

# Arrangements d'hyperplans : apports de la dualité et de l'optimisation

*Baptiste Plaquevent-Jourdain*, avec  
Jean-Pierre Dussault, Université de Sherbrooke  
Jean Charles Gilbert, INRIA Paris

10 Juin 2023

# Outline

- 1 Cadre
- 2 Vers les hyperplans
- 3 Un algorithme
- 4 Matroïdes et dualité
- 5 Le cas affine

# Plan

- 1 Cadre
- 2 Vers les hyperplans
- 3 Un algorithme
- 4 Matroïdes et dualité
- 5 Le cas affine

# Systems of smooth nonlinear equations

General problem:

Find a point  $x_* \in \mathbb{R}^n$ :  $F(x_*) = 0$ , with  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  smooth

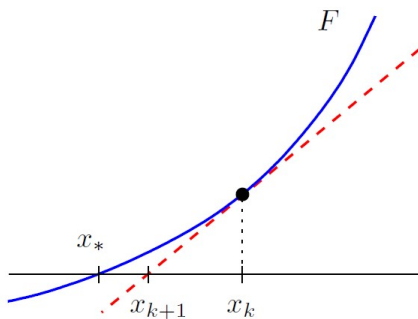


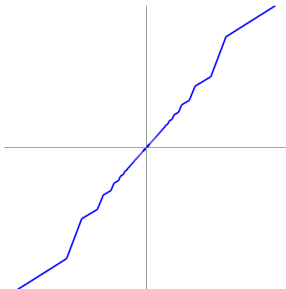
Illustration of Newton's method in 1D

$x_0$  near  $x_*$ ,  
 $F \in \mathcal{C}^{1,1}$ ,  
 $F'(x_*)$  non-singular  
 $\Downarrow$   
quadratic  
convergence

# Nonsmooth equations

Harder problem:

Find a point  $x_* \in \mathbb{R}^n$ :  $F(x_*) = 0$ , with  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nonsmooth



$x_0$  near  $x_*$ ,  
 $F$  semismooth,  
 all  $J \in "F'(x_*)"$   
 non-singular  
 $\Downarrow$   
 quadratic  
 convergence

Kummer's counter-example to Newton; in the nonsmooth case the Jacobian might not be defined.

# Remedy: semismooth Newton's method

Adaptation of the usual method for this difficulty ([Qi93; QS93])

Replaces  $F'(x_k)$  with a "generalized Jacobian"  $J_k$

## Algorithm's sketch

- take  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (near  $x_*$ )
- for  $k = 1, 2, \dots$ , solve  $F(x_k) + J_k \delta_k = 0$  for  $\delta_k$ , with  $J_k \in \partial_B F(x_k)$ :  $\partial_B F$  is the Bouligand differential
- then  $x_{k+1} = x_k + (\alpha_k) \delta_k$

# Remedy: semismooth Newton's method

Adaptation of the usual method for this difficulty ([Qi93; QS93])

Replaces  $F'(x_k)$  with a "generalized Jacobian"  $J_k$

## Algorithm's sketch

- take  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (near  $x_*$ )
- for  $k = 1, 2, \dots$ , solve  $F(x_k) + J_k \delta_k = 0$  for  $\delta_k$ , with  $J_k \in \partial_B F(x_k)$ :  $\partial_B F$  is the Bouligand differential
- then  $x_{k+1} = x_k + (\alpha_k) \delta_k$

# Remedy: semismooth Newton's method

Adaptation of the usual method for this difficulty ([Qi93; QS93])

Replaces  $F'(x_k)$  with a "generalized Jacobian"  $J_k$

## Algorithm's sketch

- take  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (near  $x_*$ )
- for  $k = 1, 2, \dots$ , solve  $F(x_k) + J_k \delta_k = 0$  for  $\delta_k$ , with  $J_k \in \partial_B F(x_k)$ :  $\partial_B F$  is the Bouligand differential
- then  $x_{k+1} = x_k + (\alpha_k) \delta_k$



# Remedy: semismooth Newton's method

Adaptation of the usual method for this difficulty ([Qi93; QS93])

Replaces  $F'(x_k)$  with a "generalized Jacobian"  $J_k$

## Algorithm's sketch

- take  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (near  $x_*$ )
- for  $k = 1, 2, \dots$ , solve  $F(x_k) + J_k \delta_k = 0$  for  $\delta_k$ , with  $J_k \in \partial_B F(x_k)$ :  $\partial_B F$  is the Bouligand differential
- then  $x_{k+1} = x_k + (\alpha_k) \delta_k$

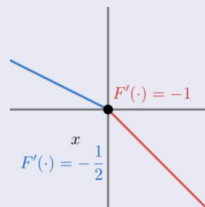
# Generalized derivatives

## Bouligand differential

$$\partial_B F(x) = \{J \in \mathbb{R}^{n \times n} : \exists (x_k)_k \rightarrow x, F'(x_k) \rightarrow J\} \quad (1)$$

Example:  $F(x) = \begin{cases} -x/2 & \text{if } x \leq 0 \\ -x & \text{if } x > 0 \end{cases}$ ,

$$\partial_B F(0) = \{-1/2, -1\}.$$



$$\underbrace{\partial_B F(x)}_{=??} \subsetneq \underbrace{\partial_B F_1(x) \times \cdots \times \partial_B F_p(x)}_{\prod \dots = \text{easy}} \quad (\text{sometimes } =)$$

∃ other differentials: Clarke, Mordukhovich, 2nd order...

