# Лекция №6

Матрица $X$ непременно должная быть вертикальной строк должно быть больше чем стобцов.

Символом $\vec{a} = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ —в компактной записи обозначен вектор коэффициентов модели. $\vec{u}$ – вектор значения случайного возмущения, присутствующего в модели.

Уравнения наблюдений необходимы для оценивания параметров модели и не редко под моделью понимают уравнение наблюдений:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_{2003} \\ \dots \\ C_{2017} \end{pmatrix};\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix};X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix};\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Подчёрнем, что экономист обладает информацией ввиде двух массивов $(\vec{y},\ X)$ связанные между собой уравнениями наблюдений. Упомянутые массивы мы будем называть *выборкой.*

**Понятие статистической процедуры**

Рассмторим лаканичную запись эконометрической модели:

$$F\left(y_t,\ \vec{x}_t;\ \vec{p}\right) = u_t$$

Пусть известна обучающая выборка. Статистической процедурой оценивания параметров модели принято называть некоторую функцию $\phi\left(\vec{y}, X\right)$ выборки, значение этой функции являются оценки параметров модели:

$$\widetilde{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\vec{a}} \\ \widetilde{\sigma}_n^2 \end{pmatrix} = \phi\left(\vec{y}, X\right) \quad (2)$$

Процедура $\phi\left(\vec{y}, X\right)$ называется оптимальной в заданном классе функций, если доставляемые ею оценки параметров обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} E\left(\widetilde{\vec{p}}\right) = \vec{p}; \\ Var\left(\tilde{p}_j\right) \to \min; \end{cases} \quad (3)$$

Математическое ожидание оценок парметров совпадает с истинными значениями. В математической статистике оценки с такими свойствами называют *несмещёнными.*

Второе свойство означает, что средний квадратический разброс оценок параметров относительно истинных значений параметров является минимально возможным. Символом $Var$ мы обозначаем дисперсию оценок параметров.

**Итог:** статистическая процедура оценивания модели - это некоторая функция выборки, значениям этой функции служит оценки параметров. Процедура оптимальна в заданном классе функций, если её значения удовлетворяют требованиям (3).

### Случайный вектор и его основые количественные характеристики

Случайный вектор - это упорядоченный набор случайных перменных принято называть случайным вектором:

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \tag{4}$$

Для практики важны следующие две случайные характеристики:

1. Математической ожидание случайного вектора

$$E\left(\vec{x}^T\right) = \vec{m}_{\vec{x}}^T = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \tag{5}$$

- это веткор из математический ожиданий случайных компонент. Математическое ожидание - это среднее значение. Математическое ожидание - это *константа*.

2. Ковариционная матрица:

$$Cov(\vec{u}, \vec{u}) = \mathbf{\Omega}_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2,n} \\ & & \ddots & \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

так принято называть квадратную симметричную матрицу, на главной диагонали которой располагаются дисперсии компонент случайного вектора, а недиагональные элементы - это ковариации компонент. Ковариация, например $\sigma_{1n}$, это *константа* характризующая взаимосвязь компоненты $x_1$ и $x_n$. Если $x_1$ и $x_n$ независимые, то $\sigma_{1n} = 0$.

### Основые количественные характеристики афинного преобразования случайного вектора

Афинное преобразование - это линейное неоднородное преобразование. Пусть символом $\vec{x}$ обозначен случайный вектор. Аффинным преобразованием этого вектора принято называть вектор $\vec{y}$, который вычисляется по следующему правилу:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x} + \vec{b}; \tag{7}$$

Здесь символом $A$ обозначена матрица коэффициентов (констант), символом $\vec{b}$ обозначен вектор констант.

