Микроэкономика
Домашняя работа №8 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Проверить, что в функции Коббла-Дугласа и Леонтьева, каждый фактор необходим. Так ли это в линейной функции?

Решение: Для того, чтобы доказать, что в производсенной функции каждый фактор необходим, достаточно проверить, что при нулевом уровне из этих факторов, весь выпуск равен 0.

☑ Проверим для фукции Коббла-Дугласа:

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$
$$a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1$$

Действительно, если любой из факторов равен 0, то и всё уравнение равно 0:

$$y = f(x_i = 0) = 0$$
$$a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \ \blacksquare$$

☑ Аналогично, проверим для функции Леонтьева:

$$y = a_0 \min(x_1,\ x_2)$$
$$a_0 > 0$$

Действительно, если любой из факторов равен 0, то и всё уравнение равно 0:

$$y = f(x_i = 0) = 0$$
$$a_0 > 0 \ \blacksquare$$

☐ Для линейной производсенной функции данное правило не выполняется.

Док-во:

Пусть $x_1 = 0$, тогда линейная производсенная функция примет следующий вид:

$$y = a_1 \cdot 0 + a_2 x_2 = a_2 x_2$$
$$a_1 > 0;\ a_2 > 0$$

Что не равно нулю при $\forall x_2 \neq 0$. ■

Задача №2. Проверить предельное значение выпуска по второму фактору. А так же доказать **третье свойство** производсенной функции. $M_y(x_i) \downarrow x_i \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$

Другими словами производсенная функция выпукла вверх.

Решение:

☑ **Свойство 2.** Выпуск продукции возрастает при росте факторов:

$$M_y(x_i) > 0 \qquad (1)$$

$M_y(x_i)$ *предельный продукт* i-ого фактора. Добавим предельные величины рассчитываются как производные:

$$\frac{\partial F_{CES}(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$$

Удобно прологорифмировать уравнение CES функции:

$$\ln y = -\frac{h}{\rho}\ln\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + \ln a_0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_2} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

Таким образом предельное значение выпуска по первому и второму фактору > 0. ■

☑ **Свойство 3.** С ростом уровня $x_i \uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i) \downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Вычислим вторую производную по каждому фактору:

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_1^2} = h \cdot a_1 \left(\frac{x_1^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x_1} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot x_1^{-(2+\rho)} \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + x_1^{-(1+\rho)} \cdot a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot \left(x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{\left(-(1+\rho) \cdot x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$-h \cdot a_1 \frac{x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_2^2} = h \cdot a_2 \left(\frac{x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x_2} =$$

$$= -h \cdot a_2 \frac{x_2^{-2(1+\rho)} a_2 + (1+\rho) \cdot a_1 \cdot x_1^{-\rho} \cdot x_2^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

Следовательно, производственная функция выпукла вверх, что доказывает третье свойство.

Задача №3.

$$x_2 = \left(\frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)\right)^{-\frac{1}{\rho}} \tag{6''}$$

Исследовать (6") уравнение изокванты и найти её горизонтальную и вертикальную ассимптоты. Построить график изокванты при значениях:

$$y_0 = 2,\ a_0 = 0.45,\ a_1 = 0.5, a_2 = 0.1, \rho = h = 1$$

Построим график функции для этого сначала упростим уравнение (6"):

$$x_2 = \left(\frac{1}{0.1}\left(\left(\frac{2}{0.45}\right)^{-1} - 0.5 \cdot x_1^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(10\left(0.225 - \frac{1}{2x_1}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \left(10\left(\frac{0.45x_1 - 1}{2x_1}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{2.25x_1 - 5}{x_1}\right)^{-1} = \frac{x_1}{2.25x_1 - 5}$$

Воспользуемся Python 3:

```
# библиотеки
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
sns.set(style="darkgrid")


# 1000 значений x1 от -200 до 200 с равными интервалами
x1 = np.linspace(2, 3, 1000)
# строим график
plt.plot(x1, x1/(2.25*x1-5))
plt.xlabel(r"$x_1$")
plt.ylabel(r"$x_2$")
plt.title('График изокванты')
plt.show()
```

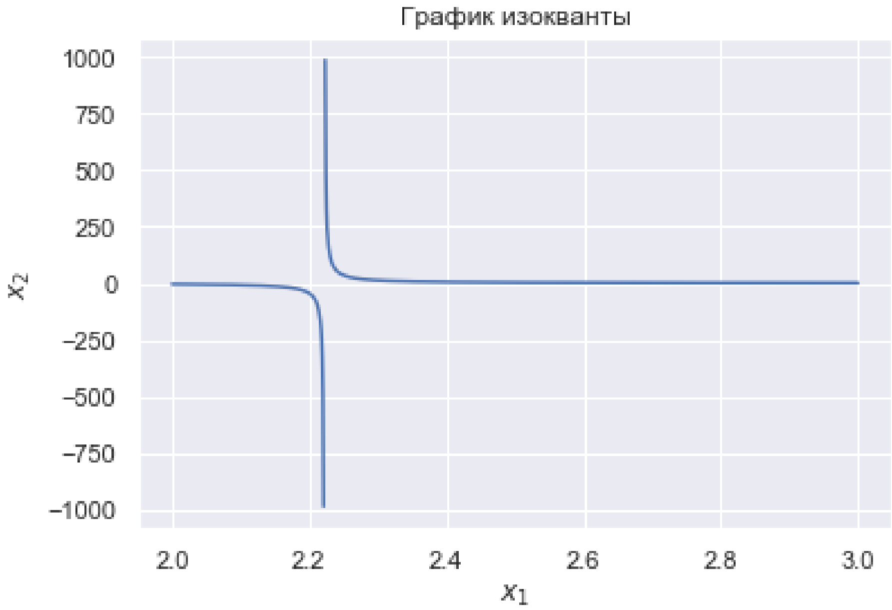

График имеет точку разрыва при $x_1 = 2.22$ сдедовательно вертикальная ассимтота прямая проходящая через $x_1 = 2.22$. Для того, чтобы рассчитать горизонтальную ассимптоту вычислим предел:

$$x_2 = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{x_1}{2.25x_1 - 5} = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{2.25x_1^2 + 5}{2.25^2 x_1^2 - 25} = 0.444444$$

Сдевательно вертикальная ассимптота расположена вдоль прямой $x_2 = 0.444444$.