Домашняя работа
Аверьянов Тимофей ПМ 3-1

Задание №1.

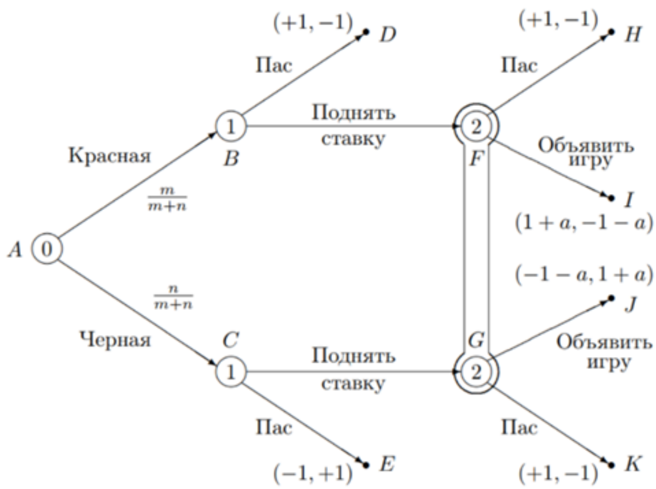


Рис. 1. *Дерево упрощенной игры в покер*

Найти решение позиционной игры для дерева "упрощённой игры в покер" (Рис. 1) с вероятностью вероятность $p = \dfrac{1}{n}$, где n номер по списку.

Решение:

Так как у меня 1 номер по списку, то мне придётся взять $n = 25$, чтобы решение было в смешанных стратегиях. Таким образом получается $p = \dfrac{1}{25} = 0.04$, что первому игроку выпадет красная карта и $q = (1-p) = 0.96$, что первому игроку выпадет чёрная карта (хоть это и не совсем логично, с точки зрения обычной игральной колоды карт). На семинарском занятии мы получили следующую матрицу выйгрышей:

	И	П
СС	$(2p-1)(1+a)$	1
СП	$(2+a)p-1$	$2p-1$
ПС	$p(2+a)-1-a$	1
ПП	$2p-1$	$2p-1$

Подставим $p = 0.04$ и $a = 1$ (такое значение мы присвоили на семинарском занятии) в таблицу выше получим:

