**ECOLE POLYTECHNIQUE**

**CONCOURS D'ADMISSITION 2023**
**FILIERE FUI FF**

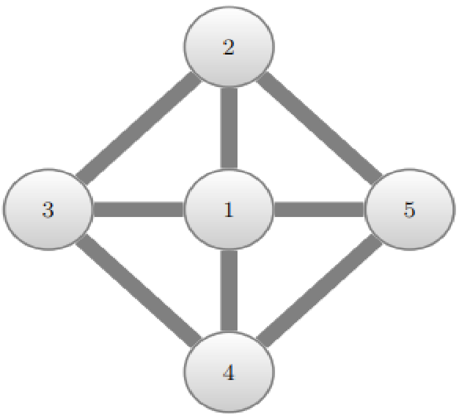
(Sujet d'entrainement)

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES 3H**

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve***

# Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :




Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \cdots, k, \cdots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant $k$ ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro $i$ ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle $i$ et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle $i$. On admet que l'on peut introduire, pour tout $k$ entier naturel, une variable aléatoire $S_k$ donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant $k$. À titre d'exemple, on aura donc

$\forall k \in \mathbf{N}$,
$$P(S_{k+1} = 1 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 \,|\, S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 \,|\, S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

# I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(P(S_k = i),\ i = 1, \cdots, 5)$.

2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout $k$ entier naturel.

3. En observant les colonnes de la matrice $B$, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable $S_0$ est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires $S_k$ ont toutes la même loi.

5. Est-ce que $S_0$ et $S_1$ sont indépendantes ?

# II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $E$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel $k$ non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(\mathrm{I}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où $\mathrm{I}_E$ représente l'endomorphisme identité de $E$.

6. Soit $x \in \ker(u - \mathrm{I}_E)$. Déterminer $\lim_{k\to\infty} r_k(x)$.

7. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $\left(r_k(x)\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de $E$, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \longrightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où $I_n$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice $P$, telle que $P^2 = P$.

# III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie, un entier $n \geq 2$.

**Définition 1** *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

**Définition 2** *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

*Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients $\lambda_i$ sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.*

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre $n$) est stable par le produit matriciel.

13. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que la matrice $A^p$ ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

    *Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leq j\leq n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.*

16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice $R_k$ est stochastique.

18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice $P$, stochastique, de rang 1.

19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

20. Montrer que $PA = P$. En déduire que $L$ est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne $L$ sont tous strictement positifs.

22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de la matrice $A$.

    *On pourra utiliser le résultat de la question 8.*

# IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = {}^tB$ où $B$ est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice $A^2$ sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite $P$ de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie en (2) ?

24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire $S_0$ suit cette loi, alors les variables $S_k$ suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants $k$, $k \in \mathbf{N}$).

FIN DU PROBLÈME

**BONNE CHANCE**

De la part de Borel DOMGUE