (необязательное). Доказать уравнение (5) опираясь; проверить справделивость (5) в условиях домашней задачи. Продифференцировать по $p_1x_1^H + p_2x_2^H$. С учётом равенства (5) уравнение Слутского приобретает следующий вид (с учётом (5)):

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}(n\times n) \ = \ \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n\times n) \ - \ \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n\times 1) \ \cdot (\vec{x}^D)^T(1\times n) \tag{4''}$$

Вывод: модели Маршалла-Вальрасса и Хикса связаны между собой тождеством двойсвтенности (3). Дифференцирование этого тождества по p приводит к уравнению Слутского (4), которые связывают между собой предельный спрос по Маршаллу-Вальрасу с предельным спросом по Хиксу. В правой части равенства (4) находится симетричная матрица, которая назвается матрицей Слусткого и обозначается:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n\times n)$$

Рассчёт изменение спроса потребителя в ответ на изменение цен товара (по уравнениям Слутского)

Вернёмся к условиям наших задач отмеченных в выражениях (1) и (2) и предположим, что цены изменились на некоторую величину $\triangle\ \vec{p}$; предположим, что $\triangle\ \vec{p}_1$ не изменилась, $\triangle\ \vec{p}_2$ увеличилось.

$$\triangle\ \vec{p} \ = \ \begin{pmatrix}\triangle\ \vec{p}_1\\ \triangle\ \vec{p}_2\end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix}0\\ 5\end{pmatrix};$$

Требуется рассчитать изменение спрос по М-В и Хиксу.

Порядок рассчёта:

1.

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}\cdot \triangle\ \vec{p}\ \left(= \triangle\ \vec{x}^D\right) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}\ \cdot \triangle\ \vec{p}\left(= \vec{x}^H\right) - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n\times 1)\cdot(\vec{x}^D)^T(1\times n)\cdot \triangle\ \vec{p}\ \left(=\triangle\ \vec{x}^{YE}\right) \tag{6}$$

$\triangle\ \vec{x}^{YE}$ вычитаемое экономисты называют эффектом дохода. $\vec{x}^H = \vec{x}^{SE}$ – эффект замещения. $\vec{x}^D = \vec{x}^{GE}$- генеральное.

2.

$$\triangle\ \vec{x}^{D} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sum a_i} \cdot \frac{M}{p_1} \\ \frac{a_2}{\sum a_i} \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{M}{p_1} \\ 0.67 \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial x_i^{D}}{\partial p_j} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{M}{p_1} & 0 \\ 0 & 0.67 \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Дать экономескую трактовку столбцам матрицы

$$\triangle\ \vec{x}^{D} = \triangle\ \vec{x}^{GE} = \frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{200}{50^2} & 0 \\ 0 & 0.67 \cdot \frac{200}{75^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle\ x_1^{D} \\ \triangle\ x_2^{D} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Посчитать.

3. Вернёмся к (6). Нам будет удобно на третьем шаге рассчитать вычиатемое в правой части (6) эффект дохода.

$$\frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial M} = \begin{pmatrix} \frac{0.33}{p_1} \\ \frac{0.67}{p_2} \end{pmatrix} (= S)\ ;\ \frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial M} \cdot (\vec{x}^{D})^{T} = \begin{pmatrix} \frac{0.33}{p_1} \\ \frac{0.67}{p_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.3 & 1.8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0.33}{p_1} \cdot 1.3 & \frac{0.33}{p_1} \cdot 1.8 \\ \frac{0.67}{p_2} \cdot 1.3 & \frac{0.67}{p_2} \cdot 1.8 \end{pmatrix} (9)$$

$$\triangle\ \vec{x}^{YE} = \frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial M} \cdot (\vec{x}^{D})^{T} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. $\boxed{\text{ДЗ}}$ Вычисляем вычисление спроса по Хиксу по правилу:

$$\vec{x}^{H} = \vec{x}^{SE} = \triangle\ \vec{x}^{D} + \triangle\ \vec{x}^{YE}$$