# Linear Complementarity Problems

General form [CPS92; FP03]

$$\begin{aligned} A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, a, b \in \mathbb{R}^n, &\rightarrow \mathcal{A}(x) = Ax + a, \mathcal{B}(x) = Bx + b \\ 0 \leq (Ax + a) \perp (Bx + b) \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \forall i, A_{i,:}x + a_i \geq 0, B_{i,:}x + b_i \geq 0, &(A_{i,:}x + a_i)(B_{i,:}x + b_i) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Remark:  $u \geq 0, v \geq 0, uv = 0 \Leftrightarrow \min(u, v) = 0$

$$(2) \Leftrightarrow \forall i, F_i(x) := \min(\mathcal{A}_i(x), \mathcal{B}_i(x)) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$$

# Linear Complementarity Problems

General form [CPS92; FP03]

$$\begin{aligned} A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, a, b \in \mathbb{R}^n, &\rightarrow \mathcal{A}(x) = Ax + a, \mathcal{B}(x) = Bx + b \\ 0 \leq (Ax + a) \perp (Bx + b) \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \forall i, A_{i,:}x + a_i \geq 0, B_{i,:}x + b_i \geq 0, &(A_{i,:}x + a_i)(B_{i,:}x + b_i) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Remark:  $u \geq 0, v \geq 0, uv = 0 \Leftrightarrow \min(u, v) = 0$

$$(2) \Leftrightarrow \forall i, F_i(x) := \min(\mathcal{A}_i(x), \mathcal{B}_i(x)) = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$$

# Summary

Minimum function on LCPs  $\Rightarrow$  semismooth system

Adapted Newton requires info on  $\partial_B \min(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\cdot) = \partial_B F(\cdot)$

Or to form  $\partial_C \min(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\cdot)$ .

One  $J_B \in \partial_B F$  : [Qi93]

One  $J_C \in \partial_C F$  : [CX11]

But all of them?

# Upcoming plan

## The main question

Determine generalized Jacobians of

$$x \mapsto F(x) = \min(Ax + a, Bx + b)$$

- their structure
- finite (but exponential) number of elements
- how to compute them

# Plan

- 1 Cadre
- 2 Vers les hyperplans
- 3 Un algorithme
- 4 Matroïdes et dualité
- 5 Le cas affine

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_B F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_B$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$



# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_{\mathcal{B}} F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_{\mathcal{B}}$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_{\mathcal{B}} F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_{\mathcal{B}}$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_B F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_B$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_{\mathcal{B}} F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_{\mathcal{B}}$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_{\mathcal{B}} F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_{\mathcal{B}}$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_{\mathcal{B}} F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_{\mathcal{B}}$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Computing the B-differential

$f, g \in \mathcal{C}^1$ :  $\min(f(x), g(x))$  diff  $\Leftrightarrow f(x) \neq g(x)$  or  $f'(x) = g'(x)$ .

Important:  $F$  is piecewise affine:  $F'$  is piecewise **constant**.

$$\begin{cases} A_{i,:} = B_{i,:} \\ A_{i,:}x + a_i < B_{i,:}x + b_i \\ A_{i,:}x + a_i > B_{i,:}x + b_i \end{cases} \Rightarrow \forall J \in \partial_{\mathcal{B}} F(x), J_{i,:} = \begin{cases} A_{i,:} \\ A_{i,:} \\ B_{i,:} \end{cases}$$

$I(x) := \{i \in [1 : n] : A_{i,:}x + a_i = B_{i,:}x + b_i, A_{i,:} \neq B_{i,:}\}; |I(x)| = p$

$\min(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  non-diff  $\Leftrightarrow$  affine terms equal  $\Leftrightarrow$  **hyperplanes**

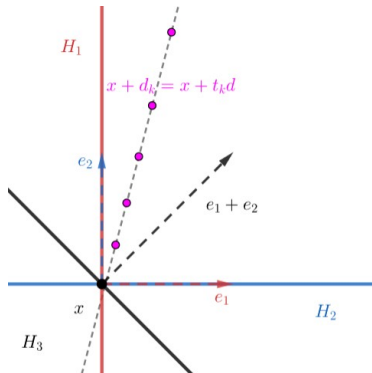
$$\mathbb{R}^n = H_i^- \cup H_i \cup H_i^+, \quad H_i^{-,+} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x <, > 0\}$$

Hyperplanes  $H_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\perp := v_i^\perp$ ; for  $\partial_{\mathcal{B}}$ 's def,  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i$

$H_i^-$  or  $H_i^+$ ,  $\forall i \in [1 : p]$ :  $H_i^+ \Leftrightarrow J_{i,:} = A_{i,:}$ ,  $H_i^- \Leftrightarrow J_{i,:} = B_{i,:}$

# Directions and hyperplanes - 1

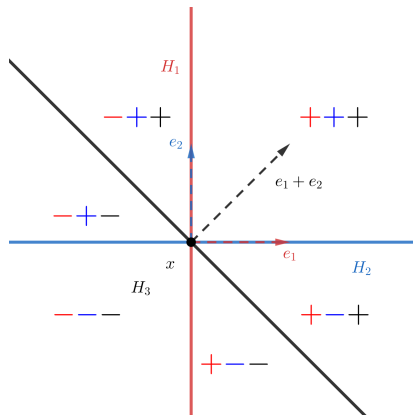
$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3] = [e_1 \ e_2 \ e_1 + e_2]$$



Red, blue, black:  $H_i$  and  $v_i$ . In magenta, points of the form  $x + t_k d, t_k \searrow 0$ . The points remain on the same sides of the hyperplanes along  $k$ : the  $J$  is constant; no need for sequences, points are sufficient.

