6. Теорема Дебре о функции полезности. Свойства функции полезности: возрастание по каждому аргументу и закон Госсена (на примере логарифма Бернулли).

Теорема Дебре.

Занумеруем натуральными числами $1,\ 2,\ \cdots, n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*\right) \in R_n^+ = C \tag{1}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n^{(1)}\right) \in R_n^+ = C \\ \vec{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(2)}\right) \in R_n^+ = C \end{cases} \tag{2}$$

Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A = \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} = \vec{x}^{(1)}$ хуже $\vec{x}^{(2)}$

$$wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \begin{cases} A = \left(\vec{x}^{(1)} \text{ не хуже чем } \vec{x}^{(2)}\right) \\ \overline{A} = \left(\vec{x}^{(1)} \text{хуже } \vec{x}^{(2)}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u(\vec{x})$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вврех, такая, что

$$\text{если } wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \text{ то}$$
$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$ предпочтительнее $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Свойства функции полезности:

1.Функция полезности является возрастающей функцией по каждому аргументу, дополнительное количество любого блага увеличивает значение функции полезности

$$u \uparrow x_i \tag{2}$$

2. Предельная полезность блага убывает по мере увеличения количесва этого блага при фиксированных значения остальных благ в наборе.

Закон Госсена. Выпуклость вверх означает, что каждая следующая еденица блага приносит дополнительную полезность меньшую чем предыдущая дополнительная еденица. Это означает убывание предельной полезности любого блага при фиксированных значениях остальных благ.

Определение предельной полезности блага:

$$\triangle u = M_u(x_i) = u(x_1,\ \cdots,\ x_i + 1,\ \cdots,\ x_n) - u\left(x_1,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_n\right) > 0 \tag{4}$$

Согласно теореме Дебре, предельная полезность всегда положительна. Добавим, что с позиции математики предельная полезность - это приращение функции полезности в ответ на прирощении аргумента x_i. И поэтому предельную полезность удобно вычислить по правилу:

$$M_u(x_i) \ = \ \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

На примере логарифма Бернулли:

$$u(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 \ , \ a_1 > 0, \ a_2 > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{a_i}{x_i} > 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = -\dfrac{a_i}{x_i^2} < 0; \end{cases} \blacksquare$$

Следовательно, логарифм Бернулли удовлетворяет свойствам функции полезности.

7. Теорема Дебре о функции полезности. Свойства функции полезности: выпуклость вверх (на примере неоклассической функции полезности).

Занумеруем натуральными числами $1, \ 2, \ \cdots, n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} \ = \ \left(x_1^*, \ x_2^*, \ \cdots \ , \ x_n^*\right) \ \in R_n^+ \ = C \tag{5}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} \ = \ \left(x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ \cdots \ , \ x_n^{(1)}\right) \ \in R_n^+ \ = C \\ \vec{x}^{(2)} \ = \ \left(x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)}, \ \cdots \ , \ x_n^{(2)}\right) \ \in R_n^+ \ = C \end{cases} \tag{6}$$

Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A \ = \ \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} \ = \ \vec{x}^{(1)}$хуже $\vec{x}^{(2)}$

Теорема Дебре. Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u(\vec{x})$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вврех, такая, что

$$\text{если } wpr \ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) \ = A, \ \text{то}$$
$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$предпочтительнее $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Определение предельной полезности блага:

$$\triangle u \ = \ M_u(x_i) \ = \ u(x_1, \ \cdots \ , \ x_i \ + \ 1, \ \cdots \ , \ x_n) \ - \ u\left(x_1, \ \cdots \ , \ x_i, \ \cdots \ , \ x_n\right) \ > 0$$

Согласно теоремы Дебре предельная полезность всегда положительна. Добавим, что с позиции математики предельная полезность - это приращение функции полезности в ответ на прирощении аргумента x_i. И поэтому предельную полезность удобно вычислить по правилу:

$$M_u(x_i) = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Закон Госсена

Вернёмся к теореме Дебре; выпуклость вверх функции полезности обозначает отрицательный знак второй производной по каждому аргументу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} < 0 \tag{7}$$

Пример неоклассической функции полезности:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \\ 0 < a_1 < 1;\ 0 < a_2 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = a_0 \cdot a_i \cdot x_i^{a_i - 1} > 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = a_0 \cdot a_i \cdot (a_i - 1) \cdot x_i^{a_i - 2} < 0; \end{cases} \blacksquare$$

Следовательно, неоклассическая функция удовлетворяет свойствам функции полезности. И закону Госсена

8. Теорема Дебре о функции полезности. Свойства функции полезности: кривые безразличия и предельные нормы замещения благ (на примере неоклассической функции полезности).

