Домашняя работа №6 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Составить элементы компактной запись, остальных двух элементов модифицированной модели Самуэльсона-Хикса.

Решение: Модифицированная модель Самуэльсона-Хикса выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 \cdot Y_{t-1} + a_2 \cdot Cr_t + a_3 \cdot San_t + u_t; \\ I_t = b_0 + b_1 \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + b_2 \cdot Cr_t + b_3 \cdot San_t + u_t; \\ G_t = g_1 \cdot G_{t-1} + g_2 \cdot Cr_t + g_3 \cdot San_t + u_t; \\ Y_t = C_t + I_t + G_t; \end{cases}$$

Для первого уравнение элементы компактной записи были составлены на Семинаре №6. Запишем элементы компактной записи для остальных двух, начнём с объёма инвестиций страны I:

$$I_t = b_0 + b_1 \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + b_2 \cdot Cr_t + b_3 \cdot San_t + u_t;$$

Компактная запись будет выглядить следующим образом:

$$\vec{I} = Y \cdot \vec{b} + \vec{u};$$

, элементами которой являются:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{2003} \\ \dots \\ I_{2017} \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & Y_{2002} - Y_{2001} & Gr_{2003} & San_{2003} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Y_{2016} - Y_{2015} & Gr_{2017} & San_{2017} \end{pmatrix}; \vec{u} = \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix}$$

Теперь запишем компактную запись для государственных расходов G:

$$G_t = g_1 \cdot G_{t-1} + g_2 \cdot Cr_t + g_3 \cdot San_t + u_t;$$

Компактная запись будет выглядить следующим образом:

$$\vec{G} = Z \cdot \vec{g} + \vec{u};$$

, элементами которой являются:

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} G_{2003} \\ \dots \\ G_{2017} \end{pmatrix}; \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}; Z = \begin{pmatrix} G_{2002} & Gr_{2003} & San_{2003} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{2016} & Gr_{2017} & San_{2017} \end{pmatrix}; \vec{u} = \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix}$$

Задача №2.

$$\vec{\tilde{a}} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{y}; \qquad (*)$$

Показать, что вектор $\vec{\tilde{a}}$ является случайным и опираясь на формулы (9) найти ожидаемое значение вектора ($E\left(\vec{\tilde{a}}\right) - ?$) и его коварционную матрицу ($Cov\left(\vec{\tilde{a}}, \vec{\tilde{a}}\right) - ?$).

$$\begin{cases} E(\vec{v}) = A \cdot E(\vec{u}) + b; \\ Cov(\vec{u}, \vec{u}) = A \cdot Cov(\vec{u}, \vec{u}) \cdot A^T; \end{cases} \qquad (9)$$

Решение: В правой части уравнения (*) матрица X является константой или фиксированной величиной, а вектор $\vec{y}$ является случайным значением в силу того, что:

$$\vec{y} = X \cdot \vec{a} + \vec{u}; \qquad (**)$$

в правой части (**) первое слагаемое $X \cdot \vec{a} = \alpha$ − это вектор констант, а второй вектор случайный $\vec{u}$ и мы можем трактовать вектор $\vec{y}$ выражения (**), как афинное преобразование ветора $\vec{u}$.

Следовательно, так как $\vec{y}$ является случайным, то и оптимальные оценки коэффициентов вектора $\vec{a}$ из уравнения коэффициентов (**), так же будут случайными оценками.

Наёдем математическое ожидание от оценок коэффициентов $\vec{a}$.

Для нахождения математического ожидания от оценок коэффициентов $\vec{a}$.

Перепишем уравнение (*) в другую форму:

$$\tilde{\vec{a}} = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot (X\vec{a} + \vec{u}) =$$

$$= \left(X^T X\right)^{-1} \cdot \left(X^T X\right) \cdot \vec{a} + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u} =$$

$$= \left[\text{Вспомним, что } \left(X^T X\right)^{-1} \cdot \left(X^T X\right) = I\left(\text{еденичной матрице}\right)\right] =$$

$$= \vec{a} + \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}$$

Возьмём математическое ожидание от левой и правой части и получим, вспоминая свойство вектора $\vec{u}$, а именно, что $E(\vec{u}) = 0$:

$$E\left(\tilde{\vec{a}}\right) = E(\vec{a}) + E\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}\right) = E(\vec{a}) + \left(X^T X\right)^{-1} X^T E(\vec{u}) = E(\vec{a}) = \vec{a}$$

Ковариционная матрица вектора $\tilde{\vec{a}}$ по определению равна:

$$Cov\left(\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}}\right) = E\left(\left(\tilde{\vec{a}} - \vec{a}\right)\left(\tilde{\vec{a}} - \vec{a}\right)^T\right) = \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{a}_1}^{\ 2} & \sigma_{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2} & \dots & \sigma_{\tilde{a}_1,\tilde{a}_n} \\ \sigma_{\tilde{a}_2,\tilde{a}_1} & \sigma_{\tilde{a}_2}^{\ 2} & \dots & \sigma_{\tilde{a}_2,\tilde{a}_n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{\tilde{a}_n,\tilde{a}_1} & \sigma_{\tilde{a}_n,\tilde{a}_2} & \dots & \sigma_{\tilde{a}_n}^{\ 2} \end{pmatrix}$$

Её диагональные элементы равны $\sigma_{\tilde{a}_1} = Var\left(\tilde{a}_1\right)$ дисперсиям оценок отдельных коэффициентов. А диагональные элементы равны ковариациям оценок $\sigma_{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2} = Cov\left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\right)$. Заметим, что $\sigma_{\tilde{a}_i,\tilde{a}_j} = \sigma_{\tilde{a}_j,\tilde{a}_i}$, то есть матрица $Cov\left(\tilde{a}, \tilde{a}\right)$ симметричная относительно главной диагонали. Далее по выведенной нами формуле вычислим:

$$\tilde{\vec{a}} - \vec{a} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}$$

И подстваим в формулу ковариации выше получим:

$$E\left(\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}\right)\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \vec{u}\right)^T\right) =$$

$$= E\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T \left(\vec{u} \cdot \vec{u}^T\right) X \left(X^T X\right)^{-1}\right) =$$

$$= \left(X^T X\right)^{-1} X^T E\left(\vec{u} \cdot \vec{u}^T\right) X \left(X^T X\right)^{-1} =$$

$$= \left[\text{вспомним, что } E\left(\vec{u} \cdot \vec{u}^T\right) = \sigma_u^2 \cdot I \left(\text{еденичная матрица}\right)\right] =$$

$$= \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1} X^T X \left(X^T X\right)^{-1} = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}.$$

Сдедовательно ковариация равна:

$$Cov\left(\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}}\right) = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1}$$