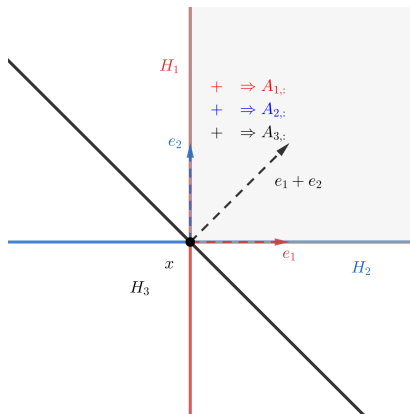


# Directions and hyperplanes - 2



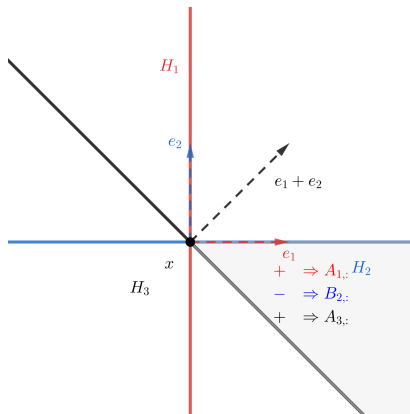
$\forall i \in [1 : p]$ , 2 possibilities: maximum of  $2^p$  Jacobians. Here, 6 among the  $2^3 = 8$  possible Jacobians exist in  $\partial_B F$

# Directions and hyperplanes - 3



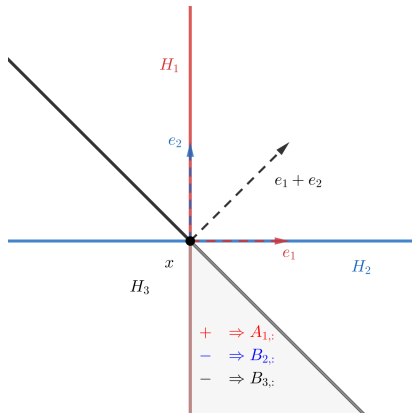
In the grey area, the points remain on the same sides of the hyperplanes: the Jacobian matrix remains constant.

# Directions and hyperplanes - 3



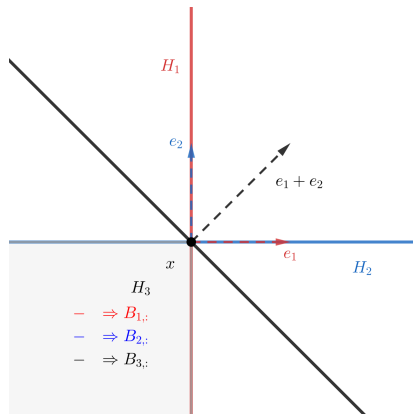
In the grey area, the points remain on the same sides of the hyperplanes:  
the Jacobian matrix remains constant.

# Directions and hyperplanes - 3



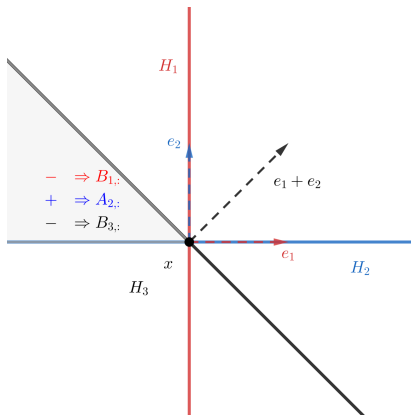
In the grey area, the points remain on the same sides of the hyperplanes: the Jacobian matrix remains constant.

# Directions and hyperplanes - 3



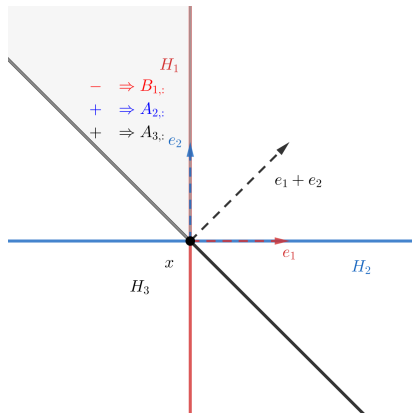
In the grey area, the points remain on the same sides of the hyperplanes: the Jacobian matrix remains constant.

# Directions and hyperplanes - 3



In the grey area, the points remain on the same sides of the hyperplanes: the Jacobian matrix remains constant.

# Directions and hyperplanes - 3



In the grey area, the points remain on the same sides of the hyperplanes:  
the Jacobian matrix remains constant.

# Summary

$|I(x)| = p$  hyperplanes,  $H_i = v_i^\perp$ ,  $v_i = B_{i,:} - A_{i,:}$

$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i =$  differentiable points, on the  $+$  or  $-$  side of every  $H_i$ .

Fundamental question

given  $v_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\top$   
find all  $s = (s_1, \dots, s_p) \in \{\pm 1\}^p$ ,  
s.t.  $\exists d_s, \forall i \in [1 : p], s_i v_i^\top d_s > 0$

$2^p$  linear feasibility problems to solve... How to improve?



# Summary

$|I(x)| = p$  hyperplanes,  $H_i = v_i^\perp$ ,  $v_i = B_{i,:} - A_{i,:}$

$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup H_i =$  differentiable points, on the  $+$  or  $-$  side of every  $H_i$ .

## Fundamental question

given  $v_i := (B_{i,:} - A_{i,:})^\top$   
find all  $s = (s_1, \dots, s_p) \in \{\pm 1\}^p$ ,  
s.t.  $\exists d_s, \forall i \in [1 : p], s_i v_i^\top d_s > 0$

$2^p$  linear feasibility problems to solve... How to improve?

# From literature

Very well-known in algebra / combinatorics...

... but very theoretically: Möbius function, lattices, matroids.

