

Лекция №6

Тема. Остатки Солоу

План

- Золотой уровень накопления основного капитала в экономике с учётом динамики уровня живого труда и его эффективности;
- Измерение научно-технологического прогресса (остатки Солоу);

Вернёмся к уравнению запаса основного капитала:

$$K_{t+1} = K_t + I_{t+1} - D_{t+1} \quad (10)$$

D_{t+1} – кол-во основного капитала, которое выбывает из экономики за единицу времени (за год).

В уравнении (10) I_{t+1} инвестиции в основной капитал мы заменяем моделью инвестиций Солоу:

$$K_{t+1} = K_t + s \cdot F(K_t, E_t \cdot L_t) - \delta \cdot K_t \quad (11)$$

Модель динамики запаса основного капитала с постоянной эффективностью из уравнения (10) следует уравнение динамики капиталовооружённости труда с постоянной эффективностью:

$$k_{E,t+1} = k_{E,t} + s \cdot f(k_{E,t}) - (n + \delta + g) \cdot k_{E,t} \quad (12)$$

ДЗ Доказать из формулы (11).

Справедлива следующая теорема.

Теорема Солоу.

Пусть:

1. $y = f(k) \in C^2(0, +\infty)$ бесконечно дифф., вторая производная непрерывна;
2. $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = +\infty$;
3. $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0$;
4. $f''(k) < 0$;

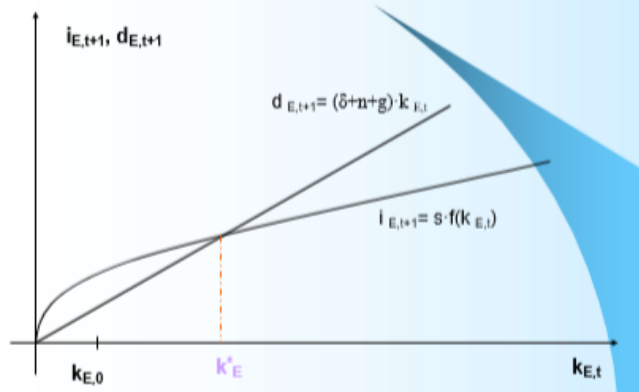
Тогда при $\forall (k_{E,0}, n, g) \in (0, +\infty)$ и $(s, \delta) \in [0, 1] \implies \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} k_{E,t+1} = k_E^*$ и это

является корнем уравнения:

$$s \cdot f(k_E^*) = (n + \delta + g) \cdot k_E^* \quad (13)$$

Чтобы понять экономический смысл посмотрим на график:

Геометрическая иллюстрация теоремы Солоу



Экономический смысл такой, что рано или поздно в каком бы то ни было первоначальном состоянии $k_{E,0}$ не находилась экономика придёт в k_E^* , а после того как она достигнет это значения перестанет изменяться. Если бы $k_{E,0}$ было правее чем k_E^* , тогда график восходящей прямой выбытия находится выше графика выпуклой выпуклой вверх кривой инвестиций труда. График будет снижаться до k_E^* .

Итог: таким образом, с ходом времени национальная экономика достигнет уровня k_E^* в рамках модели Солоу.

Из теоремы Солоу вытекают **следствия**:

- В устойчивом состоянии не будет также меняться доходь (производительность), то есть величина $i_{E,t+1}$.

$$y_E^* = \left(\frac{Y}{E \cdot L} \right)^* = f(k_E^*) = const \quad (14)$$

Нас будет интересовать доход на единицу живого труда, эту величину мы обозначим y_t^* . Величину y_t^* :

$$\begin{aligned} y_t^* &= E_t \cdot \left(\frac{Y}{E \cdot L} \right)^* = E_t \cdot y_E^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Delta y_{t+1}^*}{y_t^*} &= \frac{\Delta E_{t+1}}{E_t} = g \end{aligned} \quad (15)$$

- ВВП страны с ходом времени возрастает со скоростью $g + n$:

$$\begin{aligned} Y_t^* &= (E_t \cdot L_t) \cdot y_E^* \Rightarrow \\ \frac{\Delta Y_{t+1}^*}{Y_t^*} &= \frac{\Delta E_{t+1}^*}{E_t^*} + \frac{\Delta L_{t+1}^*}{L_t^*} = g + n \end{aligned} \quad (16)$$

