Микроэкономика

Домашняя работа №5 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 + l\dfrac{a_1}{x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 + l\dfrac{a_2}{x_2} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = u_0 - a_1 \cdot \ln x_1 - a_2 \cdot \ln x_2 = 0; \end{cases}$$

Решить систему и доказать, что решение этой системы методом подстановки имеет следующий вид:

$$x_1^* = \beta \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

$$x_2^* = \gamma \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{\sum a_i}}$$

$$l^* = \alpha \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

Рассчитать численно значение спроса по Хиксу и параметры выше.

Решение:

Напомним суть модели Хикса. В моделе Хикса заложенно следующее утверждение: потребитель выбирает такой набор благ, который с одной стороны имеет наименьшую *стоимость*, а с другой стороны предоставляет потребителю *заданные уровень полезности*.

Перейдём непосредственно к решению задачи.

Выразим множитель Лагранжа l:

$$l = -\frac{p_1 x_1}{a_1}$$

$$l = -\frac{p_2 x_2}{a_2}$$

Приравняем:

$$\frac{p_1 x_1}{a_1} = \frac{p_2 x_2}{a_2}$$

$$x_1 = \frac{p_2 x_2 a_1}{a_2 p_1}$$

Подставим в третье уравнение:

$$u_0 - a_1 \cdot \ln \frac{p_2 x_2 a_1}{a_2 p_1} - a_2 \cdot \ln x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_0 - a_1 \cdot \left(\ln\frac{p_2 a_1}{a_2 p_1} + \ln x_2\right) - a_2 \cdot \ln x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_0 - a_1 \ln\frac{p_2 a_1}{a_2 p_1} - \ln x_2 (a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_2 = \frac{u_0 - a_1 \ln\frac{p_2 a_1}{a_2 p_1}}{a_1 + a_2} = \frac{u_0}{a_1 + a_2} - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\left(\ln p_2 + \ln\frac{a_1}{a_2} - \ln p_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_2 = \frac{u_0}{a_1 + a_2} - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\ln p_2 + \frac{a_1}{a_1 + a_2}\ln p_1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\ln\frac{a_1}{a_2} \Rightarrow$$

$$x_2^* = \boxed{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}}} = \gamma \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{\sum a_i}}$$

Найдём x_1^*:

$$x_1^* = \frac{p_2 x_2 a_1}{a_2 p_1} = \frac{p_2 a_1}{a_2 p_1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} =$$

$$= \boxed{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{a_1 + a_2}}} = \beta \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

Найдём множитель Лагранжа l:

$$l^* = -\frac{p_2 x_2}{a_2} = -\frac{p_2}{a_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} =$$

$$= \boxed{-a_2^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} \cdot a_1^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}}} =$$

$$= \alpha \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \blacksquare$$

Вычислим численно:

$$x_1^* = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{a_1 + a_2}} = 1.31637...$$

$$x_2^* = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} = 1.75516...$$

$$l^* = -a_2^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} \cdot a_1^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} = -76.9818...$$

Задача №2.1. Убедиться в правильности функциии рассходов потребителя:

$$M^* = \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

Решение:

Подставим в следующую формулу найденные значения x_1^*, x_2^*:

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{a_1+a_2}} +$$

$$+p_2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}}\right) \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} = \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \blacksquare$$

Задача №2.2. Проверить справедливость уравнения

$$M^* = \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

рассчитать M^* и сравнить полученное значение со значением $M_0 = 200$ руб..

Решение:

$$M^* = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}}\right) \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} = [Python\ 3] = 197.45...$$

Задача №3. Показать, что $M^* \uparrow p_i$.

Решение: Для того, чтобы показать, что $M^* \uparrow p_i$ необходимо:

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i} > 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i^2} < 0$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i} = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \right) e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \frac{a_1}{a_1+a_2} p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}-1} > 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i^2} = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \right) e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \underbrace{\frac{-a_1 a_2}{a_1+a_2}}_{<0} p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}-2} < 0 \blacksquare$$