

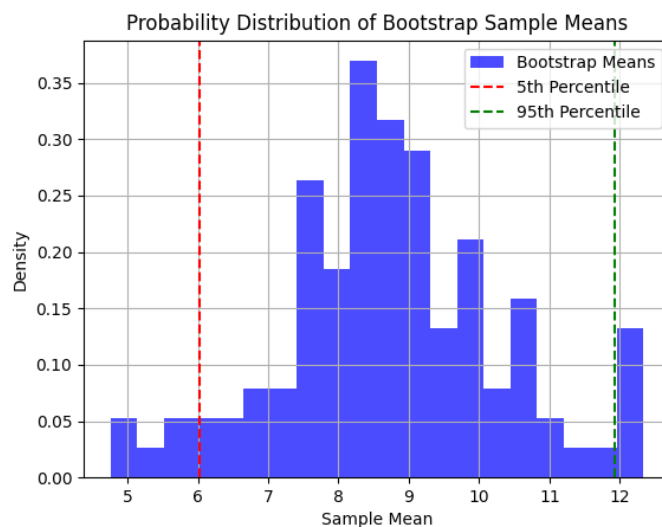
## 統計學第三次作業

# Application of Bootstrap Sampling on Exponential Distribution

G19\_110201012 洪博益, 112401016 鄭生芯, 112401017 洪浚晴

生成平均數=10 的指數分配， $n=50$  的隨機樣本。採用 Bootstrap 法從這個隨機樣本數據集中重抽 30 個樣本並計算樣本平均數，重覆 100 次。

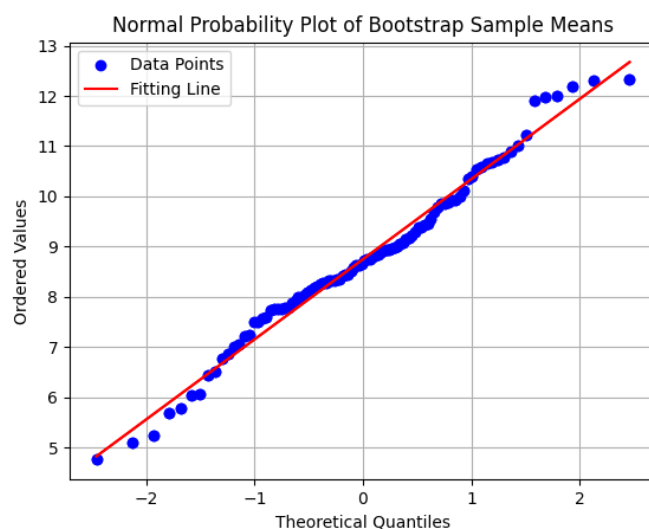
一、繪出這 100 個樣本平均數的機率分配，排序後並產生 5% 和 95% 百分位數，作為區間估計範圍。



圖一、Bootstrap 法取樣後的平均數機率分配

第 5 百分位為:6.02；第 95 百分位為:11.92。如使用 Bootstrap 法取樣後的平均數符合常態分布，則在 90%信賴區間內，母體平均應在[6.02, 11.92] 區間內。

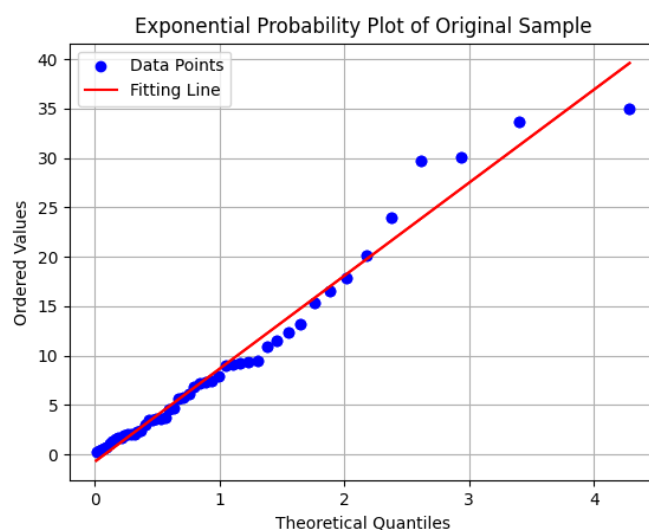
二、利用常態機率繪圖判斷這 100 筆樣本平均數是否服從常態分配？



圖二、常態機率繪圖(Normal Probability Plot)

圖二中 x 軸為數據的 z score，藍色圓點為使用 Bootstrap 法取樣後的平均數，紅色實線為藍色數據點與直線  $y = ax + b$  方程式擬合後的結果。其  $R^2$  值為 0.98，表數據與擬合直線相當符合，符合常態分佈。

三、產生指數分配機率繪圖判斷原始 50 筆數據是否服從指數分配？如何從圖中獲得該分配的平均數估計？



圖三、指數分配機率繪圖(Exponential Probability Plot)

圖三中藍色圓點為原指數分配數據，紅色實線為藍色數據點與直線 $y = ax + b$ 方程式擬合後的結果。其 $R^2$  值為 0.97，表數據與擬合直線相當符合，符合指數分配分佈。

圖三橫軸為指數分配的逆累積分布函數，其中累積分布函數為

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) dt = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

因此橫軸為

$$x_{theoretical} = F^{-1}(q) = -\lambda \ln(1 - q), q \in [0,1]$$

數據  $x_{data}$  符合指數分布，其排序值可以表示為理論分位數  $x_{theoretical}$  的縮放：

$$x_{data} = \lambda \cdot x_{theoretical}$$

因此，圖形上斜率即為分布平均數。