Лекция №7

Доказательство теоремы Гаусса-Маркова
План

1. Необходимые сведенья из теории вероятности;
2. Доказательство теоремы Гаусса-Маркова;
3. Консольтуция;

В первом пункте мы вспомним те сведенья из теории вероятностей, которые необходимы в эконометрике и конкретно в доказательстве теоремы Гаусса-Маркова. Начнём с понятия случайной переменной. **Случайной переменной** u − называется переменная велечина, возможные значения которой $(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)$ появляются в результате некоторого эксперимента (опыта) с вероятностями этих значений $(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$; Вот полная запись определения случайной переменной, которая называется *законом распределения*:

$$u = \begin{Bmatrix} q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n \\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n \end{Bmatrix}.$$

Поясним примером понятие случайной переменной:
Опыт состоит в бросании монеты. Если монета выпала гербом, то мы будем считать, что наша переменная u приняла значение -14, а если выпадает решка, то мы предполагаем, что наша переменная приняла значение $+14$, мы можем записать в следующем виде:

$$u = \begin{cases} -n, & \text{если герб} \\ n, & \text{если решка} \end{cases}$$

Основные характеристики случайной переменной:
Первая характеристика - это *математическое ожидание*, так называют константу которая вычисляется по правилу:

$$m\ = E(u)\ =\ p_1 \cdot q_1\ + p_2\ \cdot q_2\ +\ \ldots p_n\ \cdot q_n;$$

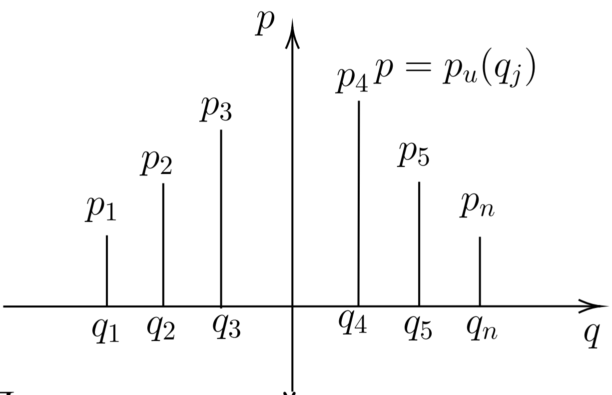
Вторая характеристика называется дисперсией Var и рассчитывается по правилу:

$$Var(u)\ =\ \ p_1 \cdot (q_1 - m)^2\ + p_2\ \cdot (q_2 - m)^2\ +\ \ldots p_n\ \cdot (q_n - m)^2$$

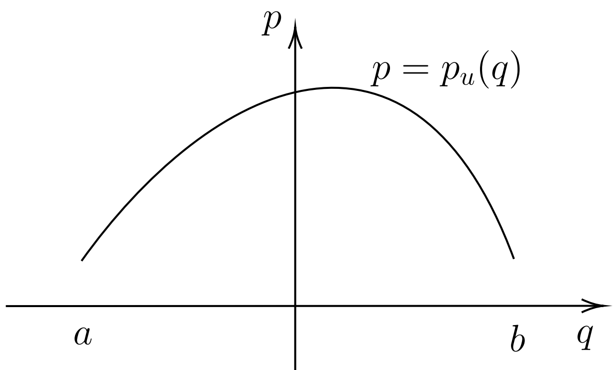
Дисперсия - это константа равная среднему квадрату разброса возможных значений случайной переменной относительно математического ожидания. Положительно квадратный корень из дисперсии называется средним квадратическим отклонением.

ДЗ Доказать, что в приведённом выше примере $\sigma = 14$. Доказать, что самый точный прогноз случайной переменной - это её математическон ожидание, то есть доказать:

$$\min_c E(u - c)^2 = E(u - E(u))^2 = \sigma_u^2$$



Дискретная случайная переменная



Непрерывная случайная переменная

Закон распределения случайной переменной называют *диффиренциальным законом или вероятностной функцией, а в ситуации непрерывной случайно велечины - плотностью вероятности.*

Замечание. Случайная велечина u *называется непрерывной, если множество её возможных значений есть некоторый интервал числовой прямой, а вероятность появления в опыте каждого конкретного значение равна 0.*

Законы распределения используемые в эконометрике.

