

Mots-clés : Mariage stable, Algorithme de Gale et Shapley, Appariement, Stabilité

Introduction du problème

Étant donné n hommes et n femmes, chacun ayant établi une liste de préférence ordonnée des individus du sexe opposé, l'objectif est de former des couples de manière à ce qu'il n'existe aucune paire (h, f) d'hommes et de femmes qui préféreraient être ensemble plutôt que de rester avec leurs partenaires respectifs. Lorsque cette condition est remplie, on considère que l'ensemble des mariages est **stable**.

Résolution du problème : Algorithme de Gale-Shapley

Algorithm 1 Algorithme de Gale-Shapley

```
1: Entrée :  $n$  hommes et  $n$  femmes, chacun avec une liste de préférences.
2: Sortie : Un ensemble de mariages stables.
3: Initialiser chaque homme et chaque femme comme étant célibataire.
4: while il existe un homme célibataire qui n'a pas encore proposé à toutes les femmes do
5:   Sélectionner un tel homme  $h$ .
6:    $f \leftarrow$  la femme préférée de  $h$  parmi celles à qui il n'a pas encore proposé.
7:   if  $f$  est célibataire then
8:      $h$  et  $f$  se fiancent.
9:   else
10:    Comparer  $h$  avec le fiancé actuel  $h'$  de  $f$ .
11:    if  $f$  préfère  $h$  à  $h'$  then
12:       $h$  et  $f$  se fiancent, et  $h'$  redevient célibataire.
13:    else
14:       $h$  reste célibataire.
15:    end if
16:  end if
17: end while
18: return l'ensemble des couples formés.
```

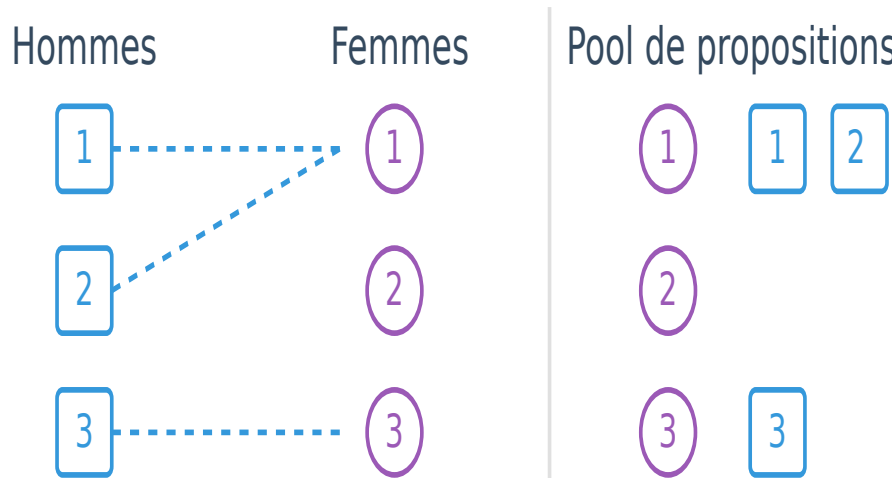
Complexité : polynomiale $\mathcal{O}(n^2)$

Stabilité des couplages (1)

Préférences

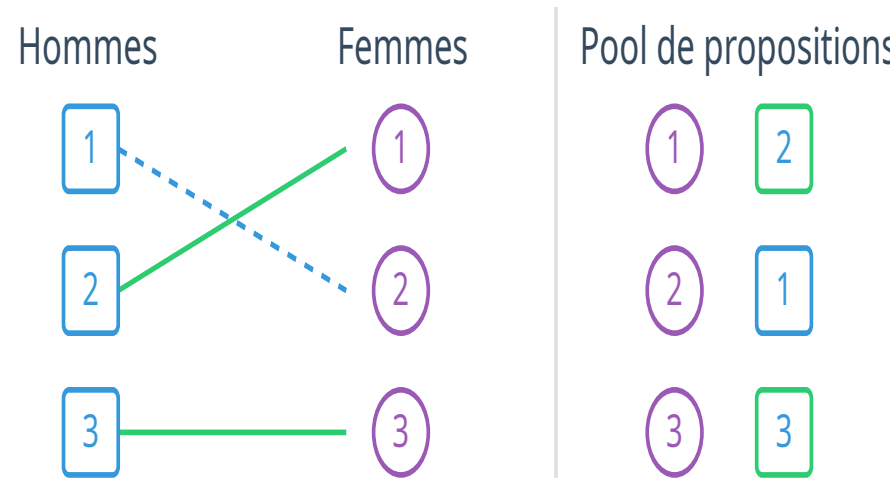
	Homme				Femme			
1	1	2	3		1	2	3	1
2	1	3	2		2	3	1	2
3	3	1	2		3	1	2	3

