关于Ramsey数匹配的临界图的刻画

张帅豪 18030100101

（1．西安电子科技大学 计算机科学与技术学院，陕西 西安 710071）

摘要：

给定简单图，Ramsey数是最小的正整数n，使得每一个具有c颜色的边着色包含一个与Hi同构的颜色i的子图，对于某些。的临界图是顶点上的边着色完全图，它不包含任何同构的颜色i的子图。对于，Cockayne和Lorimer（条纹的拉姆齐数，J Austral，数学，Soc。19（1975年），，其中niK2是大小匹配的。 利用Gallai-Edmonds定理，刻划了的所有临界图，为这个Ramsey数提供了一个新的证明。

关键词：

匹配；Ramsey数；临界图；星临界Ramsey数

# On characterizing the critical graphs formatching Ramsey numbers

*Zhangshuaihao 18030100101*

（1. School of Electronic Engineering, Xidian Univ., Xi’an 710071, China）

**Abstract:**

Given simple graphs , the Ramsey number is the

smallest positive integer n such that every edge-colored with c colors contains a subgraph in color i isomorphic to Hi for some . The critical graphs for are edge-colored complete graphs onver- tices with c colors which contain no subgraphs in color i isomorphic to Hi for any. For , Cockayne and Lorimer (The Ram- sey number for stripes, J. Austral. Math. Soc. 19 (1975), 252–256.) showed that , in which is a matching of size . Using the Gallai-Edmonds Theorem, we characterized all the critical graphs for, implying a new proof for this Ramsey number.

**Keywords:**

Matching; Ramsey number; critical graph; star-critical Ramsey number

1. 介绍

本文考虑的所有图都是有限的和简单的。对于这里没有定义的术语和符号，我们让读者参考Bondy和Murty[3]。

如果所有边都有相同的颜色，则边色图形是单色的。给定简单图，Ramsey数是最小的正整数n，使得的每个c边着色（c颜色的赋值）的边包含一个颜色为与Hi同构。的临界图是顶点上的c-边着色完全图，它不包含任Hi同构的颜色i的子图。

确定经典Ramsey数的值似乎非常困难（参见[15]的调查）。但是对于多个图副本，Burr，Erd˝os和Spencer[4]得到了固定G，H和足够大的n的上惊人的尖锐和一般的上下界，他们还证明了当m≥n，m≥2时。Hook和Isaak[8]对的临界图作了一个猜想。这方面另一个著名的结果是Cockayne和Lorimer[5]。

**定理1**

（Cockayne和Lorimer[5]）。对于,

这一结果已被Lorimer和Solomon[13]推广到完全图与匹配，以及Alon等人[1]将其推广到超图。对于Ramsey匹配数，Hook和Isaak[8]刻画了m≥n≥1时的临界图。的所有临界图的类尚未确定。

Cockayne和Lorimer[5]给出了的临界图，它是一个上的c边色完全图G。(ni-1)个顶点，其顶点集V(G)有c个部分V1，…., Vc，使，对于，并且一个G中的边e=xy是{x，y}与Vj有非空交的最大j。很容易看出，对于任何，G中不包含颜色i的单色niK2。在Cockayne和Lorimer的结果的激励下，在本文中我们研究了G的结构。的临界图(见图1的例子)。

**定理2**.

对于n,设G是一个c边色的完全图，其上有顺序。如果G在颜色i中不包含单色niK2，对于任何

，则，G的颜色可以重新标示这样，。

(a) V (G)可以分割成c个部分其中

且所有端点都在Vi中的边都有颜色i，对于;

(b)所有一端在V1，另一端在Vi的边都有颜色i，为;

