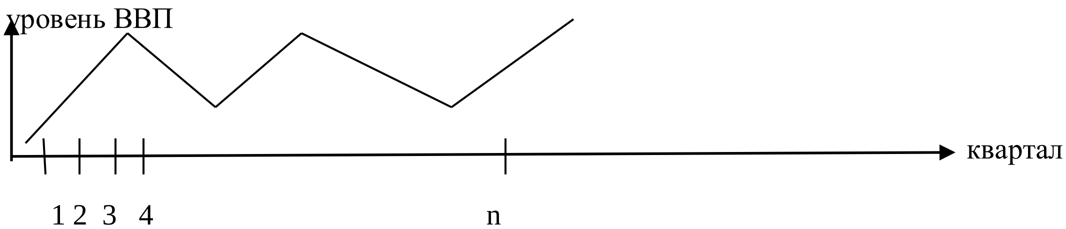
15. Временной ряд и его структура (На примере ВВП России).

Экономическая переменная $\tilde{y}$, датированная дискретными моментами времени, называется временным рядом.

Познакомимся с понятием временного ряда, зайдя на сайт Госкомстата или Росстат. Важным примером временных рядов являются квартальные уровни ВВП страны. Эти уровни экономисты называют значениями временного ряда. Аргументом временного ряда является время.

По данным Госкомстата построим график квартальных уровней ВВП. Он имеет следующую структуру:



Структура уровней временного ряда:

1) Повторяющийся из года в год закон изменения квартальных уровней. В 1 квартале ВВП самый низкий, в 4 самый высокий. Для каждого года вывод справедлив. Это означает, что в структуре квартальных уровней присутствует сезонная составляющая.
2) В уровнях ВВП можно увидеть и тенденцию (тренд), которую можно расчленить на следующие промежутки времени:

   2011-2013 ВВП восходило/высокие цены на нефть

   2014-2016 тенденция приобрела отрицательный характер/санкции западных стран

   С 2017 тенденция приобрела восходящий характер/экономика адаптируется к санкциям

3) Рассматривая график в крупном масштабе, мы можем обнаружить небольшие хаотичные изменения геометрии графика. Это означает, что в структуре уровней ряда присутствует случайная составляющая

Вывод: временный ряд- это датированная дискретными моментами времени количественная характеристика изучаемого объекта и в уровнях временного ряда можно выделить следующие составляющие: тренд T(t), сезонность S(t), U_t случайная составляющая.

Если просуммировать эти составляющие, то модель называется аддитивной, вот ее вид $y_t = \mathrm{T(t)} + S(t) + C(t) + U_t$, где $C(t)$ - циклическая составляющая, имеющая период отличный от года.

16. Модели тренда временного ряда.

Конкретизируем уравнение тренда $\mathrm{T(t)}$.

Наиболее популярные модели тренда:

1) Линейная функция времени $T(t) = a_0 + a_1 t$
2) Квадратичная парабола времени $T(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
3) Парабола 3 порядка времени $\mathrm{T(t)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

17. Моделирование сезонной составляющей при помощи фиктивных переменных.

Сезонная составляющая – это некоторая периодическая функция времени с периодом в один год. Обозначим символом τ количество единичных отрезков времени (неделя, месяц, квартал) образующих год. Тогда сезонная составляющая удовлетворяет равенству

$$S(t+\tau) = S(t)$$

Можно проверить, что следующая функция $S(t) = b_1 d_1(t) + \ b_2 d_2(t) + \cdots + \ b_{\tau-1} d_{\tau-1}(t)$ **(*)** является периодической с периодом τ

$b_1, \ldots, b_{\tau-1}$- константы (коэффициенты), которые у каждого временного ряда свои.

Символами $d_1(t), \ldots, d_{\tau-1}(t)$ обозначены индикаторы единичных отрезков времени, образующих год.

Поясним суть индикаторов, когда $\tau = 4$.

Так $d_1(t)$- это индикатор первого квартала, т.е. $d_1(t)$ принимает значение 1, если t соответствует 1 кварталу.

d_1 ={1 - для первого квартала, 0 - для других кварталов};
d_2 ={1 - для второго квартала, 0 - для других кварталов};
d_3 ={1 - для третьего квартала, 0 - для других кварталов}

При помощи модели (*) можно моделировать не только сезонную составляющую, но и влияние на соответствующую эндогенную переменную качественного фактора, который способен находиться в одном из τ состояний. Состояние этого фактора, при котором все фиктивные переменные равны 0 называется базовым (в нашем примере - это четвертый квартал года).

Спецификация квартальных уровней ВВП России:

$$\begin{cases} Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + b_1 d_1(t) + b_2 d_2(t) + b_3 d_3(t) + \ U_t \\ E(\ U_t) = 0; \ E\left(\ {U_t}^2\right) = \sigma_U^2 \end{cases}$$

18. Регрессионная зависимость случайных переменных. Функция регрессии, стандартные модели функции регрессии.

