# 1. Vecteur aléatoires

Pour initialiser le cours de variable aléatoire pour les non probabilistes, on commence par le cas discret où la variable prend des valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Ensuite, on introduit le cas continu où la variable prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans un second temps, on s'intéresse à la relation entre deux variables aléatoires (indépendance, corrélation, lois conjointes, etc.). Mais si l'on veut étudier $d$ variables aléatoires avec $d \geq 3$, comment peut-on faire cela ?

La notion de vecteur aléatoire est introduite pour répondre à cette question. L'étude se généralise maintenant à un espace euclidien $E$ de dimension $d$ de base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_d)$ que l'on va identifier à $\mathbb{R}^d$ puisque pour tout élément $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ de $E$, avec $x_i$ des scalaires, on associe le $d$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ dans $\mathbb{R}^d$. Donc, on va munir $\mathbb{R}^d$ d'une structure d'espace mesuré avec la tribu borélienne.

## 1.1. Définition et notation

Le produit scalaire entre deux vecteurs $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^d$ est noté $\langle x, y \rangle$ et défini par la somme des produits des composantes correspondantes :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

En notation matricielle, cela s'écrit :

$$\langle x, y \rangle = x^T y,$$

où $x^T$ est la transposée de $x$.

De plus, nous avons la propriété suivante :

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$$

avec $A$ une matrice dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

**Définition 1.1-1** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mesurable. Si l'on note les composantes de $X$ sous la forme*

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_d),$$

*alors les applications $X_1, X_2, \ldots, X_d$ sont des variables aléatoires réelles, appelées marginales de $X$. Le fait que ce soient des variables aléatoires découle de ce que les applications*

$$X_k = \pi_k \circ X,$$

*sont mesurables.*

**Convention :** Il est d'usage d'identifier les vecteurs de $\mathbb{R}^d$ à des matrices-colonnes ; ainsi on écrira le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$$

et alors :

$$X^T = (X_1 \cdots X_d)$$

est une matrice-ligne.

## 1.2. Fonction caractéristique

**Définition 1.2-1** *On considère $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire, on définit sa* *fonction caractéristique* $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *par :*

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle u,X\rangle}\right], \forall u \in \mathbb{R}^d,$$

*où*

$$\langle u, X\rangle(\omega) = \langle u, X(\omega)\rangle, \forall \omega \in \Omega.$$

*Autrement dit, si* $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *et* $u = (u_1, \ldots, u_d)$ *:*

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1X_1+\cdots+u_dX_d)}\right].$$

**Théorème 1.2-1** *Deux variables aléatoires possédant la même fonction caractéristique ont la même loi : si* $X$ *et* $Y$ *sont deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *telles que* $\Phi_X = \Phi_Y$*, alors* $P_X = P_Y$*.*

**Corollaire 1.2-1** *Soit* $X_k : \Omega \to \mathbb{R}^{d_k}$*,* $1 \leq k \leq n$*, des variables aléatoires ; elles sont indépendantes si et seulement si :*

$$\Phi_{[X_1,\ldots,X_n]}(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_{X_1}(t_1)\cdots\Phi_{X_n}(t_n), \quad \forall t_k \in \mathbb{R}^{d_k}, 1 \leq k \leq n.$$

**Preuve :**

On a d'après la définition

$$\Phi_{X_1}(t_1)\cdots\Phi_{X_n}(t_n) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} e^{it_1x_1}\, dP_{X_1}(x_1)\cdots\int_{\mathbb{R}^{d_n}} e^{it_nx_n}\, dP_{X_n}(x_n)$$

Or on a La fonction $f$ définie par $e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}$ est intégrable par rapport à la mesure produit $P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_n}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{d_n}} \left|e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\right| d(P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_n})(x_1,\ldots,x_n) = 1.$$

donc d'aprés le théorem de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{d_n}} e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\, d(P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_n})(x_1,\ldots,x_n)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} e^{it_1x_1}\, dP_{X_1}(x_1)\cdots\int_{\mathbb{R}^{d_n}} e^{it_nx_n}\, dP_{X_n}(x_n)$$

Donc on obtient le résultat.

## 1.3. Espérance et variance d'un vecteur aléatoire

**Définition 1.3-1** *On considère $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire, on dit que $X$ admet une esperence si pour tout $k$ entre 1 et $d$, $X_k$ admet une espérance, c'est-à-dire :*

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, \quad \mathbb{E}[X_k] \text{ existe.}$$

*et dans ce cas on note :*

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_d)),$$

*ou, matriciellement :*

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_d) \end{pmatrix}.$$

**Proposition 1.3-1** *Soit $A$ une matrice dans $\mathbb{M}_{d',d}(\mathbb{R})$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire admettant une espérance. Alors le vecteur $AX$ admet une espérance et on a*

$$\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}(X).$$

**Preuve :**

On a

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq d', 1 \leq j \leq d}$$

Donc

$$AX = \left( \sum_{l=1}^{d} a_{k,l} X_l \right)_{1 \leq k \leq d'},$$

et par suite

$$\mathbb{E}(AX) = \left( \mathbb{E}\left( \sum_{l=1}^{d} a_{k,l} X_l \right) \right)_{1 \leq k \leq d'}.$$