Very impressive results such as  $|\partial_B F(x)|$  (Winder [Win66])

$$\begin{aligned} |\partial_B F(x)| &= \sum_{T \subset \{H_i, i \in [1:m]\}} (-1)^{|T| - n + \dim(\bigcap_{t \in T} H_t)} \\ &= \sum_{\mathcal{V} \subset \{v_1, \dots, v_m\}} (-1)^{|\mathcal{V}| - \text{rank}(\mathcal{V})} \\ &= \sum_{\mathcal{V} \subset \{v_1, \dots, v_m\}} (-1)^{\text{null}(\mathcal{V})} \end{aligned}$$

or upper bounds but not exactly  $\partial_B F(x)$ .

# From literature

Very well-known in algebra / combinatorics...

... but very theoretically: Möbius function, lattices, matroids.

Very impressive results such as  $|\partial_B F(x)|$  (Winder [Win66])

$$\begin{aligned} |\partial_B F(x)| &= \sum_{T \subset \{H_i, i \in [1:m]\}} (-1)^{|T| - n + \dim(\bigcap_{t \in T} H_t)} \\ &= \sum_{\mathcal{V} \subset \{v_1, \dots, v_m\}} (-1)^{|\mathcal{V}| - \text{rank}(\mathcal{V})} \\ &= \sum_{\mathcal{V} \subset \{v_1, \dots, v_m\}} (-1)^{\text{null}(\mathcal{V})} \end{aligned}$$

or upper bounds but not exactly  $\partial_B F(x)$ .

# Plan

- 1 Cadre
- 2 Vers les hyperplans
- 3 Un algorithme**
- 4 Matroïdes et dualité
- 5 Le cas affine

# Schéma

## L'algorithme RČ [RČ18]

- procédé récursif : hyperplans ajoutés un par un
- arbre - deux descendants si  $H_{k+1}$  coupe la chambre en 2
- vérification faite par l'optimisation linéaire

→ Il est possible d'apporter des améliorations 'générales'.  
Ou d'utiliser les matroïdes !

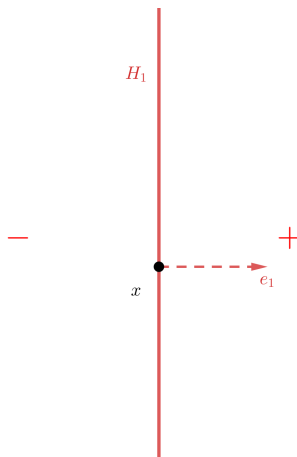
# Schéma

## L'algorithme RČ [RČ18]

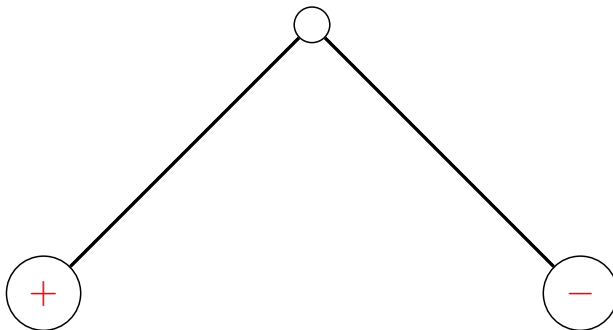
- procédé récursif : hyperplans ajoutés un par un
- arbre - deux descendants si  $H_{k+1}$  coupe la chambre en 2
- vérification faite par l'optimisation linéaire

↪ Il est possible d'apporter des améliorations 'générales'.  
Ou d'utiliser les matroïdes !

