Géométrie différentielle

Valentin Clarisse et Nassim Arifette

15 mai 2024

Table des matières

1 Variétés différentielles **4**

2 Sous-variétés **7**

3 Applications différentiables **10**

4 Fibrés vectoriels **11**

5 Fibré tangent **12**
5.1 Espace tangent en un point 12
5.2 Intermède : une autre définition de l'espace tangent 15
5.3 Fibré tangent 16
5.4 Application linéaire tangente 18

6 Fibré cotangent **19**
6.1 Espace cotangent en un point 19
6.2 Fibré cotangent 20

7 Intermède : calcul tensoriel **21**
7.1 Applications multilinéaires 21
7.1.1 Généralités 21
7.1.2 Applications multilinéaires symétriques 22
7.1.3 Applications multilinéaires alternées et antisymétriques 23
7.2 Produit tensoriel d'espaces vectoriels de dimensions finies 24
7.2.1 Généralités 24
7.2.2 Tenseurs covariants et contravariants 25
7.2.3 Tenseur métrique 27
7.3 Puissances extérieures d'un espace vectoriel de dimension finie 29

8 Fibrés tensoriels **30**
8.1 Espaces tensoriels en un point 30
8.2 Fibrés tensoriels 31
8.3 Formes différentielles 31

9 Champs et dérivée de Lie **32**
9.1 Flot d'un champ vectoriel 32
9.2 Tiré en arrière, poussé en avant 33
9.3 Dérivée de Lie 34

10 Connexions **37**
10.1 Définition 37
10.2 Transport parallèle 40
10.3 Transport parallèle et géodésiques 41
10.4 Coordonnées normales 42
10.5 Tenseur de torsion 43

10.6 Tenseur de Riemann . . . 44

11 Métriques **46**
11.1 Connexion de Levi-Civita . . . 46
11.2 Tenseur de Riemann d'une connexion de Levi-Civita . . . 48
11.3 Hypersurfaces . . . 49
11.4 Champs de Killing . . . 50
11.5 Variétés riemanniennes . . . 51
11.6 Variétés lorentziennes . . . 53

12 Intermède : partitions de l'unité **54**

13 Variétés orientées **56**
13.1 Généralités . . . 56

14 Applications physiques **57**
14.1 Principe de moindre action . . . 57
14.2 Théorème de Noether . . . 59
14.3 Un bref historique de la mécanique . . . 60
14.4 Action de Hilbert-Einstein . . . 61

1 Variétés différentielles

——————— Un autre point de vue sur la notion d'atlas On se donne $\mathcal{M}$ un ensemble.

Définition 1. Un *atlas* de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n sur $\mathcal{M}$ est une collection de couples $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ tels que :

— $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $\mathcal{M}$

— Pour tout $i \in I$, $\phi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ est un injection

— Pour tout $i, j \in I$, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$

Parler ensuite de la notion d'atlas compatibles, topologie canonique associée à un atlas, simplifier les définitions des fibrés (co)tangents, faire plus en détails les fibrés vectoriels sur des variétés ——————- Intuitivement, une variété différentielle est un espace topologique localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (n étant fixé).
Pour pouvoir se repérer sur un tel objet, on le munit localement d'un système de coordonnées, et on exige que les changements de coordonnées aient une certaine régularité. L'utilisation de systèmes de coordonnées permettra de développer un calcul différentiel sur une variété, nettement plus subtil que que le calcul différentiel sur un espace vectoriel normé.

Dans ce paragraphe, on se donne $\mathcal{M}$ un espace topologique séparé et σ-compact (ie $\mathcal{M}$ est une union dénombrable de compacts), n un entier naturel et $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.

Définition 2. Une **carte** $\mathcal{M}$ est la donnée d'un couple (U, ϕ) où U est un ouvert de $\mathcal{M}$ et $\phi : U \to \mathbf{R}^n$ est un homéomorphisme de U sur $\phi(U)$.

Remarque 3. On confonds parfois la carte (U, ϕ) et l'application ϕ.

Définition 4. Deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ) sur $\mathcal{M}$ sont dites **$\mathcal{C}^k$-compatibles** si l'application de changement de carte $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Définition 5. Un **atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M}$** est un recouvrement de $\mathcal{M}$ par des cartes deux à deux $\mathcal{C}^k$-compatibles.

Définition 6. Deux atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M}$ sont dits **compatibles** si leur réunion est un atlas de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 7. On vérifie facilement que la relation de compatibilité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M}$. Chaque classe d'équivalence contient un unique représentant maximal au sens de l'inclusion (il suffit de prendre la réunion des atlas de la classe d'équivalence).

Définition 8. Une **variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension** n est la donnée d'un couple $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ où $\mathcal{M}$ est un espace topologique séparé et $\mathcal{A}$ est un atlas maximal de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M}$.

Remarque 9. La différentielle d'un difféomorphisme étant un isomorphisme en tout point où elle est définie, on en déduit, en considérant une application de changement de carte, qu'il y a unicité de la dimension d'une variété différentielle.

Remarque 10. Par la suite, on arrêtera de préciser l'atlas maximal associé à la variété différentielle.

Remarque 11. Toute variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^l$ pour tout $l \in [\![1, k]\!]$.

Exemple 12. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Une atlas lisse de E est donné par la seule carte (E, ϕ) où $\phi : E \to \mathbf{R}^n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'atlas maximal associé est l'ensemble des difféomorphismes lisses définis sur des ouverts de E. Notons que la dimension de E en tant que variété différentielle et la dimension de E en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel sont les mêmes.
Les $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies seront systématiquement munis de cet atlas.

Exemple 13. Voyons un exemple moins trivial de variété différentielle.
On note $\mathbf{S}^n = \left\{ (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}$ la sphère de $\mathbf{R}^{n+1}$.
On note $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ les pôles Nord et Sud de $\mathbf{S}^n$, et on pose $U_N = \mathbf{S}^n \backslash \{N\}$ et $U_S = \mathbf{S}^n \backslash \{S\}$. Prenons un point $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in U_N$. On trace la droite passant par ce point et N (ce qui est possible puisqu'il s'agit de deux points distincts), et on examine l'intersection de cette droite avec l'hyperplan $\mathbf{R}^n \times \{0\}$.
On vérifie que ce point d'intersection est $\dfrac{1}{1 - x^{n+1}}(x^1, \ldots, x^n, 0)$.
On définit ainsi l'application $\phi_N : U_N \to \mathbf{R}^n, (x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto \dfrac{1}{1 - x^{n+1}}(x^1, \ldots, x^n)$.
De même, on définit $\phi_S : U_S \to \mathbf{R}^n, (x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto \dfrac{1}{1 + x^{n+1}}(x^1, \ldots, x^n)$. On vérifie que $((U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S))$ est un atlas sur $\mathbf{S}^n$, appelé **projection stéréographique**.
Notons que, munie de cette structure différentielle, $\mathbf{S}^n$ est une variété différentielle de dimension n (ce qui justifie qu'on la note $\mathbf{S}^n$, et non $\mathbf{S}^{n+1}$...).

Voyons une première opération entre variétés différentielles : le produit.
D'autres opérations, comme le quotient, sont plus subtiles et ne sont pas traitées dans ce polycopié.

Définition 14. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimensions n et p respectivement.
On munit $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de la topologie produit (qui est séparée puisque $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ le sont).
Étant données deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ) de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement, on définit la carte produit par : $(U, \phi) \times (V, \psi) = (U \times V, \phi \times \psi)$ avec

$$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, (x, y) \mapsto (\phi(x), \psi(y)).$$

L'ensemble des produits de cartes de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ est un atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.
On munit ainsi $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ d'une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension $n + p$.

