11. Косвенная функция полезности и тождество Роя (на примере неоклассической функции полезности).

Косвенная функция полезности потребителя экономисты называют **приведённую форму функцию полезности в модели Маршалла-Вальраса**:

$$u \ = u^*\left(\vec{x}^*\right) \ = \ u^*(\vec{p}, \ M) \qquad (1)$$

Значение косвенной функции полезности равно *уровню полезности*.

Пусть $u^*(M, p)$ — косвенная функция полезности, где p — вектор цен на блага, а M — доход потребителя

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \ -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \qquad (2)$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

Тождество Роя — в микроэкономике связь функции спроса (спрос по Маршалу-Вольрасу) и косвенной функции полезности.

Возьмем неоклассическую функцию полезности

$$u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$

Составим задачу на максимизацию полезности:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant M \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Составляем ф-ию Лагранжа, необходимые условия экстремума, решаем эту систему и получаем спрос по М-В:

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}$$

$$x_2^* = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2}$$

(Смотри пункт 9)

Подставляем эти иксы в неоклассическую функцию полезности и получаем косвенную функцию полезности.

$$u = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2}\right)^{a_2}$$

12. Модель Хикса поведения потребителя и её трансформация к приведённой форме методом Лагранжа (на примере неоклассической функции полезности). Свойство функции спроса по Хиксу.

Суть модели – потребитель потребитель выбирает такой набор благ, который имеет наименьшую стоимость и обеспечивает заданный уровень полезности u_0.

$$\begin{cases} M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ u(x_1, \ \dots, \ x_n) = u_0 \\ x_1 \ \geq 0, \ \dots, \ x_n \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

где экзогенные переменные:

$$\vec{p} = (p_1, \ \dots, \ p_n), \ u(x_1, \ \dots, \ x_n), \ u_0 \tag{4}$$

Эндогенные переменные:

$$\vec{x} = (x_1, \ \dots, \ x_n) \ - \text{ значение благ потребителя} \tag{5}$$

На примере неоклассической функции полезности структурная форма выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} M = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min \\ u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = u_0 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Составляем ф-ию Лагранжа $L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + l \cdot \left(u_0 - a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}\right)$, необходимые условия экстремума, решаем эту систему и получаем спрос по Хиксу: x_1 и x_2, а также l – дополнительная полезность по Хиксу, которая возникает на дополнительное изменение на единицу денежных средств.

$$x_1^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}}$$

$$x_2^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}}$$

Тогда приведённая форма:

$$\begin{cases} M = p_1 \cdot \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}} + p_2 \cdot \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}} \\ u(x_1, x_2) = a_0 \cdot \left(\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}\right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot \left(\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}\right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} = u_0 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Свойства функции спроса по Хиксу:

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^H(m \cdot \vec{p}, u_0); \\ m > 0 \end{cases}$$

Функция спрса по Хиксу является однородной функцией нулевой степени по ценам благ. Если цены всех раз изменить в m раз, то спрос не меняется и остаётся на уровне полезности u_0.

$$x_1^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{m \cdot p_2 a_2}{m \cdot p_1 a_1}\right)^{a_2}} = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}} \blacksquare$$

$$x_2^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{m \cdot p_1 a_1}{m \cdot p_2 a_2}\right)^{a_1}} = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}} \blacksquare$$

13. Функция расходов потребителя и её свойства.

Функция расходов потребителя показывает уровень расходов, минимально необходимый в имеющейся ценовой ситуации для достижения заданного уровня полезности, представляя собой тем самым функцию минимальных значений расходов от параметров p и u_0.

Приведённая форма целевой функции модели Хикса называется *функцией расходов потребителя* и её значение это *стоимость спроса по Хиксу:*

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = M^*(\vec{p}, u_0) \qquad (6)$$

Отметим свойства:

1. Если все цены изменяются одновременно в m раз, то значение функции расходов возрастает в m раз:

$$M^*(m \cdot \vec{p}, u_0) = m \cdot M^*(\vec{p}, u_0),\ m > 0$$

2. Функция возрастает по цене данного блага;
3. Функция расходов выпукла вверх, то есть предельная полезность блага (доп. полезность возникающая в ответ на доп единицу i-ого блага) убывает по мере увеличен:

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial p_i^2} < 0 \qquad (7)$$

4. Возрастает по каждому аргументу x_i.

14. Лемма Шепарда и тип благ в спросе по Хиксу (на примере неоклассической функции полезности).

$$\frac{\partial M}{\partial \vec{p}_j} = \vec{x}_j^D = \vec{x}_j^H - \text{Лемма Шепарда}$$

Даём классификацию блага в спросе потребителя называется ***ценным или благом высшей категории***, если спрос на это благо возрастает с ростом доходом потребителя:

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial M^*} \geq 0$$

Вот примеры таких благ: автомобили, жильё (квартиры).

Благо называется ***малоценным***, если справедливо следующее неравенство, если спрос на благо снижается по мере роста дохода потребителя (маргарин):

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial M^*} < 0$$

Благо называется ***нормальным***, если спрос на него снижается в ответ на рост цены (пиво):

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i} < 0$$

Экономисты считают, что практически все блага являются нормальными. В спросе по Хиксу и Маршалу-Вальрасу все блага нормальны.

Благо в спросе нызвается ***гиффиновым***, если в ответ на рост цены спрос на него повышается (валюта):

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i} \geq 0$$

15. Матрица Слуцкого и экономический смысл её элементов.

Теорема. Пусть теперь уровень дохода потребителя совпадает со стоимостью спроса по Хиксу. Тогда справедливы два тождества:

1) Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p}, u_0)$:

$$\vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right) \tag{11}$$

2)Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p})$:

$$u\left(\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right)\right) = u_0 \tag{12}$$

Следствие из теоремы (уравнение Слуцкого). Наша цель состоит в установлении взаимосвязи изменений спроса по Хиксу и Маршаллу-Вальрасу в ответ на изменение цен благ. Продифференцируем тождество (11) по ценам и в итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = S - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Подробная запись:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Символом S обозначена следующая матрица, которая называется матрицей Слуцкого и имеет смысл *предельного спроса Хикса по ценам*:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p} = \left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}} \right) \cdot \triangle \vec{p}$$

Уравнения Слуцкого $\left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \right)$ задают взаимосвязь предельного спроса по Маршаллу-Вальраса и Хикса и называются основными теориями полезности.

$\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p}$ – эффект замещения (характеризует влияние изменения цены на вызванное им перераспределение в структуре приобретаемых потребителем благ при условии неизменного бюджета покупок)

$\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p}$ – эффект дохода (характеризует изменение спроса на $i-$ ое благо в зависимости от изменения потребительского бюджета, вызванного изменением цены на k – ое благо)