# Exemple avec les chambres et l'arbre

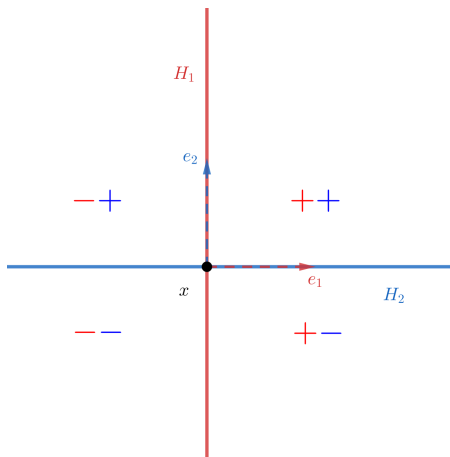


# Exemple avec les chambres et l'arbre

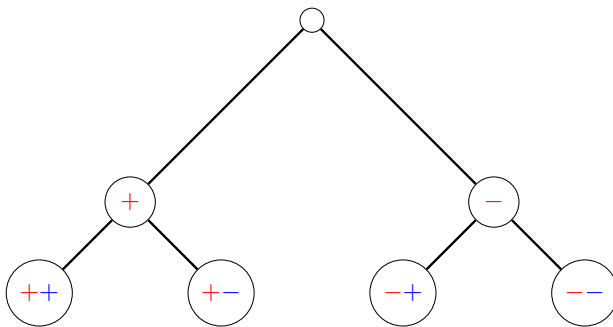




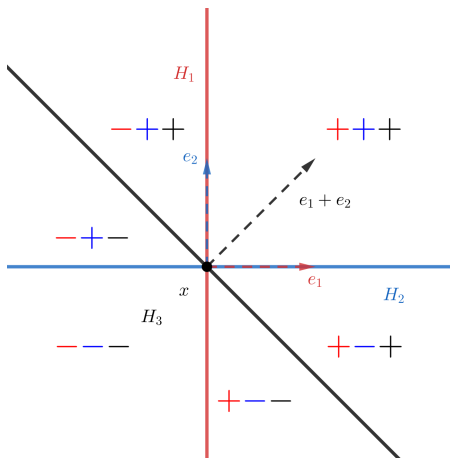
# Exemple avec les chambres et l'arbre



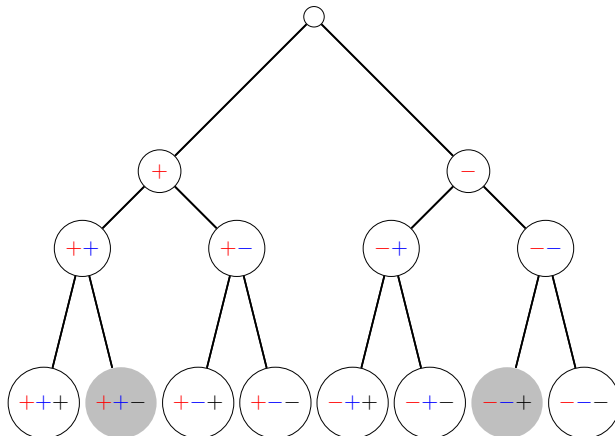
# Exemple avec les chambres et l'arbre



# Exemple avec les chambres et l'arbre



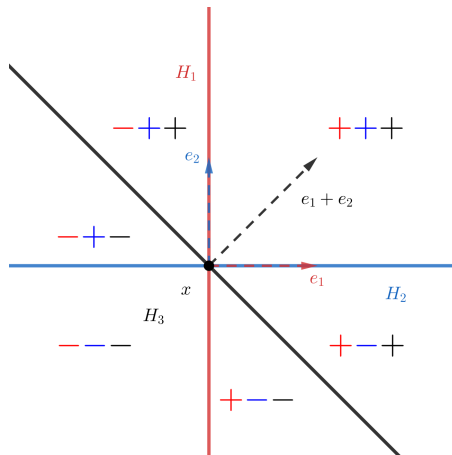
# Exemple avec les chambres et l'arbre



# Plan

- 1 Cadre
- 2 Vers les hyperplans
- 3 Un algorithme
- 4 Matroïdes et dualité**
- 5 Le cas affine

# Principe



$++-$  ( $- - +$ ) correspond à un POL non-réalisable.  $+$  à droite de  $H_1$ ,  $+$  en haut de  $H_2$ ,  $-$  en bas à gauche de  $H_3$  : impossible de trouver un point.

# L'alternative de Gordan

## L'astuce de l'alternative

$M \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , exactement une des deux affirmations est vraie :

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^n : Mx > 0_{\mathbb{R}^p} \\ \exists \gamma \in \mathbb{R}_+^p : M^T \gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

si  $M = \text{diag}(s)V^T \rightarrow Mx = (s_1 v_1^T x; \dots; s_p v_p^T x)$ , c'est:

"il existe un point dans la chambre définie par  $s$  ou un  $\gamma \in \mathbb{R}_+^p$ "

En optimisation : "dualité"  $\simeq$  autre approche/vision

# L'alternative de Gordan

## L'astuce de l'alternative

$M \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , exactement une des deux affirmations est vraie :

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^n : Mx > 0_{\mathbb{R}^p} \\ \exists \gamma \in \mathbb{R}_+^p : M^T \gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

si  $M = \text{diag}(s)V^T \rightarrow Mx = (s_1 v_1^T x; \dots; s_p v_p^T x)$ , c'est:

"il existe un point dans la chambre définie par  $s$  **ou** un  $\gamma \in \mathbb{R}_+^p$ "

En optimisation : "dualité"  $\simeq$  autre approche/vision



# Algorithme "dual"

## Principe

Détecter les incompatibilités  $\coloneqq$  les  $\gamma$  via l'alternative de Gordan  
Arrêter une branche de l'arbre si incompatibilité

Une incompatibilité = système non-réalisable  
"de taille minimale"

C'est (une utilité possible) des matroïdes !

# Algorithme "dual"

## Principe

Détecter les incompatibilités  $\coloneqq$  les  $\gamma$  via l'alternative de Gordan  
Arrêter une branche de l'arbre si incompatibilité

Une incompatibilité = système non-réalisable  
"de taille minimale"

C'est (une utilité possible) des matroïdes !

# Algorithme "dual"

## Principe

Détecter les incompatibilités  $\coloneqq$  les  $\gamma$  via l'alternative de Gordan  
Arrêter une branche de l'arbre si incompatibilité

Une incompatibilité = système non-réalisable  
"de taille minimale"

C'est (une utilité possible) des matroïdes !

# Matroïdes linéaires/vectoriels

## Définition : circuits de matroïde

Pour  $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $V = [v_1 \dots v_p]$ , on cherche les circuits de  $V$  :  
 $J \subset [1 : p]$ ,  $V_{:,J} = [v_j]_{j \in J}$  a un noyau de dimension  $= 1$  et  
 $\forall J_0 \subsetneq J, \{v_j\}_{j \in J_0}$  indépendants

→ trouver tous les  $J$ :

$$J \text{ circuit} \Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}_*^J, V_{:,J} \eta = 0 \Leftrightarrow [V_{:,J} \overbrace{\text{sign}(\eta)}^{=Id}][\text{sign}(\eta) \eta] = 0$$

$M_{(J)} = [V_{:,J} \text{sign}(\eta)]$  et  $\gamma_{(J)} = [\text{sign}(\eta) \eta] \geq 0$  vérifient l'alternative  
 la 'chambre' de taille  $|J|$  définie par  $\text{sign}(\eta)$  est vide !

