Домашняя работа №2. Финансовая математика
Аверьянов Тимофей ПМ 3-1

Задача № 1. Решить задачу № 5 не используя нулевое приближение. То есть исследовать функцию на экстремум.

Решение:

$$\text{Из системы (9) Л1} \Longrightarrow a(\rho) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{d}\sqrt{1-\rho^2}$$

$$d = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Исследуем функцию на экстремум для этого найдём производную:

$$\frac{\partial a(\rho)}{\partial \rho} = \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_{\rho} =$$

$$= \sigma_1\sigma_2 \cdot \left(\frac{\left(\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot \left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) - \left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)' \cdot \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)^2}\right) =$$

$$= \sigma_1\sigma_2 \cdot \left(\frac{-\rho\left(1-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) + 2\sigma_1\sigma_2 \cdot \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)^2}\right) =$$

$$= \sigma_1\sigma_2 \cdot \left(\frac{\frac{-\rho\cdot\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) + 2\sigma_1\sigma_2\cdot\left(1-\rho^2\right)}{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)^2}\right) = -\sigma_1\sigma_2 \cdot \left(\frac{\frac{\rho\cdot\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) - 2\sigma_1\sigma_2\cdot\left(1-\rho^2\right)}{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)^2}\right) =$$

$$= -\sigma_1\sigma_2 \cdot \left(\frac{\rho\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) - 2\sigma_1\sigma_2}{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \rho\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) - 2\sigma_1\sigma_2 = 0 \Longrightarrow \rho = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Тогда при $\rho = \dfrac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ получим следующее $a(\rho)$:

$$a\left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{d}\sqrt{1 - \left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\cdot\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\cdot\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

$$\Longrightarrow a\left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2\cdot\dfrac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cdot\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}\sqrt{1-\left(\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}$$

Найдём максимум при $\sigma_1 = 0.3;\ \sigma_2 = 0.6$:

$$a\left(\rho = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \frac{4}{5}\right) \approx 0.2$$