Лекция №10

Модель гетероскедастичности случайного возмущения и оценивания эконометрических моделей с гетероскедастичными возмущениями взвешанным методом наименьших квадратов

План

1. Модель гетероскедастичности случайного возмущения;
2. Трансформация модели с гетескедастичным возмущением к модели с гомоскедастичным возмущением;
3. Оценивания эконометрических моделей с гетероскедастичными возмущениями взвешанным МНК;

На прошлой лекции мы обсудили тест Голдфилда-Кванта гомоскедастичности случайного возмущения модели. На практике предпосылка гомоскедастичности часто нарушается. В такой ситуации процедура МНК утрачивает свойство оптимальности (теряет свойство эффекстивности) и, самое главное, точностные характеристики оценок становятся некорректными. На сегодняшнем занятии мы обсудим оптимальную процедуру оценивания параметров модели с гетескедастичным возмущением.

Нам потребуетсся моделт гетерскедостичности случайного возмущения. Вот уравнение этой модели:

$$Var(u) = \sigma_u^2 = \sigma_0^2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} |x_j| \right)^{\lambda} \qquad (6.2.5)$$

В этом уравнении присутсвует два параметра: $\sigma_0^2 > 0$ (дисперсия единицы веса) и λ – некоторое априорно заданное число (подбирается эксперементально):

$$\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$$

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_u^2} = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{k} |x_j| \right)^{\lambda}} \text{ – вес случайного возмущения} \qquad (6.2.6)$$

Трансформация модели с гетескедастичным возмущением к модели с гомоскедастичным возмущением

Пусть в линейной модели множественной регрессии случайное возмущение гетероскедастично и известна модель веса этого возмущения.

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_u^2}$$

Умножим уравнение этой модели на квадратный из веса:

$$\begin{cases} \sqrt{p} \cdot y = \sqrt{p} \cdot a_0 + \sqrt{p} \cdot a_1 x_1 + \sqrt{p} \cdot a_2 x_2 + \ldots + \sqrt{p} \cdot a_k x_k + \sqrt{p} \cdot u \\ E\left(\sqrt{p} \cdot u\right) = 0; \;\; E\left(\left(\sqrt{p} \cdot u\right)^2\right) = \sigma_0^2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ДЗ (необязательное)}}$ Можно проверить, что $E\left(\sqrt{p}\cdot u\right) = 0$, а дисперсия в точности совпадает с константой σ_0^2.

Оценивание ЛММР с гетероскедастичным случайным возмущением взвешанным МНК

Пусть случайные возмущения в ЛММР гетескедастично, но при этом все остальные предпосылки теоремы Гаусса-Маркова.

$$\vec{y} = X\,(\text{ранг совпадает с кол} - \text{ом столбцов}) \cdot \vec{a} + \vec{u}$$

0. X- линейно независим.

1) $E(u_1) = E(u_2) = \ldots = E(u_n)$;
2) $Var\left(u_1^2\right) = Var\left(u_2^2\right) = \ldots = Var\left(u_n^2\right) = \sigma_n^2$;
3) $Cov(u_i, u_j) = 0,\ i \neq j$
4) $Cov(u_i, x_{lj}) = 0,$ при всех i, j, l

Пусть коварицонная матрица имеет следующий вид:

$$\Omega_{\vec{u}} = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_2}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{pmatrix}^2$$

Составим уравнения наблюдений в рамках трансформированной модели

$$\begin{cases} \sqrt{p}\cdot y = \sqrt{p}\cdot a_0 + \sqrt{p}\cdot a_1x_1 + \sqrt{p}\cdot a_2x_2 + \ldots + \sqrt{p}\cdot a_kx_k + \sqrt{p}\cdot u \\ E\left(\sqrt{p}\cdot u\right) = 0;\ \ E\left(\left(\sqrt{p}\cdot u\right)^2\right) = \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{p}\cdot u$$

$$\begin{cases} \sqrt{p}\cdot y = \sqrt{p}\cdot a_0 + \sqrt{p}\cdot a_1x_1 + \sqrt{p}\cdot a_2x_2 + \ldots + \sqrt{p}\cdot a_kx_k + v \\ E(v) = 0;\ \ E\left(v^2\right) = \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\boxed{P^{\frac{1}{2}}\cdot\vec{y}}}_{\vec{y}'} = \underbrace{\boxed{P^{\frac{1}{2}}\cdot X}}_{X'}\cdot\vec{a} + \vec{v} \qquad (6.4.5)$$

Символом $P^{\frac{1}{2}}$ обозначена следующая квадратная матрица:

$$P^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{pmatrix}$$

$\Omega_{\vec{v}} = \sigma_0^2 \cdot E$ – скалярная

$$\Omega_{\vec{u}} = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \qquad (6.4.6)$$

Получается, что уравнения наблюдений (6.4.5) удовлетворяют всем предпосылкам и это значенит, что по всем этим уравнеям мы можем оценить параметры с помощью МНК.

$\boxed{\text{ДЗ(необязательно)}}$ Проверить, что утверждение a), b), c), d) теоремы Гаусса-Маркова применительно к уравнениям наблюдения 6.4.5 превращаются в следующие утверждения:

$$a)\tilde{\vec{a}} = \left(X^T \cdot P \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot P \cdot \vec{y} = Q \cdot X^T \cdot P \cdot \vec{y} \qquad (6.4.7)$$

$$b)\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^2}{n-(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \tilde{u}_i^2}{n-(k+1)} \qquad (6.4.8)$$

$$\tilde{u}_i = y_i - \left(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cdot x_{1,i} + \ldots + \tilde{a}_k \cdot x_{k,i}\right) \qquad (6.4.9)$$

$$\tilde{v}_i = \sqrt{p_i} \cdot \tilde{u}_i \qquad (6.4.10)$$

$$c)\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \tilde{u}_i^2 \rightarrow \min \qquad (6.4.11)$$

$$d) \begin{cases} S\tilde{a}_j = \tilde{\sigma}_0 \cdot \sqrt{q_{j+1\, j+1}} \\ j\ = 0, 1,\ \dots, k \end{cases} \qquad (6.4.12)$$

Свойство c) оценок из утверждения a) принято называть *взвешанными наименьшими квадратами,* что является причиной общепринятого названия формулы процедуры (6.4.7) ВМНК