21. Производственная функция Кобба-Дугласа, расчёт предельных продуктов факторов производства и доказательство их убывания.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2\big(= \text{живой труд}\big)\Big)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \qquad (*)$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Расчёт предельных продуктов факторов:

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$

$$M_y(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ где } M_y(x_i) - \text{предельный выпуск по фактору производства } x_i$$

Предельный выпуск экономисты называют ***предельным продуктом*** по фактору x_i.

Предельный продукт по 1-ому фактору:

$$M_y(x_1) = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2}$$

Предельный продукт по 2-ому фактору:

$$M_y(x_2) = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1} \cdot x_1^{a_1}$$

С ростом уровня x_i – фактора его предельная продукция убывает.

$$M_y(x_1) \downarrow = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{\overset{<0}{a_1 - 1}} \uparrow \cdot x_2^{a_2}$$

$$M_y(x_2) \downarrow = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{\overset{<0}{a_2 - 1}} \uparrow \cdot x_1^{a_1}$$

Каждая дополнительная единица фактора менее полезна предыдущей доп. единицы. $M_y(x_i) \downarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} = a_0 \cdot a_1 \cdot \Big(\overset{<0}{a_1 - 1}\Big) \cdot x_1^{\overset{<0}{a_1 - 2}} \uparrow \cdot x_2^{a_2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} = a_0 \cdot a_2 \cdot \Big(\overset{<0}{a_2 - 1}\Big) \cdot x_2^{\overset{<0}{a_2 - 2}} \uparrow \cdot x_1^{a_1} < 0$$

22. Производственная функция Кобба-Дугласа, расчёт предельной нормы технологического замещения факторов производства.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2\big(= \text{живой труд}\big)\Big)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \qquad (*)$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Предельной нормой технологического замещения фактора x_1 фактором x_2 называется такая дополнительная велечина $\triangle x_2$, которая компенсирует выбытие из строя еденицы фактора x_1. Принято обозначать $MRTS_{1,2} = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} : \dfrac{\partial F}{\partial x_2}$.

Следствие. Пусть уравнение изокванты представленно в виде (4):

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \tag{4}$$

Тогда

$$MRTS_{1,2} = -\frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} \tag{5}$$

Пусть моделью производсвтенной функции фирмы служит функция Кобба-Дугласа:

$$y = a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$$

Получить уравнение $MRTS_{1,2}$

Решение:

1. Записываем уравнение изокванты: $a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} = y_0$
2. Трансформируем к виду (4): $x_2 = \sqrt[\beta]{\dfrac{y_0}{a_0 \cdot x_1^{\alpha}}} = \left(\dfrac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ (4')
3. Вычисляем по правилу (5) предельную норму замещения $MRTS_{1,2}$.

$$-\frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} = -\left(-\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}$$

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2(x_1; y_0)}{x_1} \tag{6}$$

23. Производственная функция Кобба-Дугласа, эластичность замещения факторов производства.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2\big(= \text{живой труд}\big)\Big)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \tag{*}$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Эластичностью замещение $i-$ого фактора $j-$ым называется относительное изменение на изокванте отношения факторов производства в ответ на относительное изменение предельной нормы технологического замещение на 1%.

Вот математическое выражение данного определения:

$$\sigma_{ij} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}} : \frac{d\,MRTS_{i,j}}{MRTS_{i,j}} \qquad (8)$$

Вычислим эластичность замещения Кобба-Дугласса первого фактора вторым. Согласно формулы (8) мы сначала найдём числитель делимого, то есть абсолютное изменение отношения:

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \qquad (9)$$

2. Находим дифференциал

$$\triangle\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \approx d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \triangle x_1 \qquad (10)$$

3.

$$\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \triangle x_1}{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1} \qquad (11)$$

4.

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} \qquad (6)$$

5.

$$\triangle MRTS_{1,2} \approx \frac{\partial MRTS_{1,2}}{\partial x_1} \triangle x_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}\right)'_{x_1} \cdot \triangle x_1 = \qquad (7)$$

$$= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1}$$

6.

$$\frac{d\,MRTS_{1,2}}{MRTS_{1,2}} = \frac{-\cancel{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \cancel{\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{y}{\beta}}} \cdot \cancel{x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}}{\cancel{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \cancel{\left(\frac{y}{a_0}\right)^{\frac{y}{\beta}}} \cdot \cancel{x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta\, x_1}{x_1}$$

7.

$$\sigma_{1,2} = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} : \frac{d\,MRTS_{1,2}}{MRTS_{1,2}} = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}}{-\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}} = 1\%$$

24. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES – функция) и её свойства.

