

## Семинар №6

$$\begin{cases} C_{2003} = a_0 + a_1 \cdot Y_{2002} + a_2 \cdot Cr_{2003} + a_3 \cdot San_{2003} + u_{2003}; \\ C_{2017} = a_0 + a_1 \cdot Y_{2016} + a_2 \cdot Cr_{2017} + a_3 \cdot San_{2017} + u_{2017}; \end{cases} \quad (2)$$

$$P = (a_0, a_1, a_2, a_3; \sigma_u^2) \quad (3)$$

Компактная запись:

$$\vec{y} = X \cdot \vec{a} + \vec{u}; \quad (4)$$

Ситуации уравнений (2) наблюдений составить формулу в компактную запись (4) этих уравнений.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_{2003} \\ \dots \\ C_{2017} \end{pmatrix}; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 & Y_{2002} & Gr_{2003} & San_{2003} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Y_{2016} & Gr_{2017} & San_{2017} \end{pmatrix}; \vec{u} = \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Обратим внимание, что первый столбец матрицы  $X$ , состоит из 1 тогда и только тогда, когда есть сводный член  $a_0$ . Вспоминая действия с матрицами мы проверим, что элементы компактной записи (5), модели (2), идентичны системе (2).

Тогда в итоге получится:

$$\begin{pmatrix} C_{2003} \\ \dots \\ C_{2017} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Y_{2002} & Gr_{2003} & San_{2003} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Y_{2016} & Gr_{2017} & San_{2017} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{2003} \\ \dots \\ u_{2017} \end{pmatrix}$$

**ДЗ** составить элементы компактной записи, остальных двух элементов модифицированной модели Самуэльсона-Хикса.

### Случайный вектор и его основные характеристики

Обратимся к компактной записи (4) и подчеркнём, что вектор случайных возмущений  $\vec{u}$  представляет собой набор величин случайного вектора. У случайного вектора есть две важнейшие для практики количественные характеристики:

#### 1. Математическое ожидание

$$E(\vec{u}) = \begin{pmatrix} E(u_1) \\ \dots \\ E(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}; \quad (6)$$

## 2. Ковариация:

$$Cov(\vec{u}, \vec{u}) = V(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_{u_1}^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{u_2}^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{u_n}^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Обычно постулируется некоррелированность элементов случайного вектора (вектора случайных возмущений) и поэтому ковариационная матрица в векторе случайных возмущений (2) будет выглядеть так:

$$Cov(\vec{u}, \vec{u}) = \sigma_u^2 \cdot I \text{ (единичная матрица)} \quad (7')$$

### Основные количественные характеристики аффинного преобразования случайного вектора

$$\vec{v} = A \cdot \vec{u} + \vec{b} \quad (8)$$

Аффинным преобразованием  $\vec{u}$  является вектор  $\vec{v}$ , который рассчитывается по формуле (8).

Вот важное для практики правила расчёта основных характеристик вектора  $\vec{b}$ .

$$\begin{aligned} E(\vec{v}) &= A \cdot E(\vec{u}) + b; \\ Cov(\vec{u}, \vec{u}) &= A \cdot Cov(\vec{u}, \vec{u}) \cdot A^T; \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть в схеме Гаусса-Маркова (4) вектор  $\vec{u}$  является случайным с остальными характеристиками и ковариационная матрица имеет вид (7'),  $\vec{a}$  и  $X$  являются не случайными, показать:

1. Что вектор  $\vec{y}$  будет случайным;
2. Определить его характеристики;

В правой части (4) первое слагаемое  $X \cdot \vec{a} = \alpha$  — это вектор констант, его смысл смотри ниже, а второй вектор случайный  $\vec{u}$  и мы можем трактовать вектор  $\vec{y}$  выражения (4), как аффинное преобразование вектора  $\vec{u}$ . Рассматривая уравнение (4) мы убеждаемся, что матрица  $A$  является единичной и мы можем использовать вот эти важные для практики формулы:

$$E(\vec{y}) = \alpha + I \cdot E(\vec{u}) (= 0) = \alpha$$

Первое слагаемое в правой части (4) имеет смысл ожидаемого значения вектора  $\vec{y}$ , т.е. первое слагаемое состоит из компонент равных ожидаемых значений ( $E(\vec{y})$ ) эндогенной переменной модели.

Тогда:

$$Cov(\vec{y}, \vec{y}) = I \cdot Cov(\vec{u}, \vec{u}) \cdot I^T = Cov(\vec{u}, \vec{u}); = \sigma_u^2 \cdot I$$

### Свойство оценок параметров методом наименьших квадратов

На сегодняшней лекции мы сформулируем важный для практики результат, состоящая в том, что оптимальные оценки коэффициентов вектора  $\vec{a}$  из уравнения коэффициентов (4) вычисляются по правилу (11):

$$\tilde{\vec{a}} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot \vec{y};$$

ДЗ Показать, что вектор  $\tilde{\vec{a}}$  является случайным и опираясь на формулы (9) найти ожидаемое значение вектора ( $E(\tilde{\vec{a}}) - ?$ ) и его ковариационную матрицу ( $Cov(\tilde{\vec{a}}, \tilde{\vec{a}}) - ?$ ).