Семинар №1

Задача №1.

1. Изобразить множество допустимых портфелей Марковица в случае портфелей из двух активов;
2. Параметрическое уравнение образа прямой $x_1 + x_2 = 1$ (область допустимых портфелей Блэка)

Решение:

1) Множество допустимых портфелей модели Блэка является следующее множество:

$$F_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1\} \tag{1}$$

, т. е. F_1 представляет собой прямую $x_1 + x_2 = 1$ на плоскости (рис. 1, а)

Модель Марковица

Множество допустимых портфелей модели Марковица является следующее множество:

$$F_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1,\ x_i \geqslant 2,\ i = 1, 2\} \tag{2}$$

, т. е. F_2 представляет собой отрезок прямой $x_1 + x_2 = 1$ с внешними точками $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (рис. 1, b)

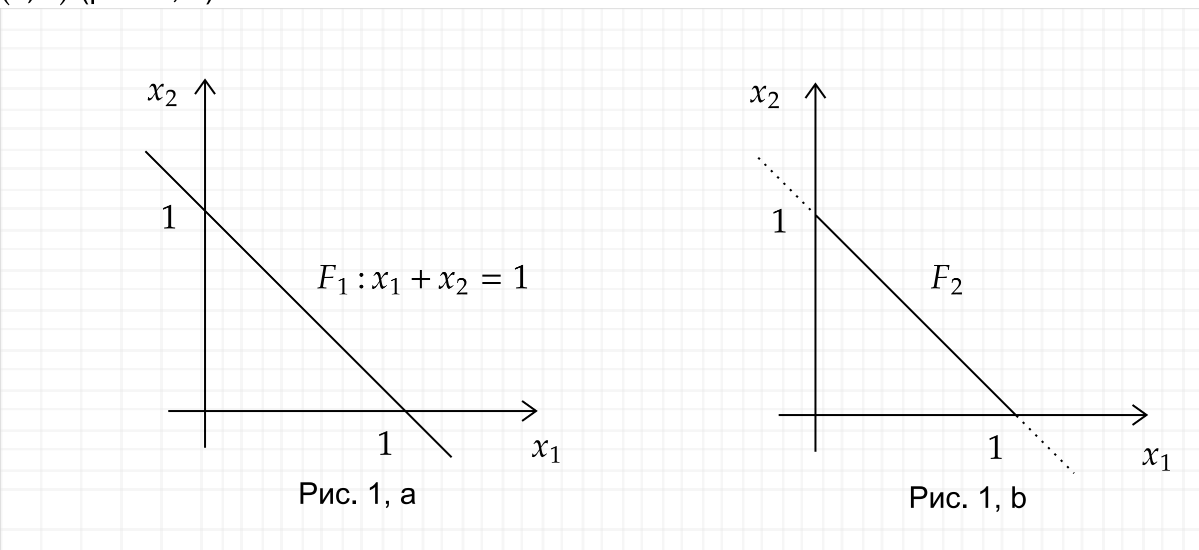

Рис. 1, а

Рис. 1, b

2) Характеристики портфеля:

1. Ожидаемая доходность портфеля:

$$\mu_x = m_1 x_1 + m_2 x_2 \tag{3}$$

$$\mu_x = (\overline{m}, \overline{x})$$

2. Риск $v_x(\delta_x)$ определяется выражением:

$$v_x = \sigma_x^2 = \vec{x}^T \underbrace{(\sigma_{ij})}_{\text{матрица ковариаций}} \vec{x} \tag{4}$$

В случае двух активов:

$$(\sigma_{ij})\vec{x} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} x_1 + \sigma_{12} x_2 \\ \sigma_{21} x_1 + \sigma_{22} x_2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}^T(\sigma_{ij})\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11}x_1 + \sigma_{12}x_2 \\ \sigma_{21}x_1 + \sigma_{22}x_2 \end{pmatrix} = x_1(\sigma_{11}x_1 + \sigma_{12}x_2) + x_2(\sigma_{21}x_1 + \sigma_{22}x_2) =$$
$$= \sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{21}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2 = [\text{т. к. } \sigma_{12} = \sigma_{21}] =$$
$$= \sigma_{11}x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2 = \boxed{\sigma_1^2x_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2 + \sigma_2^2x_2^2}$$

,где ρ – коэффициент корреляции между 1 и 2 активами.

$$\begin{cases} \mu_x = m_1x_1 + m_2x_2 \\ v_x = \sigma_1^2x_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2 + \sigma_2^2x_2^2 \end{cases}$$

