Лекция №1

Почта: yvkonovalov@fa.ru

Портфель из двух активов

1. Основные уравнения и теоремы

Множество допустимых портфелей модели Блэка является следующее множество:

$$F_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1\} \tag{1}$$

, т. е. F_1 представляет собой прямую $x_1 + x_2 = 1$ на плоскости (рис. 1, a)

Модель Марковица

Множество допустимых портфелей модели Марковица является следующее множество:

$$F_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1,\ x_i \geqslant 2,\ i = 1, 2\} \tag{2}$$

, т. е. F_2 представляет собой отрезок прямой $x_1 + x_2 = 1$ с внешними точками $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (рис. 1, b)

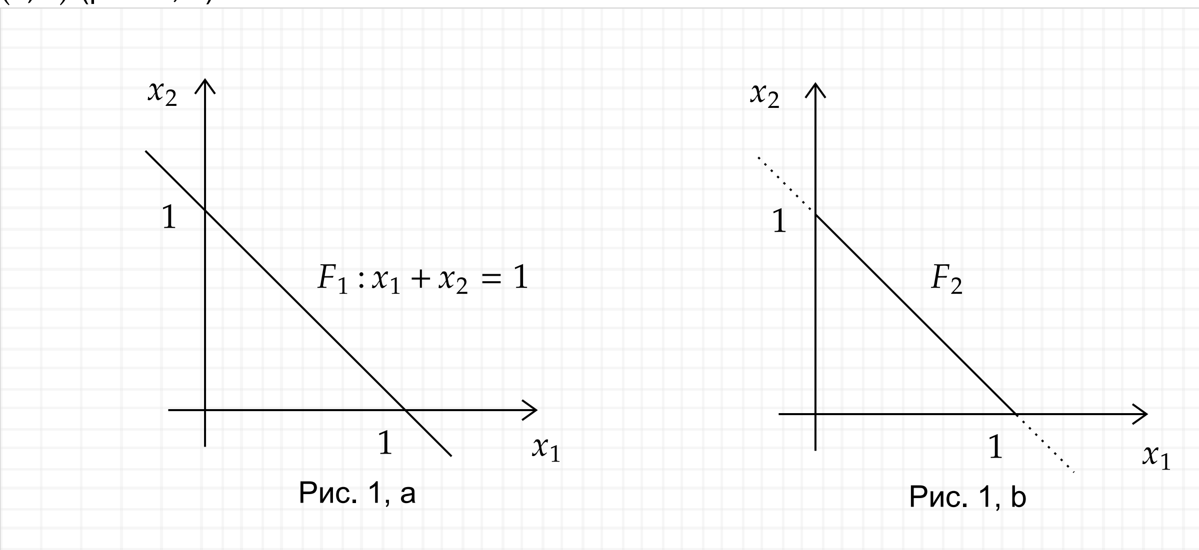


Рис. 1, a

Рис. 1, b

Вектор <u>ожидаемых доходностей</u> $\vec{m}$ и матрица ковариаций (σ_{ij}), соответсвенно, определяется выражением:

$$\vec{m} = (m_1, m_2),\ m_i = E(r_i) = Mr_i,\ i = 1, 2 \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = E((r_i - m_i)(r_j - m_j)) = M((r_i - m_i)(r_j - m_j)),\ i = 1, 2;\ j = 1, 2 \tag{4}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_1^2;\ \sigma_{22} = \sigma_2^2;\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$$

, где ρ – коэффициент корреляции. (вывод на семинаре)

Выражение для ожидаемой доходности μ_x и риска $v_x(\sigma_x)$ портфеля из двух активов (вывод смотри семинар №1 задача №1):

$$\mu_x = m_1 x_1 + m_2 x_2 \tag{5}$$

$$v_x = \sigma_x^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 + \sigma_2^2 x_2^2 \tag{6}$$

Далее, используя уравнение (5), (6) можно получить параметрические уравнения кривой – образа допустимых портфелей модели Блэка.

