Микроэкономика
Домашняя работа №7 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Проверить справедливость свойств производственной функции для (1), (2), (3).

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \quad (1)$$
$$a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1$$
$$y = a_1x_1 + a_2x_2 \quad (2)$$
$$a_1 > 0;\ a_2 > 0$$
$$y = a_0 \min(x_1,\ x_2) \quad (3)$$
$$a_0 > 0$$

Решение:

Вспомним *свойства* производственной функции:

1. При нулевых факторах производства, то и выпуск 0. $f(0, 0, \dots, 0) = 0$;
2. Производственная функция возрастает по каждому фактору производства $f \uparrow x_i$, т.е. $f \uparrow x_i \Leftrightarrow M_y(x_i)$. $M_y(x_i)$ – предельное значение выпуска по i-ому фактору, т.е. это дополнительный выпуск продукции в ответ на дополнительную еденицу i-ого фактора.
3. С ростом уровня $x_i \uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i) \downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Проверим эти свойства для **(1)** производственной функции:

☑ **Свойство 1.** Пусть $x_1,\ x_2 = 0$, тогда

$y = f(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = a_0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

☑ **Свойство 2.** Для того, чтобы проверить второе свойство найдём производные функции по x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2} > 0;\ \text{при } x_1 > 0,\ x_2 > 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} > 0; \text{при } x_1 > 0,\ x_2 > 0$$

Таким образом, производственная функция (1), действительно, возрастает по каждому фактору производства.

☑ **Свойство 3.** Для проверки третьего свойства необходимо найти вторую производную по каждому аргументу x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1^2} = a_0 \cdot a_1 \cdot \underbrace{(a_1 - 1)}_{<0} \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2} < 0;$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2^2} = a_0 \cdot a_2 \cdot \underbrace{(a_2 - 1)}_{<0} \cdot x_2^{a_2 - 1} \cdot x_1^{a_1} < 0;$$

Таким образом производственной функции возрастает и выпукла вверх.

Аналогично проверим и для второй функции:

☑ **Свойство 1.** Пусть $x_1,\ x_2\ = 0$, тогда
$y\ =\ f(x_1, x_2) = a_1x_1\ +\ a_2x_2 = a_1 \cdot 0\ +\ a_2 \cdot 0 = 0$
☑ **Свойство 2.** Для того, чтобы проверить второе свойство найдём производные функции по x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 > 0;\ \text{верно так как } a_1 > 0 \text{ по условию}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2 > 0;\ \text{верно так как } a_2 > 0 \text{ по условию}$$

☑ **Свойство 3.** Так как линейная функция является одновременно и выпуклой и вогнутой, то свойство 3 выполняется.
И наконец последняя производственная функция.
☑ **Свойство 1.** Пусть $x_1,\ x_2\ = 0$, тогда
$y\ =\ f(x_1, x_2) = a_0 \min(x_1,\ x_2) = a_0 \min(0,\ 0) = 0$
☑ **Свойство 2.** Очевидно фунция возрастает при росте x_1, если $x_1\ > x_2$, аналогично и для x_2
☑ **Свойство 3.** Так как линейная функция является одновременно и выпуклой и вогнутой, то свойство 3 выполняется.
Задача №2. Получить уравнение предельного продукта второго фактора и дать интерпритацию.

$$y\ = 0.45 \cdot x_1^{0.5}\left(\text{млрд. долл.}\right) \cdot x_2^{0.1}\left(\text{тыс. человек}\right) \qquad (*)$$

Решение:
Выльзуемся определением *предельного продукта фактора* x_i и вычислим его:

$$M_y(x_i) \approx \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.45 \cdot 0.1 \cdot x_2^{-0.9} x_1^{0.5} = 0.45 \cdot 0.1 \cdot 17^{-0.9} 6^{0.5} \approx 0.0086$$

Величина $M_y(x_2)\ = 0.0086$ – это значение дополнительного выпуска продукции в ответ на использование в процессе произвоства дополнительной еденицы живого труда.
Задача №3. Для функции Кобба-Дугласа вычислить значение предельного продукта *второго* фактора и посчитать его значение применительно уравнения (*).
Решение:
Средним продуктом фактора производства $A_y(x_i)$ экономисты называют дробь $\frac{y}{x_i}$.

$$A_y(x_i)\ = \frac{y}{x_i} \qquad (9)$$

Средний продукт фактора производства - это кол-во выпуска продукции, приходящаяся на одну единицу данного фактора.
Вычислим средний продукт второго фактора производства

$$A_y(x_2)\ = \frac{y}{x_2} = \frac{0.45 \cdot 6^{0.5} \cdot 17^{0.1}}{17}\ \approx 0.086$$

У данной фирмы на одну единицу совокупного капитала приходится в среднем 0.086 тысяч человек.

Задача №3. Определить эластичность выпуска по второму фактору.

Решение:

Эластичность выпуска по факторам производства расчитывается по правилу:

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i)$$

Воспользуемся ранее полученными результатами и получим:

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i) \ = 0.0086 \ : 0.086 \approx 0.1$$

Эластичность выпуска функции Коббла-Дугласа равна показателю степени a_2.

Задача №4. Получить уравнение изокванты и построить график этой изокванты для функции (*) принимая значение $y_0 = 2$.

Решение:

Выразим уравнение изокванты для функции потребления Коббла-Дугласса:

$$y_0 \ = \ a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \Rightarrow x_2^{a_2} = \frac{y_0}{a_0 \ \cdot x_1^{a_1}} = \sqrt[a_2]{\frac{y_0}{a_0 \ \cdot x_1^{a_1}}}$$

Для построения функции воспользуемся языком программирования Python 3:

```python
# библиотеки
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
sns.set(style="darkgrid")

# обозначим аргументы
a0 = 0.45
a1 = 0.5
a2 = 0.1
y0 = 2
# 200 значений x1 от 5 до 30 с равными интервалами
x1 = np.linspace(5, 30, 200)
# строим график
plt.plot(x1, (y0/(a0*x1**a1))**(1/a2))
plt.xlabel(r"$x_1$")
plt.ylabel(r"$x_2$")
plt.title('График изокванты')
plt.show()
```

В результате получим следующий график функции:

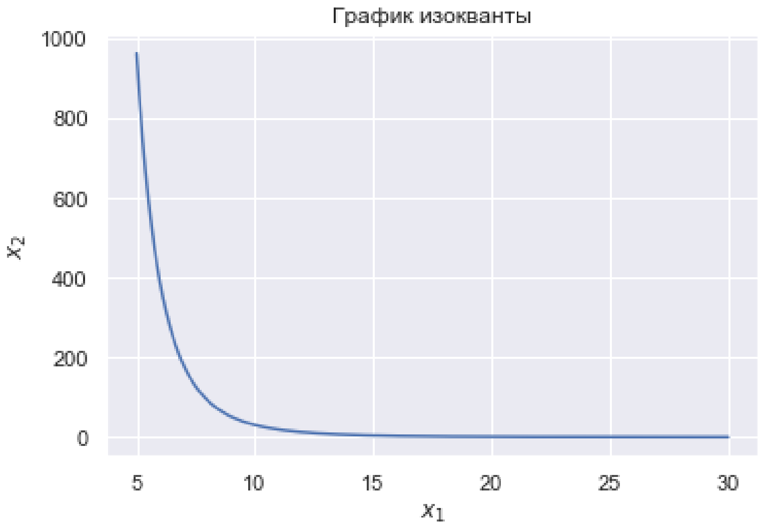
График изокванты
1000
800
600
400
200
0
x_2
5
10
15
20
25
30
x_1