(c)所有一端在Vi，另一端在Vj的边的颜色为i或j，为

Bialostocki和Gy´arf´as[2]表明，Cockayne和Lorimer的证明（有差距。

漏掉的情况，在这个证明中）可以修改，给出一个更普遍的结果。

**定理3**

(Bialostocki和Gy´arf´as[2]). 对于,且则，每一个c边色的n色图都包含一个单色的为有些。

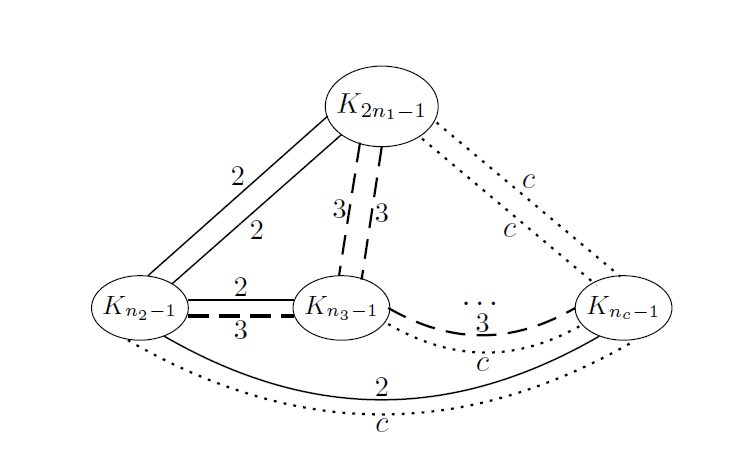


图1：r(n1K1，n2K2，...，ncK2)的临界图结构。

正如[2]中提到的，Zolt´an Kir´aly指出，n-色图的版本结果可以由完整的图版结果推导出来。这里我们将表明Zolt´an Kir´aly的方法可以适用于更多的普通图类。让G是一个边缘着色的有c种颜色的图。如果V(G)有一个分区{的分区，使得E(Vi, Vj) 6= ∅。对i 6=j，且。的情况下。然后将每个Vi标识为一个顶点vi。并删除乘法边，可以得到一个c边颜色的完整图，在n顶点，用G∗表示。很容易看出，每个单色的都有一定的颜色。G∗中的i对应于G中颜色为i的单色niK2。

**推论1**

设G是一个具有c颜色的边着色图。如果有隔板V（G）的使得对于每个i！=j和。，则G对于某些i∈{1,2，…，包含单色niK2，……，c}。

定理2的证明在第二节。最后，我们给出了定理2的一个简单应用。

2证明

定理1的证明

首先，我们将陈述Gallai-Edmonds定理，它在我们的证明中起着至关重要的作用。

设M是一个n阶图G的匹配，每一个与M中的边相关的顶点都被M覆盖，G的最大匹配就是覆盖尽可能多的顶点的匹配。当n是偶数（奇数）时，完全匹配（近似完美匹配）是覆盖n个顶点（n−1个顶点）的G的最大匹配。如果G−v对每个顶点v∈G有完美匹配，我们称G因子为临界。

对于图G，设D（G）是不能被G的至少一个最大匹配覆盖的顶点集，a（G）是在D（G）中有邻居的顶点集，。下面的Gallai-Edmonds定理是由Gallai[7]和Edmonds[6]提出的。我们在这里使用的这个定理的最新版本可以在Lov&apos;asz和Plummer[14]中找到（第94页，定理3.2.1）。我们把D（G）、A（G）和C（G）称为G的Gallai-Edmonds分解（参见图2作为示例）。

**定理4**

（Gallai-Edmonds定理）。对于图G，让D（G）、a（G）和C（G）定义如上。那么

（一）由D诱导的子图的分量（G） 是关键因素；

（二）C诱导的子图（G） 有完美的匹配；

（三）从G中删除C的顶点得到的二部图（G） 且由A（G）跨过且将D（G）的每个分量收缩到单个顶点的边具有正盈余（从A（G）看，即对于A（G）的每个非空子集S，；

（四）如果M是G的任何最大匹配，则它包含D的每个分量的近似完美匹配（G） ，C（G）中每个分量的完美匹配，并将a（G）的所有顶点与D（G）中不同分量中的顶点相匹配；

