16. Двойственный характер моделей поведения потребителя: теорема о двух тождествах.

Следущая теорема устанавливает взаимосвязь моделей поведения потребителя.

Теорема. Вернёмся к $\vec{x}^D(\vec{p},\ M)$ и пусть теперь уровень дохода потребителя совпадает со стоимостью спроса по Хиксу. Тогда справедливы два тождества:

1) Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p}, u_0)$:

$$\vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right) \tag{1}$$

2)Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p})$:

$$u\left(\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right)\right) = u_0 \tag{2}$$

17. Уравнения Слуцкого (на примере неоклассической функции полезности).

Наша цель состоит в установлении взаимосвязи изменений спроса по Хиксу и Маршаллу-Вальрасу в ответ на изменение цен благ. Продифференцируем тождество:

$$\vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right)$$

по ценам и в итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = S - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Подробная запись:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Символом S обозначена следующая матрица, которая называется **матрицей Слуцкого** и имеет смысл *предельного спроса Хикса по ценам*:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p} = \left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}}\right) \cdot \triangle \vec{p}$$

Пусть $u(x_1, x_2) = a_0(=1) \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta \to \max$.

Как нам известно спрос потребителя по М-В при данной функции спроса рассчитывается по сдедующим формулам:

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1}; x_2^* = \frac{M a_2}{(a_1 + a_2)p_2};$$

Тогда

$$\frac{\partial x_1^D}{\partial p_1} = -\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1^2}; \frac{\partial x_1^D}{\partial p_2} = 0;$$
$$\frac{\partial x_1^D}{\partial p_1} = 0; \frac{\partial x_2^D}{\partial p_2} = -\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2^2};$$

$$\text{В матричной форме:}$$
$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} = \triangle \vec{x}^D = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1 M}{(a_1+a_2)p_1^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_2 M}{(a_1+a_2)p_2^2} \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} = \frac{a_i}{(a_1+a_2)p_i};$$
$$\text{В матричной форме:}$$
$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{(a_1+a_2)p_1} \\ \dfrac{a_2}{(a_1+a_2)p_2} \end{pmatrix};$$
$$\text{Тогда спрос по Хиксу:}$$
$$\vec{x}^H = \triangle \vec{x}^D + \triangle \vec{x}^{YE}$$
$$\text{, где } \triangle \vec{x}^{YE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} \cdot \vec{x}^{D\,T} \cdot \triangle \vec{p}$$
$$\vec{x}^H = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1 M}{(a_1+a_2)p_1^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_2 M}{(a_1+a_2)p_2^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{(a_1+a_2)p_1} \\ \dfrac{a_2}{(a_1+a_2)p_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 M}{(a_1+a_2)p_1} \\ \dfrac{M a_2}{(a_1+a_2)p_2} \end{pmatrix}^T \cdot \triangle \vec{p}$$

18. Классификация благ в спросе потребителя (на примере неоклассической функции полезности).

Подробная запись уравнения Слуцкого:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Нам остаётся осуществить классификацию благ в спросе потребителя.
Даём классификацию блага в спросе потребителя называется ***ценным или благом высшей категории***, если спрос на это благо возрастает с ростом доходом потребителя:

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} \geq 0$$

Вот примеры таких благ: автомобили, жильё (квартиры).
Благо называется ***малоценным***, если справедливо следующее неравенство, если спрос на благо снижается по мере роста дохода потребителя (маргарин):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} < 0$$

Благо называется ***нормальным***, если спрос на него снижается в ответ на рост цены (пиво):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_i} < 0$$

Экономисты считают, что практически все блага являются нормальными. В спросе по Хиксу и Маршалу-Вальрасу все блага нормальны.
Благо в спросе нызвается ***гиффиновым***, если в ответ на рост цены спрос на него повышается (валюта):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_i} \geq 0$$

Пример расчёта произодных для неоклассической функции полезности смотри в пункте 17. Остаётся просто проверить знак. (Блага будут являться нормальными и ценными)

19. Модель производства фирмой товаров и услуг (производственная функция фирмы). Свойства производственной функции (ПФ) и её основные характеристики.

