Лекция №2

Состоятельное оценивание структурных параметров моделей СЛОУ

План

1. Критерий (необходимое и достаточное условие). Критерий идентифицируемости. Правило ранга.
2. Проблема построения моделей. Состоятельное (приближаются к истинным при увеличении объёма выборки). Оценивание параметров поведенческого уравнения косвенным методом наименьших квадратов
3. Состоятельное оценивание параметров поведенчёских уравнений 2 МНК
4. Состоятельное оценивание параметров поведенческих уравнений 3 МНК

В конце прошлой лекции обсудили необходимое условие идентифицируемости поведенческого уравнения и методику устранения не идентивицируемости.

$$K - K_i \geqslant G_i - 1$$

Обсудим критерий идентифицируемости уравнений. Вспомним лаконичную запись поведенческого уравнения

$$a_{i1}y_{1t} + \ldots + a_{iG}y_{Gt} + b_{il}x_{1t} + \ldots + b_{iK}x_{Kt} = u_i$$
$$a_{ii} = 1$$

В уравнение (2.1) как правило не входят текущие эндогенные и предопределённые переменные.

$$R_i \cdot \vec{a}_i = 0 \tag{2.3}$$

Это обстоятельство позволяет сформулировать следующее ограничение на коэффициенты данного поведенческого уравения. Проиллюстрируем понятие ограничений на примере простейшей модели Кейнса:

$$\begin{cases} Y = C + I \\ C = a_0 + a_1 \cdot Y + u \\ 0 < a_1 < 1 \\ E(u) = 0;\ E\left(u^2\right) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C \\ Y \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \text{ тривиальная переменная} \\ I \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{x} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Вектор коэффициентов

$$\vec{a}_2^{\,T} = (1, -a_1, -a_0, 0) \tag{2.5}$$

0 появился так как не входят инвестиции. Матрица ограничений R имеет следующий вид:

$$R_2 = (0,\ 0,\ 0,\ 1) \tag{2.6}$$

Справедлива следующая теорема № 2.1: Поведенческое уравнение (2.1) идентифицируемо тогда и только тогда, когда справедливо равенство (2.7):

$$rk\left(\overline{A} \cdot R_i^T\right) = G - 1$$

В моделе Кейнса: $G = 2$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -a_1 & -a_0 & 0 \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов структурной формы модели}$$

$$A(\text{невырожденная}) \cdot \vec{y}_t + B \cdot \vec{x}_t = \vec{u}_t \tag{1.1}$$

$\vec{y}_t$ – эндогенная переменная

Доказать, что в модели Кейнса равенство справедливо, а в модели спроса и предложения не справедливо. Показать, что в моделе (2.9) правило ранга справедливо для обоих поведенческих уравнений (как и правило порядка).

Проблема построения моделей. Состоятельное (приближаются к истинным при увеличении объёма выборки) оценивание параметров поведенческого уравнения косвенным методом наименьших квадратов

Вёрнёмся к формулировке теоремы Г-М и рассмотрим последнюю предпосылку этой теоремы при нарушении которой оценки параметров модели МНК утрачивают состоятельность. Убедимся, что в моделях СЛОУ 4 препосылка теоремы Гаусса-Маркова нередко нарушается. Вернёмся к модели Кейнса:

$$\begin{cases} Y = C + I \\ C = a_0 + a_1 \cdot Y + u \\ 0 < a_1 < 1 \\ E(u) = 0;\ E\left(u^2\right) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

И покажем, что переменная Y коррелирует со случайным возмущением u. Для это трансформируем модель Кейнса приведённой формы:

$$\begin{cases} C = \dfrac{a_0}{1-a_1} + \dfrac{a_1}{1-a_1} \cdot I + \dfrac{u}{1-a_1} \\ Y = \dfrac{a_0}{1-a_1} + \dfrac{1}{1-a_1} \cdot I + \dfrac{u}{1-a_1} \end{cases} \tag{1.6}$$

Рассматривая второе уравнение приведённой формы, что Y зависит от случайного возмущения u.

$$Cov(Y,\ u) = \frac{\sigma_u^2}{1-a_1} \tag{1.7}$$

Оценивать параметры МНК нельзя.