Par la suite, nous serons amenés à munir des ensembles de structures de variétés différentielles au moyen d'une famille d'applications dont on voudrait qu'elle soit un atlas.

Lemme 15. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble, $n \in \mathbf{N}$, et $((U_i, \phi_i))_{i\in I}$ une famille telle que, pour tout $i \in I$, U_i est une partie de $\mathcal{M}$ et ϕ_i est une injection de U_i dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant :

i) $(U_i)_{i\in I}$ recouvre $\mathcal{M}$;

ii) Pour tout $i \in I$, $\phi_i(U_i)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$;

iii) Pour tout $i, j \in I$, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Une partie U de $\mathcal{M}$ est dite ouverte si, pour tout $i \in I$, $\phi_i(U \cap U_i)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

L'ensemble $\mathcal{M}$ étant muni de cette topologie, la famille $((U_i, \phi_i))_{i\in I}$ est un atlas sur $\mathcal{M}$.

Remarque 16. La topologie ainsi définie sur $\mathcal{M}$ est la topologie la moins fine rendant les ϕ_i continues.

2 Sous-variétés

Cette section est consacrée aux sous-variétés, notamment aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$, qui fourniront de nombreux exemples usuels de variétés différentielles.
On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle, $k \in \mathbf{N} \cap \{+\infty\}$ et $n, p \in \mathbf{N}$.

Définition 17. Une **sous-variété de $\mathcal{M}$ de dimension** $d \in \mathbf{N}$ est une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbf{M}$ telle que, pour tout $p \in \mathcal{N}$, il existe une carte (U, ϕ) de $\mathcal{M}$ telle que $p \in U$ et $\phi(\mathcal{N} \cap U) = (\mathbf{R}^d \times \{0\}) \cap \phi(U)$. Les couples de la forme $(\mathcal{N} \cap U, (\pi_d \circ \phi)_{|\mathcal{N}\cap U})$ (où $\pi_d : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^d, (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^d)$, avec n la dimension de $\mathcal{M}$) sont des cartes sur $\mathcal{N}$, munissant $\mathcal{N}$ d'une structure de variété différentielle de dimension d et de régularité au moins égale à celle de $\mathcal{M}$.

Remarque 18. Autrement dit, localement, en dehors de d coordonnées, les coordonnées des points de $\mathcal{N}$ sont nulles.

Exemple 19. Les ouverts de $\mathcal{M}$ sont des sous-variétés de $\mathcal{M}$, ayant même dimension que $\mathcal{M}$. Par exemple, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension n^2.

La suite de cette section est consacrée aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Nous donnerons deux conditions suffisantes simples permettant d'identifier des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.
Commençons par deux cas particuliers du théorème de forme normale.

Définition 20. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^p)$. On dit que f est :

- une **immersion (resp. submersion) en** $x \in U$ si $\mathrm{d}f(x)$ est injective (resp. surjective)
- une **immersion (resp. submersion)** si f est une immersion (resp. submersion) en tout point de U
- un **plongement** si f est une immersion et un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

Lemme 21 (Forme normale des immersions)**.** Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une immersion. Pour tout $x \in U$, il existe U_x un voisinage de x inclus dans U, $V_{f(x)}$ un voisinage de $f(x)$ et $\psi : V_{f(x)} \to \mathbf{R}^p$ un difféomorphisme sur son image tels que :

$$\forall (x^1, \dots, x^n) \in U_x, (\psi \circ f)(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0).$$

Démonstration. Soit $x \in U$.
Comme $\mathrm{d}f(x)$ est injective, la famille $(v_i)_{i \in [\![1,n]\!]} = (\mathrm{d}f(x) \cdot e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ (avec $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$) est libre. On la complète en une base $(v_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ de $\mathbf{R}^p$.
On pose :

$$g : U \times \mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{p-n}, (x^1, \dots, x^p) \mapsto f(x^1, \dots, x^n) + x^{n+1} v_{n+1} + \dots + x^p v_p.$$

On a $\mathrm{d}g(x, 0, \dots, 0) = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^p}$, donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\widetilde{U_x}$ un voisinage de $(x, 0, \dots, 0)$ inclus dans $U \times \mathbf{R}^{n-p}$ et $V_{f(x)}$ un voisinage de $f(x)$ tel que $g_{|\widetilde{U_x}}^{|V_{f(x)}}$ est un difféomorphisme. On pose $\iota_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p, (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$.
On vérifie que $\psi := \left(g_{|\widetilde{U_x}}^{|V_{g(x)}} \right)^{-1} \circ \iota_{n|U_x}$ avec $U_x = U \cap \pi_p^{-1}\left(\widetilde{U_x}\right)$ convient.

Remarque 22. Autrement dit, à un difféomorphisme local à gauche près, f est localement l'injection canonique. En particulier, f est localement injective.

Lemme 23 (Forme normale des submersions)**.** Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une submersion. Pour tout $x \in U$, il existe U_x un voisinage de x inclus dans U et $\phi : U_x \to \mathbf{R}^n$ un difféomorphisme sur son image tels que :

$$\forall (x^1, \ldots, x^n) \in \phi(U_x), \left(f \circ \phi^{-1}\right)(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^p).$$

Démonstration. Comme $(\mathrm{d}f^i(x))_{i \in [\![1,p]\!]}$ est une famille libre de $(\mathbf{R}^n)^*$, dont on peut la compléter à l'aide de formes linéaires $\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n \in (\mathbf{R}^n)^*$ en une base de $(\mathbf{R}^n)^*$.
On pose :

$$g : U \to \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}, (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (f(x^1, \ldots, x^n), \varphi_{p+1}(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \varphi_n(x^1, \ldots, x^n)).$$

On a : $\mathrm{d}g(x) = (\mathrm{d}f(x), \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$, qui est inversible, donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe U_x un voisinage de x inclus dans U et $\widetilde{V_{f(x)}}$ un voisinage de $g(x)$ tels que $g_{|U_x}^{|\widetilde{V_{f(x)}}}$ est un difféomorphisme. On vérifie que $\phi := g_{|U_x}^{|\widetilde{V_{f(x)}}}$ convient.

Remarque 24. Autrement dit, à un difféomorphisme local à droite près, f est localement la projection canonique. En particulier, f est localement surjective.

On peut enfin énoncer les deux résultats annoncés en début de section.

Théorème 25 (Définition d'une sous-variété par paramétrage)**.** Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$ un plongement.
L'ensemble $f(U)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^p$ de dimension n.

Démonstration. Soit $x \in U$. D'après le théorème de forme normale pour les immersions, il existe U_x un voisinage de x inclus dans U, $V_{f(x)}$ un voisinage de $f(x)$ et $\psi : V_{f(x)} \to \mathbf{R}^p$ un difféomorphisme sur son image tels que :

$$\forall (x^1, \ldots, x^n) \in U_x, (\psi \circ f)(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0).$$

Le couple $(V_{f(x)}, \psi)$ est une carte sur $\mathbf{R}^p$ vérifiant $\psi(V_{f(x)}) = (\mathbf{R}^n \times \{0\}) \cap \psi(V_{f(x)})$.
On en déduit que $f(U)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^p$ de dimension n.

Remarque 26. Ainsi, le plongement est la bonne façon d'injecter une variété différentielle dans une autre.

Théorème 27 (Définition implicite d'une sous-variété)**.** Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une submersion.
Pour tout $y \in f(U)$, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, de dimension $n - p$.

Démonstration. Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$. D'après le théorème de forme normale pour les submersions, il existe U_x un voisinage de x inclus dans U et $\phi : U_x \to \mathbf{R}^n$ un difféomorphisme sur son image tels que :

$$\forall (x^1, \ldots, x^n) \in \phi(U_x), \left(f \circ \phi^{-1}\right)(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^p).$$

On a : $\phi(U_x \cap f^{-1}(\{y\})) = (\{y\} \times \mathbf{R}^{n-p}) \cap \phi(U_x)$, ce qui conclut.

