Микроэкономика

Домашняя работа №10 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Определить формулы для расчёта коэффициентов $b_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$.

$$x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2}$$

Решение:

Решим оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}}_{y} - \underbrace{(p_1 x_1 + p_2 x_2)}_{c} \to \max \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

Запишем необходимое усовие экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = p_0 \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} - p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = p_0 \cdot \beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} - p_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Перенесём цены в правые части:

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} = \dfrac{p_1}{p_0} \\ \beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} = \dfrac{p_2}{p_0} \end{cases} \tag{3}$$

Поделим в (3) первое уравнение на второе:

$$\frac{\alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta}}{\beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\alpha \cdot x_2}{\beta \cdot x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1 \tag{4}$$

$$\alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1\right)^{\beta} = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow a_0 \cdot p_0 \cdot x_1^{\alpha+\beta-1} \cdot \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{\alpha+\beta-1} = \frac{1}{a_0} \cdot p_0^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{1-\beta} \cdot \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\beta} \Rightarrow x_1^{\alpha+\beta-1} = \frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}} \cdot p_0^{-1} \cdot p_1^{1-\beta} \cdot p_2^{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^* = \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow$$

$$\left[\boxed{b_1 = \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}}, \boxed{\gamma_0 = -\frac{1}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\gamma_1 = \frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\gamma_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

$$\Rightarrow x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \qquad (*)$$

Задача №2. Определить формулы для расчёта коэффициентов $b_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2$

$$x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2}$$

Решение:

Воспользуемся формулой для x_1^*, найденной нами в *задаче №1*:

$$x_1^* = \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}$$

Как мы знаем по формулу (4) $: x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^* = \beta^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}} \cdot \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot a_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow$$

$$x_2^* = \left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}$$

$$\left[\boxed{b_2 = \left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}}, \boxed{\delta_0 = -\frac{1}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\delta_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\delta_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

$$\Rightarrow x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \qquad (**)$$

Задача №3. Проанализировать в какой зависимости будут уровни x_1^*, x_2^* от изменений:

1) рыночной цены блага $p_0 \uparrow$;

2) на рост цен факторов производства;

Исходя из (*) и (**) найти оптимальный уровень предложения фирмы и оптимальный уровень издержек фирмы.

Решение:

При увеличении рыночной цены блага $p_0 \uparrow$ значения:

$$x_1^* \uparrow = b_1 \cdot \left(\frac{1}{p_0 \uparrow}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}=-2.5} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2}$$

$$x_2^* \uparrow = b_2 \cdot \left(\frac{1}{p_0 \uparrow}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}=-2.5} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2}$$

Значения x_1^*, x_2^* будет зависеть от знака степени в задаче дано, что $\alpha = 0.5,\ \beta = 0.1$, тогда значения x_1^*, x_2^* будут увеличиваться.

При росте цен факторов производства $p_1 \uparrow, p_2 \uparrow$:

$$x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}=-2.25} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}=-0.25}$$

$$x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}=-1.25} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}=-1.25}$$

Увеличение или уменьшения значений факторов производства x_1^*, x_2^* будет зависеть от знака в степени. В нашей задаче при значениях: $\alpha = 0.5,\ \beta = 0.1$ степени имеют отрицательный знак следовательно $x_1^* \downarrow, x_2^* \downarrow$ будут уменьшаться.

Выведем формулы для оптимального уровня издержек и предложения фирмы:

Уровень оптимального выпуска фирмы:

$$q_* = F\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) = q_*(p_0, \vec{p})$$

Велечина q_* называется *предложением фирмы.*

Оптимальный уровень издержек:

$$c_* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = c_*(p_0, \vec{p})$$

Подставим ранее найденные значения $x_1^*,\ x_2^*$ для оптимального уровня предложения:

$$q_* = F(x_1, x_2) = a_0 \cdot \left(\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right)^{\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\right)^{\beta} =$$

$$= a_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} =$$

$$= \boxed{\left(a_0 \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}}.$$

Подставим ранее найденные значения $x_1^*,\ x_2^*$ для оптимального уровня издержек:

$$c_* = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \left(\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \right) +$$

$$+ p_2 \left(\left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} +$$

$$+ \left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} =$$

$$= \boxed{\left(\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} + \left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \right) \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}}.$$