Семинар №8

Тема 6. Трёхшаговый метод наименьших квадратов (3МНК)

Обсуждённые на предыдущих занятиях статистические процедуры (КМНК и 2МНК). Сначала установим связь процедуры (4.15) 2МНК.

$$\widetilde{y}_i = X \cdot \widetilde{M}_i^T = X\left(X^T X\right)^{-1} X^T Y_i$$

$$\widetilde{\vec{\gamma}}_i = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_i \\ \hline \vec{\beta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\widetilde{y}_i^T \widetilde{y}_i}{x_i^T \widetilde{y}_i} \Big| \dfrac{\widetilde{y}_i^T x_i}{x_i^T x_i} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_i^T \\ \hline X_I^T \end{pmatrix} \cdot \vec{y}_i \qquad (4.15)$$

с обобщённым методом наименьших квадратов. Для этого вернёмся к системе уравнений наблюдений:

$$\vec{y}_i = Y_i \cdot \vec{a}_i + X_i \cdot \beta_i + \vec{u}_i = (Y_i|X_i) \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{u}_i \qquad (4.11)$$

Для компактности обозначим символом Z матрицу $(Y_i|X_i)$ значений объясняющих переменных $i-$ого уравнения модели (2.1) и запишем (4.11) с учётом данного обозначения:

$$\vec{y}_i = Z \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{u}_i \qquad (6.1)$$

Предполагаем, что вектор случайных остатков в системе (6.1) имеет нулевое математическое ожидание и скалярную ковариационную матрицу:

$$Cov(\vec{u}_i, \vec{u}_i) = \sigma_i^2 \cdot E \qquad (6.2)$$

Умножим систему (6.1) слева на матрицу X^T и введём обозначение:

$$X^T \cdot \vec{y}_i = \vec{y}_{X,i}, X^T \cdot Z_i = X^T \cdot (Y_i|X_i) = Z_{X,i}, X^T \cdot \vec{u}_i = \vec{u}_{X,i} \qquad (6.3)$$

позволяют оценивать параметры каждого поведенческого уравнения модели:

$$\vec{y}_{X,i} = Z_{X,i} \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{u}_{X,i} \qquad (6.4)$$

В этой системе вектор случайных остатков по-прежнему имеет нулевое математическое ожидание, но ковариационная матрица у него иная:

$$Cov(\vec{u}_{X,i}, \vec{u}_{X,i}) = \sigma_i^2 \cdot X^T \cdot X = \sigma_i^2 \cdot \Omega_i \qquad (6.5)$$

Систему (6.4) интерпретируем как схему Гаусса - Маркова, где вектор случайных остатков имеет недиагональную ковариационную матрицу (6.5). Подчеркнём, что в схеме (6.4) содержится К уравнений, а количество оцениваемых коэффициентов равно $(G-1+K)$. Далее, оцениваем вектор омнк:

$$\widetilde{\vec{\gamma}}_i = \left(Z_{X,i}^T \cdot \Omega_i^{-1} \cdot Z_{X,i}\right)^{-1} \cdot Z_{X,i}^T \cdot \Omega_i^{-1} \cdot \vec{y}_{X,i} \qquad (6.6)$$

Отметим, что оценка (6.6) коэффициентов $\vec{\gamma}_i$ $i-$го поведенческого уравнения модели (2.1) совпадает с их оценкой (4.15) 2МНК. Следовательно, во-первых, процедура (6.6) реализуема, а во-вторых, данная процедура генерирует состоятельные оценки коэффициентов i-го поведенческого уравнения модели (2.1).

Совпадение оценок (6.6) и (4.15) является наиболее важным элементом теории

ЗМНК и существенно используется при его реализации.

Вернёмся к моделе (2.1); она состоит из E поведенческих уравнений и I тождеств $(E+I=G)$. Пусть в модели (2.1) первыми расположены поведенческие уравнения. Тогда возможно подготовить систему (6.4) для всех поведенческих уравнений модели (2.1) и, далее, свести эти системы в единую схему Гаусса Маркова:

$$\vec{y}_X = Z_X \cdot \vec{\gamma} + \vec{u}_X \tag{6.7}$$

$$\vec{y}_X = \begin{pmatrix} \vec{y}_{X,1} \\ \dots \\ \vec{y}_{X,E} \end{pmatrix}_{K\times 1}; Z_X \begin{pmatrix} Z_{X,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{X,2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_{X,E} \end{pmatrix}; \vec{u}_X = \begin{pmatrix} \vec{u}_{X,1} \\ \dots \\ \vec{u}_{X,E} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_1 \\ \dots \\ \vec{\gamma}_E \end{pmatrix}$$

Подчеркнём, что вектор $\vec{\gamma}$ включает в себя все оцениваемые коэффициенты структурной формы модели (2.1).