Exemple 28. À l'aide de cette propriété, on vérifie que :

— $\mathbf{S}^n$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+1}$ de dimension n (prendre $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}, x \mapsto \|x\|^2$). La structure différentielle ainsi induite est la même que celle définie par la projection stéréographique.

— $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$ (considérer $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}, M \mapsto \det(M)$).

— $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (considérer $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbf{R}), M \mapsto {}^tMM$).

Les deux derniers exemples sont importants : il s'agit de groupes de Lie (ie des groupes topologiques munis d'une structure de variété différentielle lisse pour laquelle la loi de composition interne et le passage à l'inverse sont lisses), particulièrement utilisés en physique.

3 Applications différentiables

Dans cette section, on définit une notion fondamentale du calcul différentiel : la différentielle d'une fonction en un point.

On se donne $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$. On se donne également l compris entre 1 et k.

Définition 29. Une application continue $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est de classe $\mathcal{C}^l$ si, pour tout point $p \in \mathcal{M}$, il existe une carte (U, ϕ) contenant p et une carte (V, ψ) contenant $f(p)$ telles que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^l$.
On note $\mathcal{C}^l(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^l$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

Remarque 30. La continuité de f est essentielle pour garantir la bonne définition de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Remarque 31. L'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ n'est autre que la « lecture de f dans les cartes (U, ϕ) et (V, ψ) ».

Exemple 32. Les cartes de $\mathcal{M}$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 33. Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe $\mathcal{C}^l$. Pour tout point p de $\mathcal{M}$, pour toute carte (U, ϕ) contenant p et pour toute carte (V, ψ) contenant $f(p)$, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^l$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la compatibilité des cartes.
Soit (U_0, ϕ_0) une carte contenant p et (V_0, ψ_0) une carte contenant $f(p)$ telles que $\psi_0 \circ f \circ \phi_0^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^l$. Par compatibilité, $\psi \circ \psi_0^{-1}$ et $\phi_0 \circ \phi^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, donc $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^l$.

Proposition 34. La composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^l$ est de classe $\mathcal{C}^l$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$ trois variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$, et $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $g : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ de classe $\mathcal{C}^l$. Soit p un point de $\mathcal{M}$.
On se donne des cartes $(U, \phi), (V, \psi), (W, \varphi)$ contenant $p, f(p), g(f(p))$.
Les applications $\varphi \circ g \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^l$, donc par composition, $\varphi \circ g \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^l$.

Proposition 35. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathcal{C}^l(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. C'est immédiat en prenant comme carte de $\mathcal{N}$ une base duale.

4 Fibrés vectoriels

Dans cette section, on se donne $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 36. Un **fibré vectoriel de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$** est la donnée d'un triplet (E, B, π) où E et B sont deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ appelées respectivement **espace total** et **base**, et où $\pi : E \to B$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ appelée **projection** tels que :

i) Pour tout $b \in B$, la fibre $E_b = \pi^{-1}(\{b\})$ est munie d'une structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n.

ii) Il existe un recouvrement de B par des ouverts U dits **localement trivialisables** : pour un tel ouvert U, il existe $\varphi : U \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme tel que, pour tout $b \in U$, $\varphi(b, \cdot)$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans E_b.
Le couple (U, φ) est qualifié de **trivialisation locale**.

Remarque 37. Un fibré est une sorte de famille régulière d'espaces vectoriels. En effet, pour tout $b_0 \in B$, il existe U un ouvert de B et $e_1, \ldots, e_n$ des applications de B dans E de classe $\mathcal{C}^k$ telles que, pour tout $b \in U$, $(e_1(b), \ldots, e_n(b))$ est une base de E_b.

Remarque 38. On confonds souvent le fibré vectoriel et son espace total.

Exemple 39. Étant donnée $\mathcal{M}$ une variété différentielle, on peut définir le fibré trivial d'espace total $\mathcal{M} \times \mathbf{R}^n$, de base $\mathcal{M}$ et de projection $\pi : \mathcal{M} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{M}, (p, v) \mapsto p$.
On vérifie que $\mathrm{Id}_{\mathcal{M} \times \mathbf{R}^n}$ est une trivialisation globale.

Définition 40. Une **section** d'un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}^k$ (E, B, π) est une application de classe $\mathcal{C}^k$ $f : B \to E$ telle que $\pi \circ f = \mathrm{Id}_B$.
On note ΓE l'ensemble des sections du fibré E.

Proposition 41. Soit (E, B, π) un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}^k$.
L'ensemble ΓE est muni des deux lois suivantes est un $\mathcal{C}^k(B, \mathbf{R})$-module :

— Pour toute section f, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$: $\lambda f : B \to E, b \mapsto \lambda f(b)$ (la multiplication externe étant celle de E_b).

— Pour toutes section f, g : $f + g : B \to E, b \mapsto f(b) + g(b)$ (la somme étant celle de E_b).

Démonstration. Seule la stabilité de ΓE par les deux opérations précédentes est non triviale, les autres propriétés s'obtiennent par héritage.
On se donne U un ouvert de B et $\varphi : U \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ une trivialisation locale. On a :

$$\forall b \in U, \varphi^{-1}((\lambda f + g)(b)) = (b, \lambda \varphi(b, \cdot)^{-1}(f(b)) + \varphi(b, \cdot)^{-1}(g(b))).$$

On remarque que $\varphi(b, \cdot)^{-1} = \pi_{\mathbf{R}^n} \circ \psi_{|E_b}$ (avec ψ la réciproque de φ et $\pi_{\mathbf{R}^n} : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, (x, y) \mapsto y$), donc la restriction de $\lambda f + g$ à U est de classe $\mathcal{C}^k$, donc, comme on peut recouvrir B d'ouverts trivialisables, $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

5 Fibré tangent

5.1 Espace tangent en un point

L'objectif de ce paragraphe est de développer la notion d'espace tangent, déjà rencontrée au lycée. En effet, étant donnés un intervalle I et $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, en notant Γ son graphe, on définit l'espace tangent à Γ en un point $(p, f(p))$ par :

$$T_{(p,f(p))}\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y - f(p) = f'(p)(x - p)\},$$

qui est une droite affine pouvant être munie d'une structure naturelle d'espace vectoriel (en prenant son vectorialisé au point $(p, f(p))$).
Plus généralement, étant donnée une partie A de $\mathbf{R}^n$ et p un point de A, un vecteur tangent à A en p est un vecteur vitesse d'un observateur se déplaçant sur A passant par p. Formellement, un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ est tangent à A en p s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$ (remarque sans importance pour la suite : si A est quelconque, en général, l'ensemble des vecteurs tangents à A en p n'est pas un espace vectoriel).
Cette définition a un inconvénient majeur, qui rend a priori toute extension aux variétés abstraite impossible : elle nécessite de plonger A dans un espace vectoriel.
Il nous faut donc trouver une parade pour définir la notion de vecteur tangent en un point d'une variété différentielle abstraite.
Notons que, si $f : A \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ (pouvant être par exemple une coordonnée dans une carte), on peut poser $v(f) := (f \circ \gamma)'(0)$ (en termes de coordonnées, on regarde la variation de la coordonnées de γ définie par f).
On peut ainsi identifier le vecteur tangent v à l'application $f \mapsto v(f)$, qui est une dérivation.

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) de dimension n et p un point de $\mathcal{M}$.

Définition 42. On note $T_p\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des dérivations sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$, autrement dit l'ensemble des formes linéaires D sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ telles que

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}), D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f).$$

L'espace vectoriel $T_p\mathcal{M}$ est appelé **espace tangent à $\mathcal{M}$ en** p.