Tour : 1



• F1 reçoit H1 et H2 : choisit H2
• F3 reçoit H3 : accepte provisoirement

Tour : 2



• H1 (rejeté au t1) propose à F2
• F2 accepte H1 provisoirement

État : (H2,F1), (H1,F2), (H3,F3)

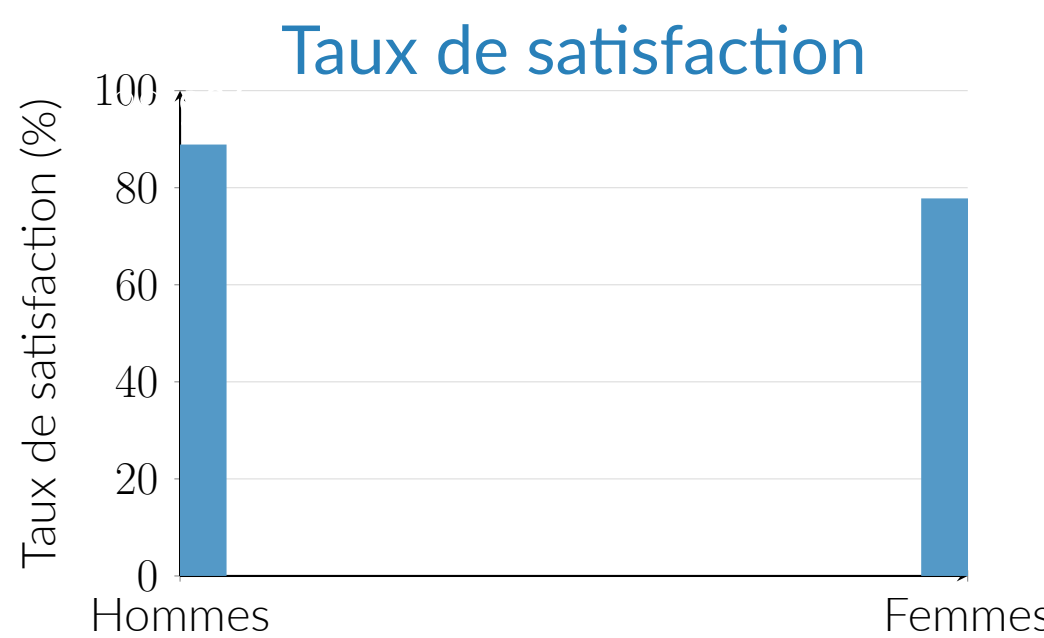
Stabilité des couplages (2)

Tour : 3



• Aucune nouvelle proposition
• Tous les couples sont stables
Couples finaux : (H2,F1), (H1,F2), (H3,F3)

Satisfaction



Analyse

Cette solution montre que l'algorithme de Gale-Shapley tend à favoriser légèrement les "proposants" (ici les hommes) en leur donnant en moyenne une meilleure satisfaction.