Первый закон в эконометрике (самый важный) - это нормальный закон (Муавра-Гаусса). Имеет уравнение (2.9)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

Второй закон называется законом распределения Стьюдента или $t-$распределение. Символом m обозначено кол-во степеней свободы (при $m > 30$ почти сопадает с нормальным).

$$f_t(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Третий закон распределения Фишера. Это закон зависит от двух констант (m, n), которые называются степенями свободы.

$$P_F(x) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1\ x)^{d_1}\ d_2^{d_2}}{(d_1\ x + d_2)^{d_1 + d_2}}}}{x\ \mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}$$

Четвёртый закон распределения Хи-квадрат. В этом законе присутствует константа m, которая называется колическтвом степеней свободы.

$$P\chi^2(x) = \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$$

Отметим функции Excel, которые обозначают эти законы:

1. НОРМРАСП();
2. СТЬЮДРАСП();
3. FРАСП();
4. ХИ2РАСП();

Характеристики вероятности взаимосвязи двух случайных переменных

Пусть x и y пара случайных переменных (пример: опыт состоит в бросании игральной кости $x-$это очнки которые выпадают на нижних гранях, а $y-$на верхней). Характеристика взаимосвязи расчитывается по формуле и называется ковариацией:

$$Cov(x, y) = \sigma_{x,\ y} = E(x \cdot y)\ - E(x) \cdot E(y)$$

Если ковариация положительная, то с ростом x возрастает y и наоборот. Если x и y независимые, то ковариация равна 0.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Можно показать, что ковариация очков на нижней и верхней грани равна $-\dfrac{35}{12}$. Нормированная ковариация вычисляется по формуле и носит название коэффициента корреляции:

$$Cor(x,\ y)\ = \rho_{x,y}\ = \frac{\sigma_{x,\ y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Вернёмся к основным характеристикам случайного вектора рассмотреным на лекции (6). Пусть случайным вектором является вектор случайных возмущений в уравнениях наблюдения объекта в схеме Гаусса-Матрока (смотри семинар (6)). Рассмотрим фактаризацию его коварицонной матрицы:

$$Cov\left(\vec{x},\ \vec{x}\right)\ =\ \sigma_0^2\cdot\begin{pmatrix}\sigma_1^2/\sigma_0^2 & \sigma_{12}^2/\sigma_0^2 & \dots & \sigma_{1n}^2/\sigma_0^2\\ \sigma_{21}^2/\sigma_0^2 & \sigma_2^2/\sigma_0^2 & \dots & \sigma_{2n}^2/\sigma_0^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{1n}^2/\sigma_0^2 & \sigma_{2n}^2/\sigma_0^2 & \dots & \sigma_n^2/\sigma_0^2\end{pmatrix}=\sigma_0^2\cdot Q$$

Матрицу Q весовых коэффициентов мы обозначим P^{-1}.

Вывод: У случайной переменной есть две основные характеристки (две константы), взаимосвязь случайных переменных описывается их ковариацией и ковариации компонент случайного вектора заполняют его ковариационную матрицу.

Доказательство теоремы Гаусса-Маркова

Приступаем к доказательству утверждений теоремы Гаусса-Маркова. Мы расширим предпосылки с номерами 2 и 3 этой теоремы отказавшись от них и предполагая, что вектор случайных возмущений $\vec{u}$ имеет нулевое математическое ожидание и коварицонную матрицу $Cov\ \left(\vec{u},\vec{u}\right)=\sigma_0^2\cdot P^{-1}$.

Докажем утверждение А:

А. 1) Мы будем разыскивать оценку вектора $\vec{a}$ в классе всех линейных функций определённых на векторе значений эндогенной переменной $\vec{y}$, так что определению подлежит матрица M этого линейного преобразования мы собираемся разыскать M.

$$\widetilde{\vec{a}}=M\cdot\vec{y}$$

2) Поиск матрицы M удобно осуществить создавая оптимальную статистическую процедуру оцениевания значения y_0 произвольной линейной функцией вектора коэффициентов модели

$$y_0=\vec{x}_0^T\cdot\vec{a}$$

3) Процедуру оценивания числа y_0 мы будем отыскивать в классе линейных функций $\vec{y}$, где $\vec{m}-$это строка линейных коэффициентов.

$$\widetilde{y_0}\ =\overrightarrow{m_0}\ \cdot\vec{y}$$

И будем отыскивать опираясь на два требования оптимальности:

$$\begin{cases}E\left(\tilde{y}_0\right)=y_0=\vec{x}_0^T\cdot\vec{a}\\ Var\left(\tilde{y}_0\right)\ \to\min\end{cases}$$

Вычислим мат ожидание символа $\tilde{y}_0$. Первое требование оптимальности приводит к следующим уравению отностительно искомых коэффициентов $\vec{m}$:

$$E\left(\tilde{y}_0\right)=\vec{m}\cdot X\cdot\vec{a},\ \Rightarrow\vec{m}^T\ \cdot X\ =\ \overrightarrow{a}\ =\vec{x}_0^T\cdot\vec{a}$$

Теперь найдём дисперсию опираясь на следующее выражение:

$$Cov\ (\vec{u}, \vec{u}) = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}.$$

Значит дисперсия: $Var\,(\tilde{y}_0) = \sigma_0^2\ \cdot \vec{m}^T \cdot P^{-1}\ \cdot \vec{m}$

Следовательно искомые оценки коэффициентов нужно найти в процессе решения следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \vec{m}^T \cdot P^{-1}\ \cdot \vec{m}\ \rightarrow \min \\ X^T \cdot \vec{m}\ =\ \vec{x}_0 \end{cases}$$