Comme on peut si attendre, les opérateurs de dérivations partielles en p constituent une base de $T_p\mathcal{M}$.

Proposition 43. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte dont l'ouvert de définition contient p. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}, f \mapsto \partial_i(f \circ x^{-1})(x(p))$.
La famille $\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $T_p\mathcal{M}$.

Démonstration. Soit $D \in T_p\mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$. D'après la formule de Taylor, pour tout q au voisinage de p :

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (tx^i(q) + (1-t)x^i(p))\partial_i(f \circ x^{-1})(x(p))\mathrm{d}t.$$

Donc, comme D s'annule en les fonctions constantes :

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(x^i)\partial_i(f \circ x^{-1})(x(p)) = \sum_{i=1}^{n} D(x^i) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p.$$

La règle de Leibniz donne que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ appartient à $T_p\mathcal{M}$, ce qui conclut.

Exemple 44. Prenons $\mathcal{M} = \mathbf{R}^n$, munie de la carte $(\mathbf{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$.
Moyennant l'identification $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \leftrightarrow e_i$ avec e_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a : $T_p\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n$.

Remarque 45. Les coordonnées d'un vecteur tangent $v \in T_p\mathcal{M}$ dans la base précédente sont $(v(x^i))_{i\in[\![1,n]\!]}$, et $T_p\mathcal{M}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel qui a la même dimension que celle de la variété $\mathcal{M}$.

Proposition 46. Soit $(x^1, \ldots, x^n), (y^1, \ldots, y^n)$ deux cartes définies au point p.
On a la relation de changement de base suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p .$$

Démonstration. Immédiat d'après la remarque précédente.

Proposition 47. Soit $\mathcal{N}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension m, et soit q un point de $\mathcal{N}$. On a :

$$T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \simeq T_p\mathcal{M} \times T_q\mathcal{N},$$

l'isomorphisme étant pris au sens des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

Démonstration. L'application

$$T_{(p,q)}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \to T_p\mathcal{M} \times T_q\mathcal{N}, v \mapsto (v \circ \pi_p, v \circ \pi_q)$$

avec

$$\pi_p : \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^k(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathbf{R}), f \mapsto ((p, q) \mapsto f(q))$$

et

$$\pi_q : \mathcal{C}^k(\mathcal{N}, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^k(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathbf{R}), f \mapsto ((p, q) \mapsto f(p))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On termine cette section par une injection entre espaces tangents.

Proposition 48. Soit $\mathcal{N}$ une sous-variété de $\mathcal{M}$ et $p \in \mathbf{N}$.
L'application $T_p\mathcal{N} \to T_p\mathcal{M}, X \mapsto \widetilde{X}$ avec $\widetilde{X}$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \widetilde{X}(f) = X(f_{|\mathcal{N}})$$

est une injection linéaire, permettant d'identifier $T_p\mathcal{N}$ à une partie de $T_p\mathcal{M}$.

Remarque 49. Si on se donne $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ définie au voisinage de p telle que, au voisinage de p dans $\mathcal{N}$, les $n - d$ dernières coordonnées sont nulles, un vecteur tangent à $\mathcal{M}$ en p est tangent à $\mathcal{N}$ en p si et seulement si ses $n - d$ coordonnées sont nulles.

5.2 Intermède : une autre définition de l'espace tangent

On se replace temporairement dans le cadre du premier paragraphe de la sous-section précédente.
L'idée de considérer $(f \circ \gamma)'(0)$ peut être exploitée différemment. En effet, on peut procéder à la lecture du chemin γ associé à un vecteur tangent dans une carte ϕ, et examiner $(\phi \circ \gamma)'(0)$.
Ce point de vue motive la définition alternative de l'espace tangent qui suit.

Définition 50. Deux chemins γ_1, γ_2 définis sur un ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 0, à valeurs dans $\mathcal{M}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ sont dit **équivalents** s'il existe une carte (U, ϕ) sur $\mathcal{M}$ contenant p telle que $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient associé est noté $T_p\mathcal{M}$.
On notera $[\gamma]$ la classe d'équivalence du chemin γ.

Remarque 51. Si la relation $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$ est vraie pour une carte (U, ϕ) de $\mathcal{M}$ contenant p, alors elle est vraie pour toute carte sur $\mathcal{M}$ contenant p.

Remarque 52. Contrairement à la définition en termes de dérivations, on n'a pas immédiatement une structure d'espace vectoriel sur $T_p\mathcal{M}$.

Proposition 53. Soit (U, ϕ) une carte sur $\mathcal{M}$ contenant p.
L'application $T_p\mathcal{M} \to \mathbf{R}^n, [\gamma] \mapsto (\phi \circ \gamma)'(0)$ définit une bijection. Par transport de structure, on munit $T_p\mathcal{M}$ d'une structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel (de dimension finie égale à n, puisque l'application précédente est alors un isomorphisme), indépendante du choix de la carte (U, ϕ).

Démonstration. L'application précédente, qu'on notera f_ϕ dans la preuve, est bien définie et injective.
Passons à la surjectivité. On vérifie que, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, la classe du chemin $t \mapsto \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$ a pour image v, ce qui conclut la première partie de la preuve.
Montrons que la structure ainsi définie ne dépend pas de la carte choisie.
Soit (V, ψ) une carte sur $\mathcal{M}$ contenant p. Étant donnés un chemin γ, on a :

$$(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \cdot (\psi \circ \gamma)'(0),$$

donc $f_\phi = \mathrm{d}(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p)) \circ f_\psi$ avec $\mathrm{d}(\phi \circ \psi^{-1})(\psi(p))$ une automorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, ce qui conclut.

Remarque 54. En écrivant $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$, l'application linéaire envoyant $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ sur la classe de $t \mapsto \phi^{-1}(\phi(p) + te_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (avec $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$) est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre les deux définitions de $T_p\mathcal{M}$.

Dans le cas d'uns sous-variété de $\mathbf{R}^n$, en prenant la carte triviale $(\mathbf{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$, on peut identifier $[\gamma]$ à $\gamma'(0)$, et on retrouve alors une définition précédente : $T_p\mathcal{M}$ est l'ensemble des dérivées en 0 des chemins de classe $\mathcal{C}^1$ tracés sur $\mathcal{M}$ passant par p à l'instant 0.

5.3 Fibré tangent

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) de dimension n.

Définition 55. On pose $T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times T_p\mathcal{M}$ le **fibré tangent de** $\mathcal{M}$.

On note $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ l'atlas de $\mathcal{M}$.
D'après le lemme concluant la première section de ce polycopié, $T\mathcal{M}$ est naturellement muni d'une topologie pour laquelle $(\mathcal{U}_i, \Phi_i)_{i \in I}$ avec $\mathcal{U}_i = \bigcup_{p \in U_i} \{p\} \times T_p\mathcal{M}$ et

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_i & : & \mathcal{U}_i & \to & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & & (p, v) & \mapsto & \left(\phi_i(p), \left(\left(\left. \dfrac{\partial}{\partial x^k} \right|_p \right)^* (v) \right)_{k \in [\![1, n]\!]} \right) \end{array}$$

(où on a écrit $\phi_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$) est un atlas faisant de $T\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension $2n$.

Justification. Il est évident que $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ recouvre $T\mathcal{M}$.
De plus, pour tout $i \in I$, $\Phi_i(\mathcal{U}_i) = \phi_i(U_i) \times \mathbf{R}^n$, qui est un ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$.
Pour tout $i, j \in I$:

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} & : & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & & (x, y) & \mapsto & \left(\left(\phi_i \circ \phi_j^{-1} \right)(x), \left(\displaystyle\sum_{l=1}^n y^l \left. \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^l} \right|_{\phi_j^{-1}(x)} \right)_{k \in [\![1, n]\!]} \right) \end{array},$$

qui est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ (où on a écrit $\phi_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$).

