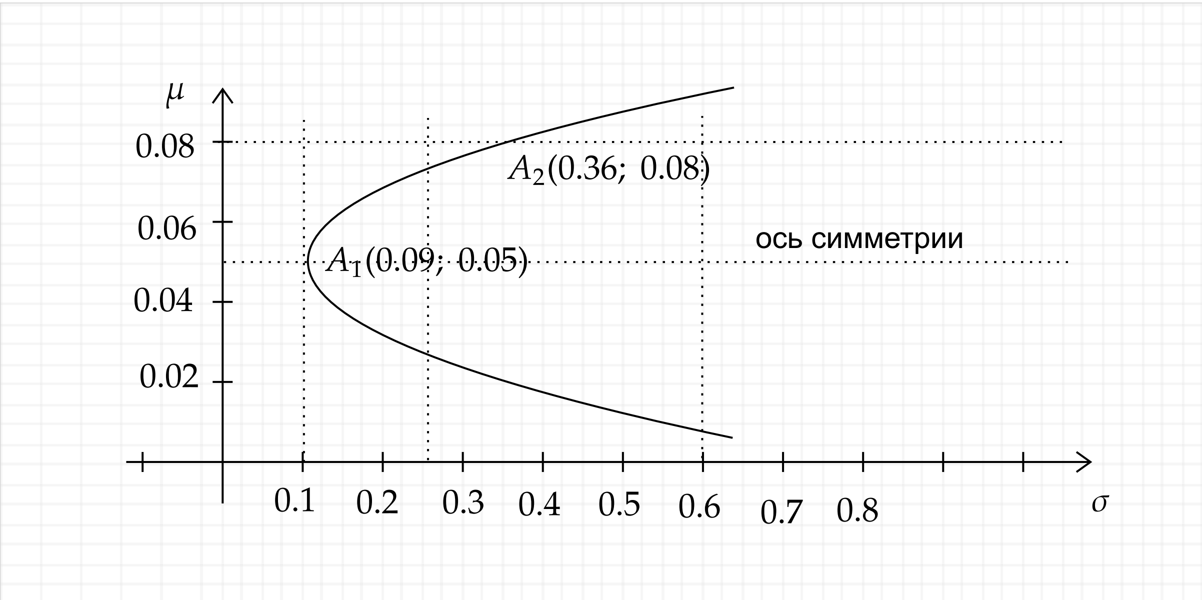
Семинар №2

Продолжение

$$\text{в) } v = a^2 + \frac{d^2}{\triangle^2}(\mu - a)^2 - \text{уравнение образа (парабола)}$$

Вершина параболы в точке $A\left(a^2,\ c\right) = (0.072,\ 0.056)$

$$A_1(v_1, m_1) = (0.09;\ 0.05)$$
$$A_2(v_2, m_2) = (0.36;\ 0.08)$$



Задача №4. Найти и изобразить на крит. областях (σ, μ) и (v, μ) образы множества допустимых портфелей в случае, когда 1 из активов безрисковый (2 портфеля). Модель Шарпа-Линтера.

$$0 < m_1 < m_2 \text{ и } 0 = \sigma_1 < \sigma_2$$

Параметры уравнения (7) Л1 в данном случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mu &= m_2 + (m_1 - m_2)t; \\ v &= \sigma^2 = \sigma_2^2(1 - t)^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Исключая t из (1), получим

