Лекция №3. Модели потребления потребителя и уравнение Слутского

План

1. Модель Маршала-Вальрасса, свойства функции спроса и косвенная функция полезности;
2. Модель Хикса, функция расходов, лемма Шепарда и матрица Слуцкого;
3. Двойственный характер моделей поведения потребителя (взаимосвязь моделей) и уравнение Слуцкого;
4. Классификация благ в спросе потребителя.

На предыдущей лекции обсудили модель способности потребителя сопоставлять наборы благ (отношение слабого предпочтения) и **теорему Дэбре**, *что у любого потребителя, умеющего непротиворичиво сопоставлять наборы благ, существует функция полезности.* Понятие функции полезности лежит в основании моделей поведения потребителя. Начнём с модели Маршалла-Вальраса

Экзогенные величины модели:

1. C $-$пространство благ и их цены $(p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n)$;
2. $u(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)-$функция полезности;
3. M $-$ доход потребителя.

Эндогенные переменные модели:

1. Наилучший и доступный потребителю набор благ $(x_1^*,\ x_2^*,\ \dots,\ x_n^*)$.

Структурная форма модели (потребитель пытается найти такой набор благ, который наиболее полезен ему, но и по карману):

$$\begin{cases} u\ =\ u(x_1,\ \dots,\ x_n)\ \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i\ \leq\ M \\ (x_1\ \geq\ 0,\ \dots,\ x_n\ \geq 0)\ \in C \end{cases} \tag{1}$$

К приведённой форме модель (1) трансформируется методом Лагранжа:

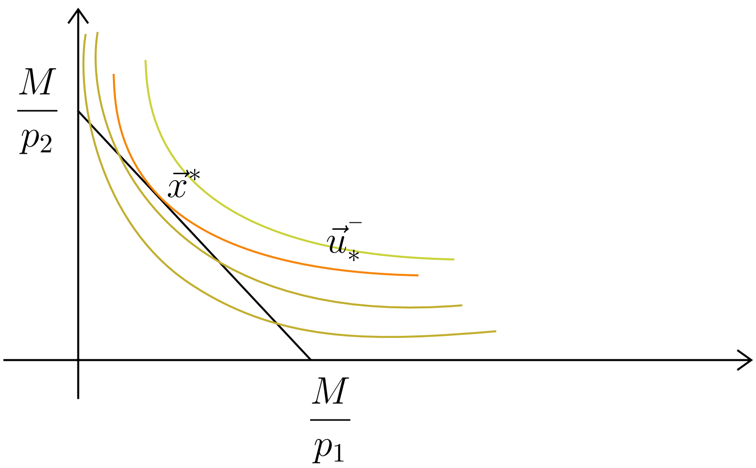
1. Составляется функция Лагранжа: $L =\ u(x_1,\ \dots,\ x_n) + l\left(M\ -\ \sum\limits_i p_i\ x_i\right)$
2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - l \cdot p = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = M - \sum\limits_{i} p_{i} \, x_i = 0; \\ i = (1, \ldots, n) \end{cases} \tag{2}$$

3. Эти условия представляют систему $n+1$ уравнений с $n+1$ переменной.

Система (3) решается либо аналитически, либо численно. Итогом решения является: $\vec{x}^D = \vec{x}^* = \vec{x}^D \left(M, p_1, \ldots, p_n\right)$ и множитель Лагранжа $l = l\left(M, p_1, \ldots, p_n\right)$.

Набор эндогенных переменных расчитанных по Маршаллу-Вальрасу принято называть спросом потребителя по Маршаллу-Вальрасу. Проиллюстрируем на графике это спрсс в ситуации двух благ:



Кривые линии - это множества безразличия. Другими словами - это линии уровня функции полезности потребителя. Оранжевая полоса показывает линию максимального возможного уровня функции полезности, такую которая имеет единственную точку с множеством доступных потребителю набором благ; точку касания кривой безразличия u^* с границей множества допустимых наборов мы обозначаем символом $\vec{x}^*$ и именно координаты этой точки удовлетваряют моделе (1).

Свойства функции спроса и косвенная функция полезности

Если все цены и доход изменяются в одно и тоже количество раз m, то спрос потребителя не меняется, т.е. функция спроса является однородной нулевой степени:

$$\begin{cases} \vec{x}^* = \vec{x}^D \left(m \cdot \vec{p}, m \cdot M\right) = \vec{x}^D \left(\vec{p}, M\right) \\ m > 0; \end{cases}$$

Косвенная функция полезности потребителя экономисты называют **приведённую форму функцию полезности в моделе Маршалла-Вальраса**:

$$u = u^* \left(\vec{x}^*\right) = u^* \left(\vec{p}, M\right) \tag{3}$$

Значение косвенной функции полезности равно *уровню полезности*.

