Лекции №12
Характеристики качества спецификации эконометрических моделей
План

1. Оценивание эконометрической модели с автокоррелированным случайным возмущением нелинейным итерационным методом наименьших квадратов;
2. Коэффицент детерминации модели, как количественная характеристика качества выбора экономиста объясняющих переменных модели;
3. F – тест качества спецификации эконометрической модели.
4. Скорректированный коэффициент детерминации, как инструмент модификации модели ();

Инструмент отбора в модель объясняющих переменных

На прошой леции обсудили тест Дарбина-Уотсена. Статистика выглядит следующим образом:

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\widetilde{u}_{i+1} - u_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{u}_i\right)^2}$$

Авторегрессивная модедь первого порадка:

$$\begin{cases} y_t = a_0 + \vec{a}^T \cdot \vec{x}_t + u_t \\ E(u_t) = 0; E\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2 = \dfrac{\sigma_\xi^2}{1-\rho^2}; \\ u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \xi_t. \end{cases}$$

Трансформировали к модели неавтокоррелированным остатком:

$$\begin{cases} y_t - \rho \cdot y_{t-1} = a_0 \cdot (1-\rho) + \vec{a}^T \cdot (\vec{x}_t - \rho \cdot \vec{x}_{t-1}) + \xi_t \\ E(\xi) = 0,\ E\left(\xi^2\right) = \sigma_\xi^\alpha, Cov(\xi_t, \xi_{t-1}) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Обратимся к трансформированной модели (2.7)

Если бы параметр ρ в трансформированной модели был известен, то в моделе (2.7) были бы справедливы все предпосылки Гаусса-Маркова и можно было бы оценить параметры этой модели. В частности коэффициенты a_0, $\vec{a}^T$ методом наименьших квадратов (смотри теорему Гаусса-Маркова). Параметры (2.7) не относятся к линейным моделям так как $a_0 \cdot (1-\rho)$ противоречит линейности. А уравнения наблюдений в этой модели:

$$\begin{cases} y_2 - \rho \cdot y_1 = a_0 \cdot (1-\rho) + \vec{a}^T \cdot (\vec{x}_2 - \rho \cdot \vec{x}_1) + \xi_2 \\ y_3 - \rho \cdot y_2 = a_0 \cdot (1-\rho) + \vec{a}^T \cdot (\vec{x}_3 - \rho \cdot \vec{x}_2) + \xi_3 \\ \dots \\ y_n - \rho \cdot y_{n-1} = a_0 \cdot (1-\rho) + \vec{a}^T \cdot (\vec{x}_n - \rho \cdot \vec{x}_{n-1}) + \xi_n \end{cases} \tag{2.8}$$

не образуют схему Гаусса-Маркова. Процедура оценивания параметров можели (2.7) осуществляется нелинейным итерационным методом наименьших квадратов в результате следующих шагов:

Шаг 1. Задаётся множество пробных значений параметра $\rho = 0.1;\ 0.2;\ \dots 0.9$;

Шаг 2. Выбирается первое пробное значение и это пробное значение подстваляется в (2.8) в итоге эти уравнения превращаются в схему Гаусса-Маркова. По уравнениям (2.8) оцениваются параметры можели коэффициенты модели $a_1,\ \dots, a_k$ и вычисляется сумма квадратов остатков:

$$ESS = \sum_{i=2}^{n} \tilde{\xi}_i^2 \left(p(= \text{допустим } 0.1)\right) \to \min \tag{2.9}$$

Шаг 3. Повторяется при других значениях ρ и выбирается такое значение ρ при котором оказывается справедливым условие (2.9) (условие наименьших квадратов). Именно при этом ρ получаются условия оценки коэффициентов модели. Кроме того по оценки дисперсии белого шума рассчитавается оценка дисперсии случайного возмущения исходной модели $\sigma_u^2 = \dfrac{\sigma_\xi^2}{1-\rho^2}$.

