Лекция №2

Облигации. Дюрация и выпуклость цены облигации

1. Бескупонные облигации

Доходности бескупонной облигации определяется ценой P_0 (в начальный момент времени) сроком до погашения и номиналом F с помощью выражения:

$$P_0 = Fe^{-rT} \tag{1}$$

$$rT = \ln \frac{F}{P_0} \tag{1.1}$$

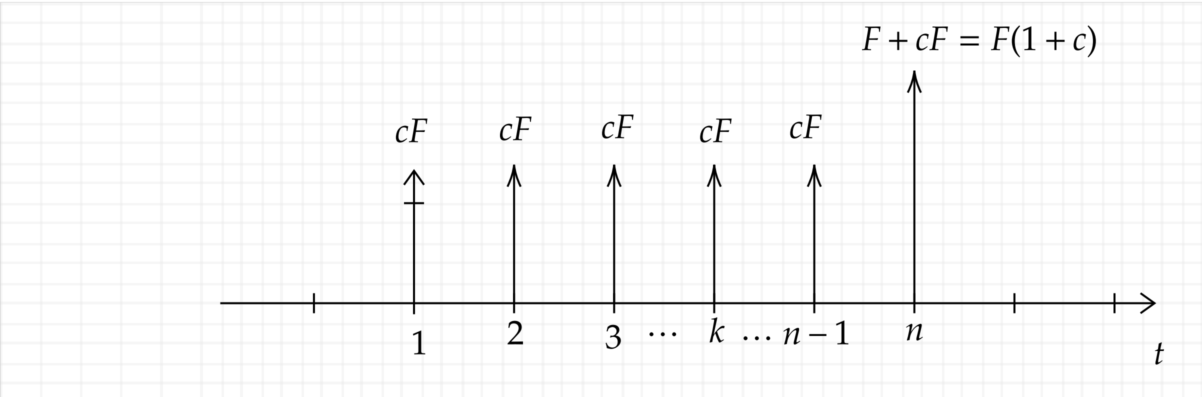
где r является ставкой доходности непрерывного начисления процентов.

Тогда стоимость облигации $B(t,\ T)$ в любой момент времени $t : 0 < t < T$ будет определяться выражением:

$$B(t, T) = Fe^{-r(T-t)} \tag{2}$$

2. Купонная облигация

Выплаты по купонной облигации представляют собой поток платежей примеры которого представлены на рис. 1



n – срок жизни облигации, F – номинал, c – ежегодная купонная ставка.

То доходность купонной облигации определяется ставкой доходности r (соотвествующей ставке непрерывного начисления %), при которой приведённое значение всех выплат по облигации равно цене покупке P_0 (на начальный момент времение), т.е.

$$P_0 = cF \sum_{l=1}^{n} e^{-rl} + Fe^{-rn} \tag{3}$$

Утверждение 1. Если проценты выплачиваются раз в год, в конце, то купонная ставка c равна ставке однократного начисления процентов i (эквивалентной ставки доходности r) тогда и только тогда $\Leftrightarrow$,когда цена купонной облигации P_0 равна её номиналу F. В этом случае облигацию называют ***номинальной***. (В задаче будет дано похожее утверждение).

Док-во:

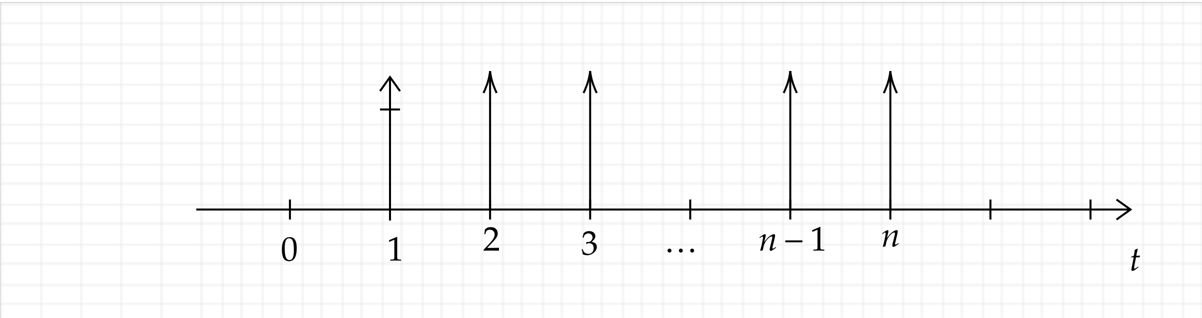
Начальная цена P_0 купонной облигации связана с номиналом F формулой (3):