Справдливо следующее равенство, расскрывающее смысл мнодителя Лагранжа:

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} \ = \ l^*; \tag{4}$$

В левой части этого равенства находится велечина называемая *предельной полезностью по доходу* и имеющая смысл: *дополнительной полезности потребителя в ответ на дополнительную единицу дохода.* Завершая обсуждение модели Маршалла-Вальраса отметим следующее равенство:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \ -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \tag{5}$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

Модель Хикса

В модели Хикса заложенна другая точка зрения: потребитель выбирает такой набор благ, который с одной стороны имеет наименьшую стоимость, а с другой стороны доставляет потребителю заданный уровень полезности. Модель Хикса имеет следующую структурную форму

$$\begin{cases} M \ = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ u(x_1, \ \ldots, \ x_n) \ = u_0 \\ x_1 \ \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

где экзогенные переменные:

$$\vec{p} = (p_1, \ \ldots, \ p_n), \ u(x_1, \ \ldots, \ x_n), \ u_0 \tag{7}$$

Эндогенные переменные:

$$\vec{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n) \ - \ \text{значение благ потребителя} \tag{8}$$

Трансформация к приведённой форме позволяет определить спрос по Хиксу и множитель Лагранжа

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \vec{x}^* = \vec{x}^H \left(\vec{p}, u_0\right); \\ l^* \ = \ l^* \left(\vec{p}, u_0\right) \end{cases}$$

Свойства функции спроса по Хиксу:

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \vec{x}^H \left(\vec{p}, u_0\right) \ = \vec{x}^H \left(m \cdot \vec{p}, u_0\right); \\ m > 0 \end{cases}$$

Функция спрса по Хиксу является однородной функцией нулевой степени по ценам благ. Если цены всех раз изменить в m раз, то спрос не меняется и остаётся на уровне полезности u_0.

Приведённая форма целевой функции модели Хикса называется функцией расходов потребителя и её значение это *стоимость спрса по Хиксу:*

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = M^*(\vec{p}, u_0) \tag{9}$$

Отметим два свойства:

1. Если все цены изменяются одновременно в m раз, то значение функции расходов возрастает в m раз:

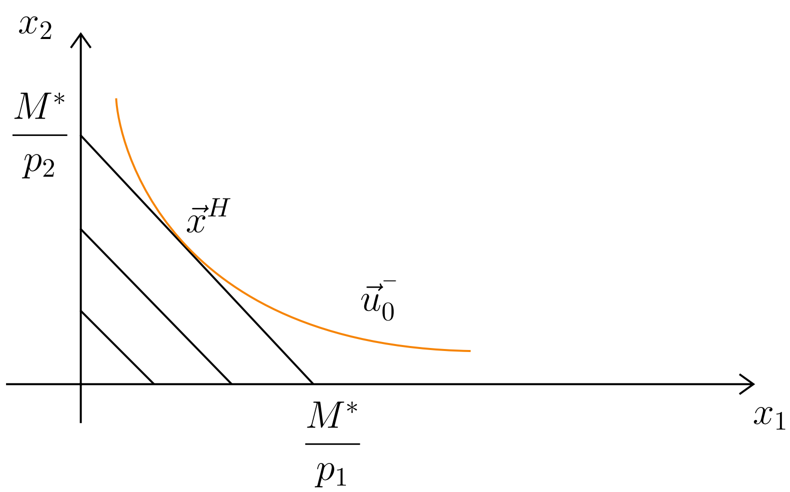
$$M^*(m \cdot \vec{p}, u_0) = m \cdot M^*(\vec{p}, u_0), \; m > 0$$

2. Функция возрастает по цене данного блага

3. Функция расходов выпкла вверх, то есть:

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial p_i^2} < 0 \tag{10}$$

Два последних свойства такие же как у функции полезности. Завершая обсуждение модели Хикса дадим наглядную интерпритацию спроса по Хиксу в результате двух благ:



Прямыми линиями обозначены лини уровня функции расходов, то есть наборы благ на этих уровнях имеют одинаковую стоимость. Ораневой линией нарисована кривая безразличия заданного уровня u_0. Спрос по Хиксу назодится в точке касания кривой безразличия $\vec{u_0}$ с линией минимально возмодного уровня функции спроса.

Двойственный характер моделей поведения потребителя (взаимосвязь моделей) и уравнение Слуцкого

Следщая теорема устанавляивает взаимосвязь моделей поведения потребителя (Занятие №6)

Теорема. Вернёмся к $\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M\right)$ и пусть теперь уровень дохода потребителя совпадает со стоимостью спроса по Хиксу. Тогда справедливы два тождества:

1) Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p}, u_0)$:

$$\vec{x}^H\left(\vec{p}, u_0\right) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*\left(\vec{p}, u_0\right)\right) \tag{11}$$

2)Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p})$:

$$u\left(\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*\left(\vec{p}, u_0\right)\right)\right) = u_0 \tag{12}$$

Следствие из теоремы (уравнение Слуцкого). Наша цель состоит в установлении взаимосвязи изменений спроса по Хиксу и Маршаллу-Вальрасу в ответ на изменение цен благ. Продифференцируем тождество (11) по ценам и в итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = S - \ \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Подробная запись:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \ \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Символом S обозначена слудующая матрица, которая называется матрицей Слуцкого и имеет смысл *предельного спроса Хикса по ценам*:

$$S \ = \ \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle\ \vec{p} \ = \ \left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \ + \ \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}}\right) \cdot \triangle\ \vec{p}$$

Итог. Равенство (11) и (12) называются тожедествами двойственности моделей поведения потребителя. Уравнения Слуцкого ($\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}$) задают взаимосвязь предельного спроса по Маршаллу-Вальраса и Хикса и называются основными теориями полезности.