Приступая к моделированию поведения фирмы на рынке благ обсудим, лежащую в основании поведении фирмы *модель производства фирмой уровней её продукции*. *Уровень продукции или блага фирмы* создаваемый за определённый отрезок времени обозначим q, в процессе создания q фирма использует факторы производства, которые занумеруем $1, 2, \dots, n$, например:

1. Основной капитал (средство труда - здание, станки, компьютеры);
2. Живой труд (кол-во работников, кол-во человекочасов и т.д.);
3. Предметы труда (сырьё, материалы, полуфабрикаты);

   ....(1)

4. Финансовый капитал.

Два упомянутых выше первых факторов производства принято называть *основными факторами.* Уровни факторов производства мы обозначим по традиции $x_1, x_2, \dots, x_n$. При помощи принятой технологии F уровни фаткоров производсва трансформируются в уровень q выпуска продукции;
Вот краткая запись последней записи:

$$q = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2}$$

Математическая модель выражения (2) и носит название *производственной функции фирмы.* Ниже нам будет удобно обсуждать упомянутую модель, как функцию двух основных факторов:

$$q = F(x_1, x_2)$$

Всё что будет сказано в такой ситуации переносится без изменений на случай произвольного кол-ва факторов.

Свойства производственной функции

Свойство 1. Если уровни всех факторов свойства равны 0, то и значение функции равно 0.

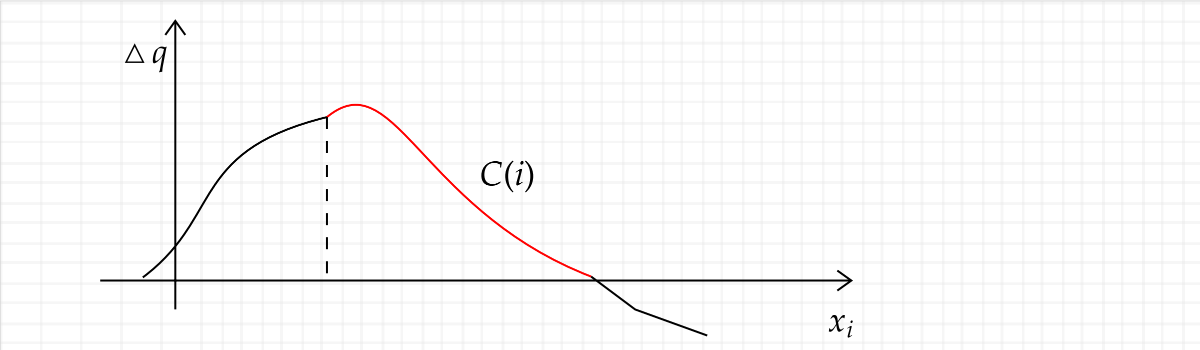
Свойство 2. Производственная функция не убывает по каждому аргументу.

Предельный выпуск фирмы по каждому фактору не отрицательный.

Свойство 3. Предельные продукты убывают с ростом факторов, то есть справедливо соотношение:

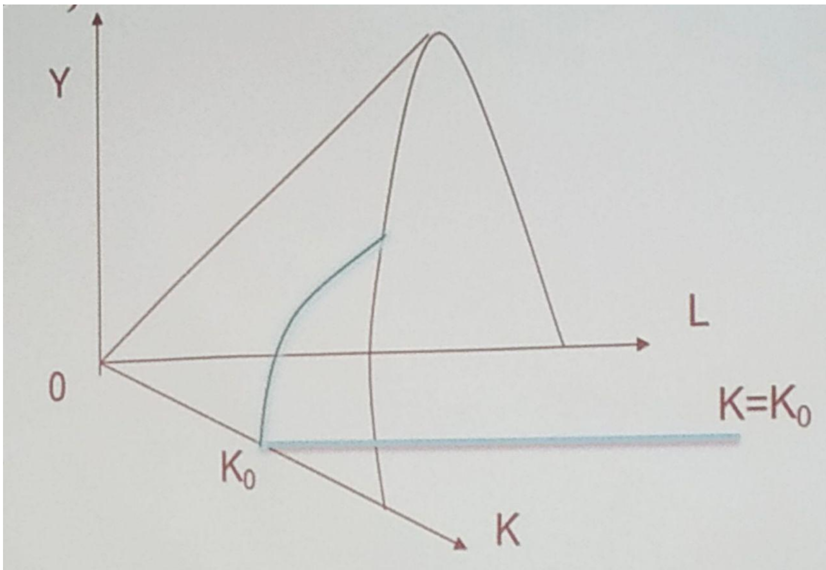
$$M_q(x_i) \to 0 \text{ при } x_i \to +\infty$$