Proposition 56. La projection $\pi : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}, (p, v) \mapsto p$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Démonstration. Soit U un ouvert de $\mathcal{M}$. On a : $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_p\mathcal{M}$.

En recouvrant $\mathcal{M}$ par des ouverts associés à des cartes, on se ramène au cas où U est associé à une carte, ce qui donne que $\pi^{-1}(U)$ est ouvert par définition de la topologie de $T\mathcal{M}$.

Soit (U, ϕ) une carte sur $\mathcal{M}$.
On a : $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \phi(U) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, (x, v) \mapsto x$, donc $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, donc π est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Proposition 57. Le triplet $(T\mathcal{M}, \mathcal{M}, \pi)$ est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension n.

Démonstration. Les fibres de π sont les espaces tangents, qui sont des espaces vectoriels de dimension n.
Les trivialisations locales sont données par les applications Φ^{-1}.

Définition 58. Une section du fibré tangent est appelée **champ vectoriel**.

Remarque 59. Soit (U, ϕ) une carte sur $\mathcal{M}$, dont on note $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées, et X un champ vectoriel de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, qu'on écrit localement $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.
Montrons que les applications X^i sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. On a, pour tout $p \in U$:

$$\Phi(p, X_p) = \left(x^1(p), \ldots, x^n(p), X^1(p), \ldots, X^n(p)\right),$$

donc, en prenant la carte $(\mathbf{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$ de $\mathbf{R}^n$, $X^1, \ldots, X^n$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

5.4 Application linéaire tangente

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$.

Définition 60. Soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $p \in \mathcal{M}$, on pose $T_p f : T_p\mathcal{M} \to T_{f(p)}\mathcal{N}, v \mapsto (\varphi \mapsto v(\varphi \circ f))$ l'**application linéaire tangente de f en p**.

Remarque 61. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors, pour toutes applications $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$T_p(\lambda f + g) = \lambda T_p f + T_p g.$$

Remarque 62. Lorsque $\mathcal{N} = \mathbf{R}$, on note plutôt $\mathrm{d}f(p)$ au lieu de $T_p f$.
On a alors, en identifiant $T_{f(p)}\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$: $\forall v \in T_p\mathcal{M}, \mathrm{d}f(p)(v) = v(f)$.
Notons que, dans une carte $(x^1, \ldots, x^n)$ définie en p : $\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}x^j(p) \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^j}\right|_p$.

Remarque 63. On se donne une carte $(x^1, \ldots, x^n)$ définie au voisinage du point p. et $(y^1, \ldots, y^p)$ une carte définie au voisinage du point $f(p)$. On a :

$$\forall v \in T_p\mathcal{M}, \forall i \in [\![1, p]\!], T_p f(v)^i = v^j \left.\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right|_p.$$

Remarque 64. Pour une application $\gamma : \mathbf{R} \to \mathcal{M}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note plutôt $\gamma'(t_0)$ au lieu de $T_{t_0}\gamma$.
On a alors : $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \gamma'(t_0)(\varphi) = (\varphi \circ \gamma)'(t_0)$.
On remarque que $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$, et que ses coordonnées dans une carte $(x^1, \ldots, x^n)$ contenant $\gamma(t_0)$ sont $\gamma'(t_0) = (x^i \circ \gamma)'(t_0) \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t_0)}$.
Étant donnés $p \in \mathcal{M}$ et $v \in T_p\mathcal{M}$, qu'on écrit $v = v^i \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, en posant
$\gamma : t \mapsto y^{-1}((t - t_0)(v^1, \ldots, v^n) + x(p))$, on a : $\gamma(t_0) = p$ et $\gamma'(t_0) = v$.
Ainsi, $T_p\mathcal{M}$ est l'ensemble des vecteurs dérivés en p des courbes tracées sur $\mathcal{M}$ passant par p.

Proposition 65. Soit $\mathcal{P}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ et deux applications $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $g : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\forall p \in \mathcal{M}, T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$$

Démonstration. Soit p un point de $\mathcal{M}$ et v un vecteur tangent à $\mathcal{M}$ en p. On a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}), T_p(g \circ f)(v)(\varphi) = v(\varphi(g \circ f)) = T_{f(p)}g(T_p f(v))(\varphi).$$

Définition 66. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles et $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'**application tangente de f** par :

$$Tf : T\mathcal{M} \to T\mathcal{N}, (p, v) \mapsto (f(p), T_p f(v)).$$

6 Fibré cotangent

6.1 Espace cotangent en un point

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) de dimension n et p un point de $\mathcal{M}$.

Définition 67. L'**espace cotangent à** $\mathcal{M}$ **en** p, noté $T_p^*\mathcal{M}$, est le dual de $T_p\mathcal{M}$.

Proposition 68. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ définie en p.
La famille $(\mathrm{d}x^i(p))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est la base duale de $\left(\left. \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Démonstration. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\forall v \in T_p\mathcal{M}, \mathrm{d}x^i(p)v = v(x_i)$. On conclut en utilisant une remarque précédente.

Proposition 69. Soit $(x^1, \ldots, x^n), (y^1, \ldots, y^n)$ deux cartes définies au point p.
On a la relation de changement de base suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{d}y^i(p) = \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right|_p \mathrm{d}x^j(p).$$

Démonstration. Immédiat d'après la proposition précédente.

6.2 Fibré cotangent

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$).

Définition 70. On pose $T^*\mathcal{M} = \bigcup\limits_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times T_p^*\mathcal{M}$ le **fibré cotangent de** $\mathcal{M}$.
On note $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ l'atlas de $\mathcal{M}$.
D'après le lemme concluant la première section de ce polycopié, $T^*\mathcal{M}$ est naturellement muni d'une topologie pour laquelle $(\mathcal{U}_i^*, \Phi_i^*)_{i\in I}$ avec $\mathcal{U}_i^* = \bigcup\limits_{p\in U_i} \{p\} \times T_p^*\mathcal{M}$ et

$$\begin{array}{cccc} \Phi_i^* & : & \mathcal{U}_i^* & \to & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \\ & & (p,\omega) & \mapsto & \left(\phi_i(p), \left(\mathrm{d}x_i^k(p)^*(\omega)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}\right) \end{array}$$

(où on a écrit $\phi_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$) est un atlas faisant de $T^*\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension $2n$.

Justification. La justification est quasiment identique à celle écrite pour le fibré tangent.

Proposition 71. La projection $\pi^* : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}, (p,\omega) \mapsto p$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Proposition 72. Le triplet $(T^*\mathcal{M}, \mathcal{M}, \pi^*)$ est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension n.

Définition 73. Une section du fibré cotangent est appelée **1-forme différentielle**.

Remarque 74. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ et ω une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, qu'on écrit localement $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$. Les applications ω_i sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

7 Intermède : calcul tensoriel

Le but de cette section est de présenter les outils usuels du calcul tensoriel, qui sera abondamment utilisé par la suite dans le cadre de la géométrie différentielle.
Dans cette section, on se donne $\mathbf{K}$ un corps.

7.1 Applications multilinéaires

7.1.1 Généralités

Définition 75. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est dite p-**linéaire** lorsque, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, pour tout $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_p$, l'application

$$E_k \to F, x_k \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$$

est linéaire.
On note $\mathcal{L}^p(E_1 \times \cdots \times E_p, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $F^{E_1 \times \cdots \times E_p}$.
Lorsque $E_1 = \cdots = E_p = E$, on le note plutôt $\mathcal{L}^p(E, F)$.
Lorsque $F = \mathbf{K}$, on le note plutôt $\mathcal{L}^p(E_1 \times \cdots \times E_p)$.
Lorsque $E_1 = \cdots = E_p = E$ et $F = \mathbf{K}$, on le note plutôt $\mathcal{L}^p(E)$.

