

ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 2023
FILIERE FUI FF

(Sujet d'entraînement)

EPREUVE DE PHYSIQUE 3H

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

ELECTROMAGNETISME :

Données :

- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ou l'air : $c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$,
- permittivité diélectrique du vide ou de l'air : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F m}^{-1}$,
- perméabilité magnétique du vide ou de l'air : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Toutefois, la compréhension et la réalisation de la première partie permettent d'aborder plus rapidement les deux dernières parties.

On s'intéresse à l'un des deux standards de télécommunication, candidat pour la 4^e génération de la téléphonie mobile, « Long Term Evolution – Advanced ». Il est constitué, en France, de deux bandes de fréquences dites 800 MHz et 2 600 MHz. Par le déploiement de technologies particulières, des débits supérieurs à 30 Mbits / seconde pour des mobiles en mouvement sont visés.

L'espace est défini par un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on considère un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

PARTIE III : PROPAGATION DANS L'AIR

III.1. Propagation

III.1.1. Donner, en les nommant, les équations de Maxwell sous leurs formes locales dans l'air en l'absence de sources. On traitera des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ comme n'étant pas nécessairement ceux d'une Onde Plane Progressive Sinusoïdale (OPPS).

III.1.2. Etablir l'équation de propagation en champ électrique et en déduire l'expression de la vitesse de propagation de l'onde, en fonction des données de l'énoncé.

III.1.3. On considère à présent que le champ $\vec{E}(M, t)$ est celui d'une OPPS polarisée rectilignement parallèlement à \vec{e}_x , se propageant suivant les z croissants et dont la formulation générale est donnée par l'expression complexe $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_m e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. \vec{k} est le vecteur d'onde de norme constante k , ω est la pulsation et \vec{E}_m est une constante complexe vectorielle.

III.1.3.a. Préciser et justifier l'expression de \vec{k} et la direction de \vec{E}_m .

III.1.3.b. Donner l'expression de $\vec{E}(M, t)$ en fonction des coordonnées de M et en projection dans la base cartésienne \mathcal{B} associée à \mathcal{R} .

III.1.3.c. Expliciter les deux termes de l'équation de propagation en fonction de k , ω et $\vec{E}(M, t)$.

III.1.3.d. En déduire la relation de dispersion du milieu.

III.1.4. Dans l'hypothèse de la question précédente, expliciter le champ $\vec{B}(M, t)$ dans la base cartésienne \mathcal{B} en fonction de \vec{E}_m , c , k et ω .

III.1.5. En notant $\vec{E}_m = E_m e^{j\varphi}$, φ étant une constante, expliciter les champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$.

III.2. Puissance et rayonnement

III.2.1. Donner la définition du vecteur de Poynting $\vec{R}(M, t)$ en fonction des champs et son interprétation physique. Quelle est sa dimension physique ?

III.2.2. Montrer que la valeur moyenne temporelle de la norme de $\vec{R}(M, t)$ peut s'écrire $\langle \|\vec{R}\| \rangle = \alpha c \varepsilon_0 E_m^2$ pour les champs de l'OPPS définie dans la partie III.1. On donnera la valeur de la constante α .

III.2.3. Dans le cas d'une antenne réelle, l'hypothèse de l'OPPS n'est valable que localement. On sait alors que la valeur de $\langle \vec{R} \rangle$ dépend de la distance d à l'antenne, de la puissance P_a d'alimentation et de son gain G , lequel dépend de la direction d'observation. On peut ainsi écrire : $4\pi d^2 \langle \|\vec{R}(d)\| \rangle = P_a G$. Exprimer l'amplitude E_m du champ en fonction de c , ε_0 , P_a , G et d .

III.3. Exposition

Il est parfois nécessaire de privilégier un sens de fonctionnement de l'antenne. L'énergie rayonnée par une antenne est alors répartie de manière inégale dans l'espace et il existe des directions privilégiées, appelées "lobes de rayonnement". Ces différentes directions peuvent être visualisées à l'aide du diagramme de rayonnement réalisé en trois dimensions. Le lobe le plus important est appelé "lobe principal". Il est dirigé vers l'avant de l'antenne. Les lobes secondaires, moins importants, sont dirigés vers l'arrière ou sur les côtés de l'antenne.

La norme sanitaire pour ce type de rayonnement est actuellement en France $E_{\max} = 61 \text{ V/m}$. Elle correspond à un seuil défini sur la base des effets thermiques (échauffement) liés au champ électromagnétique. A titre de comparaison, la norme en Italie, Russie, Pologne et Chine est de $E_1 = 6 \text{ V/m}$.