Оценивание параметров поведенческого уравнения косвенным методом наименьших квадратов

Вернёмся к приведённой форме модели Кейнса, а конкретно ко второму уравнению; Свободный член обозначим: $\dfrac{a_0}{1-a_1} = k_0$, коэффициента при I обозначим $\dfrac{1}{1-a_1} = k_1$ он значит предельное значение дохода по инветициям, экономисты нызывают коэффициент k_1 **мультипликатором единицы Кейнса.** Случайное возмущение обозначим: $\dfrac{u}{1-a_1} = w$. Так как I экзогенная переменная, то она не коррелирует с случайным возмущением.

1. А это значит что можно найти методом наименьших квадратов из уравнений наблюдений:

$$\begin{cases} Y_1 = k_0 + k_1 \cdot I_1 + v_1 \\ Y_1 = k_0 + k_1 \cdot I_2 + v_2 \\ \dots \\ Y_1 = k_0 + k_1 \cdot I_n + v_n \end{cases} \tag{4.1}$$

2. Вычислить по оценкам оценки.

Можно оценить несмещённо и эффективно параметры приведённой формы:

$$\left(\tilde{k}_0, \tilde{k}_1, \tilde{\sigma}_v\right)$$

$$\tilde{a}_1 = 1 - \frac{1}{\tilde{k}_1}; \tilde{a}_0 = \frac{\tilde{k}_0}{\tilde{k}_1}; \tilde{\sigma}_u = \frac{\tilde{\sigma}_v}{\tilde{k}_1} \tag{3.5}$$

Оценённые параметры являются состоятельными и называется КМНК.

Состоятельное оценивание параметров поведенчёских уравнений 2 МНК и понятие инструментальных переменных

В этом пункте мы обсудим второй метод состоятельного оценивания структурных параметров. Он называется двушаговым методом (с англ. two squares) и более удобен для вычислений. Обсудим его на модели Кейнса:

Шаг № 1. Методом наименьших квадратов оцениваются параметры приведённой формы для тех эндогенных переменных модели, которые в данном поведенческом уравении играют роль объясняющих. В моделе Кейнса такую роль играет переменная Y.

Шаг № 2. Вычисляются прогнозные значения эндогенных переменных играющих в данном поведенческом уравнении роль объясняющих. Для модели Кейнса прогнозные значени рассчитываются по правилу (4.2):

$$\tilde{Y}_i = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 \cdot I_i \tag{4.2}$$

Методом наименьших квадратов с прогнозными значениями объясняющих эндогенных переменных отыскиваются оценки коэффицентов структурных параметров. В модели Кейнса оценки структурных параметров отыскиваются методом наименьших квадратов из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = a_0 + a_1 \cdot \tilde{Y}_1 + w_1 \\ C_2 = a_0 + a_1 \cdot \tilde{Y}_2 + w_2 \\ \dots\dots \\ C_n = a_0 + a_1 \cdot \tilde{Y}_n + w_n \end{cases}$$

Полученные оценки оказываются состоятельными и называются оценками двухшаговым методом наимеьшних квадратов.

Понятие инструментальных переменных

Вернемся к выражению (4.2). В левой части этих уравнений прогнозное значение $\widetilde{Y}_i$ служит примером инструментальных переменных. Дадим определение понятия инструментальных переменных.

Определение. Пусть объясняющая переменная в ЛММР (4.5):

$$\left.\begin{array}{l} y_t = a_1 x_{1,t} + \ldots + a_{Kt} x_{K,t} + u_t \\ E(u_t) = 0;\ E\left(u_t^2\right) = \sigma_u^2 \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

коррелируют в пределе со случайным возмущением, т.е. пусть справедливо (4.6):

$$p\lim \frac{1}{n} X^T \cdot \vec{u} = 0 \tag{4.6}$$

Значит, состоятельно оценить коэффицента $a_1,\ldots,a_k$ модели (4.5) нельзя.

Переменная $z_1,\ \ldots,\ z_k$ называются инструментальными, если:

1. В пределе они не коррелируют со случайным возмущением
2. Существует невырожеденная матрица $Q = p\lim\left(\frac{1}{n} \cdot Z^T \cdot X\right)^{-1}$

Справиделиво, состоятельные оценки модели (4.5) вычисляются по следующему правилу:

$$\tilde{\vec{a}} = \left(Z^T \cdot X\right)^{-1} \cdot Z^T \cdot \vec{y}$$