# Matroïdes linéaires/vectoriels

## Définition : circuits de matroïde

Pour  $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $V = [v_1 \dots v_p]$ , on cherche les circuits de  $V$  :  
 $J \subset [1 : p]$ ,  $V_{:,J} = [v_j]_{j \in J}$  a un noyau de dimension  $= 1$  et  
 $\forall J_0 \subsetneq J, \{v_j\}_{j \in J_0}$  indépendants

→ trouver tous les  $J$ :

$$J \text{ circuit} \Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}_*^J, V_{:,J} \eta = 0 \Leftrightarrow [V_{:,J} \overbrace{\text{sign}(\eta)}^{=Id}][\text{sign}(\eta) \eta] = 0$$

$M_{(J)} = [V_{:,J} \text{sign}(\eta)]$  et  $\gamma_{(J)} = [\text{sign}(\eta) \eta] \geq 0$  vérifient l'alternative  
 la 'chambre' de taille  $|J|$  définie par  $\text{sign}(\eta)$  est vide !

# Matroïdes linéaires/vectoriels

## Définition : circuits de matroïde

Pour  $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $V = [v_1 \dots v_p]$ , on cherche les circuits de  $V$   
 $:= J \subset [1 : p]$ ,  $V_{:,J} = [v_j]_{j \in J}$  a un noyau de dimension  $= 1$  et  
 $\forall J_0 \subsetneq J, \{v_j\}_{j \in J_0}$  indépendants

→ trouver tous les  $J$ :

$$J \text{ circuit} \Rightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}_*^J, V_{:,J} \eta = 0 \Leftrightarrow [V_{:,J} \overbrace{\text{sign}(\eta)}^{=Id}][\text{sign}(\eta) \eta] = 0$$

$M_{(J)} = [V_{:,J} \text{sign}(\eta)]$  et  $\gamma_{(J)} = [\text{sign}(\eta) \eta] \geq 0$  vérifient l'alternative  
 la 'chambre' de taille  $|J|$  définie par  $\text{sign}(\eta)$  est vide !

# Résumé

## Algorithmes

- arbre normal ([RČ18])
- arbre dual (matroïdes)
- arbre avec les matroïdes (mais bcp d'optimisation)

Des améliorations générales pour les algorithmes 'normaux'.  
Ou des versions avec matroïdes qui améliorent beaucoup.

# Résumé

## Algorithmes

- arbre normal ([RČ18])
- arbre dual (matroïdes)
- arbre avec les matroïdes (mais bcp d'optimisation)

Des améliorations générales pour les algorithmes 'normaux'.  
Ou des versions avec matroïdes qui améliorent beaucoup.



# Comparaisons numériques

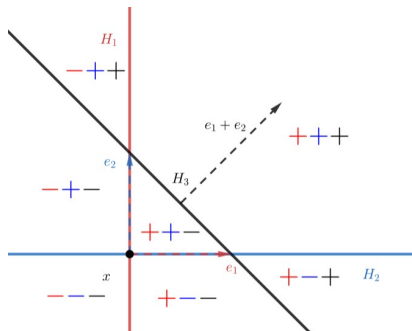
Problème	temps CPU (en s)						
	original code	Arbre+M-1		Arbre+M-2		Juste matroïdes	
		Temps	Ratio	Temps	Ratio	Temps	Ratio
rand-4-8-2	1.06	0.10	10.75	0.02	48.44	0.03	36.67
rand-7-9-4	1.13	0.45	2.51	0.29	3.95	0.02	68.67
rand-7-13-5	11.06	4.29	2.58	2.94	3.76	0.25	44.60
rand-8-15-7	64.79	29.53	2.19	27.59	2.35	4.54	14.29
rand-9-16-8	157.05	78.01	2.01	81.61	1.92	18.87	8.32
rand-10-17-9	352.42	196.09	1.80	213.48	1.65	70.19	5.02
srand-8-20-4	874.01	323.56	2.70	649.61	1.35	705.36	1.24
rc-2d-20-6	12.68	0.35	36.06	0.26	48.78	0.26	49.63
rc-2d-20-7	23.01	0.56	40.87	0.53	43.06	0.45	51.50
rc-perm-6	62.89	0.84	74.44	2.33	27.03	2.46	25.61
rc-perm-8	6589.31	85.70	76.89	1599.53	4.12	5290.13	1.25
rc-ratio-20-5-7	91.57	27.43	3.34	29.70	3.08	20.54	4.46
rc-ratio-20-5-9	88.24	25.21	3.50	27.54	3.20	17.75	4.97
rc-ratio-20-7-7	581.28	241.24	2.41	506.67	1.15	447.83	1.30
rc-ratio-20-7-9	460.64	162.95	2.83	315.67	1.46	234.72	1.96
Moyenne (totale)			16.60		13.90		30.31
Médiane (totale)			3.24		4.12		27.80

# Plan

- 1 Cadre
- 2 Vers les hyperplans
- 3 Un algorithme
- 4 Matroïdes et dualité
- 5 Le cas affine

# Notations

$$\begin{array}{ll}
 H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x = 0\} & \rightarrow H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i^T x = \tau_i\} \\
 \text{linéaire/homogène} & \rightarrow \text{affine/non - homogène}
 \end{array}$$



Une chambre auparavant vide,  $+ + -$ , est maintenant non-vide.