III.3.1. Dans le cadre d'une implantation urbaine, il se peut que certains locaux interceptent le lobe principal. En considérant dans ce cas une puissance $P_a = 50 \text{ W}$, un gain $G = 63$ et une distance $d = 100 \text{ m}$, calculer l'intensité du champ E_{m1} . Commenter le résultat.

.....

- III.3.2.** Une autre possibilité d'être exposé au rayonnement d'une antenne relais concerne le lobe secondaire orienté vers le sol. Dans ce cas le gain est plus faible, mais la distance également. Calculer, pour la même puissance $P_a = 50 \text{ W}$, le champ E_{m2} dans le cas où $G = 2$ et $d = 10 \text{ m}$. Commenter le résultat.

PARTIE IV : REFLEXION D'UNE OPPS PAR UN MUR DE BETON

De façon préliminaire, on considère une interface air – métal parfait dans le plan $z = 0$. L'air occupe l'espace des $z < 0$ et le métal celui des $z > 0$. L'onde incidente est une OPPS se propageant dans l'air, polarisée selon \vec{e}_x et qui arrive normalement à l'interface. On note $\underline{E}_{mi} = E_m e^{j\varphi}$ et \underline{E}_{mr} , respectivement, les amplitudes complexes des champs incident et réfléchi. On note \vec{k}_i et \vec{k}_r , les vecteurs d'ondes associés respectifs. On admet que l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente.

IV.1. Expressions des champs

- IV.1.1.** Exprimer les champs électrique $\vec{E}_i(M, t)$ et magnétique $\vec{B}_i(M, t)$ incidents en fonction de \underline{E}_{mi} , z , ω , t et $k = \|\vec{k}_i\| = \frac{\omega}{c}$.
- IV.1.2.** Exprimer les champs électrique $\vec{E}_r(M, t)$ et magnétique $\vec{B}_r(M, t)$ réfléchis en fonction de \underline{E}_{mr} , z , ω , t et $k = \|\vec{k}_i\| = \frac{\omega}{c}$.
- IV.1.3.** Rappeler les propriétés d'un conducteur à l'équilibre. Quelles sont les expressions des champs $\vec{E}_c(M, t)$ et $\vec{B}_c(M, t)$ dans le conducteur ?
- IV.1.4.** Enoncer, sous sa forme la plus générale, la relation de passage pour les composantes tangentielles du champ électrique.
- IV.1.5.** En déduire la valeur du coefficient de réflexion en champ $r = \frac{\underline{E}_{mr}}{\underline{E}_{mi}}$.

IV.2. Champ total et ondes stationnaires

- IV.2.1.** Déterminer l'expression du champ total réel $\overrightarrow{E_{total}}(M, t)$.
- IV.2.2.** Quelle est sa particularité ? Justifier.
- IV.2.3.** Représenter l'amplitude de $\overrightarrow{E_{total}}(M, t)$ en fonction de la position de M pour trois valeurs différentes de t .
- IV.2.4.** Localiser et nommer les points remarquables de la représentation.
- IV.2.5.** Donner la distance d_m entre un minimum et un maximum adjacents en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde.

On remplace à présent le métal parfait par du béton. On reprend l'ensemble du problème et des notations considérées dans les parties IV.1 et IV.2. On donne le nouveau coefficient de réflexion en champ $\underline{r} = r e^{j\alpha}$ dans la gamme de fréquence de la bande 2 600 MHz avec $r = 0,386$ et $\alpha = 169^\circ$.

IV.3. Mettre le champ total $\vec{E}_{total}(M, t)$ dans l'air sous la forme $\vec{E}_{total}(M, t) = [\underline{f}(z)] \vec{E}_i(M, t)$ et exprimer $\underline{f}(z)$ en fonction de r , α , z et k .

IV.4. En constatant que $\|\vec{E}_{total}\| = |\underline{f}(z)| \|\vec{E}_i\|$, exprimer les valeurs maximale $\|\vec{E}_{total}\|_{\max}$ et minimale $\|\vec{E}_{total}\|_{\min}$ de l'amplitude de $\|\vec{E}_{total}\|$ en fonction de r et E_m .

IV.5. Pour le coefficient de réflexion donné ci-dessus pour le béton, calculer le rapport $\rho = \frac{\|\vec{E}_{total}\|_{\max}}{\|\vec{E}_{total}\|_{\min}}$, également appelé Rapport d'Onde Stationnaire ou ROS.

