Семинар №11

Прогнозирование по оценённой эконометрической модели и проверка её адекватности

План

1. Точечный прогноз по модели и характеристика точности прогноза (стандартная ошибка прогноза);
2. Интервальное прогнозирование и проверка адекватности модели;
3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Пусть в результате 3-его этапа построения модели получена оценённая модель множественной регрессии:

$$\begin{cases} y_t = \underset{(S\tilde{a}_0)}{\tilde{a}_0} + \underset{(S\tilde{a}_1)}{\tilde{a}_1} \cdot x_{1,t} + \underset{(S\tilde{a}_2)}{\tilde{a}_2} \cdot x_{2,t} + \underset{(\tilde{\sigma}_u)}{u_t}; \\ R^2 = \ldots, \; GQ = \ldots, DW = \ldots; \end{cases} \tag{1}$$

В скобках под оценками коэффициентов размешаются их стандартные ошибки. Эконометрические модели создаются в частности для прогноза неизвестных значений эндогенных переменнных в примере (1) для прогноза неизвестных значений величины y. Обозначим y_0 значение переменной y_t, которое неизвестно и его нужно спрогнозировать по известным значениям объясняющих переменных. Оптимальный прогноз величины y_0 рассчитывается по правилу:

$$\tilde{y}_0 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cdot x_{1,0} + \ldots + \tilde{a}_k \cdot x_{k,0} = \vec{x}_0^{\,T} \cdot \vec{\tilde{a}}; \tag{2}$$

$$\vec{x}_0^{\,T} = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,0} & \ldots & x_{k,0} \end{pmatrix}, \vec{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \ldots \\ \tilde{a}_k \end{pmatrix}$$

Точность прогноза рассчитывается по правилу (3):

$$\begin{cases} S\tilde{y}_0 = \tilde{\sigma}_u \cdot \sqrt{1 + q_0} \\ q_0 = \vec{x}_0^{\,T} \cdot Q \cdot \vec{x}_0 \\ Q = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \end{cases} \tag{3}$$

Задача №1. Доказать, справедливость правила (3) оценки точности прогноза (2).

Решение: Обозначим символом $\triangle \tilde{y}_0 = \tilde{y}_0 - y_0$. Величина $\triangle \tilde{y}_0$ – это *истинная ошибка прогноза*.

$$\triangle \tilde{y}_0 = \tilde{y}_0 - y_0 = \vec{x}_0^{\,T} \cdot \vec{\tilde{a}} - (\underbrace{a_0 + a_1 \cdot x_{1,0} + \ldots + a_k \cdot x_{k,0}}_{\vec{x}_0^{\,T} \cdot \vec{a}} + u_0) = \vec{x}_0^{\,T} \cdot \underbrace{\left(\vec{\tilde{a}} - \vec{a}\right)}_{\triangle \vec{a}} - u_0 \tag{4}$$

$$Cov\left(\vec{\tilde{a}}, \vec{\tilde{a}}\right) = \widetilde{Cov}\left(\triangle \vec{\tilde{a}}, \triangle \vec{\tilde{a}}\right) = \tilde{\sigma}_u^2 \cdot Q \tag{5}$$

Утверждение D теоремы Гаусса-Маркова, а сейчас возращаемся к правилу (4) и отыщем основные количественные характеристики истинной ошибки прогноза:

$$E\left(\triangle\widetilde{y}_0\right) = E\left(\vec{x}_0^{\,T}\cdot\triangle\vec{a}\right) - E(u_0) = E\left(\vec{x}_0^{\,T}\cdot\left(\vec{\widetilde{a}}-\vec{a}\right)\right)$$

$$E\left(\vec{\widetilde{a}}\right) = \vec{a} \tag{6}$$

$$E\left(\triangle\widetilde{y}_0\right) = 0 \tag{7}$$

$$Var\left(\triangle\widetilde{y}_0\right) = E\left(\triangle\widetilde{y}_0^{\,2}\right) = \sigma_u^2\cdot\vec{x}_0^{\,T}\cdot Q\cdot\vec{x}_0 + \sigma_u^2 = \sigma_u^2(1+q_0) \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Вывести формулу (7) и (8).

(8) доказывает формулу (3). Добавим, что правило (2) называется *точечным прогнозом*.

Задача. Сделать прогноз расхода домохозяйств России на 2018 год и оценить точность.

Приступаем к расчёту точечного прогноза расхода домохозяйств на 2018 год. Нам потребуются значения объясняющих переменных.

		Y_{2017}	Cr2017	San2017
x_0^T=	1	43533.75	0	1
C^P_{2018}=	22438.88			
C_{2018}=	23010			

Шаг 1. Как мы видим наш прогноз отличается от реального значения, поэтому вычислим стандартную ошибку прогноза. Формируем матрицу X у которой 15 строк и 4 столбца

X=	1	27312.3	0	0
	1	29304.9	0	0
	1	31407.8	0	0
	1	33410.5	0	0
	1	36134.6	0	0
	1	39218.7	0	0
	1	41276.8	1	0
	1	38048.6	0	0
	1	39762.2	0	0
	1	41457.8	0	0
	1	42973.5	0	0
	1	43740.704	0	0
	1	44063.797	0	1
	1	42945.281	0	1
	1	42871.144	0	1

И транспанированную к ней X^T.

Шаг 2. Вычислим матрицу $X^T\cdot X$.

X^T X=	15	573928.6269	1	3
	573928.6	22386339280	41276.8	129880.2
	1	41276.8	1	0
	3	129880.2227	0	3

Шаг 3. Рассчитаем матицу Q.

Q=	4.389636	-0.0001174	0.456322804	0.693075587
	-0.00012	3.20632E-09	-1.49453E-05	-2.14112E-05
	0.456323	-1.4945E-05	1.160572215	0.190711062
	0.693076	-2.1411E-05	0.190711062	0.567222424

Шаг 4. Рассчитаем $q_0 = \vec{x}_0^T \cdot Q \cdot \vec{x}_0$

x_0=	1		x_0^T*Q=	-0.02822	7.70616E-07	-0.00359	0.328187309
	43533.74999						
	0		q_0=	0.333519			
	1						

Шаг 5. Рассчитаем значение стандартной ошибки.

SC^P_{2018}	469.440385

Замечание. Интервальный прогноз мы осуществим на следующем занятии.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Вычислить прогнозы гос. расходов и инвестиций по моделе Самуэльсона-Хикса по контролирующей выборке.