# Gordan et Motzkin

$$\underbrace{\begin{cases} s_1 v_1^T x > 0 \\ \vdots \\ s_p v_p^T x > 0 \end{cases}}_{\text{Gordan}} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{cases} s_1 v_1^T x > s_1 \tau_1 \\ \vdots \\ s_p v_p^T x > s_p \tau_p \end{cases}}_{\text{Motzkin}}$$

L'autre alternative (Motzkin)

$M \in \mathbb{R}^{p \times n} \setminus \{0\}$ ,  $m \in \mathbb{R}^p$ , exactement une des affirmations est vraie

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^n : Mx > m \\ \exists (\gamma, \gamma_0) \in (\mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^-) \setminus \{0\} : M^T \gamma = 0, m^T \gamma + \gamma_0 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

# Gordan et Motzkin

$$\underbrace{\begin{cases} s_1 v_1^T x > 0 \\ \vdots \\ s_p v_p^T x > 0 \end{cases}}_{\text{Gordan}} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{cases} s_1 v_1^T x > s_1 \tau_1 \\ \vdots \\ s_p v_p^T x > s_p \tau_p \end{cases}}_{\text{Motzkin}}$$

## L'autre alternative (Motzkin)

$M \in \mathbb{R}^{p \times n} \setminus \{0\}$ ,  $m \in \mathbb{R}^p$ , exactement une des affirmations est vraie

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^n : Mx > m \\ \exists (\gamma, \gamma_0) \in (\mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^-) \setminus \{0\} : M^T \gamma = 0, m^T \gamma + \gamma_0 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

# Résumé

- algorithme initial avec l'arbre & améliorations
- algorithme avec 100% matroïdes
- applicables aussi dans le cas affine, légères adaptations

## L'option mixte

Regarder l'arrangement dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\tau_i \leftrightarrow$  nouvelle dimension.

L'idéal : résoudre le cas affine par algorithme pour le cas linéaire.

# Résumé

- algorithme initial avec l'arbre & améliorations
- algorithme avec 100% matroïdes
- applicables aussi dans le cas affine, légères adaptations

## L'option mixte

Regarder l'arrangement dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\tau_i \leftrightarrow$  nouvelle dimension.

L'idéal : résoudre le cas affine par algorithme pour le cas linéaire.

# L'approche mixte - notations

$$\begin{aligned} V &= [v_1 \dots v_p] \\ T &= [\tau_1 \dots \tau_p] \\ \tilde{V} &= \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = [\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_p] = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \tau_1 & \dots & \tau_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathcal{S}^H(V) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^\top x > 0\}$  cas linéaire;
- $\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V}) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^\top x > s \cdot T^\top\}$  for  $\tilde{V} := (V; T)$ , cas affine;
- $\mathcal{S}^H(\tilde{V}) = \{s : \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{diag}(s)\tilde{V}^\top \tilde{x} > 0\}$ , cas mixte := regarder  $\tilde{V}$  comme cas linéaire dans  $\mathbb{R}^{(n+1) \times p}$ .



# L'approche mixte - notations

$$\begin{aligned} V &= [v_1 \dots v_p] \\ T &= [\tau_1 \dots \tau_p] \\ \tilde{V} &= \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = [\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_p] = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \tau_1 & \dots & \tau_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathcal{S}^H(V) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^T x > 0\}$  cas linéaire;
- $\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V}) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^T x > s \cdot T^T\}$  for  $\tilde{V} := (V; T)$ , cas affine;
- $\mathcal{S}^H(\tilde{V}) = \{s : \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{diag}(s)\tilde{V}^T \tilde{x} > 0\}$ , cas mixte := regarder  $\tilde{V}$  comme cas linéaire dans  $\mathbb{R}^{(n+1) \times p}$ .

# L'approche mixte - notations

$$\begin{aligned} V &= [v_1 \dots v_p] \\ T &= [\tau_1 \dots \tau_p] \\ \tilde{V} &= \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = [\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_p] = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \tau_1 & \dots & \tau_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathcal{S}^H(V) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^T x > 0\}$  cas linéaire;
- $\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V}) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^T x > s \cdot T^T\}$  for  $\tilde{V} := (V; T)$ , cas affine;
- $\mathcal{S}^H(\tilde{V}) = \{s : \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{diag}(s)\tilde{V}^T \tilde{x} > 0\}$ , cas mixte := regarder  $\tilde{V}$  comme cas linéaire dans  $\mathbb{R}^{(n+1) \times p}$ .

# L'approche mixte - notations

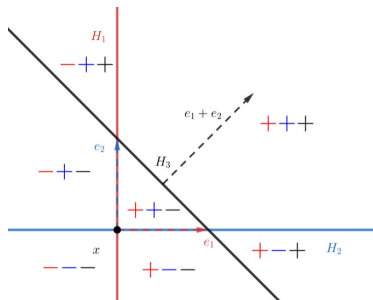
$$\begin{aligned} V &= [v_1 \dots v_p] \\ T &= [\tau_1 \dots \tau_p] \\ \tilde{V} &= \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = [\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_p] = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \tau_1 & \dots & \tau_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathcal{S}^H(V) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^T x > 0\}$  cas linéaire;
- $\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V}) = \{s : \exists x, \text{diag}(s)V^T x > s \cdot T^T\}$  for  $\tilde{V} := (V; T)$ , cas affine;
- $\mathcal{S}^H(\tilde{V}) = \{s : \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{diag}(s)\tilde{V}^T \tilde{x} > 0\}$ , cas mixte := regarder  $\tilde{V}$  comme cas linéaire dans  $\mathbb{R}^{(n+1) \times p}$ .

# L'approche mixte - fin des notations

## Partie symétrique et asymétrique d'un cas affine

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) &:= \mathcal{S}^{nH}(\tilde{V}) \cap [-\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})] \\ \mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) &:= \mathcal{S}^{nH}(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) \end{cases}$$



La nouvelle chambre  $+ + -$  est asymétrique, les autres sont symétriques.