（五）最大匹配M的大小等于，其中ω（D（G））表示由D（G）构成的图的组成部分的数目。

由于在颜色类Gi（由颜色i的所有边诱导的G的子图）中，每个，我们知道Gi的匹配数（最大匹配大小）最多为ni−1。Gallai-Edmonds定理根据图的匹配数刻画图的结构。我们将从Gallai-Edmonds定理推导出每个颜色类Gi in G不能有太多的边。另一方面，这些颜色类的并集必须覆盖G的所有边。最后我们刻画了G的结构，这也意味着对值的一个新的证明。

**定理2的证明**

（假设1）顶点和不包含单色的nKi2在颜色i中对任意。如果ni=1对于某些1≤i≤c，则G不包含颜色i的边。我们可以在讨论中忽略颜色i，并且对结论没有影响。所以我们假设,。

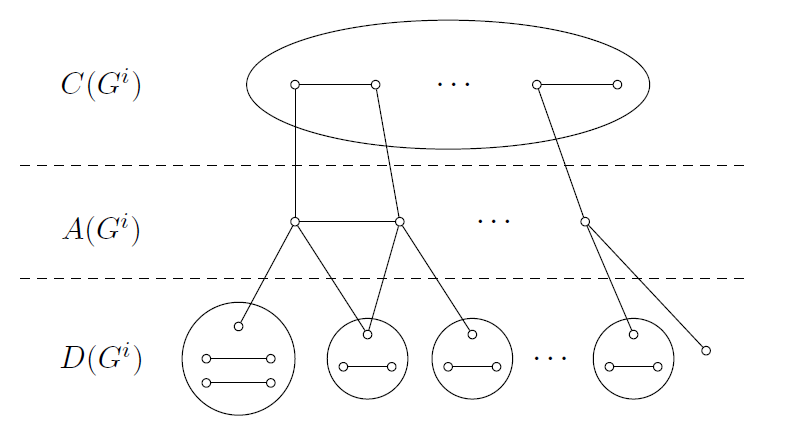


图2：颜色类Gi的Gallai-Edmonds分解。

设G1，G2，…，Gc是G的颜色类。对于每个，Gi的匹配数最多为ni−1，因为G在颜色i中不包含单色niK2。让c（Gi）、A（Gi）和D（Gi）是Gi的Gallai-Edmonds分解（见图2）。用表示Gi[D（Gi）]中各分量的顶点集。让

,,k

根据Gallai-Edmonds定理，是Gi的配数。由于Gi的匹配数最多为ni - 1，所以有

下面的不等式给出了其两端的边数的上界。在C(Gi)或D(Gi)中都有，其中第三个不等式可以通过比较一下一个阶数为2()+1的完整图的大小和一个子图的大小。

的。我们有

接下来，我们给出了A（Gi）中与顶点相关的边数的界，该边界可以划分为ai星。总共有这样的星星。设H是G的子图，顶点集V（G），边集是这些星的边集的并集。这些顶点至少形成一个独立的大小集。因此

H最多有边。与1≤i≤C的Gi[C（Gi）]和Gi[D（Gi）]中的边一起，我们得到了一个边数的上界，其中是一个n阶的完全图：

请注意有以下几点

为了讨论的方便，对于1≤i≤c的情况，设bi = ni - 1 - ai，则我们有

我们将从上面的不等式中推导出G的结构.假设,我们得到bm > 0(否则(4)不成立，因为n1≥2)，且。对于bi > 0，且i 6= m，则存在，即. 设有

如果且仅当bi=bm且bi+3时，(5)中的平等成立2=n1，只有当n1=2，bi=bm=1.下面的最后一个不等式可以通过把每项的大小作为检查一个阶数为n1+的完整图的子图。由(5)可知

