Семинар №4

Опрос с нарушения состоятельности оценок:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_{1t} + \ldots + a_k x_{Kt} + u_t \\ E(u_t) = 0,\ Var\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2 \end{cases} \tag{3.11}$$

Выполняются требования к случаному возмущению $E(u_t) = 0,\ Var\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2$. Объясняющие переменные коррелируют со случайным остатком, т.е. не выполняется условие (3.8):

$$P \cdot \lim\left(\frac{1}{n} \cdot X^T \cdot \vec{u}\right) = 0 \tag{3.8}$$

$z_{1t},\ \ldots, z_{Kt}$ называется инструментальными, если выполняются условия:

$$P \cdot \lim\left(\frac{1}{n} \cdot Z^T \cdot \vec{u}\right) = 0 \tag{3.12}$$

$$\exists M_{ZX} = P \lim\left(\frac{1}{n} \cdot Z^T \cdot X\right) \tag{3.13}$$

, то есть переменные $z_{1t}, \ldots, z_{Kt}$ не коррелируют в пределе со случайными остатками, но коррелируют в пределе с регрессорами.

Где матрица $X : X = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix}$, матрица $Z_{n\times k} : Z = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow Z^T_{k\times n} \Longrightarrow \exists \left(Z^T \cdot X\right)_{k\times k}$$

Теорема 3.1. Процедура:

$$\tilde{\vec{a}} = \left(Z^T \cdot X\right)^{-1} Z^T \vec{y} \tag{3.14}$$

обеспечивает состоятельные оценки параметров (3.11).

Как построить инструментальную переменную? **Ответ:** 2МНК содержит алгоритм построения инструментальных переменных для получения состоятельных оценок.

$$p_t = \frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} p_{t-1} + \frac{x_t - u_t}{a_1} = \left[M_0 = \frac{b_0 - a_0}{a_1}; M_1 = \frac{b_1}{a_1}; \frac{x_t - u_t}{a_1} = \varepsilon_t\ (3.15)\right] =$$

$$= M_0 + M_1 p_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.16}$$

Напрашивается переход:

$$\Longrightarrow z_t = p_t - \varepsilon_t \tag{3.17}$$

Состоятельные оценки коэффициентов $\vec{a}$ первого уравнения модели (3.1 внизу конспекта) можно отыскать по правилу (3.14), где в роли $X,\ \vec{y}$,:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & p_{n-1} \end{pmatrix}; \vec{y}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

, а в роли инструментальных переменных:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

проблема заключается в (3.19), так как все кроме (3.19) мы можем собрать в статистику. Если переменная Z была бы наблюдаема, то для коэффициентов первого уравнения (3.1) можно было найти не только состоятельную, но и оптимальный(несмещённый и эффективные МНК оценки):

$$\widetilde{a} = \left(Z^T \cdot Z\right)^{-1} \cdot Z^T \cdot y \;\rightarrow\; 2\text{МНК} \tag{3.20}$$

Так как (3.17) не доступна для наблюдения, то можно ли найти для неё подходящую замену?

Ответ: можем следующей велечиной:

$$\widetilde{z}_t = p_t - \widetilde{\varepsilon}_t = \widetilde{M}_0 + \widetilde{M}_1 p_{t-1} \tag{3.21}$$

(3.21) доступна для вычислений после оценивания (3.18). В матричном виде:

$$\widetilde{M} = \left(\widetilde{M}_0, \widetilde{M}_1\right)^T = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{p} \tag{3.22}$$

, где:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & p_{n-1} \end{pmatrix}; \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Если матрица (3.19) вместо переменной Z использовать её МНК оценку (3.21), то в процедуре (3.20) матрицу Z можно сформировать по правилу:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{z}_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \widetilde{z}_n \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Тема №4. Двушаговый метод наименьших квадратов (2МНК)

Рассмотрим с учётом условии нормализации:

$$a_{ii} = 1 \Longrightarrow a_{i1} y_{1t} + \ldots + a_{ik} y_{Gt} + b_1 X_{1t} + \ldots + b_{1k} x_{kt} = u_{it},\; i = 1,\, \ldots,\, n \tag{2.1}$$

Выражаем одно из уравнений:

$$y_{it} = \sum_{j=1}^{G-1} \alpha_{ij} y_t(i_j) + \sum_{j=1}^{K_j} \beta_{ij} X_t(i_j) + u_{it} = \vec{\alpha}_i^T y_t(i) + \vec{\beta}_i^T \vec{X}_t(i) + u_{it} \tag{3.25}$$

,где $\underset{G-1}{y_{it}(i_j)}$ – текущие эндогенные переменные:

$$(y_{1t},\ \dots,y_{Gt}) \tag{2.2}$$

эти переменные коррелируют со случайным остатком.

$$X_t(i_j) \to (x_{1t},\ \dots,y_{Kt}) \tag{2.3}$$

X_t не коррелируют со случайным остатком.

$\vec{\alpha},\vec{\beta}$ – переменные при $\vec{y}$ и $\vec{X}$ отличаются от соответсвующих коэффициентов (2.1) знаком.

Формулы из семинара №3:

$$\begin{cases} y_t^d = a_0 + a_1 p_t + u_t; \\ y_t^s = b_0 + b_1 p_{t-1} + v_t; \\ y_t^d = y_t^s; \\ a_0, b_0, b_1 > 0,\ a_1 < 0; \\ E(u_t) = 0,\ Var\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2 \\ E(v_t) = 0,\ Var\left(v_t^2\right) = \sigma_v^2 \\ Cov(u_i, u_j) = 0;\ i \neq j \\ Cov(v_i, v_j) = 0;\ i \neq j \end{cases} \tag{3.1}$$