Вводя параметр $t = x_1,\ -\infty < t < +\infty\ (\text{в моделе Блэка})$, получим следующие параметрические уравнения (вывод смотри семинар):

$$\begin{cases} \mu = m_2 + (m_1 - m_2)t \\ v = \sigma^2 = \sigma_1^2 t^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t(1-t) + \sigma_2^2(1-t)^2 \\ -\infty < t < +\infty \end{cases} \qquad (7)$$

<u>Замечание</u>. Далее предполагается, что $m_1 \neq m_2$ и $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Исключаем параметр t из (7), образ множества допустимых портфелей из двух активов в моделе Блэка можно записать в виде одного (не канонического, неявного) уравнения (вывод смотри на семинаре):

$$\sigma^2(m_1 - m_2)^2 = \sigma_1^2(\mu - m_2)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(\mu - m_2)(m_1 - \mu) + \sigma_2^2(m_1 - \mu)^2 \qquad (8)$$

Уравнение (8) - это уравнение кривой 2-ого порядка на плоскости. Соотвественно, это уравнение можно записать в виде канонического уравнения кривой 2-ого порядка на плоскости (элипсы, гиперболы или параболы + вырожденные случаи) (это известный факт из аналитической геометрии)

Чтобы перейти к канонической форме записи теперь уже уравнения (8) введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}{d^2} \\ b^2 = \dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\triangle^2}{d^4} \\ \triangle = |m_1 - m_2| \\ c = \dfrac{m_2\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2(m_1 + m_2) + m_1\sigma_2^2}{d^2} \\ d^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \end{cases} \qquad (9)$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема №1. Пусть выполнено условие:

$$m_1 \neq m_2,\ m_i > 0,\ i = 1,2$$
$$\sigma_1 \neq \sigma_2,\ \sigma_i > 0,\ i = 1,2$$

Тогда образ множество допустимых портфелей (1) на криториальных полуплоскостях в моделе Блэка соответственно имеет вид:

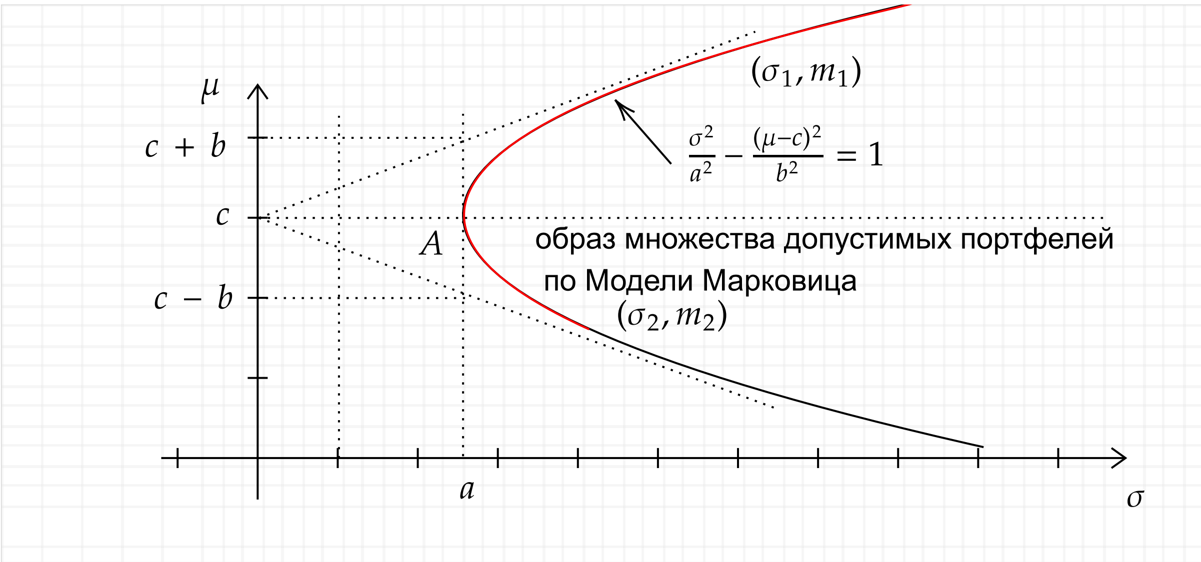
1) на плоскости $(\sigma,\ \mu)$: $\dfrac{\sigma^2}{a^2} - \dfrac{(\mu - c)^2}{b^2} = 1$ (гипербола) (10) , при $|\rho| < 1$ или $\sigma^2 - \dfrac{d^2}{\triangle^2}(\mu - c)^2 = 0$ (две пересекающиеся прямые) (11), при $|\rho| = 1$

2) на плоскости $(v,\ \mu)$: $v = a^2 + \dfrac{d^2}{\triangle^2}(\mu - c)^2$ (парабола) (12)