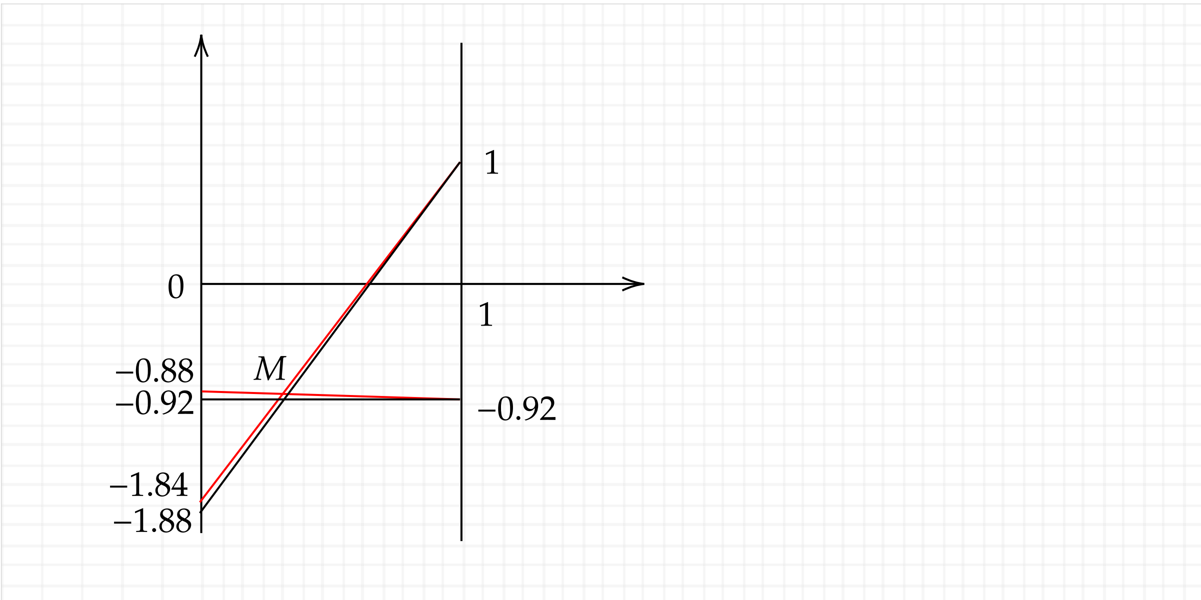
	И	П
СС	-1.84	1
СП	-0.88	-0.92

ПС	-1.88	1
ПП	-0.92	-0.92

Что опять-таки не особо логично, из-за очень низкого показателя $p = 0.04$, но всё решим данную задачу:

	И	П	$\alpha(A)$
СС	-1.84	1	-1.84
СП	-0.88	-0.92	-0.92
ПС	-1.88	1	-1.88
ПП	-0.92	-0.92	-0.92
$\beta(A)$	-0.88	1	$-0.88 \backslash -0.92$

Поскольку $\alpha(A) = -0.92 < -0.88 = \beta(A)$, то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Оптимальное смешанные стратегии игроков можно найти графическим способом:



Таким образом упростим матрицу и получим матрицу 2x2:

	И	П
СС	-1.84	1
СП	-0.88	-0.92

Решим матрицу алгебраическим способом:

$$p_{i_1}^O = \frac{a_{i_2 2} - a_{i_2 1}}{(a_{i_2 2} - a_{i_2 1}) - (a_{i_1 2} - a_{i_1 1})}$$

$$p_{i_2}^O = 1 - p_{i_1}^O$$

$$p_i^O = 0, i \in \{1, 2, \dots, m\} \backslash \{i_1, i_2\}$$

$$q_2^O = \frac{a_{i_2 1} - a_{i_1 1}}{(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}) - (a_{i_1 1} + a_{i_2 2})}$$

$$q_1^O = 1 - q_2^O$$

$$V = \frac{a_{i_1 2} \cdot a_{i_2 1} - a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2}}{(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}) - (a_{i_1 1} + a_{i_2 2})}$$

$$\text{Подставим}:$$

$$p_{i_1}^O = \frac{-0.92 - (-0.88)}{(-0.92 - (-0.88)) - (1 - (-1.84))} \approx 0.0139$$

$$p_{i_2}^O \approx 1 - 0.0139 = 0.9861$$

Таким образом веркор P: $\boxed{(0.0139, 0.9861, 0, 0)}$

$$q_2^O = \frac{-0.88 + 1.84}{(1 - 0.88) - (-1.84 - 0.92)} \approx 0.333$$

$$q_1^O \approx 1 - 0.333 = 0.667$$

Таким образом веркор Q: $\boxed{(0.667, 0.333, 0, 0)}$

$$V = \frac{-0.88 - (-1.84) \cdot (-0.92)}{(1 - 0.88) - (-1.84 - 0.92)} \approx \boxed{-0.8933}$$

Для значения параметра $p = 0.04$ и $a = 1$, мы нашли равновесные стратегии обоих игроков:

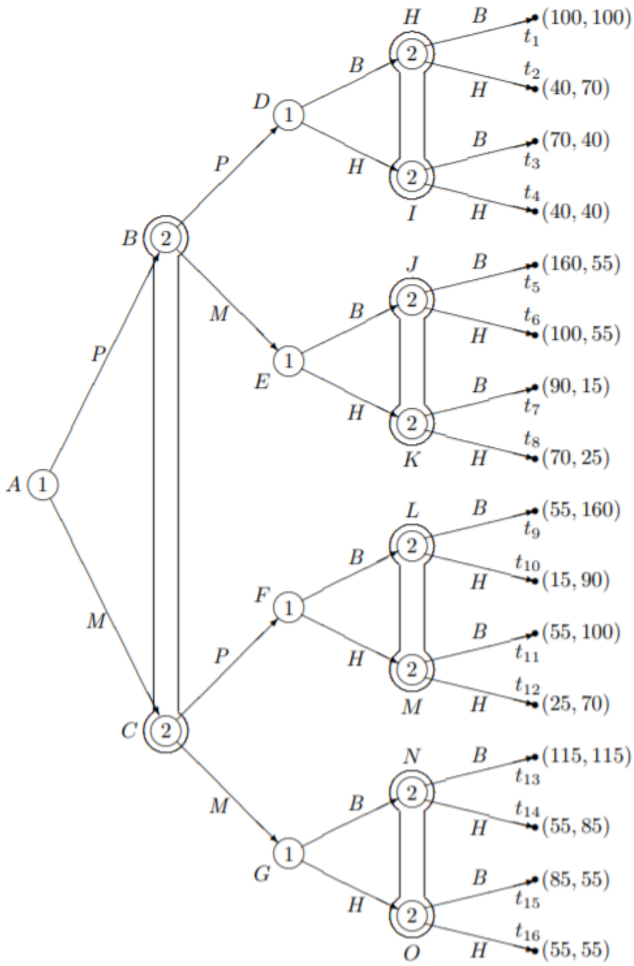
$$P^O = \left(p_{\text{СС}}^O = 0.0139, p_{\text{СП}}^O = 0.9861, p_{\text{ПС}}^O = 0, p_{\text{ПП}}^O = 0\right)^T$$