Рассмотрим функцию со следующим уравнением:

$$y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + \ldots + a_n \cdot x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}} \tag{1}$$

$$a_i > 0,\ \rho > 0, h > 0, i = 1, 2,\ \ldots, n \tag{2}$$

которая называется *производственной функцией с постоянной эластичностью замещения*.

Изучим основные **свойства** CES функции:

☑ **Свойство 1.**

$$F_{CES}(0, 0) = 0 \tag{3}$$

Рассматривая уравнение (1) при $n = 2$, мы обнаружим, что в точке 0 функция (1) неопределена, то есть имеет особенность. Мы сейчас покажем, что в 0 CES функция имеет устранимую особенность это значит, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0^+ \\ x_2 \to 0^+}} F_{CES}(x_1, x_2) = 0 \tag{3'}$$

Перепишем уравнение (1):

$$y = \frac{a_0}{\left(\frac{a_1}{x_1^{\rho}} + \frac{a_2}{x_2^{\rho}}\right)^{-\frac{h}{\rho}}} \tag{1'}$$

Пусть в знаменателе уравнения (1') переменная x_1 стремится к 0^+, тогда $\frac{a_i}{x_i^{\rho}}$ стремится к ∞ и весь знаменатель следоваетельно стремится к ∞. Тогда вся дробь стремится к 0.Тогда

$$y = \begin{cases} a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}, \text{при } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Обратим внимание каждый производственный фактор необходим в том смысле, что при нулевом уровне какого-то из этих факторов, весь выпуск равен 0.

☑ **Свойство 2.** Выпуск продукции возрастает при росте факторов:

$$M_y(x_i) > 0 \tag{4}$$

$M_y(x_i)$ *предельный продукт* i-ого фактора. Добавим предельные величины рассчитываются как производные:

$$\frac{\partial F_{CES}(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$$

Удобно прологорифмировать уравнение CES функции:

$$\ln y = -\frac{h}{\rho} \ln\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + \ln a_0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_1 \cdot x_1^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_2} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

☑ **Свойство 3.** С ростом уровня $x_i \uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i) \downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Вычислим вторую производную по каждому фактору:

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_1^2} = h \cdot a_1 \left(\frac{x_1^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x_1} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot x_1^{-(2+\rho)} \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + x_1^{-(1+\rho)} \cdot a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot \left(x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{\left(-(1+\rho) \cdot x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$-h \cdot a_1 \frac{x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_2^2} = h \cdot a_2 \left(\frac{x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x2} =$$

$$= -h \cdot a_2 \frac{x_2^{-2(1+\rho)} a_2 + (1+\rho) \cdot a_1 \cdot x_1^{-\rho} \cdot x_2^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

Следовательно, производственная функция выпукла вверх, что доказывает третье свойство.

Итог: CES функция удовлетворяет основным требованиям производсвенных функций фирмы.

25. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES – функция) и уравнение её изокванты.

Рассмотрим функцию со следующим уравнением:

$$y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + \ldots + a_n \cdot x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}} \tag{5}$$

$$a_i > 0,\ \rho > 0, h > 0, i = 1, 2,\ \ldots, n \tag{6}$$

которая называется *производственной функцией с постоянной эластичностью замещения*.

Уравнение изокванты

Вспомним понятие изокванты производственной функции так принято называть множество комбинаций значений факторов производства при которых уровень выпуска остаётся неизменным. Обозначим символом y_0. Тогда уравнение изокванты для производсвтенной функции имеет вид:

$$F_{CES}(x_1, x_2) = y_0 \tag{6}$$

Мы можем данное уравнение разрешить относительно велечины x_2, то есть найти:

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \tag{6'}$$

Задача. Построить уравнение изокванты CES функции:

1. $y_0 = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}$
2. $\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}}$
3. $x_2^{-\rho} = \frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)$

4. $$x_2 = \left(\frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)\right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (6'')$$

(6'') - *уравнение изокванты.* У изокванты имеются асимптоты.