# L'approche mixte - propriétés

$$\mathcal{S}^H(V) \subseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \quad (5)$$

$$\mathcal{S}^H(V)^c \supseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (6)$$

$$\mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \cap \mathcal{S}^H(V) = \mathcal{S}^H(V) \quad (7)$$

$$\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) \cup [-\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V})] = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}^H(V) \quad (8)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{sym} = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \cap \mathcal{S}^H(V)^c = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (9)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} \cup -[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} = \mathcal{S}^H(V)^c \setminus \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (10)$$

# L'approche mixte - propriétés

$$\mathcal{S}^H(V) \subseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \quad (5)$$

$$\mathcal{S}^H(V)^c \supseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (6)$$

$$\mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \cap \mathcal{S}^H(V) = \mathcal{S}^H(V) \quad (7)$$

$$\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) \cup [-\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V})] = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}^H(V) \quad (8)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{sym} = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \cap \mathcal{S}^H(V)^c = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (9)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} \cup -[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} = \mathcal{S}^H(V)^c \setminus \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (10)$$

# L'approche mixte - propriétés

$$\mathcal{S}^H(V) \subseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \quad (5)$$

$$\mathcal{S}^H(V)^c \supseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (6)$$

$$\mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \cap \mathcal{S}^H(V) = \mathcal{S}^H(V) \quad (7)$$

$$\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) \cup [-\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V})] = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}^H(V) \quad (8)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{sym} = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \cap \mathcal{S}^H(V)^c = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (9)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} \cup -[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} = \mathcal{S}^H(V)^c \setminus \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (10)$$

# L'approche mixte - propriétés

$$\mathcal{S}^H(V) \subseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \quad (5)$$

$$\mathcal{S}^H(V)^c \supseteq \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (6)$$

$$\mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \cap \mathcal{S}^H(V) = \mathcal{S}^H(V) \quad (7)$$

$$\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) \cup [-\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V})] = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}^H(V) \quad (8)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{sym} = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \cap \mathcal{S}^H(V)^c = \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (9)$$

$$[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} \cup -[\mathcal{S}^{nH}(\tilde{V})^c]_{asym} = \mathcal{S}^H(V)^c \setminus \mathcal{S}^H(\tilde{V})^c \quad (10)$$



# Arguments et intérêt

Preuves : les définitions & basculer entre Gordan et Motzkin

$$\mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \cap \mathcal{S}^H(V) = \mathcal{S}^H(V)$$

$$\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) \cup [-\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V})] = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}^H(V)$$

Droite : uniquement des cas linéaires

Gauche : le cas affine recherché

Détail restant : distinguer les bons  $s$  des  $-s$ .

(Ça marche bien.)

# Arguments et intérêt

Preuves : les définitions & basculer entre Gordan et Motzkin

$$\mathcal{S}_{sym}^{nH}(\tilde{V}) = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \cap \mathcal{S}^H(V) = \mathcal{S}^H(V)$$

$$\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V}) \cup [-\mathcal{S}_{asym}^{nH}(\tilde{V})] = \mathcal{S}^H(\tilde{V}) \setminus \mathcal{S}^H(V)$$

Droite : uniquement des cas linéaires

Gauche : le cas affine recherché

Détail restant : distinguer les bons  $s$  des  $-s$ .

(Ça marche bien.)

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
- adaptations des améliorations au cas affine
- algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre  
attention ! Des questions ?

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
  - améliorations fondamentales : matroïdes
  - adaptations des améliorations au cas affine
  - algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre  
attention ! Des questions ?

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
  - adaptations des améliorations au cas affine
  - algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre  
attention ! Des questions ?

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
- adaptations des améliorations au cas affine
- algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre

attention ! Des questions ?

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
- adaptations des améliorations au cas affine
- algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre

attention ! Des questions ?

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
- adaptations des améliorations au cas affine
- algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre  
attention ! Des questions ?



# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
- adaptations des améliorations au cas affine
- algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre

attention ! Des questions ?

# Conclusion

## Algorithmes

- algorithme de l'arbre (cas affine/linéaire)
- améliorations structurelles
- améliorations fondamentales : matroïdes
- adaptations des améliorations au cas affine
- algorithme 'mixte' pour le cas affine

Code pour les cas affine/mixte en développement.

Ouverture : si on veut "tout" l'arrangement ( $\supsetneq$  chambres) ?

$\leadsto$  remplacer  $\{-, +\}$  par  $\{-, 0, +\}$  (mais  $3^p \dots$ ) Merci pour votre  
attention ! Des questions ?

# Bibliographic elements I

- [CPS92] R.W. Cottle, J.-S. Pang, and R.E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, Boston, 1992.
- [CX11] X. Chen and S. Xiang. “Computation of generalized differentials in nonlinear complementarity problems”. In: *Computational Optimization and Applications* 50 (2011). [doi], pp. 403–423.
- [FP03] F. Facchinei and J.-S. Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Springer Series in Operations Research. Springer, 2003.
- [Qi93] L. Qi. “Convergence Analysis of Some Algorithms for Solving Nonsmooth Equations”. In: *Mathematics of Operations Research* 18 (Feb. 1993). [doi], pp. 227–244.

# Bibliographic elements II

- [QS93] L. Qi and J. Sun. “A nonsmooth version of Newton’s method”. In: *Mathematical Programming* 58 (1993). [doi], pp. 353–367.
- [RČ18] Miroslav Rada and Michal Černý. “A New Algorithm for Enumeration of Cells of Hyperplane Arrangements and a Comparison with Avis and Fukuda’s Reverse Search”. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 32 (Jan. 2018), pp. 455–473. DOI: [10.1137/15M1027930](https://doi.org/10.1137/15M1027930).
- [Win66] Robert O. Winder. “Partitions of N-space by hyperplanes”. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 14.4 (1966). [doi], pp. 811–818.