Занумеруем натуральными числами $1,\ 2,\ \cdots, n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*\right) \in R_n^+ = C \tag{8}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n^{(1)}\right) \in R_n^+ = C \\ \vec{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(2)}\right) \in R_n^+ = C \end{cases} \tag{9}$$

Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A = \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} = \vec{x}^{(1)}$ хуже $\vec{x}^{(2)}$

Теорема Дебре. Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u(\vec{x})$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вверх, такая, что

$$\text{если } wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \text{ то}$$
$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$ предпочтительнее $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Говорят, что два набора благ *безразличны* потребителю, если они для него одинаково полезны, т.е.

$$\begin{cases} wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \\ wpr\left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(1)}\right) = A \end{cases} \Rightarrow \vec{x}^{(1)} \sim \vec{x}^{(2)} \quad (10)$$

$$u(\vec{x'}) = u(\vec{x''}) \Leftrightarrow \vec{x'} \sim \vec{x''} \quad (8)$$

Обозначим символом:

$$I(\vec{x})' = \{ \vec{x} \mid \vec{x} \in C,\ u(\vec{x}) = u(\vec{x'}) = u_0\} \quad (9)$$

Множеством безразличия для набора $\vec{x'}$ принято называть наборы благ значение функции полезности у которых совпадают со значением функции полезности для набора $\vec{x'}$.

Рассматривая определение функции безразличия мы можем записать уравнение, которому удовлетворяет любой элемент из множества i.

$$u(x_1,\ x_2) = u_0 = u(\vec{x'}) \quad (10)$$

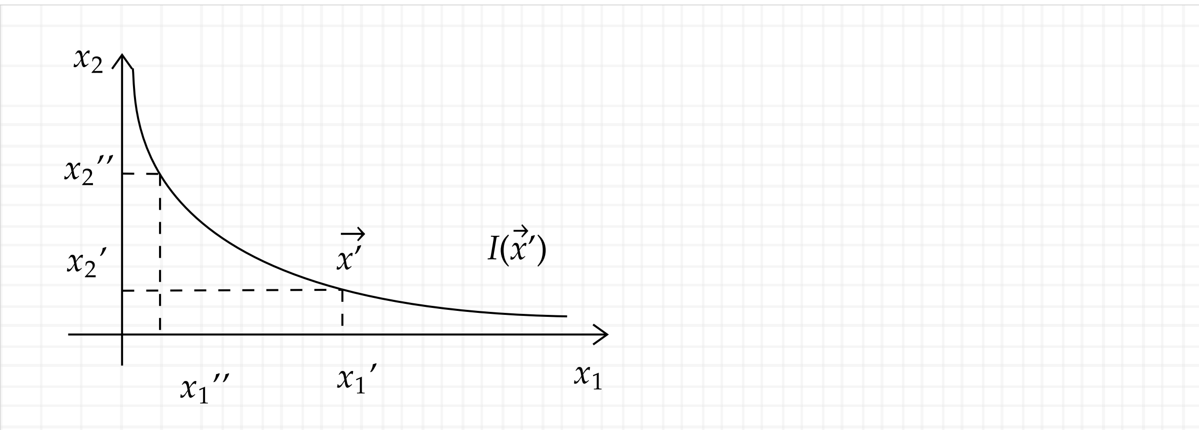
Рассматривая (10), что множество безразичия это ничто иное, как поверхность (линия) заданного уровня полезности (линия уровня). Если разрешить уравнение (10) относитель x_2, то сможем построить график линии уровня или гафик кривой безразличия.

$$x_2 = x_2(x_1\ ; u_0) \quad (11)$$

Пример кривой безразличия для неоклассической функции полезности

$$a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = u_0$$

$$x_2 = \sqrt[a2]{\frac{u_0}{a_0 \cdot x_1^{a_1}}}$$



Предельная норма замещение $MRS_{1,\,2}$ первого блага вторым. Это величина имеет смысл дополнительного количества второго блага, которое заменит потерю еденицы первого блага.

$$MRS_{1,2} = MRSx_2(x_1) = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} \qquad (13)$$

Выведем в общем случае для неоклассической функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1}$$

$$MRS_{1,2} = MRSx_2(x_1) = \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1}}{a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1}} = \frac{a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1}}{a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1}}$$

9. Модель Маршалла-Вальраса поведения потребителя и её трансформация к приведённой форме методом Лагранжа (на примере неоклассической функции полезности). Свойство функции спроса по Маршаллу-Вальрасу.

Экзогенные величины модели:

1. C – пространство благ и их цены $(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$;
2. $u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – функция полезности;
3. M – доход потребителя.

Эндогенные переменные модели: наилучший и доступный потребителю набор благ:

$$\left(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*\right).$$

Структурная форма модели (потребитель пытается найти такой набор благ, который наиболее полезен ему, но и по карману):

$$\begin{cases} u = u(x_1,\ \ldots,\ x_n) \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M \\ (x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0) \in C \end{cases} \qquad (11)$$

К приведённой форме модель (1) трансформируется методом Лагранжа:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = u(x_1,\ \ldots,\ x_n) + l\left(M - \sum_i p_i\, x_i\right)$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - l \cdot p = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = M - \sum_i p_i\, x_i = 0; \\ i = (1,\ \ldots,\ n) \end{cases} \qquad (12)$$

3. Эти условия представляют систему $n+1$ уравнений с $n+1$ переменной. Система (3) решается либо аналитически, либо численно.