Функцией регрессии y на x (обозначается символом $E(y|x)$) называется ожидаемое значение случайной переменной y, вычисленное при заданном значении переменной x, т.е.

$$E(y|x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{n} r_i P_y(r_i|x) \text{для дискретной } y, \\ \displaystyle\int_a^b r P_y(r|x) dr \text{ для непрерывной } y \end{cases}$$

Величина $E(y|x)$ является функцией аргумента x. Эта функция позволяет представить случайную переменную у в виде

$$y = E(y|x) + u \quad \textbf{(1)},$$

где u – случайная переменная, такая, что $E(u|x) = 0$ **(2)**.

Разложение **(1)** случайной переменной y со свойством **(2)** именуется регрессионным анализом переменной y. Функция регрессии $E(y|x)$ интерпретируется в экономике как выраженный математическим языком экономический закон, по которому изменяется объясняемая (эндогенная) переменная y в ответ на изменения объясняющей (экзогенной) переменной x.

Простейшие модели функции регрессии:

1. Линейная функция $f(x) = a_0 + a_1 x$
2. Парабола второго порядка $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
3. Степенная функция $f(x) = a_0 x^{a_1}$
4. Показательная функция $f(x) = a_0 e^{a_1 x}$

19. Схема Гаусса–Маркова.

Линейная модель множественной регрессии имеет спецификацию, которая включает в себя следующие параметры: $(a_0, a_1, \dots, a_k, \sigma_u)$.

Приступим к обсуждению статистической процедуры оценивания этих параметров.

Разместим обучающую выборку при построении лин. модели множественной регрессии в следующей таблице:

№	y	X1	X2	…	Xk
1	Y1	X11	X21	…	Xk,1
2	Y2	X12	X22	…	Xk,2
...	…	…	…	…	…
n	Yn	X1,n	X2,n	…	Xk,n

Подставляем каждую строку в уравнение линейной модели множественной регрессии. Получим систему уравнений наблюдений:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_{1,1} + a_2 x_{2,1} + \dots + a_k x_{k,1} + u_1, \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ y_n = a_0 + a_1 x_{1,n} + a_2 x_{2,n} + \dots + a_k x_{k,n} + u_n \end{cases}$$

Ее принято называть схемой Гаусса-Маркова.

Вот компактная запись этой схемы:

$$\vec{y} = X\vec{a} + \vec{u},$$

X- матрица объясняющих переменных, расширенная столбцом единиц(если есть свободный член)

$\vec{a}$-вектор коэффициентов модели

$\vec{u}$-вектор случайных возмущений

20. Понятие статистической процедуры оценивания параметров эконометрической модели. Линейные статистические процедуры. Требования к наилучшей статистической процедуре.

Рассмотрим лаконичную запись эконометрической модели (линейной модели множественной регрессии):

$F(y_t, \overrightarrow{x_t}; \vec{p}) = u_t$

взаимосвязь параметры

Пусть известна обучающая выборка. Статистической процедурой оценивания параметра принято называть некоторую функцию $\varphi(\vec{y}; X)$ выборки, значением этой функции являются оценки параметров модели.

$$\tilde{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \tilde{\vec{a}} \\ \widetilde{\sigma_u^2} \end{pmatrix} = \varphi(\vec{y}; X)$$

Процедура φ называется оптимальной в заданном классе функций, если доставляемые ею оценки параметров обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} E(\tilde{\vec{p}}) = \vec{p} \\ Var(\widetilde{p_j}) \to min \end{cases} \quad *$$

Первое св-во означает мат. Ожидание оценок параметров совпадает с истинными значениями параметров. В мат. Статистике такие оценки называют несмещенными.

Второе св-во означает, что разброс оценок параметров относительно истинных значений минимален.

Вывод, Статистическая процедура оценивания модели – это некоторая функция выборки, значением этой функции служат оценки параметров. Процедура оптимальна в заданном классе функций, если ее значения удовлетворяют *

21. **Теорема Гаусса-Маркова: выражение вектора оценок коэффициентов $\widetilde{a}$ и доказательство их несмещённости.**

Если справедливы все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, тогда имеет место утверждение $\boldsymbol{A}$: наилучшая оценка коэффициентов модели рассчитывается по правилу $\tilde{\vec{a}} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y} = Q X^T \vec{y} = M\vec{y}$.
Докажем, что имеет место свойство несмещённости оценок коэффициентов, то есть $E(\tilde{\vec{a}}) = \vec{a}$.
Доказательство.

$E(\tilde{\vec{a}}) = E((X^T X)^{-1} X^T \vec{y}) = E(M\vec{y}) = ME(\vec{y}) = MX\vec{a} = (X^T X)^{-1} X^T X\vec{a} = \vec{a}$, ч.т.д.

$E(\vec{y}) = E(X\vec{a} + \vec{u}) = E(X\vec{a}) + E(\vec{u}) = \{E(\vec{u}) = 0\} = E(X\vec{a}) = \{\text{вектор} - \text{константа}\} = X\vec{a}$.