$$Q^O = \left(q_{\text{И}}^O = 0.667, q_{\text{П}}^O = 0.333\right)^T$$

В итоге получаем, что стратегия игрока 2: в позициях своего единственного информационного множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью 66.7% и пасует с вероятностью 33.3%.

Для игрока 1: в позиции B игрок поднимает ставку в позиции C поднимает ставку с вероятностью 1.39% и пасует с вероятностью 98.61%.

Задание №2. Закончить решение игры со слудующим деревом решений.



Решение:

По скольку каждый игрок имеет $2^5 = 32$ стратегии, то решать данную задачу аналитическим методом довольно проблематично, поэтому воспользуемся *обобщённым методом обратной индукции.*

Проанализируем 4 подигры в позициях D, E, F, G. Для этого решим следующие биматричные игры:

D	В	Н
В	100*;100*	40;70
Н	70;40	40*;40*

E	В	Н
В	160*;55*	100*;55*
Н	90;15	70;25

F	В	Н
В	55*;160*	15;90
Н	55*;100*	25;70

G	В	Н
В	115*;115*	55;85
Н	85;55	55*;55*

Как мы видим в каждой игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях,

но для всех четырёх подигр существует ситуации равновесия BB. Значит выбираем ситуацию BB в качестве решения каждой из четырех подигр. Это означает, что после выставки каждая из фирм всегда назначает высокую цену на свой продукт.
Построим усечённую подигру:

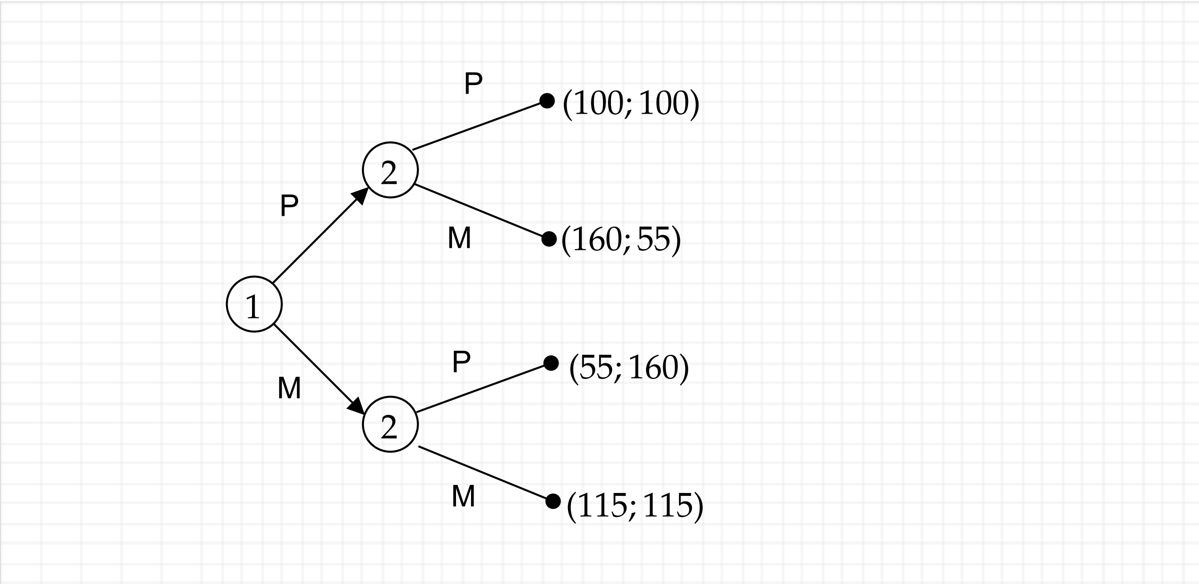


Рис. 1: Усечённая игра при ВВ

	P	M
P	100*;100*	160;55
M	55;160	115;115

Таким образом, мы нашли **первое** совершенное равновесие, в котором каждая из фирм разрабатывает новую приставку и назначает независимо от действий другого игрока высокую цену, то есть выберет BB. При этом каждая фирма заработают по 100 млн. долларов.
Для того, чтобы найти **второе** совершенное равновесие возьмем для D, G ситуацию BB, а для E, F соответсвенно $\text{ВН}, \text{НВ}$. Получим следующую усечённую игру:

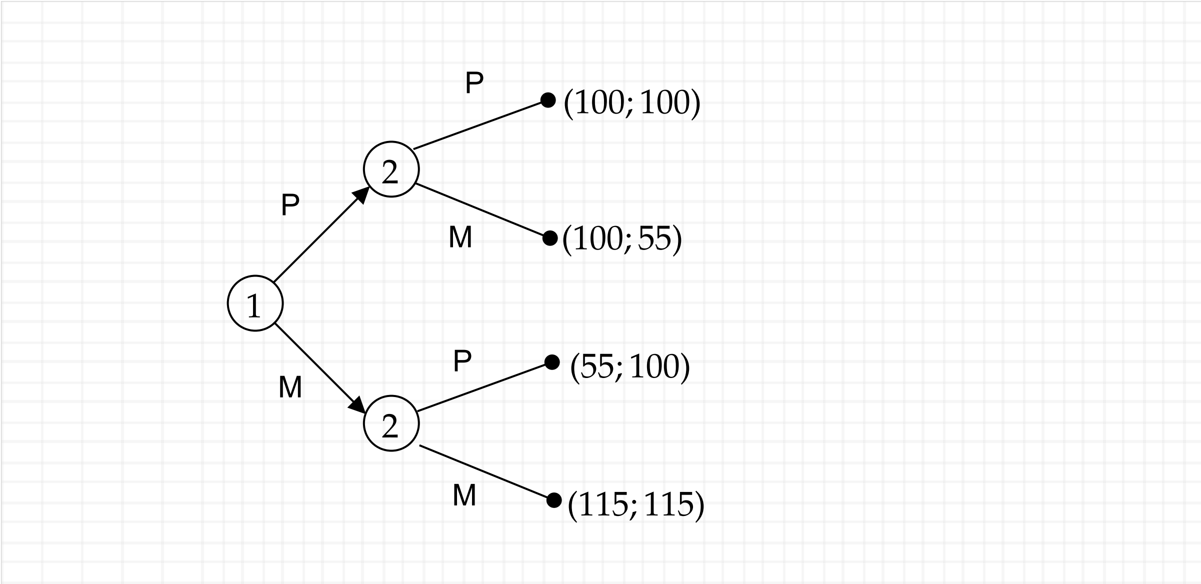


Рис. 2: Усечённая игра ВН/НВ в E,F

	P	M
P	100*;100*	100;55
M	55;100	115;115

Получим также 100 млн. долларов, то есть каждая фирма должна разработать новую приставку, а после назначить высокую цену, когда у конкурента такой же или менее совершенный продукт, и низкую цену, когда у конкурента более совершенный продукт. Хоть ответ получился такой же все-таки эти ситуации различны, так как они образуются из разных стратегий.

И **третье** совершенное равновесие является когда каждый игрок модернизирует свою приставку, а затем назначет высокую цену, когда у конкурента такой же или менее совершенный продукт, и низкую цену, когда у конкурента более совершенный продукт. По итогам игры каждый получит по 115 млн. долларов.