Золотой уровень накопления основного капитала в экономике с учётом динамики уровня живого труда и его эффективности

Уровнем накопления капитала $K^* = k^* \cdot L$ в устойчивом состоянии экономики называется "золотым", если потребление c^* на единицу труда является

максимальным:

$$c^*(k^*) \rightarrow \max$$

Уровень k^* , максимизирующий $c^*(k^*)$, обозначают k^{**} . Выведем правило, которое позволяет определять состояние экономики на уровне k^{**} .

$$\begin{aligned} y_E^* &= c_E^* + i_E^* \implies \\ c_E^* &= f(k_E^*) - (\delta + n + g) \cdot k_E^* \end{aligned} \quad (18)$$

Так как в устойчивом состоянии объём инвестиций на единицу живого труда совпадает с выбытием основного капитала на единицу труда, то основное тождество можно переписать в виде (18). "Золотой" уровень накопления капитала в экономике:

$$c_E^* = f(k_E^*) - (\delta + n + g) \cdot k_E^* \rightarrow \max$$

А это значит, что величину k_E^* можно выбрать так, чтобы c_E^* было максимальным.

Запишем необходимое условие экстремума c_E^* :

$$\frac{\partial c_E^*}{\partial k_E^*} = \frac{df}{dk_E^*} - (\delta + n + g) = 0 \quad (20)$$

$$k_E^{**} = k_E^*(s, \delta, n, g) \quad (20')$$

$$\implies MPK = (\delta + n + g) \text{ (Задача №3 семинар)} \quad (20'')$$

k_E^{**} функция 4 экзогенных переменных (s, δ, n, g)

Измерение технологического прогресса

Предположим, что:

$$Y_t = F(K_t, E_t \cdot L_t) = (A \cdot E_t^{1-\alpha}) \cdot K_t^\alpha \cdot L_t^\alpha \quad (21)$$

Рассуждая в дифференциалах, перепишем равенство (21) в следующем виде:

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = \frac{\Delta A_{E,t+1}}{A_{E,t}} + \alpha \cdot \frac{\Delta K_t}{K_t} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\Delta L_t}{L_t}$$

Таким образом темп прироста ВВП разлагается на 3 слагаемых; второе слагаемое это вклад в ВВП изменения основного капитала; третье вклад в ВВП изменения живого труда; первое - это вклад в ВВП эффективности живого труда (научно-технологического) прогресса. Вспоминая модель динамики эффективности переписем последнее уравнение в виде выражения (22):

$$\frac{\Delta A_{E,t+1}}{A_{E,t}} = (1 - \alpha) \cdot g = \frac{\Delta Y_{t+1}}{Y_t} - \left(\alpha \cdot \frac{\Delta K_{t+1}}{K_t} + (1 - \alpha) \cdot \frac{\Delta L_{t+1}}{L_t} \right) \quad (22)$$

Левую часть экономисты и называют *остатками Солоу*. Вычислив среднее значение по остаткам Солоу и зная величину α можно оценить темп прироста g эффективности труда.

Задача 20. Используя собранные в следующей таблице статистические данные в виде уровней $\frac{\Delta Y_{t+1}}{Y_t}$, $\frac{\Delta K_{t+1}}{K_t}$, $\frac{\Delta L_{t+1}}{L_t}$ в экономике США, оцените среднее значение остатка Солоу для экономики США и вычислите оценку годового темпа прироста g эффективности E_t живого труда в этой стране. Учтите, что $\alpha = 0,56$.

Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
$\Delta Y/Y(\%)$	1,4	2,3	3,3	3,7	3,2	2,4	0,9	-1,3	0,0	2,1	1,9	2,0	2,2	2,7	2,3	2,0
$\Delta K/K(\%)$	2,6	2,4	2,5	2,7	2,7	2,5	2,1	1,3	0,9	1,0	1,1	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4
$\Delta L/L(\%)$	-0,1	-0,2	0,9	1,1	1,8	1,9	1,1	-0,6	-3,8	-0,4	0,6	1,8	1,0	1,7	1,7	1,7