Семинар №7

Производственная функция фирмы и её примеры: Кобба-Дуглоса, линейная и Леонтьева
План

1. Понятие производственной функции фирмы, её основные свойства и три примера;

2. Основные характерстики производственной функции: предельные продукты факторов производства, эластичность выпуска по факторам производства, средние продукты факторов, изокванты производственной функции;

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Приступаем к моделированию поведения фирмы при производстве благ (товар или услуга). Обозначим символом *y кол-во продукции (блага)*, которое производит фирма на заданном отрезке времени; в процессе производства этого блага фирма использует *факторы производства* и уровни этих факторов мы будем обозначать сиволоми: $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Пусть x_1-основной капитал средство производства, второй фаткор x_2 $-$ это кол-во живого труда, x_3-запасы, полуфабрикаты, x_n $-$ финансовый капитал.

В процессе выбора фирма использует технология f при помощи которой факторы производства трансформируются в уровень продукции y. Вот лаконичная запись такой трансформации:

$$y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ f \tag{1}$$

$$y\ =\ f\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) \tag{2}$$

Математическое выражение (2) называется *производственной функцией фирмы*.

Отметим основые **свойства** производственной функции:

1. При нулевых факторах производства, то и выпуск 0. $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$;

2. Производственная функция возрастает по каждому фактору производства $f\ \uparrow\ x_i$, т.е. $f\ \uparrow\ x_i\ \Leftrightarrow\ M_y(x_i)$. $M_y(x_i)-$предельное значение выпуска по i-ому фактору, т.е. это дополнительный выпуск продукции в ответ на дополнительную еденицу i-ого фактора.

3. С ростом уровня $x_i\uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i)\downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Приведем три примера производсвенный функций, удовлетворяющих в той или иной мере своствам производственной функции.

Пример 1. $y \ = \ f \left(x_1 \ (= \text{основной капитал} \right) , \ x_2 \left(= \text{живой труд} \right)).$

$$\boxed{\begin{array}{l} y \ = \ a_0 \ \cdot x_1 \cdot x_2 \\ a_0 \ > 0, \ 0 \ < a_1 \ < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \tag{4}$$

Производсвенная фукций (4) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Пример 2. Линейная проиводственная функция:

$$\begin{gathered} y \ = \ a_1 x_1 \ + \ a_2 x_2 \\ a_1 > 0; \ a_2 > 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Пример 3. Производсвенная функция Леонтьева.

$$\begin{gathered} y = \ a_0 \min(x_1, \ x_2) \\ a_0 > 0 \end{gathered} \tag{6}$$

$\boxed{\text{ДЗ №1}}$ Проверить справедливость свойств производственной функции для (4), (5), (6).

Основные характерстики производсвенной функции Коббла-Дугласа.

$$y \ = 0.45 x_1^{0.5} \, (\text{млрд. долл.}) \, x_2^{0.1} \, (\text{тыс. человек}) \tag{4$'$}$$

1. Предельный выпуск фирмы по правилу производсва: $M_y(x_i) \ \approx \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$(7). Также называют *предельным продуктом фактора* x_i.

Решим задачу. Определить уравнение предельного продукта $M_y(x_i)$ по первому фактору и рассчитать значние этого предельного продукта $x_1 \ = \ 6, \ x_2 \ = 17$:

$$M_y(x_i) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \ = 0.45{\cdot}0.5{\cdot}x_1^{0.5-1} x_2^{0.1} = 0.45{\cdot}0.5 \, x_1^{-0.5} x_2^{0.1} = 0.45{\cdot}0.5 \, 6^{-0.5} 17^{0.1} = 0.12 \tag{8}$$

Величина $M_y(x_i) \ = 0.12$ −это значение дополнительного выпуска продукции в ответ использование в процессе производства дополнительной еденицы совокупного капитала.

$\boxed{\text{ДЗ № 2}}$ Получить уравнение предельного продукта второго фактора и дать интерпритацию.

При помощи уранения (8) в $\boxed{\text{ДЗ № 1}}$ **можно проверить справедливость второго свойства проиводсвенной функции.**

Средний продукт фактора производства.

2. Средним продуктом фактора производства $A_y(x_i)$ экономисты называют дробь $\dfrac{y}{x_i}$.

$$A_y(x_i) \ = \frac{y}{x_i} \tag{9}$$

Средний продукт фактора производсва - это кол-во выпуска продукции приходящаяся на одну единицу данного фактора.

Задача №2. Для функции Кобба-Дугласа вычислить значение предельного продукта первого фактора и посчитать его значение применитльно уравнения (4').

$$A_y(x_1) \ = \frac{y}{x_1} = \frac{0.45 \cdot 6^{0.5} \cdot 17^{0.1}}{6} \ = 0.24 \tag{11}$$

У данной фирмы на одну единицу совокупного капитала приходится в среднем 0.24 млрд. продукции.

ДЗ № 3 Для функции Кобба-Дугласа вычислить значение предельного продукта **второго** фактора и посчитать его значение применительно уравнения (4').

3. **Эластичность выпуска по факторам производства** расчитаывается по правилу (смотри занятие №2):

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i)$$

Задача №3. Расчитать значение эластичности в рамках формулы (4') по формуле (11):

$$E_y(x_1) = 0.12 : 0.24 = 0.5$$

Эластичность выпуска функции Коббла-Дугласа равна показателю степени a_1. Следовательно коэффициент a_1 в уравнении (4') - это эластичность функции выпуска.

ДЗ № 4 Определить эластичность выпуска по второму фактору.

4. **Изокванты** заданного уровня y_0 экономисты называют *линию уровня функции,* т.е. множество различных комбинаций факторов производства при которых уровень выпуска продукции остаётся неизменным и равным заданной велечине y_0. Изокванту удобно изучать разрешив уравнение (13) относительно переменной например x_1, т.е. привратив переменную x_1 в функцию переменной x_2 зависящей, как от параметра.

Задача №4. Получить уравнение изокванты и построить график этой изокванты для функции (4') принимая значение $y_0 = 2$.

Решение. Аналогом изокванты является функция безразличия и мы можем воспользоваться домашней задачей № 3.

$$x_1 \ = \ \left(\frac{y}{a_0 \ \cdot x_2^{a_2}}\right)^{\frac{1}{a_1}} \ = \ \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot x_2^{-\frac{a_2}{a_1}} \ (x_2 > 0)$$