

Семинар №3: Функция полезности потребителя и её основные свойства

План

1. Наборы благ потребителя и пространство благ (множество благ). Функция полезности и два её свойства;
2. Множество (кривые) безразличия и предельная норма замещения благ;
3. Обсуждение домашних заданий;

Рассмотрим некоторого потребителя (семья или физическое лицо), который интересуется на рынке некоторыми благами, которые мы занумеруем натуральными числами $N = 1, 2, \dots, n$. Пусть: 1 - "хлеб 2 - "молоко ... , n - развлечения. Символом x_1 обозначим количество первого блага, которого может приобрести потребитель, аналогично остальные.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Формула (1) - набор благ, которые может приобрести потребитель. $\vec{x} \in C \subset R_n^+$ - положительный ортант n -мерного евклидова пространства. При $n = 2$ график будет выглядеть следующим образом:

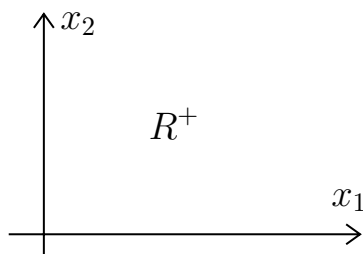


Рис. 1: R^+

Какие блага мы будем обозначать $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $\vec{x}'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$

Доказано, что для любого потребителя можно построить числовую функцию, определённую на множестве C : $u = u(x_1, \dots, x_n)$ значения которой равны уровням полезности для потребителя любого набора благ из множества C . Экономисты называют такую функцию *функцией полезности потребителя*.

Отметим два свойства этой функции и обсудим две модели формулы полезности удовлетворяющие этим свойствам:

$\vec{x}' = (1, 3)$, $\vec{x}'' = (2, 3)$, набор \vec{x}'' полезнее потребителю и это значит, что функция полезности будет: $u(2, 3) > u(1, 3)$.

1. Функция полезности является возрастающей функцией по каждому аргументу, дополнительное количество любого блага увеличивает значение функции полезности

$$u \uparrow x_i \quad (1)$$

2. Предельная полезность блага убывает по мере увеличения количества этого блага при фиксированных значениях остальных благ в наборе.

Понятие предельных величин в экономике.

Вспомним понятие предельного значения эндогенной переменной по экзогенной. Предельной полезностью i -ого блага

$$M_u(x_i) = \Delta u = u(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \approx \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (2)$$

экономисты называют приращение функции полезности (дополнительную полезность) в ответ на дополнительную единицу i -ого блага. Согласно занятию

$$2 \text{ значение } M_u(x_i) \approx \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Замечание. Свойство (2) возрастание функции по каждому аргументу в аналитической записи означает положительное значение каждой производной:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = M_u(x_i) > 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_u(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0 \quad (4)$$

Задача №1. Доказать

$$u(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \quad (5)$$

Такое уравнение называют *уравнение Бернулли*.

Доказать, что уравнение (5) обладает двумя свойствами полезности проверить неравенство (3) и (4):

- 1.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1} > 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2} > 0 \quad (7)$$

- 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\frac{a_1}{x_1^2} < 0 \quad (8)$$

Действительно функция (5) обладает двумя свойствами полезности.

ДЗ Задача №2.

Пусть в модели (5), коэффициент $a_1 = 0,1 + 0,02i$, $a_2 = 0,2 + 0,02i$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5$ вычислить полезность набора и предельную полезность первого блага.

Задача №3.

Проверь, что

$$u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \quad (9)$$

может служить показателем функции полезности. Экономисты называют функцию (6) *неоклассической*. Свойство (4) экономисты называют законом Госсена.

Кривые безразличия и предельная норма замещения благ

Вернёмся к примеру и предположим, что второй аргумент имеет вместо 3 значение 2:

$$\vec{x}' = (1, 3), \vec{x}'' = (2, 2) \quad (10)$$

Говорят, что два набора благ *безразличны* потребителю, если они для него одинаково полезны, т.е.

$$u(\vec{x}') = u(\vec{x}'') \Leftrightarrow \vec{x}' \sim \vec{x}'' \quad (11)$$

Обозначим символом:

$$I(\vec{x})' = \{ \vec{x} \mid \vec{x} \in C, u(\vec{x}) = u(\vec{x}') = u_0 \} \quad (12)$$

Множеством безразличия для набора \vec{x}' принято называть наборы благ значения функции полезности у которых совпадают со значением функции полезности для набора \vec{x}' .

Рассматривая определение функции безразличия мы можем записать уравнение, которому удовлетворяет любой элемент из множества i .

$$u(x_1, x_2) = u_0 = u(\vec{x}') \quad (13)$$

Рассматривая (10), что множество безразличия это ничто иное, как поверхность (линия) заданного уровня полезности (линия уровня). Если разрешить уравнение (10) относительно x_2 , то сможем построить график линии уровня или график кривой безразличия.

$$x_2 = x_2(x_1; u_0) \quad (14)$$

Задача №4.

Построить график кривой безразличия для логорифма Бернулли (5) по второй переменной.

ДЗ Дома построить принимая аргументы $a_1 = 0,1 + 0,02i$, $a_2 = 0,2 + 0,02i$, описанные выше.

1) $a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 = u_0$ (10)

2) $\ln(x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}) = u_0$

3) Теперь воспользуемся определением логорифма $x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = e^{u_0}$

4)

$$x_2 = e^{\frac{u_0}{a_2}} \cdot x_1^{-\frac{a_1}{a_2}} = K_0 \cdot x_1^{-\frac{a_1}{a_2}} \quad (15)$$

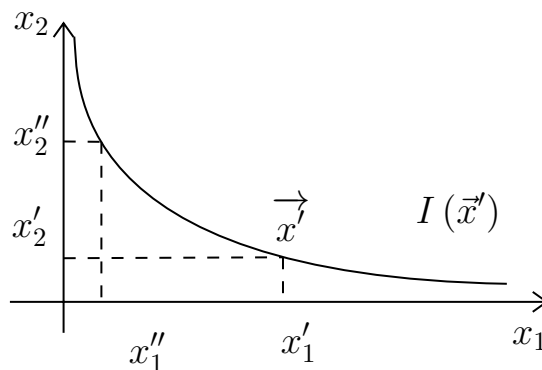


Рис. 2: Множество безразличия

Предельная норма замещения первого блага вторым

Рассмотрим Рис. 2 и выберем точку на линии слева от \vec{x}_1' . Наш выбор мы можем интерпретировать так в наборе \vec{x}' количество первого блага сократилось на $\Delta x_1'$: $x_1 = x_1' - \Delta x_1'$.

ДЗ В безразличном наборе \vec{x} больше на Δx_2 можно показать, что связаны так:

$$\Delta x_2' = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_1' = MRS_{1,2} \Delta x_1' \quad (16)$$

Предельная норма замещение $MRS_{1,2}$ первого блага вторым. Это величина имеет смысл дополнительного количества второго блага, которое заменит потерю еденицы первого блага.

Задача №5

Рассчитать предельную норму замещения первого блага вторым.

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2} \Rightarrow MRS_{1,2} = \frac{a_1 x_2}{a_2 x_1} = \frac{0,1}{0,2} \cdot \frac{0,5}{1} = 0,25.$$

ДЗ Вычислить предельную норму замещения с данными из задачи с коэффициентами второго блага первым для неоклассической функции полезности (6).

Итог. Кривые безразличия - это равноценные для потребителя наборы благ, предельные нормы замещения имеют смысл дополнительного количества одного блага, которое компенсирует потерю единицы другого.