如果且仅当，且最多存在一个非零的情况下，(6)中的等式成立bi与i 6= m。由（4）和（6）可得

# 3备注

设Kn−1⊔K1，k是从Kn−1获得的图，通过添加新顶点v并将v与Kn−1的k个顶点连接起来。对于，星临界Ramsey数是最小的正整数k，使得Kn−1⊔K1，k的每个c-边着色都包含一个子图，在某些的颜色i中与Hi同构，。。。，c}，用r\*表示。这个概念是由Hook和Isaak[8]提出的，他证明了。文献[8,9,10,11,12,16,17]研究了其它图的星临界Ramsey数。

Kn−1的自由染色是Kn−1的c边染色，它不包含任何i∈{1，…，i中与Hi同构的子图，。。。，c}。因此的每个临界图都有一个自由着色。利用定理1，我们得到了星临界Ramsey匹配数的结果。

**定理5**

为

**证据。**为了方便起见，我们让

为了证明，我们给出了Kn−1⊔K1，m的无着色，它由定理2定义的n−1顶点上的临界图和的每个单色Kn1的边的顶点v构成

下一步我们要证明的是相反的。设G为边色−1⊔，m+1为c色，H为G中的Kn−1，v为星，m+1的中心。根据定理2，要么H包含单色，我们就完成了；要么H是一个临界图，包含一个单色n1，具有某种颜色，比如颜色1。下面我们假设H属于后一种情况。因此，入射到v的边没有颜色为1的G，或者存在单色的n1K2。因此，入射到v的边的颜色属于。注意，，存在一个的边uv（是H中的单色）。用j（j∈{2，。。。，c}）。然后在中的边缘uv和（匹配形成具有j in G颜色的。结果如下。

参考文献

[1] N. Alon, P. Frankl and L. Lov´asz, The chromatic number of Kneser hypergraphs,

*Trans. Amer. Math. Soc.* 298 (1986), 359–370.

[2] A. Bialostocki and A. Gy´arf´as, Replacing the host Kn by n-chromatic graphs in

Ramsey-type results, arXiv:1506.04495, 2015.

[3] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory, Springer, New York, 2008.

[4] S.A. Burr, P. Erd˝os, J.H. Spencer, Ramsey theorems for multiple copies of graphs,

*Trans. Amer. Math. Soc.* 209 (1975), 87–99.

[5] E.J. Cockayne and P.J. Lorimer, The Ramsey number for stripes, *J. Austral. Math.*

*Soc.* 19 (1975), 252–256.

[6] J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices, *J. Res. National*

*Bureau of Standards* 69 (1965), 125–130.

[7] T. Gallai, Maximale systeme unabh˝angiger kanten, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutat´o*

*Int. K˝ozl.* 9 (1964), 401–413.

[8] J. Hook and G. Isaak, Star-critical Ramsey numbers, *Discrete Appl. Math.* 159 (2011),

328–334.

[9] Y. Hao and Q. Lin, Ramsey number of K3 versus F3,n, *Discrete Appl. Math.* 251

(2018), 345-348.

[10] Y. Hao and Q. Lin, Star-critical Ramsey numbers for large generalized fans and books,

*Discrete Math.* 341 (2018), 3385–3393.

[11] S. Haghi, H.R. Maimani and A. Seify, Star-critical Ramsey number of Fn versus K4,

*Discrete Appl. Math.* 217 (2017), 203–209.

[12] Z. Li and Y. Li, Some star-critical Ramsey numbers, *Discrete Appl. Math.* 181 (2015),

301–305.

[13] P.J. Lorimer and W. Solomon, The Ramsey numbers for stripes and complete graphs

1, *Discrete Math.* 104 (1992), 91–97.

[14] L. Lov´asz and M.D. Plummer, Matching Theory, North-Holland, Amsterdam, The

Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V., 1986.

[15] S. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.* (2017), DS1 (elec-

tronic).

[16] Y. Wu, Y. Sun and S. Radziszowski, Wheel and star-critical Ramsey numbers for

quadrilateral, *Discrete Appl. Math.* 186 (2015), 260–271.

8

[17] Y. Zhang, H. Broersma and Y. Chen, On star-critical and upper size Ramsey numbers,

*Discrete Appl. Math.* 202 (2016), 174–180.