Контрольная работа (Аверьянов Тимофей ПМ3-1)
Вариант №1

Задача № 1. Дать определение модели (B, S) – рынка. Получить выражение для цены рискового актива S_l (через l период $\triangle t$) в биномиальной модели (B, S) – рынка. Написать выражение для вероятности того, что цена рискового актива $S_{l,k}$ через l периодов $\triangle t$ будет иметь k "скачков" вверх.

Решение:

Понятие (B, S)-рынка

(B, S)-рынок – это упрощенная модель реального рынка, состоящего из безрисковых (B) и рисковых (S) активов.

Пусть период жизни опциона $(0, T)$. Разделим этот период на N относительно малых периодов длины $\triangle t = \dfrac{T}{N}$. Обозначим цену акции (базовый актив опциона) момента $t = l \cdot \triangle t$ через:

$$S_l = S(\triangle t \cdot l), \quad 0 \leqslant l \leqslant N$$

В модели (B, S)-рынока соотношения, описывающие изменения стоимости безрискового (B_l) и рисковоного (S_l) активов при переходе от момента $t_{l-1} = (l-1) \cdot \triangle t$ к моменту $t_l = l \cdot \triangle t$ имеют вид:

$$\begin{matrix} B_l = B_{l-1} e^{r_l} \\ S_l = S_{l-1} e^{p_l} \end{matrix}, \ 1 \leqslant l \leqslant n \tag{1}$$

, где r_l и p_l – ставка непрерывного начисления процентов l-ого периода.

Таким образом, в модели (B, S)-рынка изменение стоимостей безрискового и рискового активов определяются одинаковыми формулами, но ставка для безрискового актива является известной (заданной) величиной, а ставка для рискового актива является случайной величиной.

Окончательно, финансовый рынок, определяемый равенствами (1) называется (B, S)-рынком.

Биномиальная модель стоимости рискового актива

Биномиальная модель используется для описания изменения цены базового актива опциона, т.е. акции, которая является вторым элементом (B, S)-рынка.

Будем интересоваться стоимостью опциона в момент времени t периода его действия $(0,\ T)$. Соответсвенно, нас будет интересовать цены акции в интервале $(t,\ T)$ длительность $\tau = T - t$, то есть в модели (B, S)-рынка – в момент времени $t + l \cdot \triangle t,\ l = 0, 1, 2,\ \dots, n$. Далее, в формулах (1):

$$\begin{matrix} B_l = B(t + l \cdot \triangle t) \\ S_l = S(t + l \cdot \triangle t) \end{matrix}, \ \tau = n \cdot \triangle t, \ t = (N - n) \cdot \triangle t$$

В биноминальной модели случайные величины $p_l, \ 1 \leqslant l \leqslant n$, в формулах (1) независимы и принимают только два значения d и u $(d < u)$ (рис. 1). Соответсвенно, их вероятности равны:

$$P(p_l = u) = p, \quad P(p_l = d) = q, \quad p + q = 1 \ (q = 1 - p) \tag{2}$$

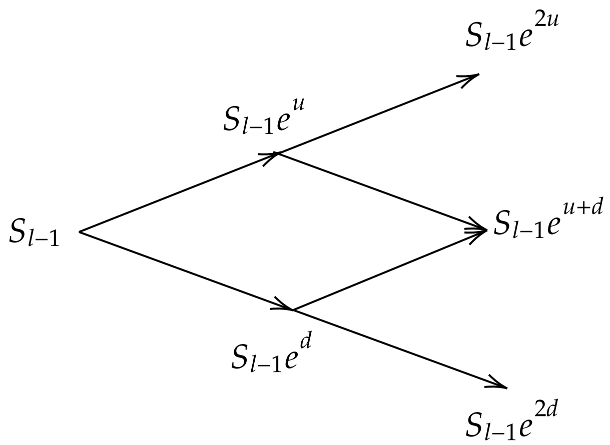

Рис. 1: Биномиальная модель для цены акции (два периода $\triangle t$).

Далее вводят независимые случайные величины ξ_l, которые могут принимать только два значения 0 и 1 (используется в схеме Бернулли) и для которых $P(\xi_l = 1) = p$ и $P(\xi_l = 0) = q$, выразим p_l через ξ_l:

$$p_l = d + (u - d) \cdot \xi_l \tag{3}$$

Тогда биномиальная модель и формулы (1) с учётом (3) дают следующие выражения для цены S_l:

$$S_l = S_0 \cdot e^{\sum_{m=1}^{l} p_m} = S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot \sum_{m=1}^{l} \xi_m} = S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot \eta_l} \tag{4}$$

, где $\eta_l = \sum_{m=1}^{l} \xi_m$ и, соответсвенно, η_l – целое число (т.к ξ_m принимает значения 0 или 1), причём $0 \leqslant \eta_l \leqslant l$.