$$P_0 = cF\sum_{l=1}^{n} e^{-rl} + Fe^{-rn}$$

Введём обозначение $e^{-r} = v_i$(коэффициент приведения),
$r = \ln(1+i)$ – эквивалентность ставок $r \sim i$
Тогда

$$P_0 = cF\sum_{l=1}^{n} v_i^e + Fv_i^n$$

$\sum\limits_{l=1}^{n} v_i^e = v_i + v_i^2 + \ldots + v_i^n = a_{nn} = \dfrac{1-v_i^n}{i}$ – приведённого значение подрасчётной ренты



$$\Longrightarrow P_0 = cF\frac{1-v_i^n}{i} + Fv_i^n \underset{c=i}{=} F\left(1-v_i^n\right) + Fv_i^n = F$$

Таким образом

$$P_0 = F \Leftrightarrow c = i$$

Замечание. Из док-ва утверждения 1 $\Longrightarrow$ что, если облигация с дисконтом (продаётся по цене ниже номинала $P_0 < F$), то ежегодная ставка однократного начисления $\%\ i$ больше купонной ставки $c(i > c)$. Наоборот, если облигация с премией, т.е. $P_0 > F$, то $i < c$.

3. Переменные процентные ставки

Пусть $B(t,T)$ – цена текущего момента бескупонной облигации единичного номинала, погашенной в момент времени T.

Пусть $T = N \cdot \triangle t$, т.е. весь срок жизни облигации разделим на N периодов длины $\triangle t$ и будем интересоваться значениями B в точках $n \cdot \triangle t,\ 0 \leqslant n \leqslant N$.

Соответсвенно, вместо (t,T); $B(t,T)$ будем использовать обозначение (n,N) и $B(n,N)$

$$\left(\triangle t = \frac{1}{12},\ 1\ [\triangle t] = 1 \text{ год}\right)\ 0 \leqslant r \leqslant N$$

Тогда ф-лы (1) и (2) будут иметь вид.

$$B(0,N) = e^{-(N-n)\triangle t r(0)} \tag{4}$$
$$B(n,N) = e^{-(N-n)\triangle t r(n)} \tag{5}$$

$$F = 1$$

4. Дюрация и выплата цены облигации

Рассмотрим изменение цены облигации P в зависимости от изменения ставки r, т.е. рассмотрим функцию $P(r)$ и напишем разложение этой функции в ряд Тейлора с центром в точке $r = r_0$. Тогда

$$P(r) = P(r_0) + \frac{dP}{dr}|_{r=r0} + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{d^2r}|_{r=r0}(r - r_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2P}{d^2r}|_{r=r0}(r - r_0)^3 \qquad (6)$$

Из разложения (6) следует, что изменение цены облигации в зависимости от изменения ставки r описывается выражением:

a) с точностью до велечины $1-$ого порядка малости

$$\frac{\triangle P}{P_0} = -D \triangle r + o(r) \qquad (7)$$

, где

$$P_0 = P(r_0);\ \triangle P = P(r) - P(r_0);\ \triangle r = r - r_0$$

$$D = -\frac{P'(r_0)}{P_0}$$

$$P(r) = P(r) + P'(r_0)$$

в) с точностью до велечины до велечин 2-ого порядка малости

$$\frac{\triangle P}{P_0} = -Du$$