Итогом решения является: $\vec{x}^{D} = \vec{x}^{*} = \vec{x}^{D}(M, p_1,\ \ldots,\ p_n)$ и множитель Лагранжа

$l \ = \ l\,(M, p_1, \ \ldots, \ p_n)\,.$

Набор эндогенных переменных расчитанных по Маршаллу-Вальрасу принято называть *спросом потребителя* по Маршаллу-Вальрасу.

Справедливо следующее равенство, расскрывающее **смысл множителя Лагранжа:**

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} \ = \ l^*; \tag{13}$$

В левой части этого равенства находится велечина называемая *предельной полезностью по доходу* и имеющая смысл: *дополнительной полезности потребителя в ответ на дополнительную единицу дохода.* Завершая обсуждение модели Маршалла-Вальраса отметим следующее равенство:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \ -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \tag{14}$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

Свойства функции спроса по Маршаллу-Вальрасу

Если все цены и доход изменяются в одно и тоже количество раз m, то спрос потребителя не меняется, т.е. функция спроса является однородной нулевой степени:

$$\begin{cases} \vec{x}^{*} = \vec{x}^{D}(m \ \cdot \vec{p}, m \ \cdot M) = \vec{x}^{D}(\vec{p}, \ M) \\ m \ > \ 0; \end{cases}$$

На примере неоклассической функции полезности:

Математическая запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} u \ = \underset{=1}{a_0} \cdot x_1^{a1} \ \cdot \ x_2^{a2} \ \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \ \le \ M \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы рассчитать спрос потребителя необходимо трансформировать модель к приведённой форме методом Лагранжа:

$$L \ = x_1^{a1} \ \cdot \ x_2^{a2} + l \cdot (M \ - p_1 x_1 \ - p_2 x_2)$$

Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a_1 x_1^{a1-1} x_2^{a2} \ - p_1 l \ = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a_2 x_2^{a2-1} x_1^{a1} \ - p_2 l \ = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = M \ - p_1 x_1 \ - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему методом подстановки:

$$l = \frac{a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}}{p_1}$$

Делаем подстановку во второе уравнение:

$$a_2 x_2^{a_2-1} x_1^{a_1} - p_2 \frac{a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}}{p_1} = 0$$

$$\frac{a_2 x_2^{a_2-1} x_1^{a_1} p_1}{a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} p_2} = 1 \Rightarrow \frac{a_2 x_1 p_1}{a_1 x_2 p_2} = 1 \Rightarrow x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2}$$

Подствалям в третье уравнение:

$$M - \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2} - p_2 x_2 = 0 \Rightarrow M - p_2 x_2 \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \right) = 0$$

$$\frac{M a_2}{a_1 + a_2} = p_2 x_2 \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2}}$$

Теперь вычислим x_1^* :

$$x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2} \Rightarrow x_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2 p_1} \Rightarrow x_1^* = \frac{a_1 \frac{M a_2}{(a_1 + a_2) p_2} p_2}{a_2 p_1} = \boxed{\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}}$$

Подставим значения x_1^*, x_2^* и получаем приведённую форму :

$$\begin{cases} u = \underbrace{a_0}_{=1} \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \right)^{a_2} \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{a_i M}{(a_1 + a_2) p_i} \le M \end{cases}$$

10. Косвенная функция полезности и смысл множителя Лагранжа (на примере неоклассической функции полезности).

Косвенная функция полезности потребителя экономисты называют **приведённую форму функцию полезности в моделе Маршалла-Вальраса**:

$$u = u^* \left(\vec{x}^* \right) = u^*(\vec{p}, M) \tag{15}$$

Значение косвенной функции полезности равно *уровню полезности*.

Справдливо следующее равенство, расскрывающее **смысл мнодителя Лагранжа:**

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = l^*; \tag{16}$$

В левой части этого равенства находится велечина называемая *предельной полезностью по доходу* и имеющая смысл: *дополнительной полезности потребителя в ответ на дополнительную единицу дохода.* Завершая обсуждение модели Маршалла-Вальраса отметим следующее равенство:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \; - x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \tag{17}$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

На примере неоклассической функции полезности:

Приведённая форма модели поведения потребителя Самуэльсона-Хикса:

$$\begin{cases} u = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\dfrac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\dfrac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \right)^{a_2} \to \max \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{a_i M}{(a_1 + a_2) p_i} \le M \end{cases}$$

Множитель Лагранжа имеет следующий вид:

$$l = \frac{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}}{p_1} = \frac{a_1 \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \right)^{a_1 - 1} \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \right)^{a_2}}{p_1} =$$

$$= \left(\frac{M}{(a_1 + a_2)} \right)^{a_1 + a_2 - 1} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2} \right)^{a_2}$$

$$u^* = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \right)^{a_2} =$$

$$= \left(\frac{M}{(a_1 + a_2)} \right)^{a_1 + a_2} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2} \right)^{a_2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = \left(\frac{M}{(a_1 + a_2)} \right)^{a_1 + a_2 - 1} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2} \right)^{a_2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = l^* \blacksquare$$