Из теоремы Бернулли (для схемы Бернулли) **вероятность того, что** $\eta_l = k$ **определяется выражением:**

$$P(\eta_l = k) = C_l^k p^k q^{l-k}, \ 0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n \tag{5}$$

, где $C_l^k = \dfrac{l!}{k!(l-k)!}$.

Таким образом, в биномиальной модели начальная цена S_0 будет меняться по одной из 2^l траекторий за l периодов $\triangle t$ (смотри Рис. 1), причём число C_l^k из них будут заканчиваться значением цены:

$$S_{l,k} = S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot k} \tag{6}$$

и каждая из этих траекторий реализуется с вероятностью $p^k q^{l-k}$.

Задача №2. Покажите, что стоимость F_t финансового инструмента (опциона) с выплатой $f(S_n)$ в момент исполнения $T(=n)$ в биномиальной модели определяется выражением:

$$F_t = e^{-r \cdot n} \cdot \sum_{k=0}^{n} f\left(S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot k}\right) C_n^k p^k q^{n-k} \tag{7}$$

, где r – ставка-доходность безрискового актива (периода $\triangle t$); p – вероятность "скачка" цены рискового актива вверх u, q – вероятность "скачка" цены рискового актива вниз в биномиалной модели (B, S)-рынка.

Решение:

Действительно, в биномиальной модели вероятность того, что стоимость базового актива через n периодов будет равна $S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot k}$, определяется выражением (5) при $l = m$.

Тогда математическое ожидание:

$$E[f(S_n)] = \sum_{k=0}^{n} f\left(S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot k}\right) \cdot P(\eta_l = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot k}\right) C_n^k p^k q^{n-k}$$

Соответсвенно, в силу формулы:

$$F_t = e^{-v(T-t)} E[f(S_T, T)]$$

стоимость F_t финансового инструмента с выплатой $f(S_n)$ будет определяться формулой:

$$F_t = e^{-r \cdot n} \cdot \sum_{k=0}^{n} f\left(S_0 \cdot e^{l \cdot d + (u-d) \cdot k}\right) C_n^k p^k q^{n-k}$$

в которой p <u>определяется выражением</u>:

$$p = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

Таким образом, приходим к формуле (7). ■

Задача № 3. Напишите (с выводом) прямое уравнение Колмогорова. Сформулируйте дополнительное условие для этого уравнения (при $-\infty < x < +\infty$). Дайте определение δ-функции Дирака и опишите её свойства.

Решение:

Рассмотрим дискретную модель, случайных блужданий учитывая, что выполнены условия:

$$\triangle x = \sigma\sqrt{\triangle t},\ \tilde{p} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\mu\sqrt{\triangle t}}{\sigma}\right),\ \tilde{q} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\mu\sqrt{\triangle t}}{\sigma}\right) \qquad (8)$$

при которых случайное блуждание при $\triangle t \to 0$ сходится к арифметическому броуновскому движению со смещением μt (сносом μ) и среднеквадратичным отклонением $\sigma\sqrt{t}$ (волатильностью σ).

Пусть $p(x,\ t,\ t_0)\triangle x-$ вероятность достижения частицей уровня x в момент времени t при условии, что случайное блуждание стартует в момент времени $t = 0$ из точки x_0. Тогда, применяя формулу полной вероятности получим (рис.2)

$$p(x,t,x_0)\triangle x = \tilde{p}\cdot p(x-\triangle x, t-\triangle t, x_0)\triangle x + \tilde{q}\cdot p(x+\triangle x, t-\triangle t, x_0)\triangle x \qquad (9)$$

сократим на $\triangle x$ и для краткости опустим x_0:

$$p(x,t) = \tilde{p}\cdot p(x-\triangle x, t-\triangle t) + \tilde{q}\cdot p(x+\triangle x, t-\triangle t) \qquad (10)$$