IV.6. Donner la distance d_m entre un minimum et un maximum adjacents.

IV.7. Pour un véhicule se déplaçant à $v = 60$ km/h, calculer le temps qui s'écoule entre un maximum et un minimum de champ. En quoi cela peut-il affecter la communication ?

MECANIQUE

La partie Mécanique du sujet comporte deux exercices indépendants.

EXERCICE I : SATELLITES

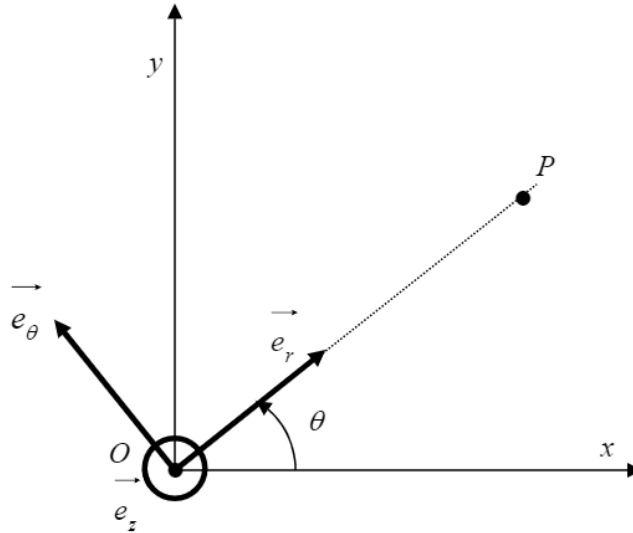
On s'intéresse au mouvement d'un point matériel P , de masse m , placé dans le champ newtonien engendré par une masse $M \gg m$. Cette dernière masse se situe à l'origine d'un repère $Oxyz$; elle sera considérée comme immobile dans le référentiel galiléen associé au repère $Oxyz$. L'attraction de la masse M sur le point P s'écrit $-\frac{mMG}{r^3} \overrightarrow{OP}$ où G est la constante de la gravitation, telle que $G = 6,67.10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, $r = \|\overrightarrow{OP}\|$.

I.1 Montrer que le mouvement de P est plan.

I.2 On suppose alors que le mouvement de P se situe dans le plan xOy et on repère la position de P par ses coordonnées polaires $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ et $\theta =$ angle situé entre Ox et \overrightarrow{OP} . On note

|| ||

$\vec{e}_r = \frac{\vec{OP}}{r}$ et \vec{e}_θ deux vecteurs unitaires, \vec{e}_θ se déduisant de \vec{e}_r par une rotation de $+\frac{\pi}{2}rad$ dans le plan xOy (voir **figure I.1**). Montrer que la quantité $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement.



Montrer que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit sous la forme $r = \frac{p}{[1 + \varepsilon.e.\cos(\theta - \theta_0)]}$ où $p > 0$, $e > 0$ et θ_0 sont trois constantes ($\varepsilon = \pm 1$). Exprimer p en fonction de C , M et G .

- I.4** Pour $e < 1$, on parle de trajectoires liées ; il s'agit d'ellipses dont on exprimera le demi-grand axe a en fonction de p et de e (e est l'excentricité de l'ellipse).
- I.5** Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p du point P moyennant l'hypothèse que celle-ci s'annule à l'infini.
- I.6** E_c désignant l'énergie cinétique du point P , on appelle $E = E_c + E_p$ l'énergie totale (ou mécanique) de P . Donner l'expression de E en fonction de m , M , G et a .
- I.7** Donner l'expression de T , la durée d'une révolution en fonction de a , M et G .
- I.8** Les résultats obtenus vont être appliqués au système solaire pour lequel on précise les masses du Soleil, de la Terre et de Mars, respectivement $M_S = 2,0.10^{30} \text{ kg}$, $m_T = 6,0.10^{24} \text{ kg}$, $m_M = 6,42.10^{23} \text{ kg}$.

Les trajectoires de la Terre et de Mars sont supposées :

- circulaires,
- de centre le Soleil et de rayons respectifs $r_T = 1,00 \text{ UA}$, $r_M = 1,52 \text{ UA}$
 $(1 \text{ UA} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m})$
- situées dans le même plan.

Calculer les vitesses orbitales v_T et v_M de la Terre et de Mars.

