Лекция №6
Модель Хикса потребления потребителя на рынке благ
План

1. Модель поведения потребителя Хикса в структурной форме и её трансформация к приведённой форме методом Лагранжа (задача математического программирования);

2. Функция расходов потребителя и её свойства

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Модель поведения потребителя Хикса

В моделе Хикса заложенно следующее утверждение: потребитель выбирает такой набор благ, который с одной стороны имеет наименьшую *стоимость*, а с другой стороны предоставляет потребителю *заданные уровень полезности*.

Вот математическая запись идей Хикса:

$$\begin{cases} M \ = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ u(x_1,\ \dots,\ x_n) \ = u_0 \\ x_1 \ \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Экзогенные переменные:

$$\vec{p} = (p_1,\ \dots,\ p_n),\ u_0\ - \text{экзогенные переменные}$$

Эндогенные переменные:

$$\vec{x} = (x_1,\ \dots,\ x_n)\ -\ \text{эндогенные переменные}$$

Выражение (1) - это структурная форма модели Хикса. С позиции математики модель (1) - это задача математического программирования на условный экстремум и решать такую задачу можно методом Лагранжа. Метод Лагранжа состоит из следующий шагов:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = \sum\limits_{i} p_{i}\ x_i\ +\ l(M\ -\ u(x_1,\ \dots,\ x_n))$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} \ = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} \ = \ 0; \\ i \ = \ (1,\ 2, \dots,\ n) \end{cases} \tag{2}$$

3. Эти условия представляют систему $n+1$ уравнений с $n+1$ переменной.

Система (4) решается либо аналитически, либо численно.

$$\vec{x}^{H} = \left(x_1^H,\ \ldots,\ x_n^H\right) = \vec{x}^{H}\left(\vec{p},\ u_0\right) \tag{3}$$

$$l^* = l^*\left(\vec{p}, u_0\right) \tag{4}$$

Задача. Пусть пространство благ двухметрно $\vec{x} = (x_1,\ x_2) \in C \sqsubseteq R_2^+$.

Пусть функцией полезности потребителя служит логарифм Бернулли в ситуации двух благ эта функция имеет уравнение:

$$u = a_1\,(=\ 0.1) \cdot \ln x_1 + a_2(=\ 0.2) \cdot \ln\ x_2$$

Дано:

$\vec{x} = (x_1\ (=\text{молоко})\,,\ x_2\ (=\text{хлеб}))$

$M = 200$

$p_1 = 50$ р/кг

$p_2 = 75$ р/л

На предшействующем семинаре мы отсыскали спрос потребителя по модели Маршала-Вальраса, задавшись значение $M = 200$ руб.. Там же мы рассчитали уровень полезность спроса по Маршалу-Вальрассу:

$$u = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 = 0.1\ \ln\ 1.3 + 0.2\ \ln 1.77 = 0.14$$

Найти:

Методом Лагранжа трансформировать к приведённой форме модель Хикса, зная, что $u_0 = 0.14$. Вычислить спрос по Хиксу и стоимость спроса по Хиксу ($M^* = \sum\limits_{i=1}^{2} p_i x_i^H (7)$).

Решение:

1. Функция Лагранжа:

$$L(x_1,\ x_2,\ l) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + l(u_0 - (a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln\ x_2))$$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 + l\frac{a_1}{x_1} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 + l\frac{a_2}{x_2} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = u_0 - a_1 \cdot \ln x_1 - a_2 \cdot \ln\ x_2 = 0; \end{cases}$$

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$ Решить систему и доказать, что решение этой системы методом подстановки имеет следующий вид:

$$x_1^* = \beta \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \tag{3'}$$

$$x_2^* \ = \ \gamma \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{\sum a_i}} \tag{3'}$$

$$l^* = \alpha \ \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \tag{4'}$$

Рассчитать численно значение спроса по Хиксу и параметры выше.

Функция рассходов потребителя и её свойства

Функцией **рассходов потребителя** можно называть стоимость спроса по Хиксу, как функцию экзогенных переменных модели.

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = \ M^* \left(\vec{p}, u_0\right) \tag{7}$$

Задача. Подстваит правые части из уравнения (3') в выражение (7) и получим следующее уравнение:

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Убедиться в правильности формулы (8):

$$M^* \ = \ \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Проверить справедливость уравнения (8), рассчитать M^* и сравнить полученное значение со значением $M_0 = 200$ оуб..

Задача. Показать, что:

1. $M^* \uparrow u_0$; (9)
2. $M^* \uparrow p_i$;

Решение:

Докажем (9):

$$\frac{\partial M^*}{\partial u_0} > 0$$

$$M^{*\prime}_{u_0} = \psi \ \cdot \frac{1}{\sum a_i} \ \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \ \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} > 0$$

$$M^{*\prime}_{p_i} \ = \ \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot \frac{a_1}{\sum a_i} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}-1}$$

Кроме свойств 1 и 2 функция расходов потребителя является выпуклой вверх функцией:

$$\boxed{\text{ДЗ}}\frac{\partial^2 M^*}{\partial p_i^2} > 0$$