Напишем параметрическое уравнение. Далее введём параметр $t = x_1$:

$$-\infty < t < +\infty \text{ (в моделе Блэка)}$$

Тогда:

$$x_2 = 1 - t;$$

Подставляем в уравнения:

$$\begin{cases} \mu = m_1t + m_2(1-t) = m_2 + (m_1 - m_2)t \\ v = \sigma_1^2t^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2t(1-t) + \sigma_2^2(1-t)^2 \end{cases}$$

это и есть ***параметрическое уравнение***.
Таким образом, параметрические уравнения образа допустимых портфелей модели Блэка имеют вид:

$$\begin{cases} \mu = m_2 + (m_1 - m_2)t \\ v = \sigma^2 = \sigma_1^2t^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2t(1-t) + \sigma_2^2(1-t)^2 \\ -\infty < t < +\infty \end{cases} \qquad (5)$$

Ожидаемая доходность:

$$r = \frac{r_1 - r_0}{r_0}$$

$$m = \frac{\sum r}{N}$$

Дисперсия:

$$\frac{\sum_i (r_i - m_i)^2}{N}$$

Задача №2.
Записать образ множества допустимых портфелей из двух активов модели Блэка ввиде одного неканонического неявного уравнения, используя параметрические уравнения этого образа. Т.е. предлагается получить зависимость μ от σ или наоборот.

$$f(x,y) = 0 \text{ (неявное задание функции)}$$

Решение:

Выразим t из первого уравнения формы (5):

$$t = \frac{\mu - m_2}{m_1 - m_2}$$

$$1 - t = 1 - \frac{\mu - m_2}{m_1 - m_2} = \frac{m_1 - \mu}{m_1 - m_2}$$

Тогда из второго уравнения (5) получим:

$$v = \sigma^2 = \sigma_1^2\left(\frac{\mu - m_2}{m_1 - m_2}\right)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\left(\frac{\mu - m_2}{m_1 - m_2}\right)\left(\frac{m_1 - \mu}{m_1 - m_2}\right) + \sigma_2^2\left(\frac{m_1 - \mu}{m_1 - m_2}\right)^2$$

Таким образом, получим искомое уравнение в виде:

$$\sigma^2(m_1 - m_2)^2 = \sigma_1^2(\mu - m_2)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(\mu - m_2)(m_1 - \mu) + \sigma_2^2(m_1 - \mu)^2 \qquad (6)$$

Уравнение (6) - это уравнение кривой 2-ого порядка на плоскости. И из этого следует вывод, что это уравнение определяет определённый вид кривых: парабола, гипербола, элипс.

Задача №3.

1. Сформулировать теорему об образе допустимых портфелей в модели Блэка в случае портфеля из 2 активов; (формулировка из лекции без доказательств)
2. Изобразить образы множества допустимых портфелей в моделе Блэка на критореальных плоскостях (σ, μ) и $\left(v = \sigma^2,\ \mu\right)$ в случае:

$m_1 = 0.05,\ m_2 = 0.08, \sigma_1 = 0.3;\ \sigma_2 = 0.6,\ \rho = 0;$

$d^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\ = 0.45;\ d = 0.67082;$

$\triangle\ = |m_1 - m_2| = 0.03$

$$a^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \rho^2\right)}{d^2} = 0.072;\ a = 0.268328$$

$$b^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \rho^2\right)\triangle^2}{d^4} = 0.000144;\ b = \ 0.012$$

$$c = \frac{m_2\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2(m_1 + m_2) + m_1\sigma_2^2}{d^2};\ c\ = 0.056$$

Решение:

На критериальной плоскости (σ, μ):

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{(\mu - c)^2}{b^2} = 1\ \left(\text{ур-ние образа гипербола}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ \left(\text{уравнение гиперболы}\right)$$

Вершина гиперболы в точке $A(a, c) \approx (0.27, 0.056)$

Асимптоты гиперболы: $\mu - c = \pm\frac{b}{a}\sigma.$

Для того, чтобы посчитать асимптоты мы должны приравнять правую часть к 0:

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{(\mu - c)^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{\sigma^2}{a^2} = \frac{(\mu - c)^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2}\sigma^2 = (\mu - c)^2$$

$$\mu - c = \pm\frac{b}{a}\sigma$$

Построим график:

$\frac{b}{a} \approx 0.045 \quad 0.045 \cdot 0.1 = 0.005$