Упомянутые свойства производсвенной функции справедливы в некоторой области C положительного орнтанта R_n^+ в R_n. И эта область называется *экономической областью.* За пределами экономической области упомянутые свойства производственной функции могут не соблюдаться вот типичный график:

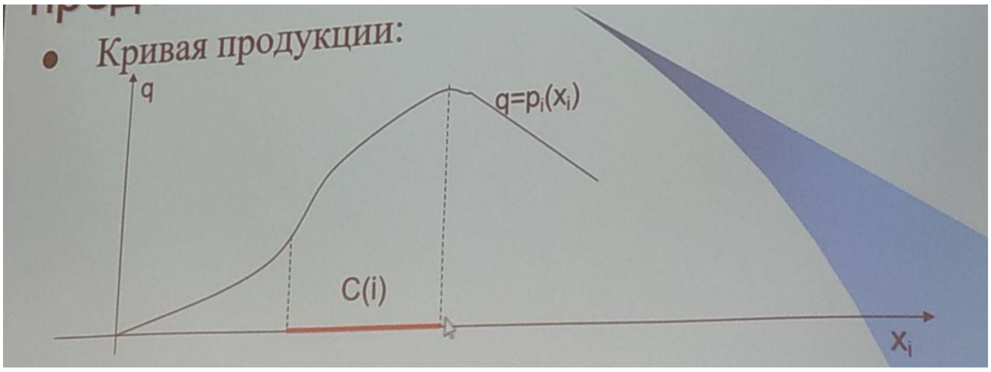


Обсудим два основных примера производсвенной функций:

$$\begin{cases} Y = F_{C-D}(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \\ A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$



Кривая линия на графике производсвенной функции Коббла-Дугласа, это график производсвенной функции при фиксированном значении капитала, такой график носит названеие *кривой продукции* фактора L.



Вторым примером производстенной функции является CES - функция. (Семинар №8)

20. Производственная функция Кобба-Дугласа, смысл её коэффициентов и уравнение изокванты.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2\big(= \text{живой труд}\big)\Big).$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \qquad (*)$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Основные характеристики функции Кобба-Дугласса

1. Предельный выпуск фирмы по правилу производсва: $M_y(x_i) \approx \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$(7). Также называют *предельным продуктом фактора x_i.*

2. Средним продуктом фактора производства $A_y(x_i)$ экономисты называют дробь $\dfrac{y}{x_i}$.

$$A_y(x_i) = \frac{y}{x_i}$$

Средний продукт фактора производства - это кол-во выпуска продукции, приходящаяся на одну единицу данного фактора.

3. Эластичность выпуска по факторам производства расчитывается по правилу:

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i)$$

Эластичность выпуска функции Коббла-Дугласа равна показателю степени a_i.

4. Изокванты заданного уровня y_0 экономисты называют *линию уровня функции,* т.е. множество различных комбинаций факторов производства при которых уровень выпуска продукции остаётся неизменным и равным заданной велечине y_0. Изокванту удобно изучать разрешив уравнение (*) относительно переменной например x_1, т.е. привратив переменную x_1 в функцию переменной x_2 зависящей, как от параметра.

$$x_1 = \left(\frac{y}{a_0 \cdot x_2^{a_2}}\right)^{\frac{1}{a_1}} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot x_2^{-\frac{a_2}{a_1}} \ (x_2 > 0)$$