- I.9** Une sonde de masse $m = 10^3 \text{ kg}$ est en orbite autour de la Terre à une distance du centre de celle-ci, négligeable devant r_T . A l'instant $t = 0$, on ajuste la vitesse de la sonde de telle façon que la sonde va devenir un satellite du Soleil. Dans cette question et dans la suivante, on négligera donc l'attraction de la Terre et de Mars sur la sonde (voir **figure I.2**, page 4). A $t = 0$, \vec{v}_p est perpendiculaire à l'axe Soleil-Terre ; on veut que l'ellipse décrite par la suite vienne tangenter la trajectoire de Mars au point A . Quelle est la valeur du grand axe de l'ellipse décrite ? Connaissant l'énergie potentielle à $t = 0$ ainsi que l'énergie totale sur la trajectoire elliptique, déterminer la valeur de $\|\vec{v}_p\|$.

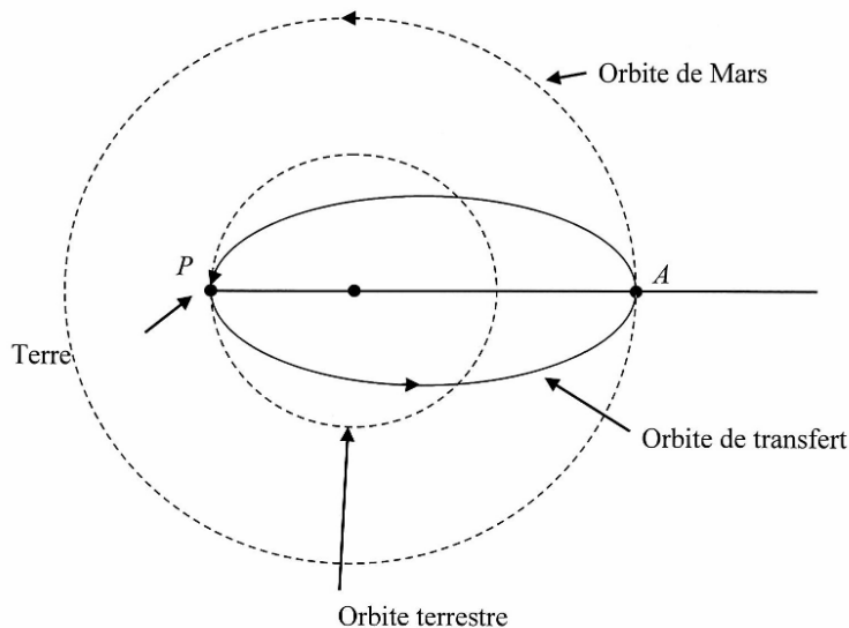


Figure I.2 : trajectoire de la sonde entre la Terre et Mars

- I.10** Calculer la durée ΔT du trajet de la sonde de la Terre vers Mars. La sonde doit pouvoir approcher effectivement Mars pour pouvoir être satellisée autour de cette planète au point A . A $t = 0$, on suppose donc une position des planètes comme indiqué sur la **figure I.3**. Déterminer l'expression de β en fonction de v_M , r_M et T , puis calculer la valeur de cet angle.