$$t = \frac{\mu - m_1}{m_1 - m_2}$$

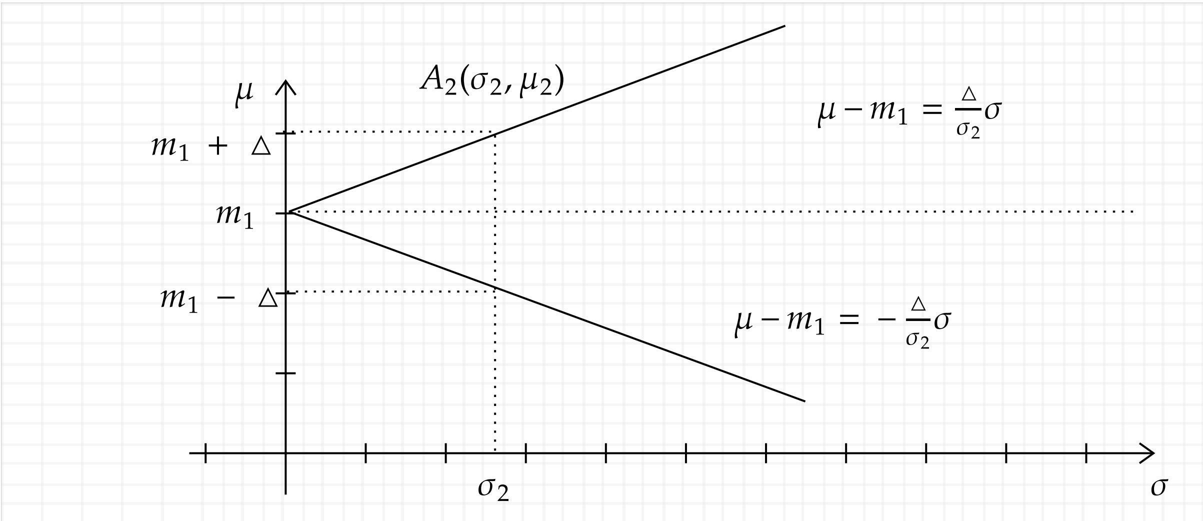
$$v = \sigma^2 = \sigma_2^2\left(1 - \frac{\mu - m_2}{m_1 - m_2}\right) = \sigma_2^2\left(\frac{m_1 - \mu}{m_1 - m_2}\right)^2$$

$$v = \sigma^2 = \frac{\sigma_2^2}{\triangle^2}(\mu - m_1)^2$$

а) на

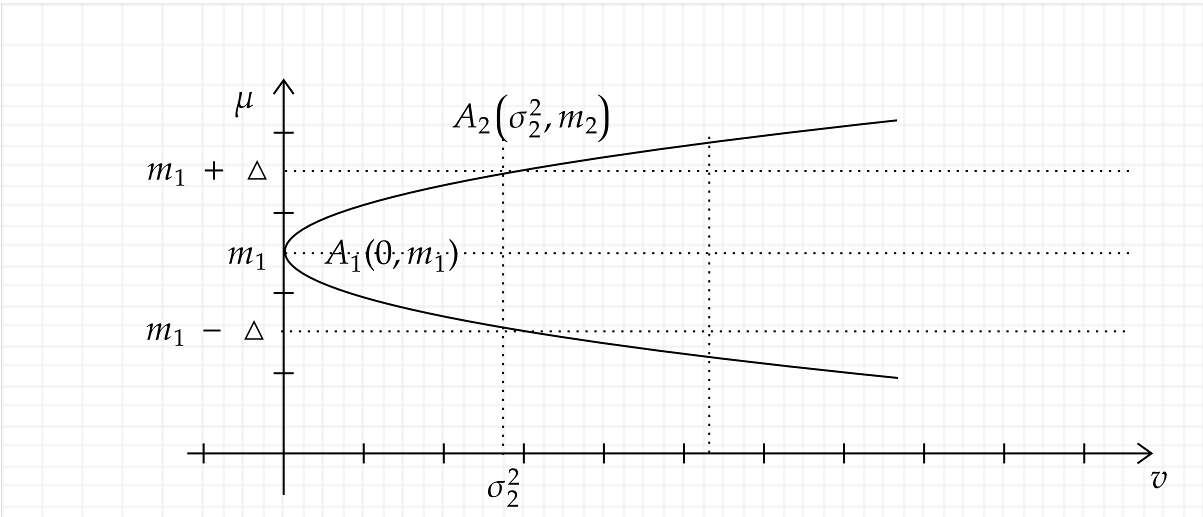
$$(\sigma,\ \mu):\ \sigma^2 = \frac{\sigma_2^2}{\triangle^2}(\mu - m_1)^2 \text{ или}$$

$$\mu - m_1 = \pm\frac{\triangle}{\sigma_2}\sigma \text{ – пара пересекающихся прямых}$$



в) на $(v,\ \mu)$

$$v = \frac{\sigma_2^2}{\triangle^2}(\mu - m_1)^2 \text{ – параболла}$$



Задача №5. (свойство минимального риска как функция ρ)
Как ведёт себя функция $a(\rho)$ на промежутке $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ в нулевом приблежии. Каков её $\max$ и где он достигается? Построить график при
$m_1 = 0.05;\ m_2 = 0.08;\ \sigma_1 = 0.3;\ \sigma = 0.6$
Из (9) лекция №1:

$$a^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \rho^2\right)}{d^2}$$

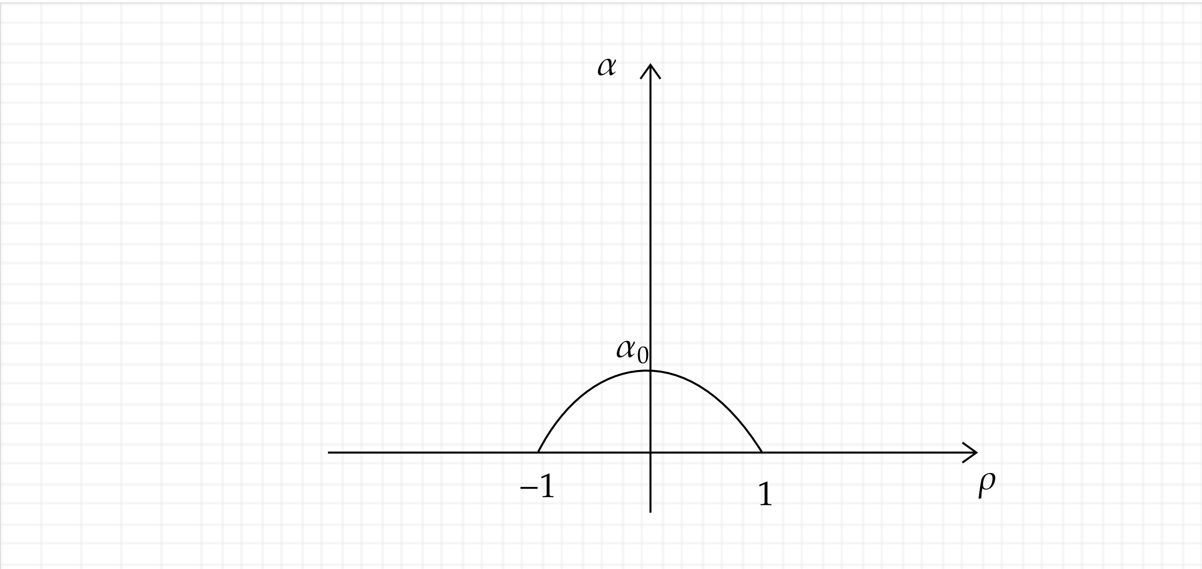
$$a(\rho) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{d}\sqrt{1 - \rho^2}$$

В нулевом приближении:

$$d(\rho) = d(0) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \equiv d_0$$

$$\frac{\sigma_1 \sigma_2}{d_0} \equiv \alpha_0 \Longrightarrow a(\rho) = \alpha\sqrt{1-\rho^2}$$

$$\frac{a^2}{\alpha_0^2} + \rho^2 = 1 - \text{эллипс}$$

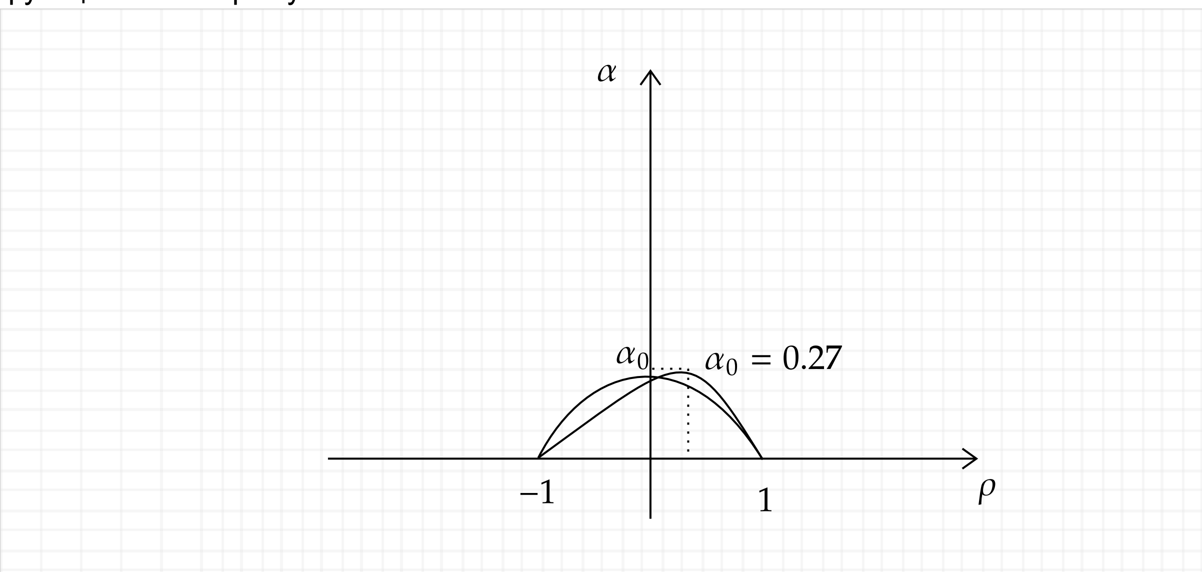


$$\max a(\rho) = \alpha_0 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{d_0}$$