Вывод: в основании процедуры оценивания модели с автокоррелированным случайным возмущением лежит фундаметальная модель автокорреляции:

$$\begin{cases} u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \xi_t, \\ Var(u_t) \equiv \sigma_u^2, \\ |\rho| < 1, \\ Var(\xi_t) \equiv \sigma_\xi^2 \end{cases}$$

и оценивание осуществляется нелинейным методом наименьших квадратов.

На двух предыдущих лекциях мы обсудили процедуры оценивания параметров базовой модели эконометрики (2.7) в ситуации, когда оказываются нарушенными предпосылки №2 и №3 теоремы Гаусса-Маркова. Если оказываются одновременно нарушенными обе эти предпосылки, то наилучшие оценки параметров модели вычисляются обобщённым методом наименьших квадратов, который мы обсудили на лекции №8.

Качество спецификации эконометрической модели

Оценивание эконометрической модели осуществляется на 3-ем этапе схемы её построения. На этом же этапе появляется возможность исследовать качество выбора объясняющих переменных модели. Простешей характеристикой качества служит коэффициент детерминации моеди, который по традиции обозначается символом R^2. Отметим смысл R^2 – это доля эндогенной переменной модели (точнее доля её дисперсии), которая (доля) объясняется предопределёнными переменными модели.

Выдем формулу для величины R^2 приминительно модели с одной объясняющей переменной.

Шаг 1. По уравнениям наблюдений рассчитываем оценки случайных возмущений

$$\tilde{u}_i = y_i - \left(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cdot x_i\right) = y_i - \tilde{y}_i$$

Перепишем следующим образом уравнения наблюдений

$$\begin{cases} y_1 = \widetilde{y}_1 + \widetilde{u}_1 \\ y_2 = \widetilde{y}_2 + \widetilde{u}_2 \\ \ldots \\ y_n = \widetilde{y}_n + \widetilde{u}_n \end{cases} \tag{4.14}$$

В уравнении (4.14) первое слагаемое в правой части объясняются перменной x, а вторые слагаемые необъясняются x-ами. Справедливо, следующая теорема:

$$\sum (y_i - \overline{y})^2 = \sum \left(\widetilde{y}_i - \overline{\widetilde{y}}\right)^2 + \sum \widetilde{u}_i^2 \tag{4.15}$$

В левой части тождества размещается характеристика изменчивости эндогенной переменной - *волатильность.* Первое слагаемое в правой части обозначим его символом RSS объясняется изменчивостью предопределённых значений и полность объясняется x. А второе слагаемое пораждено неучтёнными факторами $ESS = \sum \widetilde{u}_i^2$, левую часть $TSS = \sum \left(\widetilde{y}_i - \overline{\widetilde{y}}\right)^2$. И разделим обе часть тождества (4.15) на велечину TSS в итоге придём у формуле (4.16).

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} \tag{4.16}$$

Рассматривая (4.16) мы констатируем, что R^2 – это доля эндогенной переменной модели, которая объясняется предопределёнными перменными R^2.

F – тест качества спецификации эконометрической модели

F – тест является формализированной процедурой проверки гипотезы о неудовлетворительной спецификации эконометрической модели:

$$H_0 : a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

То есть гипотеза о том, что ни одна объясняющая переменная не несёт в себе информацию об эндогенной переменной y. Альтернативой для H_0 служит гипотеза:

$$H_1 = \overline{H}_0$$

Означающая, что хотя бы один из коэффициентов отличны от нуля.

Порядок F – теста

Шаг 1. Создаваемая модель оценивается методом наименьших квадратов и рассчитывается статистика F критерия гипотезы H_0:

$$F = \frac{R^2 / k}{\left(1 - R^2\right) / (n - (k+1))}$$

Если эта гипотеза верна, то случайная переменная F имеет закон распределения Фишера с кол-ами степеней свободы $k,\ n - k + 1$. Если велина F превосходит квантиль распределения Фишера уровня $1 - \alpha$, где $\alpha = 0.01\ - 0.05$, то гипотеза H_0 отвергается. Эта квантиль обозначена $F_{\text{крит}}$.

Вывод: F – тест позволяет объективно объяснить качество перменных модели.