- ✓ Satisfaction moyenne des hommes : 88.9%
- ✓ Satisfaction moyenne des femmes : 77.8%
- ✓ Écart de satisfaction : 11.1%

Domaine d'application

Académique

- ✓ **Universités**
Parcoursup (France)
Systèmes similaires (USA, Japon)
- ✓ **Médecine**
Placement des internes
NRMP (USA)

Professionnel

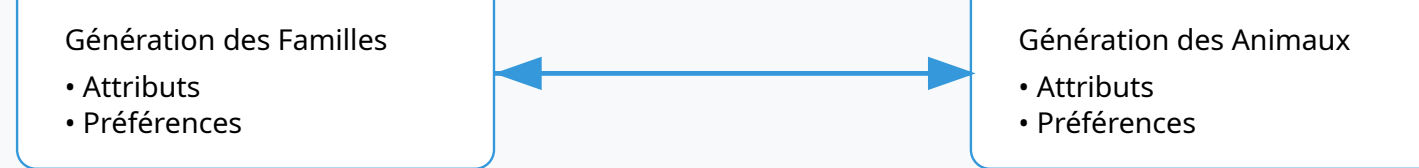
- ✓ **Recrutement RH**
Matching
ployeurs/candidats
Placement stagiaires
- ✓ **Enseignants**
Distribution des postes
Préférences géographiques

Industriel

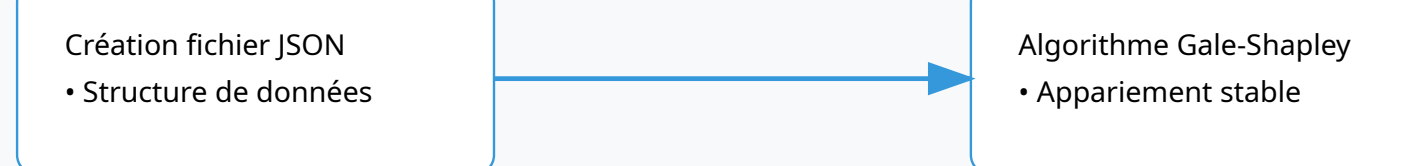
- ✓ **Ressources IT**
Cloud computing
Allocation serveurs
- ✓ **Logistique**
Circuit distribution
Chaîne d'approvisionnement

Simulation et Résultat : Refuge Animal

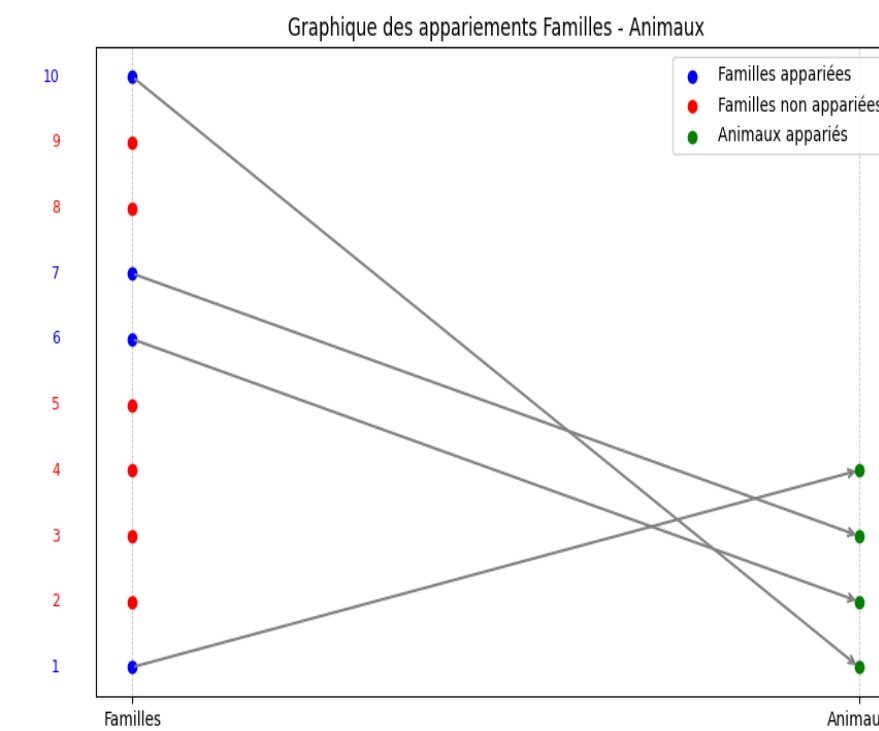
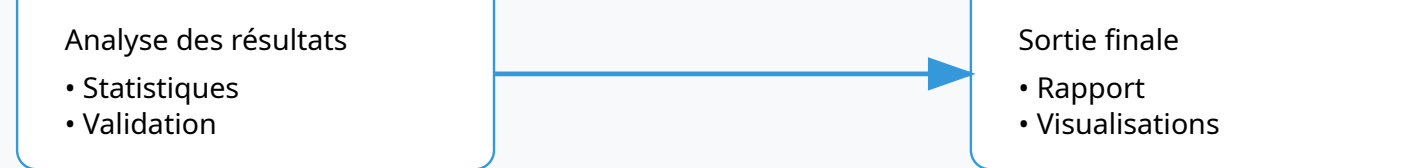
Phase 1: Génération des données