При $m_1 = 0.05;\ m_2 = 0.08;\ \sigma_1 = 0.3;\ \sigma_2 = 0.6\ \Longrightarrow$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{d_0} \approx 0.268$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Решить задачу №5 не используя нулевое приближение. То есть исследовать функцию на экстремум



$$\alpha(\rho) = \sigma_1\sigma_2\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{d(p)}$$

Задача №6.

Найти и изобразить на σ, μ множество портфелей из двух портфелей в моделей Блэка и Марковица в случае жёстко связанных активов $\rho = 1$. Если:

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 \text{ и } 0 < m_1 < m_2$$

Решение:

В силу теоремы №1 уравнение образа при $|\rho| = 1$ (в моделе Блэка) имеет вид:

$$\sigma^2 = \frac{d^2}{\triangle^2}(\mu - c)^2$$

$$\sigma = \frac{d}{\triangle}|\mu - c|$$

, где $d^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$ $\triangle = |m_1 - m_2| = m_2 - m_1$

$$\text{При } \rho = -1 \Longrightarrow d^2 = \sigma_1^2 + 2_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = (\sigma_1 + \sigma_2)^2$$

$$\text{Соответсвенно, } \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m_2 - m_1}|\mu - c|$$

$$\text{При } \rho = 1 \Longrightarrow d^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

$$\text{Соответсвенно, } \sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{m_2 - m_1}|\mu - c|$$

$$\text{Таким образом } \sigma = \begin{cases} \sigma = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{m_2 - m_1}|\mu - c| & \rho = -1 \\ \sigma = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{m_2 - m_1}|\mu - c| & \rho = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Далее исследуем $c(\rho)$

$$c(\rho) = \frac{m_2\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2(m_1 + m_2) + m_1\sigma_2^2}{d^2}$$

При $\rho = -1$

$$c(-1) = \frac{m_2\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2(m_1 + m_2) + m_1\sigma_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{m_2\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 m_1 + \sigma_1\sigma_2 m_2 + m_1\sigma_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} =$$

$$= \frac{\sigma_1(m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2) + \sigma_2(m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{(m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} =$$

$$= \frac{m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (3)$$

При $m_1 < m_2 \Longrightarrow$

$$c(-1) - m_1 = \frac{m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - m_1 = \frac{m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2 - m_1\sigma_1 - m_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_1(m_2 - m_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} > 0$$

$$c(-1) > m_1$$

$$c(-1) - m_2 = \frac{m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2 - m_2\sigma_1 - m_2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_2(m_1 - m_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} < 0 \qquad (4)$$

То есть $m_1 < c(-1) < m_2,$ при $m_1 < m_2$

При $\rho = 1$

$$c(1) = \frac{m_2\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2(m_1 + m_2) + m_1\sigma_2^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{(m_2\sigma_1 - m_1\sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} =$$

$$= \frac{m_2\sigma_1 - m_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \qquad (5)$$

При $m_1 < m_2$ и $\sigma_1 < \sigma_2 \implies$

$$c(1) - m_1 = \frac{\sigma_1 m_2 - \sigma_2 m_1 - m_1\sigma_1 + m_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\sigma_1\overbrace{(m_2 - m_1)}^{>0}}{\underbrace{\sigma_1 - \sigma_2}_{<0}} < 0$$

т.е. $c(1) < m_1 \implies c(1) < m_1 < m_2$ и

$c(1)$ может вне интревала (m_1, m_2)

Окончательно,

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma = \begin{cases} \sigma = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{m_2 - m_1}|\mu - c| & \rho = -1 \quad c(-1) = \dfrac{m_2\sigma_1 + m_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \sigma = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{m_2 - m_1}|\mu - c| & \rho = 1 \quad c(1) = \dfrac{m_2\sigma_1 - m_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \end{cases} \\ \text{При этом } m_1 < c(-1) < m_2, \text{ при } m_1 < m_2 \\ c(1) < m_1 \implies c(1) < m_1 < m_2 \end{array}} \qquad (6)$$