Чтобы, по аналогии с (6.6), воспользоваться для оценивания вектора $\vec{\gamma}$ процедурой ОМНК, нужно знать матрицу Ω в представлении $Cov(\vec{u}_X, \vec{u}_X) = \sigma_0^2 \cdot \Omega$. Пусть: $\sigma_0^2 = 1$. Что коварицкионная матрица $Cov(\vec{u}_X, \vec{u}_X) = \Omega$? Попробуем ответить на данный вопрос.

Обозначим символом σ_{ij} ковариацию случайных остатков в i-ом и j-ом поведенческих уравнениях модели (2.1). Как известно: $\sigma_{ij} = \sigma_i^2$ тобой. С учётом некоррелированности компонент векторов $\vec{u}_i, \vec{u}_j$ имеющих различные номера (номера опытов, в которых наблюдался объект в рамках модели (2.1)), получим сначала взаимную ковариационную матрицу случайных векторов $\vec{u}_i, \vec{u}_j$:

$$Cov(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = E\left(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j^T\right) = \sigma_{ij} \cdot E \tag{6.9}$$

Затем, учитывая (6.3), (6.9) находим взаимную ковариационную матрицу векторов $\vec{u}_{X,i}, \vec{u}_{X,j}$:

$$Cov(\vec{u}_{X,i}, \vec{u}_{X,j}) = E\left(\vec{u}_{X,i} \cdot \vec{u}_{X,j}^T\right) = \sigma_{ij} \cdot X^T \cdot X$$

Теперь можем получить искомое выражение всей матрицы $Cov(\vec{u}_X, \vec{u}_X)$:

$$Cov(\vec{u}_X, \vec{u}_X) = \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \cdot X^T \cdot X & \sigma_{12} \cdot X^T \cdot X & \dots & \sigma_{1E} \cdot X^T \cdot X \\ \sigma_{12} \cdot X^T \cdot X & \sigma_2^2 \cdot X^T \cdot X & \dots & \sigma_{2E} \cdot X^T \cdot X \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1E} \cdot X^T \cdot X & \sigma_{2E} \cdot X^T \cdot X & \dots & \sigma_E^2 \cdot X^T \cdot X \end{pmatrix}$$

В матрице (6.11) имеются неизвестные параметры, а именно: σ_{ij} и σ_i^2 соответственно в количестве $E^2 - E$ и E^2. Их придётся оценивать. Значит, процедуру ОМНК к схеме Гаусса - Маркова (6.7) применить не удастся. Однако возможно воспользоваться ОМНК:

$$\overset{\sim}{\vec{\gamma}}_i = \left(Z_X^T \cdot \Omega_i^{-1} \cdot Z_X\right)^{-1} \cdot Z_X^T \cdot \Omega_i^{-1} \cdot \vec{y}_X \qquad (6.12)$$

которая, как уже отмечалось выше, является составной частью процедуры 3МНК. Обсудим процедуру доступного ОМНК в процессе изложения всего алгоритма 3МНК. Предварительно обозначим символами $\widetilde{\sigma}_{ij}$ и $\widetilde{\sigma}_i^2$ оценки параметров σ_{ij} и σ_i^2. В свою очередь, символом $\widetilde{\Omega}$ обозначаем оценку матрицы оценки параметров Ω, вычисленную согласно (6.11) по оценкам $\widetilde{\sigma}_{ij}$ и $\widetilde{\sigma}_i^2$.

Этапы (шаги) или алгоритм трёхшагового метода наименьших квадратов (3МНК)

I этап: Оцениваем 2МНК (4.15) или ОМНК (6.6) коэффициенты (параметры) всех поведенческих уравнений модели (2.1).
2 этап: По правилу (4.17) вычисляем оценки дисперсий случайных остатков поведенческих уравнений, а по формуле:

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \widetilde{u}_{i,t} \cdot \widetilde{u}_{j,t} \qquad (6.13)$$

определяем оценки ковариаций случайных остатков поведенческих уравнений. Далее формируем согласно (6.11) оценку $\widetilde{\Omega}$ ковариационной матрицы вектора случайных остатков в схеме (6.7).
3 этап: Вычисляем по правилу (6.12) ОМНК оценки коэффициентов всех поведенческих уравнений модели (2.1).

Замечание 1: Шаги 2 и 3 повторяем до практического совпадения в соседних итерациях результатов опенивания.

Замечание 2: Метод 3 МНК, построенный в 1962 году. Тейлом и Зельнером, совпадает при нормально распределенной векторе случайных остатков с ММП.
Отличие от 2МНК и КМНК получает состоятельные оценки параматры в системе, а в других изолированно.
$\boxed{\text{ДЗ}}$ 3МНК.