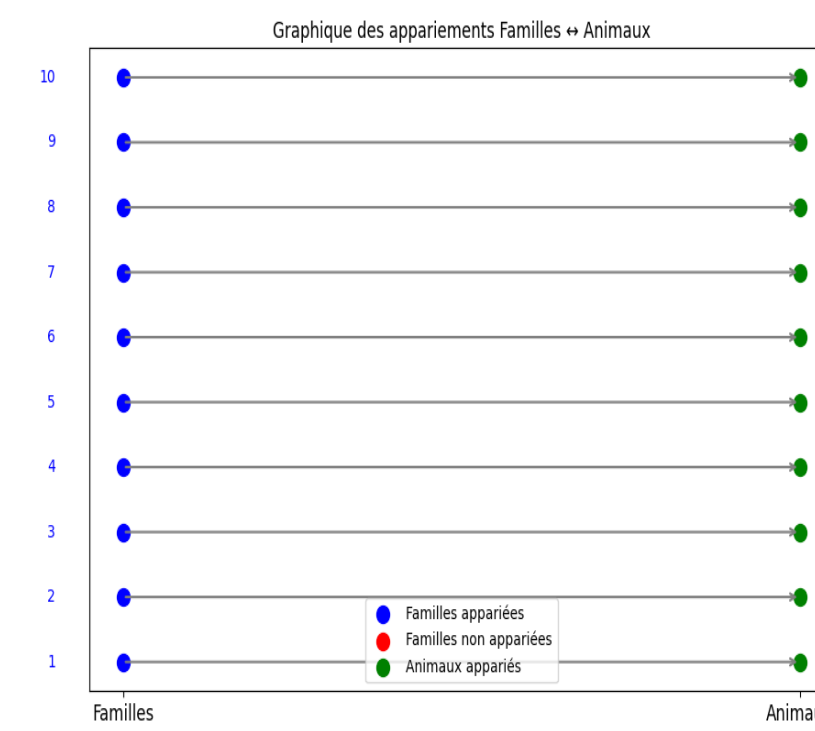
Phase 2: Prétraitement et Appariement



Phase 3: Résultats



Résultat de jeu de données de taille 14 (F=10, A=4)



Résultat de jeu de données de taille 20 (F=10, A=10)

Conclusion

- L'algorithme de Gale et Shapley garantit toujours l'obtention d'une solution stable.
- Ce modèle trouve des applications variées dans plusieurs domaines.
- La simulation réalisée a confirmé la validité et la robustesse de cet algorithme face à différents ensembles de préférences.
- Quelques extensions du problème classique du mariage stable :
 - Listes de préférences incomplètes
 - Couples interdits
 - Affectation stable
- En somme, cette étude met en lumière l'importance de l'algorithme de Gale-Shapley pour résoudre des problèmes d'appariement de manière équitable et efficace, tout en offrant des perspectives pour des travaux futurs.

Références

- [1] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.
- [2] Julien Grenet. La transparence et l'obstacle : principes et enjeux des algorithmes d'appariement scolaire. collection "Gouvernances", pages 101–138. Presses de Sciences Po, June 2022.
- [3] D. Gusfield and R. W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. MIT Press, 1989.