. De plus, pour tout $k$ entre 1 et $d'$, on a :

$$\left|\sum_{l=1}^{d} a_{k,l} X_l\right| \leq \sum_{l=1}^{d} |a_{k,l}| \, |X_l| \, ,$$

donc chacune des composantes de $AX$ est intégrable ; donc $AX$ est intégrable et on a :

$$\mathbb{E}(AX) = \left(\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{d} a_{ij} X_j\right)\right)_{1\leq i\leq d'} = \left(\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\mathbb{E}(X_j)\right)_{1\leq i\leq d'} = A\mathbb{E}(X).$$

**Remarque :**

Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E}\left(\langle a, X\rangle\right) = \mathbb{E}(a^T X) = a^T\mathbb{E}(X).$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\langle a, X\rangle\right) = \langle a, \mathbb{E}(X)\rangle.$$

**Définition 1.3-2** *Soit*

$$M = (X_{k,l})_{1\leq k\leq n, 1\leq l\leq s}$$

*une matrice formée de variables aléatoires réelles $X_{k,l} : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que c'est une matrice aléatoire. On dit qu'elle est intégrable si chacune des $X_{k,l}$ admet une espérance, et Dans ce cas :*

$$\mathbb{E}(M) = \left(\mathbb{E}(X_{k,l})\right)_{1\leq k\leq n, 1\leq l\leq s} .$$

**Proposition 1.3-2** *Soit $M$ une matrice aléatoire et $A$ et $B$ deux matrices données telles que les produits $AM$ et $MB$ bien définies et intégrables. On a :*

$$\mathbb{E}(AM) = A\mathbb{E}(M) \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}(MB) = \mathbb{E}(M)B$$

**Preuve :** on procéde de la meme méthode que pour la proposition 1.3-1

**Définition 1.3-3** *1. soit $X, Y \in L^2(\Omega)$ sont deux variables aléatoires réelles de carré intégrable, leur covariance est définie par :*

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

*Lorsque $Y = X$, on obtient la variance de $X$ :*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

*2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de carré intégrable. Sa matrice de covariance, notée $K_X$, est définie par :*

$$K_X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T\right],$$

*où $X - \mathbb{E}[X]$ est le vecteur centré de $X$, et $(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T$ est la matrice de covariances.*

*La matrice $K_X$ est une matrice carrée d'ordre d, dont les éléments sont donnés par :*

$$(K_X)_{kl} = \mathrm{cov}(X_k, X_l), \quad 1 \leq k, l \leq d,$$

*où $X_k$ et $X_l$ sont les composantes du vecteur aléatoire $X$.*

**Lemme 1.3-1** *Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$u^T K_X u = \mathbb{E}\left[\langle u, X - \mathbb{E}(X)\rangle^2\right].$$

**Preuve :** Selon la proposition 1.3-1, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$u^T K_X u = u^T \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]\,[X - \mathbb{E}(X)]^T)u = \mathbb{E}(u^T\,[X - \mathbb{E}(X)]\,[X - \mathbb{E}(X)]^T\,u)$$

Or on a

$$u^T\,[X - \mathbb{E}(X)] = \langle u, X - \mathbb{E}(X)\rangle$$

et d'autre part

$$[X - \mathbb{E}(X)]^T u = \langle X - \mathbb{E}(X), u \rangle$$

donc :

$$u^T K_X u = \mathbb{E}\left[\langle u, X - \mathbb{E}(X)\rangle^2\right]$$

**Proposition 1.3-3** *Si $X$ est de carré intégrable, sa matrice de covariance $K_X = (cov(X_k, X_l))_{1 \leq k,l \leq d}$ est symétrique positive. De plus, la forme quadratique associée est non dégénérée si et seulement si les variables aléatoires $X_1 - \mathbb{E}(X_1), \ldots, X_d - \mathbb{E}(X_d)$ sont linéairement indépendants.*

**Preuve :** La symétrie de la matrice de covariance est évidente. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. D'après le lemme précédent, on a

$$u^T K_X u = \mathbb{E}\left[\langle u, X - \mathbb{E}(X)\rangle^2\right] \geq 0$$

donc la matrice de covariance est positive. Soit $q : u \mapsto u^T K_X u$ la forme quadratique associée à $K_X$.

$q$ est dégénérée si et seulement s'il existe un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $q(u) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $u_1(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) + \ldots + u_d(X_d - \mathbb{E}(X_d)) = 0$ pour des $u_1, \ldots, u_d$ non tous nuls.

Donc, $q$ est non dégénérée si et seulement si les variables aléatoires $X_1 - \mathbb{E}(X_1), \ldots, X_d - \mathbb{E}(X_d)$ sont linéairement indépendantes.

**Proposition 1.3-4** *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes.Alors $cov(X, Y) = 0$ et $X - \mathbb{E}(X)$ est orthogonal à $Y - \mathbb{E}(Y)$*

**Preuve :**

Par définition, la covariance de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ est :

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \langle X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y)\rangle$$

Or comme $X$ et $Y$ sont indépendantes

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)$$

donc

$\text{cov}(X, Y) = 0$ et $X - \mathbb{E}(X)$ est orthogonal à $Y - \mathbb{E}(Y)$

**Remarque :**La réciproque est fausse, on prend par exemple une variable normale centrée réduite $X$.on a bien sur $X$ et $X^2$ ne sont pas indépendantes mais

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^3) = 0$$

Ce qui donne que $\text{cov}(X, X^2) = 0$

**Corollaire 1.3-1** *Soient $X_1, \ldots, X_d : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors la matrice de covariance du vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est diagonale.*