Лекция №1: Метод математического моделирования в экономике

Список литературы

- Экономико-математическре моделирование Дрогобыцкого И.Н.
- Интрилигатор М. Математические методы оптимимзации и экономическая теория.
- Нуреев Р.М. Курс микроэкономики: учебник.

План

1. Экономика как объект изучения и как наука (Нуреев);
2. Метод математического моделирования экономики (Модель, типы переменных в моделе, два класса моделей, две формы модели);
3. Предельные величны и эластичность в экономике;

Экономика как объект изучения и как наука

Экономика как объект изучения представляет собой совокупность или множество институтов, деятельность которых направлена на деятельность удовлетворения потребностей населения в ситуации ограниченных ресурсов. Основными объектами микроэкономики являются:

1. Фирмы, производящие блага (товары или услуги) и продающие эти блага на рынке;
2. Домашние хозяйства являющиеся потребителями благ и в нашем курсе мы будем изучать методом математического моделирования поведение потребителей благ и фирм при их взаимодействии на рынке;

Экономика как наука занимается изучением упомятых выше институтов с целью улучшения их деятельности. Как наука экономика по традиции разделяется на микроэкономику и макроэкономику.

В любом изучаемом экономическом объекте мы будем выделять известные характеристики:

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \tag{1}$$

, искомые характристики

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \tag{2}$$

и взаимосвязи велчин (1) и (2)

$$F(\vec{y}, \vec{x}) \tag{3}$$

Экономика как наука представляет собой сформулированные взаимосвязи наиболее значимых известных и искомых характеристик микро- и макро- экономических объектов.

В методе математического моделирования изучения экономики упомянутые выше взаимосвязи описываются математическим языком и в результате такой записи возникает математическая модель объекта.

Определение. Экономико-математическая модель (ЭММ) объекта - это некоторое математическое выражение (график или таблица, уравнение или система уравнений, дополненная, возможно, неравенствами, условие экстремума), связывающее воедино известные характеристики объекта (1) и его искомые характеристики (2)

Терминология. Известные характеристики (1) - это экзогенные переменные модели, искомые величины (2) - это эндогенные переменные модели.

$$\text{ЭКЗ. ПЕРЕМЕННЫЕ} \Rightarrow \quad \text{МОДЕЛЬ} \Rightarrow \quad \text{ЭНД. ПЕРЕМЕННЫЕ}$$

Два класса экономико-математических моделей

Всё множество математических моделей, математических объектов можно разделить на два класса. В первый класс относятся модели, которые описывают изучаемые объекты такими какими эти объекты являются в реальности модели входящие в этот класс принято называть дескриптивными (описательными) моделями. Вот самый общий вид таких моделей:

$$F(\vec{y}, \vec{x}) = 0; \tag{4}$$

Здесь символом $\vec{y}$ обозначен набор эндогенных переменных (2), символом $\vec{x}$ набор экзогенных переменных (1), символом F обозначены записанные математическим языком взаимосвязи величин (1) и (2). Модель (4) задаёт эндогенные переменные $\vec{y}$, как неявные функции экзогенных переменных $\vec{x}$. Выражение (4) это всегда система уравнений (линейные алгебраические, нелинейные, дифференциальные уравнения и возможно интегральные уравнения). Количество уравнений непременно совпадает с количеством эндогенных переменных. Дискриптивные модели.

Во второй класс включаются модели в которых отычкиваются такие значения эндогенных переменных, которые удовлетворяют некоторому требованию оптимальности, вот самый общий вид таких моделей:

$$\begin{cases} \phi = \phi(\vec{x}; \vec{y}) \to ext(\min, \max), \\ \vec{y} \in Y\vec{x} \end{cases} \tag{5}$$

В первой строчке выражения (5) записано требование оптимальности к значиям эндогенных переменных $\vec{y}$. Во втой строчке минимальные требования к эндогенным переменным. Символом Y мы обозначили множество допустимых значений $\vec{y}$ и это множество в общем случае зависит от экзогенных переменных $\vec{x}$. Модели входящие во второй класс принято именовать *оптимизационными* в математике такие модели называются задачами математического программирования на условный экстремум. Функция ϕ именуется целевой функцией или иногда критерием. Добавим к сказанному, что выражения (4) и (5) принято называть структурной формой соответсвенно дискриптивные и оптимизационной модели.

Приведённая форма модели предельные величны и эластичность в экономике

Для расчёта по модели (4) или (5) её необходимо трансформировать к приведённой форме: $\vec{y} = f(\vec{x})$. Пример трансформации модели (4) к приведённой форме обсуждён на занятиях (семинар №1 и №2). Приведённая форма модели позволяет получить взаимосвязь заданных изменений экзогенных переменных с возникающими в ответ изменениями эндогенных переменных.

$$\triangle\vec{y} = f'(\vec{x}) \cdot \triangle\vec{x} \tag{6}$$

Символом $f'(\vec{x})$ обозначена матрица частных производных, которая в матиматике называется *матрица Якоби*; её элементы имеют смысл изменений эндогенных перменных в ответ $\triangle\vec{y}$ в ответ на еденичные изменения экзогенных переменных и называются такие элементы п*редельными значениями эндогенных переменных*.

Проиллюстрируем понятие предельных велечин экономики на примере простейшей модели спроса на некоторое благо.

$$y_t^d = a_0 + a_1 p + a_2 x$$

Коэффициент a_1 имеет смысл изменения спроса на данное благо в ответ на повышение цены на одну еденицу. Этот коэффициент носит название *предельного спроса по цене*. Коэффициент a_2 имеет смысл изменения спроса на данное благо в ответ на увеличение дохода потреьтителя x на еденицу. Его можно посчитать по следующему правилу

$$M_y(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = a_2$$
$$M_y(p) = \frac{\partial y}{\partial p} = a_1$$

Формула (6) подробно выглядит так:

$$\triangle y = a_0 + \frac{\partial y}{\partial p} p + \frac{\partial y}{\partial x} x$$

Матрица $f'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial y}{\partial x}\right)^T$
Вектор $\triangle\vec{x} = (\triangle p \triangle x)^T$

Определение эластичности

По мимо предельных велечин в экономике в процессе анализа объекта методом математического моделирования постоянно используется эластичность эндогенных переменных по экзогенным. Эластичность определяется по следующему правилу:

$$E_{y_i}(x_i) = \frac{\triangle y_i}{y_i} : \frac{\triangle x_j}{x_j} \tag{7}$$

является безразмерной велечино, позволяет вычислить относительные изменения эндогенной переменной в ответ на заданное изменение соответствующей экзогенной переменной $\frac{\triangle x_j}{x_j}$. Эластичность имеет смысл относительного изменения эндогенной переменной в % в ответ на относительное изменение экзогенной переменной на 1%.

Из определения эластичность можно получить следующуу формулу для её расчёта.

$$E_{y_i}(x_j) = \frac{\triangle y_i}{x_j} : \frac{y_i}{x_j} = M_{y_i}(x_j) : A_{y_i}(x_j)$$

Делитель в правой части имеет среднее значение $\frac{y_i}{x_j}$

Итог. При изучении экономического объекта методом математического моделирования создаётся модель одно из двух классов: дискриптивная или оптимизационная. Искомые характеристики объекта и анализ объекта осуществляются при помощи приведённой формы модели.