Proposition 76. Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
On note $(e_{i_1})_{i_1 \in I_1}, \dots, (e_{i_p})_{i_p \in I_p}$ des bases respectives de $E_1, \dots, E_p$. L'application

$$\mathcal{L}^p(E_1 \times \cdots \times E_p, F) \to F^{I_1 \times \cdots \times I_p}, f \mapsto \left(f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\right)\right)_{(i_1, \dots, i_p) \in I_1 \times \cdots \times I_p}$$

est un isomorphisme.

Remarque 77. En particulier, si $E_1, \dots, E_n$ sont de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\mathcal{L}^p(E_1 \times \cdots \times E_p, F)\right) = \dim(F) \prod_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

7.1.2 Applications multilinéaires symétriques

On se donne E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $p \in \mathbf{N}$.

Définition 78. Une application $f \in \mathcal{L}^p(E, F)$ est dite **symétrique** si, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$:

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = f(x_1, \ldots, x_p).$$

On note $\mathcal{S}^p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires symétriques de E^p dans F.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(E, F)$.
Lorsque $F = \mathbf{K}$, on le note plus simplement $\mathcal{S}^p(E)$.

Proposition 79. On suppose E de dimension finie.
On se donne $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
L'application

$$\mathcal{S}^p(E, F) \to F^{\mathcal{C}}, f \mapsto \left(f\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\right)\right)_{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{C}}$$

est un isomorphisme (où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des p-uplets croissants à valeurs dans $[\![1, n]\!]$).

Remarque 80. Dans le cas où E et F sont de dimension finie, on a :

$$\dim(\mathcal{S}^p(E, F)) = \dim(F)\binom{\dim(E) + p - 1}{p}.$$

7.1.3 Applications multilinéaires alternées et antisymétriques

On se donne E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $p \in \mathbf{N}$.

Définition 81. Une application $f \in \mathcal{L}^p(E_F)$ est dite **alternée** si, pour tout $x_1, \dots, x_p \in E$ tels qu'il existe $k, l \in [\![1, p]\!]$ distincts de sorte que $x_k = x_l$,

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0_F.$$

On note $\mathcal{A}^p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires alternées de E^p dans F.
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(E, F)$.
Lorsque $F = \mathbf{K}$, on le note plus simplement $\mathcal{A}^p(E)$.

Définition 82. Une application $f \in \mathcal{L}^p(E, F)$ est dite **antisymétrique** si, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$:

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p).$$

L'ensemble des applications p-linéaires antisymétriques de E^p dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(E, F)$.

Proposition 83. Toute application p-linéaire alternée est antisymétrique.
Si $2 \cdot 1_{\mathbf{K}} \neq 0_{\mathbf{K}}$, alors toute application p-linéaire antisymétrique est alternée.

Proposition 84. On suppose E de dimension finie.
On se donne $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
L'application

$$\mathcal{A}^p(E, F) \to F^{\mathcal{C}_+}, f \mapsto \left(f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\right)\right)_{(i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{C}_+}$$

est un isomorphisme (où $\mathcal{C}_+$ désigne l'ensemble des p-uplets strictement croissants à valeurs dans $[\![1, n]\!]$).

Remarque 85. En particulier, si E et F sont de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\mathcal{A}^p(E, F)\right) = \dim(F) \binom{\dim(E)}{p}.$$

7.2 Produit tensoriel d'espaces vectoriels de dimensions finies

7.2.1 Généralités

Définition 86. Soit $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On note $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p = \mathcal{L}^p\left(E_1^* \times \cdots \times E_p^*\right)$

Remarque 87. Pour $p = 1$, on confond E et E^{**} en identifiant $x \in E$ à

$$E^* \to \mathbf{K}, \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Définition 88. Soit $E_1, \ldots, E_p, F_1, \ldots, F_q$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
Étant donnés $x \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$ et $y \in F_1 \otimes \cdots \otimes F_q$, on définit

$$x \otimes y : E_1 \times \cdots \times E_p \times F_1 \times \cdots \times F_q \to \mathbf{K}$$

par : pour tout $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q) \in E_1^* \times \cdots \times E_p^* \times F_1^* \times \cdots \times F_q^*$,

$$x \otimes y(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q) = x(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)y(\psi_1, \ldots, \psi_q).$$

On vérifie facilement que $x \otimes y \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_p \otimes F_1 \otimes \cdots \otimes F_q$.

Exemple 89. Soit E_1 et E_2 deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $x \in E_1$ et $y \in E_2$. On a :

$$\forall(\varphi, \psi) \in E_1^* \times E_2^*, x \otimes y(\varphi, \psi) = \varphi(x)\psi(y).$$

Soit $\varphi \in E_1^*$ et $\psi \in E_2^*$. En identifiant E et E^{**}, on a :

$$\forall(x, y) \in E_1 \times E_2, \varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Soit $x \in E_1$ et $\psi \in E_2$. On a :

$$\forall(\varphi, y) \in E_1^* \times E_2, x \otimes \psi(\varphi, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Proposition 90. Soit $E_1, \ldots, E_p, F_1, \ldots, F_q$ des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. L'application

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_p \times F_1 \otimes \cdots \otimes F_q \to E_1 \otimes E_p \otimes F_1 \otimes \cdots \otimes F_q, (x, y) \mapsto x \otimes y$$

est bilinéaire.

Proposition 91. Soit $E_1, \dots, E_p, F_1, \dots, F_q, G_1, \dots, G_r$ des **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $x \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_p, y \in F_1 \otimes \cdots \otimes F_q, z \in G_1 \otimes \cdots \otimes G_r$. On a :

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Proposition 92. Soit $E_1, \dots, E_p$ des **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on se donne $(e_{i_k})_{i_k \in [\![1, n_k]\!]}$ une base de E_k.
La famille $\left(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}\right)_{(i_1,\dots,i_p) \in [\![1,n_1]\!] \times \cdots \times [\![1,n_p]\!]}$ est une base de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$.

Proposition 93. Pour tous **K**-espaces vectoriels de dimension finie $E_1, \dots, E_p, F$, pour toute application $f \in \mathcal{L}^p(E_1 \times \cdots \times E_p, F)$, il existe une unique application $\overline{f} \in \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_p, F)$ telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, f(x_1, \dots, x_p) = \overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p).$$

7.2.2 Tenseurs covariants et contravariants

Dans cette section, on se donne E un **K**-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 94. Soit $p, q \in \mathbf{N}$. On pose $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q} = E \otimes \cdots \otimes E \otimes E^* \otimes \cdots \otimes E^*$ (avec p occurrences de E et q occurrences de E^*). Ses éléments sont appelés **tenseurs d'ordre** (p, q) ou **tenseurs p-contravariants et q-covariants**.

Tous les tenseurs suivants seront pris sur E.

Remarque 95. Le produit tensoriel d'un tenseur de type (p, q) et d'un tenseur de type (r, s) est un tenseur de type $(p + r, q + s)$.

Étant donnée une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on notera $(e^1, \dots, e^n)$ sa base duale.
Pour plus de lisibilité, on utilisera la convention de sommation sur les indices répétés : si une lettre apparaît en indice et en exposant, on somme implicitement sur elle.
Par exemple, $x^i e_i$ désigne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i e_i$.

