

Семинар №9

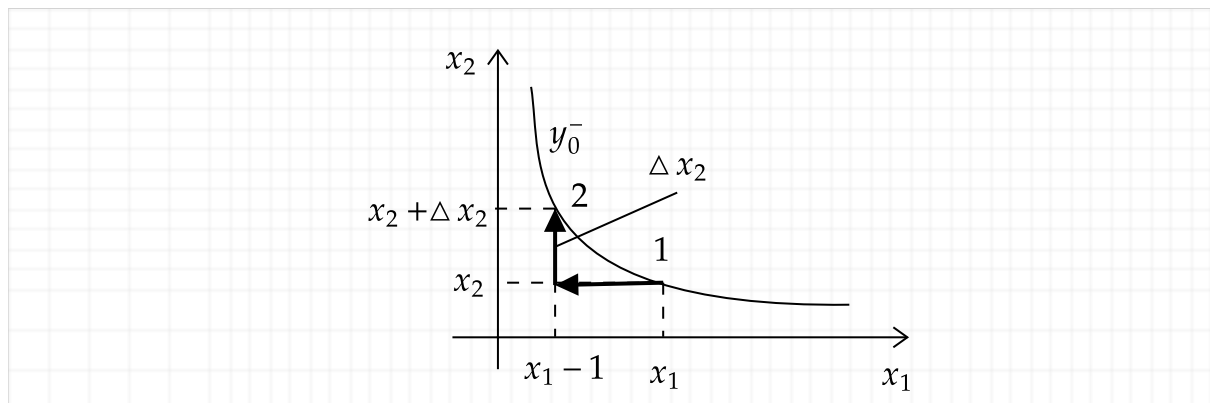
Предельные нормы и эластичность и замена факторов производства

План

1. Предельная норма технологического замещения факторов производства $MRTS_{ij}$
2. Эластичность замещения факторов производства σ_{ij}
3. ДЗ

Опр. Пусть $y = F(x_1, x_2)$ – производственная функция фирмы

$y_0^- = \{(x_1, x_2) | F(x_1, x_2) = y_0\}$ – (изокванта производственной функции)



Предельной нормой технологического замещения фактора x_1 фактором x_2 называется такая дополнительная величина Δx_2 , которая компенсирует выбытия из строя единицы фактора x_1 . Принято обозначать $MRTS_{1,2} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2}$.

Следствие. Пусть уравнение изокванты представлено в виде (4):

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \quad (4)$$

Тогда

$$MRTS_{1,2} = - \frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} \quad (5)$$

ДЗ Обосновать формулу (5) (факультативно\ не обязательно)

Задача. Пусть моделью производственной функции фирмы служит функция Кобба-Дугласа:

$$y = a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$$

Получить уравнение $MRTS_{1,2}$

Решение:

1. Записываем уравнение изокванты: $a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta = y_0$

2. Трансформируем к виду (4): $x_2 = \sqrt[\beta]{\frac{y_0}{a_0 \cdot x_1^\alpha}} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ (4')

3. Вычисляем по правилу (5) предельную норму замещения $MRTS_{1,2}$.

$$-\frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} = -\left(-\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}$$

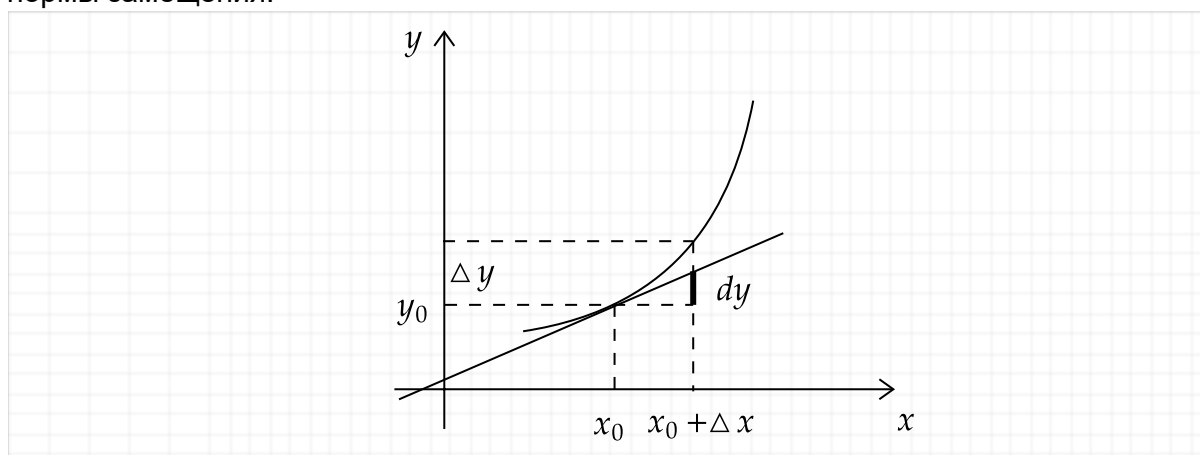
$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2(x_2 = x_2(x_1; y_0))}{x_1} \quad (6)$$

ДЗ Рассчитать значение предельной нормы замещения капитала трудом производственной функции одной из американских с производственной функцией Кобба-Дугласа с параметрами из задачи выше $x_1 = 6$ по формуле (6).

ДЗ Пользуясь формулой (6) показать, что изменения предельной нормы технологического замещения на изокванте вычисляется по правилу:

$$\Delta MRTS_{1,2} \approx d MRTS_{1,2} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha + \beta}{\beta}\right)} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} \quad (7)$$

, где $\frac{\Delta x_1}{x_1}$ – относительное изменение, которое парадит изменение предельной нормы замещения.



Итог. Предельная норма технологического замещения - это такое изменение фактора Δx_2 , которое компенсирует выбытие из строя единицы первого фактора (смотри рисунок 1)

Эластичность замещения факторов производства σ_{ij}

Эластичностью замещение i -ого фактора j -ым называется относительное изменение на изокванте отношения факторов производства в ответ на относительное изменение предельной нормы технологического замещения на 1%; Вот математическое выражение данного определения:

$$\sigma_{ij} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}} : \frac{d MRTS_{i,j}}{MRTS_{i,j}} \quad (8)$$

Задача. Вычислить эластичность замещения Кобба-Дугласа первого фактора вторым.

Решение:

1. Согласно формулы (8) мы сначала найдём числитель делимого, то есть абсолютное изменение отношения.

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \quad (9)$$

2. Находим дифференциал

$$\Delta \left(\frac{x_2}{x_1}\right) \approx d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \Delta x_1 \quad (10)$$

3.

$$\frac{\frac{\Delta \left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}}}{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}} = \frac{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \Delta x_1}{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} \quad (11)$$

ДЗ С учётом выражений (6) и (7) выразить делитель правой и вычислить эластичность $\sigma_{1,2}$ – ?

Итог: Эластичность замещения первого фактора вторым определяется по формуле (8) и имеет смысл относительного изменения на изокванте отношения второго фактора первому в ответ на относительно изменение на изокванте предельной нормы замещения на 1%.