Отметим правила расчёта основных характеристик аффинного преобразования:

$$E\,(\vec{y}) \;=\; A\;\cdot E\,(\vec{x}) \;+\; \vec{b}; \tag{8}$$

$$Cov\,(\vec{y},\;\vec{y}) \;=\; A\;\cdot Cov\,(\vec{x},\;\vec{x}) \;+\; \vec{b}; \tag{9}$$

## Веса компонент случайного вектора и факторизация его коварицонной матрицы

Пусть $\vec{x}^T \;=\; (x_1,\; x_2\;\ldots,\; x_n)$ случайный вектор, пусть $x_i$ какая-то компонента вектора; вес компонент $x_i$ – это константа, которая вычисляется по следующему правилу:

$$p_i\; = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \tag{10}$$

где $\sigma_0^2$ обозначена произвольная, но фиксированная положительная коестанта. Понятие веса позваляет представить коварицонную матрицу $\vec{x}$ в следующем виде:

$$Cov\,(\vec{x},\;\vec{x}) \;=\; \sigma_0^2\cdot\begin{pmatrix} \sigma_1^2/\sigma_0^2 & \sigma_{12}^2/\sigma_0^2 & \ldots & \sigma_{1n}^2/\sigma_0^2 \\ \sigma_{21}^2/\sigma_0^2 & \sigma_2^2/\sigma_0^2 & \ldots & \sigma_{2n}^2/\sigma_0^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{1n}^2/\sigma_0^2 & \sigma_{2n}^2/\sigma_0^2 & \ldots & \sigma_n^2/\sigma_0^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2\cdot Q \tag{11}$$

Матрицу $Q$ принято называть матрицей *весовых коэффициентов*. По главной диагонали этой матрицы размещаются обратные веса компонент.

Приступаем у обсуждению оптимальной процедуры оцениванию параметров линейной модели множественной регрессии.

$$\tilde{y} \;=\; a_0 \;+\; a_1\,x_1 \;+\; a_2\,x_2 \;+\; \ldots \;+\; a_k\,x_k$$

**Теорема Гаусса-Маркова.** Пусть в уравнениях наблюдений,

$$\vec{y} \;=\; X\;\cdot\vec{a} \;+\; \vec{u}$$

0. Столбцы $X$ линейно независимые,

1. $E(u_1) \;=\; E(u_2) \;=\; \ldots \;= E(u_n) \;=\; 0$, заложенно в спецификации;

2. $Var(u_1) \;=\; Var(u_2) \;=\; \ldots \;=\; Var(u_n) \;=\; \sigma_u^2$,заложенно в спецификации;

3. $Cov(u_i,\; u_j) \;=\; 0;$ при $i\;\neq j$; (в частности незваисимы друг от друга)

4. $Cov(u_i,\; x_{li}) \;=\; 0$. Случайные возмущения некоррелированны с компонентами матрицы $x$.

Если все утверждения верны, тогда справедливы следующие утверждения:

$A)\ \widetilde{\vec{a}} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{y} = Q \cdot X^T \cdot \vec{y};$

$B)\ \tilde{\sigma}_u^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{u}_i^2}{n - (k + 1)}$, наилучшая оценка с минимальной дисперсией, где символом $\tilde{u}_i$ обозначена оценка случайного возмущения $u_i$. В знаменателе стоит число равная разности объёма обучающей выборки и количесвтва определяемых коэффициентов модели; это число называется количесвом степеней свободы. Оценки коэффициентов обладают замечательным свойством (C), которая служит общепринятое название $A$ метод наименьших квадратов.

$C)\ \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{u}_i^2 \to \min.$

$Cov\left(\widetilde{\vec{a}}, \widetilde{\vec{a}}\right) = \tilde{\sigma}_u^2 \cdot \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \ (= Q).$

**Вывод:** Метод наименьших квадратов при определённых условиях является наилучшей процедурой оценивания линейных эконометрических моделей.

$D)\ \begin{cases} S\tilde{a} = \tilde{\sigma}_u^2 \cdot \sqrt{q_{j+1\ /\ j\ +1}} \\ j = 0, 1, \ldots, k \end{cases}$