

同値関係の例

B.Y. Chen (chen-boyang00@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

12/21/2024

Example

n 次正方行列 A, B に対して, $A = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在するとき A と B は相似であるという. この相似の関係は同値関係であることを証明する

同値関係であることを示すために、(1). 反射率 (2). 対称率 (3). 推移率 の三つの性質の成立を確かめれば良い

1. $\forall A \in M_{n \times n}, A = I_n^{-1}AI_n$ なので、 $A \sim A$ が成り立つ (ただし、 I_n は $n \times n$ の単位行列)
2. $A \sim B$ が成り立つとき、i.e. $\exists P \in GL_n$ s.t. $B = P^{-1}AP$ のとき、 $PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$ が成り立つ、i.e. $B \sim A$ が成り立つ。よって、 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ が成り立つとき、i.e. $\exists P_1 \in GL_n$ s.t. $B = P_1^{-1}AP_1, \exists P_2 \in GL_n$ s.t. $C = P_2^{-1}BP_2$ のとき、 $C = P_2^{-1}BP_2 = P_2^{-1}(P_1^{-1}AP_1)P_2 = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2, P_3 = P_1P_2$ としておくと $P_3 \in GL_n$ かつ $C = P_3^{-1}AP_3$ が成り立つ。以上より、 $A \sim B \cap B \sim C \Rightarrow A \sim C$ が証明された