Лекция №9

Эконометрические модели с гетероскедастичными случайными возмущениями

План

1. Оценка параметров линейной эконометрической модели методом максимального правдоподобия и взаимосвязь этого метода с методом наименьших квадратов;
2. Тест Голдфелда-Кванта гомоскедастичности случайного возмущения в линейной эконометрической модели;
3. Простейшая модель гетероскедастичности случайного возмущения.

На прошлой лекции обсудили обобщение метода наименьших квадратов, которое (обобщение) сформулировано при отказе от предпосылки (2) и (3) теоремы Гаусса-Маркова

Предпосылка №2

$$Var(u_1) = Var(u_2) = \dots = Var(u_n)$$

Предпосылка №2 означает независимость дисперсий случайных возмущений от значений объясняющих переменных. И в этом случае случайное возмущение в моделе и в этом случае случайные возущения называются <u>гомоскедастичным</u>.

Предпосылка №3

$$Cov(u_i, u_j) = 0,\ i \neq j$$

Предпосылка №3 обозначает некоррелируемость или предпосылка об отсутсвии автокорреляции у случайного возмущения.

При отказе от этих предпосылок ковариационная матрица является не диагональной (полной) причём на главной диагонали матрицы расположены, возможно неодинаковые дисперсии случайных возмущений.

Отказ от предпосылок №2, №3 генерирует общую структуру уравнений вектора наблюдений.

$$Cov\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$$

В этой общей ситуации наилучшая оценка коэффициентов модели рассчитавается по правилу:

$$\vec{\tilde{a}} = \left(\left(X^T \cdot P \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot P\right)(= M) \cdot \vec{y}$$

Замечание. Оптимальность оценки коэффициентов спрадлива при любом законе распределения случайного возмущения.

Предположим, что случайное возмущение в модели имеет **нормальный закон** распределения. И это значит, что плотность вероятности вектора случайных возмущений имеет следующее аналитическое выражение:

$$f_{\vec{u}}\left(\vec{q}\right) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{n}{2}} \cdot |\Omega_{\vec{u}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{\vec{q}^{\,T} \cdot \Omega_{\vec{u}}^{-1} \cdot \vec{q}}{2}\right\}$$

$\vec{q}$ – вектор аргументов плотности вероятности.

Оценим параметры линейной эконометрической методом максимального правдоподобия по обучающей выборке $\left(\vec{y}, X\right)$. Функция правдоподобия выборки имеет следующий вид:

$$L = (2\cdot\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma_0^{-n}\cdot|P|^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(\vec{y}-X\cdot\vec{a}\right)^T\cdot P\cdot\left(\vec{y}-X\cdot\vec{a}\right)}{2\cdot\sigma_0^2}\right\}$$

Максимизация этой функции по искомым параметрам $\vec{a}, \sigma_0^2$ приводит к следующим оценкам параметра модели методом максимального правдоподобия:

$$\hat{\vec{a}} = \left(X^T\cdot P\cdot X\right)^{-1}\cdot X^T\cdot P\cdot\vec{y}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\tilde{\vec{u}}^T\cdot P\cdot\tilde{\vec{u}}}{n}$$

Оценки методом максимального правдоподобия совпадают с оценкой обобщённым методом наименьших квадратов.
Вывод: при нормальном законе распределения случайного возмущения оценки наименьших квадратов совпадают с оценками максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия обладают многими замечательными свойствами, которые переносятся, тем самым, на оценки наименьших квадратов.

Линейные эконометрические модели с гетероскедастичными случайными возмущениями

Вернёмся к спецификации базовой модели эконометрики и теперь будем предполагать, что дисперсия случайного возмущения зависит от значений объясняющих переменных, это значит, что в предположении Гаусса-Маркова оказывается нарушена предпосылка №2, остальные предпосылки мы предпологаем справедливыми и при этом мы постулируем нормальный закон распределения у случайного возмущения

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1\cdot x_1 + a_2\cdot x_2 + \ldots a_k\cdot x_k + u \\ E(u) = 0; E\left(u^2\right) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

Теорема. (О законе распределения суммы квадратов оценок случайных возмущений ESS в уравнения наблюдений)
Пусть справедливы все предпосылки и случайные возмущения имеют нормальный закон распределения:

1) $E(u_1) = E(u_2) = \ldots = E(u_n)$;
2) $Var\left(u_1^2\right) = Var\left(u_2^2\right) = \ldots = Var\left(u_n^2\right) = \sigma_n^2;$
3) $Cov(u_i, u_j) = 0,\ i \neq j$
4) $Cov(u_i, x_{lj}) = 0,$ при всех i, j, l

Тогда $\frac{ESS}{\sigma_u^2}$ имеет хи-квадрат распределение $p_{\chi^2_m}(q)$ с числом степеней свободы $m = n - (k+1)$.

Тест Голдфелда-Кванта гипотезы о гомоскедастичности случайного возмущения

Шаги теста предпосылки №2 Голдфелда-Кванта

Шаг 1. Составляется система уравнений наблюдений объекта

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 \cdot x_{1,1} + a_2 \cdot x_{2,1} + \ldots a_k \cdot x_{k,1} + u_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 \cdot x_{1,2} + a_2 \cdot x_{2,2} + \ldots a_k \cdot x_{k,2} + u_2 \\ \ldots \\ y_n = a_0 + a_1 \cdot x_{1,n} + a_2 \cdot x_{2,n} + \ldots a_k \cdot x_{k,n} + u_n \end{cases}$$

Замечание. Если справедлива предпосылка №2 теоремы Гаусса-Маркова, то при любых перестановках уравнений наблюдений дисперсии случайных возмущений остаются неизменными. Если же предпосылка №2 нарушается, то, как правило, дисперсии случайных возмущений в уравнения 1 и 2 возрастают (или убывают) в ответ (по мере) на возрастание абсолютных значений объясняющих переменных.

Шаг 2. Уравения наблюдений упорядычеваются по возрастанию сумм абсолютных значений объясняющих перменных

$$\sum_{j=1}^{k} |x_{ji}|$$

Шаг 3. По первым n_1 упорядоченным уравениям оцениваются методом наименьших квадратов параметры модели и запоминается значения ESS_1. Количество n_1 выбирается согласно следующим двум условиям:

$$a)\ n_1 \ \approx \frac{1}{3}n,\ \ b)\ n_1 \ > \ k \ + \ 1$$

Аналогично оценивается модель по последним n_1 уравениям и запоминается значение ESS_2.

Шаг 4. Вычисляется по следующему правилу дробь:

$$GQ = \frac{ESS_1}{ESS_2} \sim P_F(q) \tag{6.1.10}$$

Эта дробь является статистикой критерия проверяемой гипотезы о гомоскедастичности случайного возмущения. Величина GQ имеет распредение Фишера с кол-ом степеней свободы m, n.

Шаг 5. Гипотеза о гомоскедастичности принимается как не противоречащая реальным данным, если оказываеются справедливыми следующие два неравенства:

$$\begin{cases} GQ \overset{?}{\leq} F_{\text{крит}} \\ \dfrac{1}{GQ} \overset{?}{\leq} F_{\text{крит}} \end{cases}$$

Где символом $F_{\text{крит}}$ мы обозначаем квантиль распределения Фишера заданного уровня $1 - \alpha$, например $1 - \alpha \ = 0.95$.

Итог: экономисты тестируют все предпосылки в частности предпосылка №2 тестируется тестом Голдфелда-Кванта.