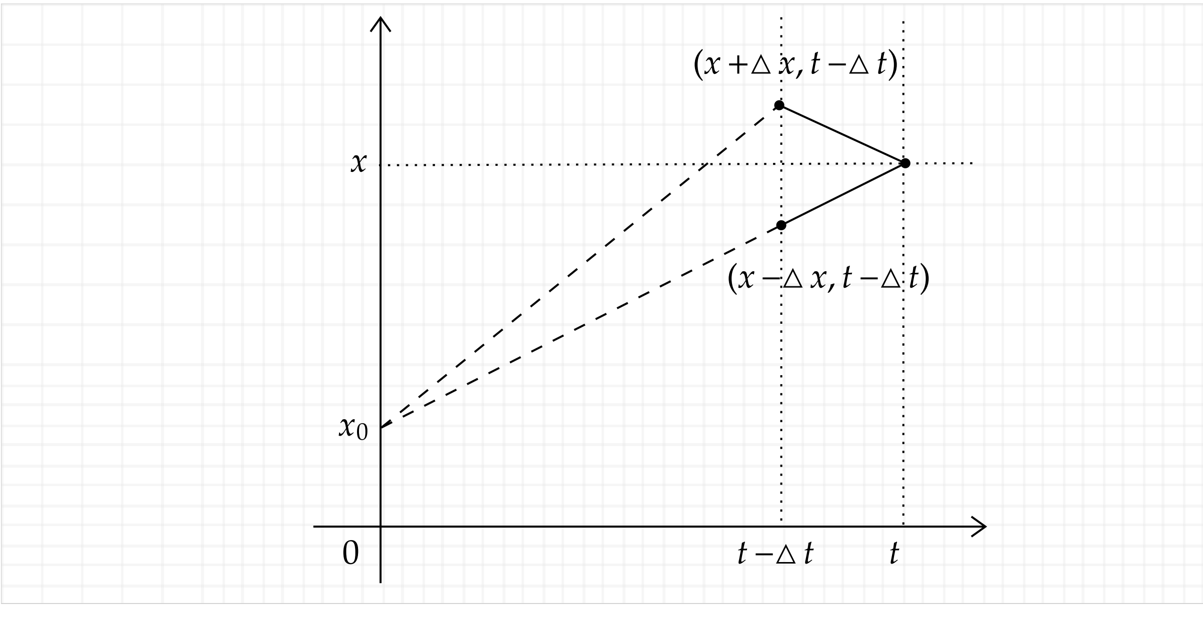

Рис. 2: Пояснение к формуле (9)

Далее, расcладывая функции $p(x\pm\triangle t, t-\triangle t)$ в ряд Тейлора в точке (x,t) с точностью до величин 1-ого порядка малости относительно $\triangle t$ и учитывая (8) получим:

$$p(x,t) = \tilde{p} \cdot \left\{ p(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \vartriangle x - \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \vartriangle t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)(\vartriangle x)^2 + o(\vartriangle t) \right\} +$$

$$+\tilde{q} \cdot \left\{ p(x,t) + \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \vartriangle x - \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \vartriangle t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)(\vartriangle x)^2 + o(\vartriangle t) \right\} =$$

$$= p(x,t) \cdot \left\{ \tilde{p} + \tilde{q} \right\} + \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \vartriangle x \cdot \left\{ \tilde{q} - \tilde{p} \right\} - \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \vartriangle t \cdot \left\{ \tilde{p} + \tilde{q} \right\} +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)(\vartriangle x)^2 \cdot \left\{ \tilde{p} + \tilde{q} \right\} + o(\vartriangle t); \tag{11}$$

или

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \vartriangle t \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) \cdot \vartriangle t - \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \vartriangle t - \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \cdot \sigma \sqrt{\vartriangle t} \cdot \frac{\mu \sqrt{\vartriangle t}}{\sigma} + o(\vartriangle t) \tag{12}$$

Окончательно, сокращая $\vartriangle t$ и переходя к пределу при $\vartriangle t \to 0$ получим следующие **прямое уравнение Колмогорова**:

$$\frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t,x_0) - \frac{\partial p}{\partial t}(x,t,x_0) \vartriangle t - \mu \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x,t,x_0) = 0 \tag{13}$$

В более общем случае, когда $\mu = \mu(x,t)$ и $\sigma = \sigma(x,t)$ прямое уравнение Колмогорова имеет вид:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2(x,t) \cdot p(x,t,x_0)\right) - \frac{\partial p(x,t,x_0)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,t) \cdot p(x,t,x_0)) = 0 \tag{14}$$

В уравнениях (13) и (14) $p(x,t,x_0)$ представляет собой плотность распределения вероятностей случайной велечины – координаты частицы в момент времени t.

δ-функция Дирака

Для определения плотности распределения вероятностей из дифференциальных уравнений в частных производных (13) и (14) требуется задание начального условия, которое отражает тот факт, что частица находится в точке $x = x_0$ при $t = 0$. Такое начальное условие можно задать с помощью δ-функции Дирака:

$$p(x,0,x_0) = \delta(x - x_0) \tag{15}$$

где $\delta(x - x_0)$ – δ-функция Дирака с центром в точке $x = x_0$, которая определяется условиями:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, \ x = x_0 \\ 0, \ x \neq x_0 \end{cases} \tag{16}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \tag{17}$$

δ-функции Дирака можно как предел функциональной последовательности $\{q(x, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$, в которой функции задают нормальное распределение со среднеквадратичным отклонением $\sigma\sqrt{t_n}$:

$$q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t_n}} e^{-\frac{(x - x_0 - \mu t_n)^2}{2\sigma^2 t_n}}, \text{ где } t_n \underset{n \to \infty}{\to} 0 \tag{18}$$

Таким образом с учётом (16) и (17) начальное условие (15) означает, что при $t = 0$ частица находится в точке $x = x_0$ с вероятностью $P = 1$ и в любой точке $x \neq x_0$ с вероятностью $P = 0$.