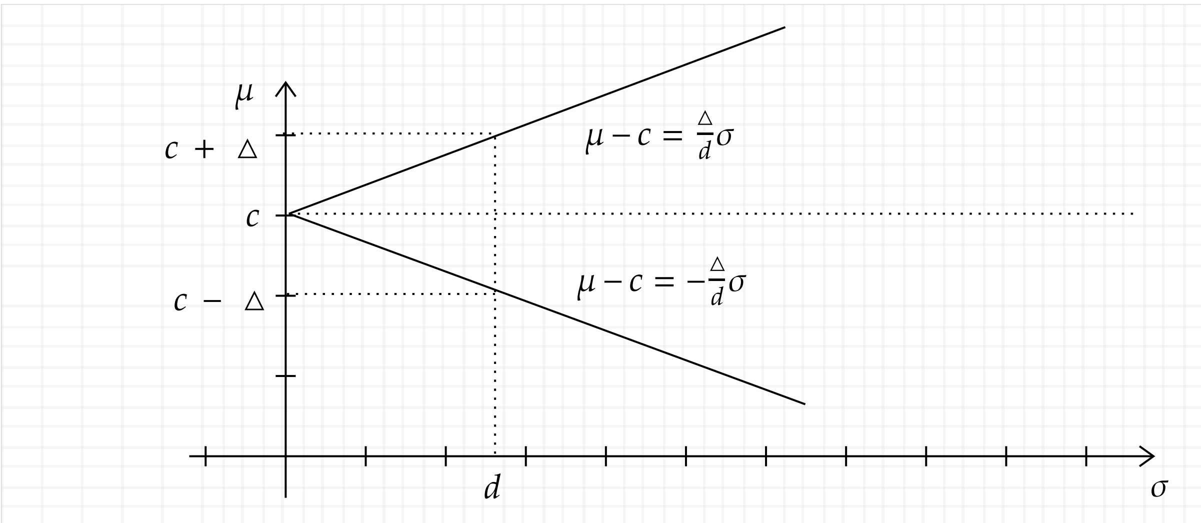
2. Примеры образов множества допустых портфелей в случае двух активов

1) Построим графики образов (10 - 12) в модели Блэка

$a)$ $\dfrac{\sigma^2}{a^2} - \dfrac{(\mu - c)^2}{b^2} = 1$ (гипербола); $\mu - c = \pm\dfrac{b}{a}\sigma$ – асимптоты гиперболы

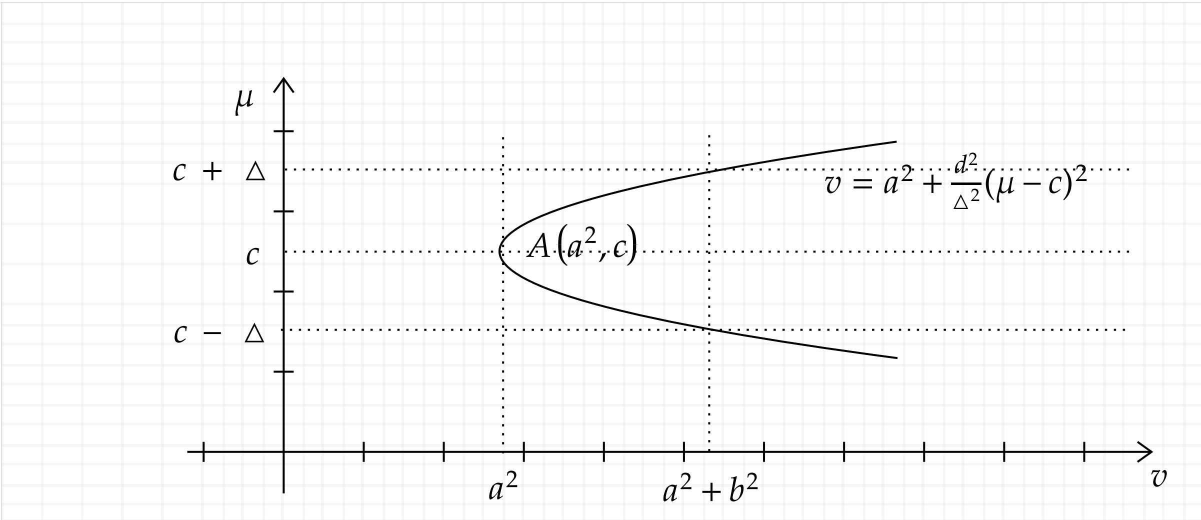


$b)\ \sigma^2 - \dfrac{d^2}{\triangle^2}(\mu - c)^2 = 0$ (две пересекающиеся прямые)



$c)\ v = a^2 + \dfrac{d^2}{\triangle^2}(\mu - c)^2$ (парабола)

$x = 2py^2$ – каноническая парабола



μ
$c + \triangle$
c
$c - \triangle$
$A(a^2, c)$
$v = a^2 + \frac{d^2}{\triangle^2}(\mu - c)^2$
a^2
$a^2 + b^2$
v