Définition 96. Soit $p, q \in \mathbf{N}$, T un tenseur de type (p, q) et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note ${T^{i_1,\dots,i_p}}_{j_1,\dots,j_q}$ les composantes de T dans la base de $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$ $\left(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}\right)_{(i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q) \in [\![1,n]\!]^{p+q}}$, de sorte que, avec la convention d'Einstein :

$$T = {T^{i_1,\dots,i_p}}_{j_1,\dots,j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}.$$

Dans l'expression ${T^{i_1,\dots,i_p}}_{j_1,\dots,j_q}$, les indices supérieurs $i_1, \dots, i_p$ sont appelés **indices de contravariance**, tandis que les indices inférieurs $j_1, \dots, j_q$ sont appelés **indices de covariance**.

Proposition 97. Soit $p, q, r, s \in \mathbf{N}$, T un tenseur de type (p, q), S un tenseur de type (r, s) et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (dans laquelle seront prises les coordonnées tensorielles suivantes). On a, pour tout $i_1, \dots, i_p, i'_1, \dots, i'_r, j_1, \dots, j_q, j'_1, \dots, j'_s \in [\![1, n]\!]$:

$${(T \otimes S)^{i_1,\dots,i_p,i'_1,\dots,i'_r}}_{j_1,\dots,j_q,j'_1,\dots,j'_s} = {T^{i_1,\dots,i_p}}_{j_1,\dots,j_q} {S^{i'_1,\dots,i'_r}}_{j'_1,\dots,j'_s}$$

Proposition 98. Soit $p,q \in \mathbf{N}$, T un tenseur de type (p,q), $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note $T^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q}$ et $T'^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q}$ les coordonnées de T dans les bases tensorielles associées à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement.
On note $\left(P_j^i\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
On a :

$$T'^{i'_1,\dots,i'_p}{}_{j'_1,\dots,j'_q} = \left(P^{-1}\right)^{i'_1}_{i_1} \cdots \left(P^{-1}\right)^{i'_p}_{i_p} P^{j_1}_{j'_1} \cdots P^{j_q}_{j'_q} T^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q}.$$

Remarque 99. Cette formule justifie les expression « covariant » et « contravariant ». En effet, lors du changement de base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, les indices covariants sont associés à P tandis que les indices contravariants sont associés à P^{-1}.
Plus généralement, une quantité qui est transformée en P est dite **covariante**.
C'est le cas des vecteurs de base car $\forall i \in [\![1,n]\!], e'_i = P_i^j e_j$, mais aussi des coordonnées dans la base duale car $\forall \varphi \in E^*, \forall i \in [\![1,n]\!], \varphi_i = P_j^i e^j$.
Une quantité qui est transformée en P^{-1} est dite **contravariante**.
C'est le cas des vecteurs de le base duale car $\forall i \in [\![1,n]\!], e^i = \left(P^{-1}\right)^i_j e^j$ et des coordonnées dans la base car $\forall x \in E, \forall i \in [\![1,n]\!], x^i = \left(P^{-1}\right)^i_j x^j$.

On termine par la généralisation de la notion de trace : la contraction.

Définition 100. Soit $p,q \in \mathbf{N}^*$, T un tenseur de type (p,q) et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Étant donnés $(k,l) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on définit le tenseur $C_l^k T$ de type $(p-1,q-1)$ par, pour tous $\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},\varphi_{k+1},\dots,\varphi_p \in E^*$, pour tous $x_1,\dots,x_{l-1},x_{l+1},\dots,x_q \in E$,

$$\begin{aligned}&C_l^k T(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},\varphi_{k+1},\dots,\varphi_p,x_1,\dots,x_{l-1},x_{l+1},\dots,x_q)\\ &= \sum_{m=1}^{n} T(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1},e^m,\varphi_{k+1},\dots,\varphi_p,x_1,\dots,x_{l-1},e_m,x_{l+1},\dots,x_q).\end{aligned}$$

Cette définition est indépendante du choix de la base $(e_1,\dots,e_n)$ de E.

Remarque 101. Dans le cas d'un tenseur de type $(1,1)$, on retrouve la trace d'une application linéaire.

Remarque 102. Si $T^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q}$ sont les coordonnées de T, les coordonnées de $C_l^k T$ sont $T^{i_1,\dots,i_{k-1},m,i_{k+1},\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_{l-1},m,j_{l+1},\dots,j_q}$

Proposition 103. La contraction est linéaire : pour tous tenseurs T,S de type (p,q), pour tout $(k,l) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$C_l^k(\lambda T + S) = \lambda C_l^k T + C_l^k S.$$

7.2.3 Tenseur métrique

Dans ce paragraphe, on se donne E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 104. Un **tenseur métrique** sur E est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on se donne g un tenseur métrique défini sur E^2.
Notons qu'il s'agit d'un tenseur de type $(0,2)$.
On rappelle que E et E^* peuvent être confondus en identifiant $x \in E$ à $g(x,\cdot) \in E^*$.
On munit ainsi E^* d'une structure d'espace euclidien, de produit scalaire noté g^{-1}.

Dans toute la suite, on se donne $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Si $(g_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ désigne la famille des coordonnées de g dans la base tensorielle associée $(e_1,\dots,e_n)$, on notera $(g^{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ les coordonnées de g^{-1} dans la base tensorielle associée à $(e^1,\dots,e^n)$.
Notons que $\forall i,j \in [\![1,n]\!], g_{i,k}g^{k,j} = g^{i,k}g_{k,j} = \delta_{i,j}$.
Pour cette raison, g^{-1} est appelé **tenseur métrique inverse**.

Définition 105. Soit $x \in E$.
Les **coordonnées contravariantes** de x, notées $(x^i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, sont les coordonnées de x dans $(e_1,\dots,e_n)$.
Les **coordonnées covariantes** de x, notée $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$, sont les coordonnées de $g(x,\cdot)$ dans $(e^1,\dots,e^n)$.

Remarque 106. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E, alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], x^i = x_i.$$

Proposition 107. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $x \in E$. On a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], x_j = g_{i,j}x^i \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], x^i = g^{i,j}x_j.$$

Proposition 108. Soit $p,q \in \mathbf{N}$ et T un tenseur de type (p,q).
On peut identifier T avec le tenseur $\widetilde{T}$ de type $(0,p+q)$ défini par : pour tous $x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q \in E$,

$$\widetilde{T}(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q) = T\left(g(x_1,\cdot),\dots,g(x_p,\cdot),y_1,\dots,y_q\right).$$

On a ainsi :

$$T_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} = g_{i_1,i_1}\cdots g_{i_p,i'_p}T^{i'_1,\dots,i'_p}{}_{j_1,\dots,j_q}.$$

Remarque 109. Ainsi, les coordonnées du tenseur métrique permettent de « baisser » les indices de contravariance pour en faire des indices de covariance.

Proposition 110. Soit $p,q \in \mathbf{N}$ et T un tenseur de type (p,q).
On peut identifier T avec le tenseur $\widetilde{T}$ de type $(p+q,0)$ défini par :
pour tout $\varphi_1,\dots,\varphi_p \in E^*$, pour tout $x_1,\dots,x_q \in E$:

$$\widetilde{T}(\varphi_1,\dots,\varphi_p,g(x_1,\cdot),\dots,g(x_q,\cdot)) = T\left(\varphi_1,\dots,\varphi_p,x_1,\dots,x_q\right).$$

On a ainsi :

$$T^{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} = g^{j_1,j'_1}\cdots g^{j_q,j'_q}T^{i_1,\dots,i_p}{}_{j'_1,\dots,j'_q}.$$

Remarque 111. Ainsi, les coordonnées du tenseur métrique inverse permettent de « monter » les indices de covariance pour en faire des indices de contravariance.

Remarque 112. Il est possible de mélanger les deux résultats ci-dessus, par exemple :

$$T^{i}{}_{j}{}^{k} = g^{k,k'} g_{j,j'} T^{i,j'}{}_{k'}$$

Remarque 113. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée, alors « baisser » ou « monter » les indices de contravariance ou de covariance ne change pas les coordonnées du tenseur.