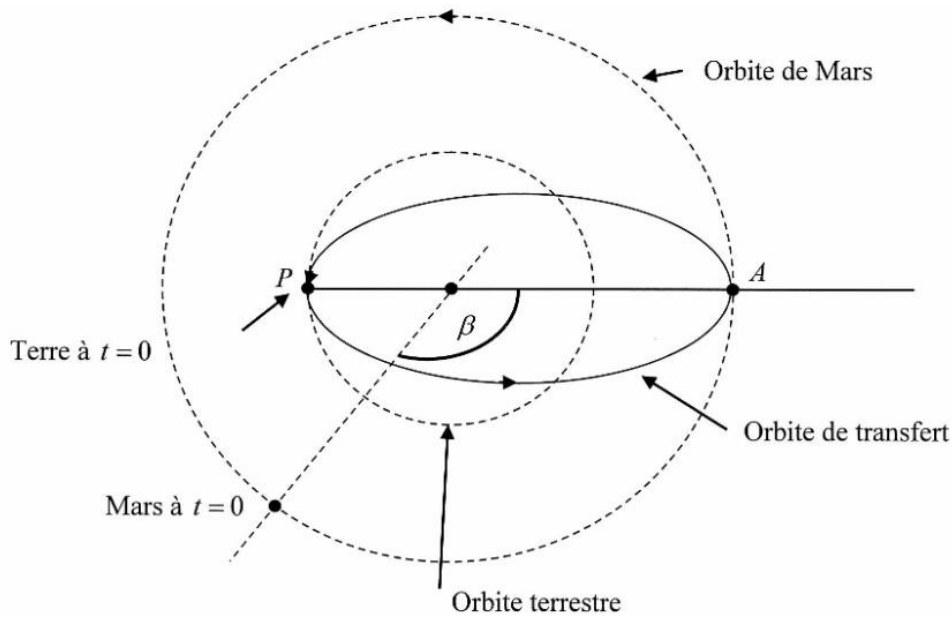


Figure I.3 : durée du transfert ; angle β

- I.11** Par ajustement de la vitesse au point A , la sonde est placée en orbite circulaire autour de Mars, à une distance r_0 du centre de cette dernière. A partir de là, l'attraction de la Terre et celle du Soleil sur la sonde seront considérées comme négligeables. La sonde ne présentant pas de symétrie sphérique, on la modélise comme l'assemblage de deux modules sphériques de masses $\frac{m}{2}$, de barycentres P_1 et P_2 , assemblés par une liaison de masse négligeable devant m . C'est donc le barycentre G de cet ensemble qui décrit la trajectoire circulaire de rayon r_0 autour de Mars ; on pose $GP_1 = GP_2 = h$. De plus, on va considérer un mouvement particulier pour lequel les points P_1 , G , P_2 demeurent alignés avec le centre de Mars (voir **figure I.4**). Donner l'expression de la vitesse de rotation ω de la sonde autour de Mars, en fonction de m_M , r_0 et G . Application numérique pour $r_0 = 3,5 \cdot 10^6$ m.

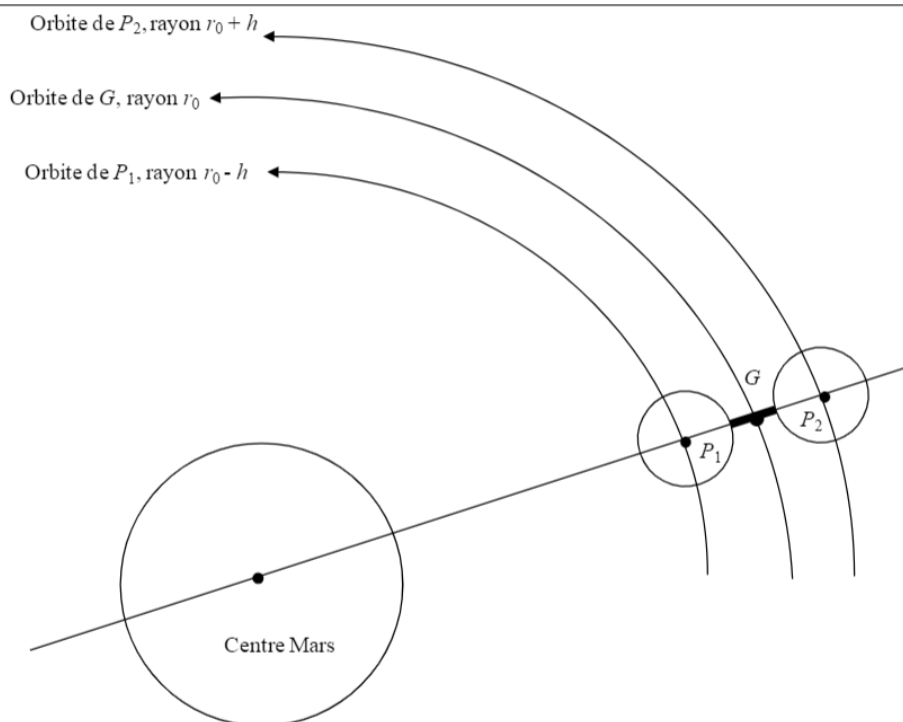


Figure I.4 : modélisation de la sonde

- I.12** Pendant la durée de la mission autour de Mars, le référentiel lié à Mars sera considéré comme pratiquement galiléen. Le mouvement du module de barycentre P_1 s'effectue donc sous l'action de la force d'attraction de Mars et sous l'action d'une force $\vec{\mathfrak{R}}$ due à l'action du second module et transmise par la « liaison ». Cette force est colinéaire à $\overrightarrow{P_1P_2}$, soit $\vec{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{2h}$. Etablir l'expression de \mathfrak{R} en fonction de m, m_M, G, r_0 et h . Simplifier cette expression en supposant $h \ll r_0$. Calculer la valeur de \mathfrak{R} pour $h = 10\text{m}$, (vous allez trouver une valeur faible montrant que la structure de la sonde n'est pas mise en péril par l'existence de cette force).

BONNE CHANCE

De la part de Borel DOMGUE