Remarque 114. Comme le tenseur métrique et son inverse permettent de « monter » ou « baisser » les indices, on peut contracter un tenseur selon n'importe quelle paire d'indices, même s'ils sont de même nature. Par exemple, si T est un tenseur de type $(4,3)$, on peut définir le tenseur $C^{1,3}T$ de type $(2,3)$ par : $(C^{1,3}T)^{i_1,i_2}{}_{j_1,j_2,j_3} = T^{k,i_1}{}_{k}{}^{i_2}{}_{j_1,j_2,j_3}$. On peut aussi définir le tenseur $C_{2,3}T$ de type $(4,1)$ par : $(C_{2,3}T)^{i_1,i_2,i_3,i_4}{}_{j_1} = T^{i_1,i_2,i_3,i_4}{}_{j_1,k}{}^{k}$. Notons que, au sein de la paire d'indices contractés, mettre le premier en haut et le second en bas ou faire l'inverse ne change pas le résultat.

7.3 Puissances extérieures d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans cette section, on se donne E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on suppose que $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle.

Définition 115. Soit $p \in \mathbf{N}$.
On appelle **p-ième puissance extérieure de** E l'espace vectoriel $\mathcal{A}^p(E^*)$.
On la note $\Lambda^p E$.

Remarque 116. On a $\Lambda^0 E = \mathbf{K}$ et, en identifiant E et E^{**} : $\Lambda^1 E = E$.

Définition 117. Soit $p, q \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \Lambda^p E$ et $\beta \in \Lambda^q E$.
On définit $\alpha \wedge \beta : (E^*)^{p+q} \to \mathbf{K}$ par : pour tout $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+q} \in E^*$,

$$\alpha \wedge \beta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \alpha \left(\varphi_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(p)}\right) \beta \left(\varphi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \varphi_{\sigma(p+q)}\right).$$

Remarque 118. Il s'agit de l'antisymétrisé de $\alpha \otimes \beta$.

Exemple 119. Soit $x, y \in E$. On a : $\forall \varphi, \psi \in E^*, x \wedge y(\varphi, \psi) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$.

Proposition 120. Soit $p, q \in \mathbf{N}$.
L'application $\Lambda^p E \times \Lambda^q E \to \Lambda^{p+q} E, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ est bilinéaire.

Proposition 121. Soit $p, q, r \in \mathbf{N}$. On a :

i) $\forall \alpha \in \Lambda^p E, \forall \beta \in \Lambda^q E, \forall \gamma \in \Lambda^r E, \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

ii) $\forall \alpha \in \Lambda^p E, \forall \beta \in \Lambda^q E, \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

Proposition 122. Soit $x_1, \ldots, x_p \in E$.
La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre si et seulement si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \neq 0_{\Lambda^p E}$.

Proposition 123. Soit $p \in \mathbf{N}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
La famille $\left(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right)_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n}$ est une base de $\Lambda^p E$.

Proposition 124. Soit $p \in \mathbf{N}$. Pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie F, pour toute application $f \in \mathcal{A}^p(E, F)$, il existe une unique application $\overline{f} \in \mathcal{L}(\Lambda^p E, F)$ telle que :

$$\forall x_1, \ldots, x_p \in E, f(x_1, \ldots, x_p) = \overline{f}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p).$$

8 Fibrés tensoriels

8.1 Espaces tensoriels en un point

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) de dimension n et p un point de $\mathcal{M}$.

Définition 125. La **fibre tensorielle de type** (r,s) **de** $\mathcal{M}$ **au-dessus de** p est définie par :

$$(T^r_s)_p\mathcal{M} = \left(T_p\mathcal{M}^{\otimes r} \otimes T^*_p\mathcal{M}^{\otimes s}\right).$$

Remarque 126. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ définie en p. La famille

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}(p) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}(p) \right)_{(i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s)\in[\![1,n]\!]^{r+s}}$$

est une base de $(T^r_s)_p\mathcal{M}$.

Proposition 127. Soit $(x^1, \ldots, x^n), (y^1, \ldots, y^n)$ deux cartes définies au point p. On a la relation de changement de base suivante :

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial}{\partial y^{i'_1}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial y^{i'_r}}\right|_p \otimes \mathrm{d}y^{j'_1}(p) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{j'_s}(p) \\
&= \left.\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\right|_p \cdots \left.\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{i'_r}}\right|_p \left.\frac{\partial y^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\right|_p \cdots \left.\frac{\partial y^{j'_s}}{\partial x^{j_s}}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p \mathrm{d}x^{j_1}(p) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}(p).
\end{aligned}$$

8.2 Fibrés tensoriels

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) et $r, s \in \mathbf{N}$.

Définition 128. On pose $T^r_s\mathcal{M} = \bigcup\limits_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times (T^r_s)_p\mathcal{M}$ le **fibré tensoriel de type** (r, s) **de** $\mathcal{M}$.
Étant donnée une carte $(U, (x^1, \dots, x^n))$ de la variété $\mathcal{M}$, on définit sur $\bigcup\limits_{p \in U} \{p\} \times (T^r_s)_p\mathcal{M}$ la carte renvoyant le $n + (r + s)n$-uplet des coordonnées d'un point p et d'un tenseur de $(T^r_s)_p\mathcal{M}$ dans la base données précédemment.

On munit ainsi $T^r_s\mathcal{M}$ d'une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension $n + (r + s)n$.

Justification. La justification est quasiment identique à celle écrite pour le fibré tangent.

Proposition 129. Le triplet $(T^r_s\mathcal{M}, \mathcal{M}, \pi)$ est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de dimension $(r + s)n$.

Définition 130. Une section du fibré $T^r_s\mathcal{M}$ est appelée **champ tensoriel de type** (r, s).

Remarque 131. Soit $(x^1, \dots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ et T un champ tensoriel de type (r, s) de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, qu'on écrit localement

$$T = T^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}.$$

Les applications $T^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s}$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

8.3 Formes différentielles

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geqslant 2$) et $m \in \mathbf{N}$.

Définition 132. On note $\Omega^m_p\mathcal{M}$ la m-ième puissance extérieure de $T_p\mathcal{M}$.

Remarque 133. Étant donnée $(x^1, \dots, x^n)$ une carte définie au voisinage de p, la famille $(\mathrm{d}x^{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_m}(p))_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n}$ est une base de $\Omega^m_p\mathcal{M}$.

Remarque 134. On munit naturellement $\Omega^m\mathcal{M} = \bigcup\limits_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times \Omega^m_p\mathcal{M}$ d'une structure de variété différentielle et de fibré vectoriel.

Définition 135. Une **m-forme différentielle** est une section du fibré $\Omega^m\mathcal{M}$.
On note $\Omega^m\mathcal{M}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des m-formes différentielles sur $\mathcal{M}$.

Définition 136. On note $\Omega\mathcal{M} = \bigoplus\limits_{m \in \mathbf{N}} \Omega^m\mathcal{M}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des formes différentielles définies sur $\mathcal{M}$. Muni de $\wedge$, il s'agit d'une algèbre graduée.

9 Champs et dérivée de Lie

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle lisse.

9.1 Flot d'un champ vectoriel

Définition 137. Soit p un point de $\mathcal{M}$ et $X : U \to T\mathcal{M}$ un champ vectoriel lisse.
Il existe un unique chemin maximal (I_p, γ) lisse tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in I_p, \dot{\gamma}(t) & = & X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) & = & p \end{cases}.$$

Le **flot de** X est l'application lisse définie sur $\bigcup_{p \in U} I_p \times \{p\}$ (qui est un ouvert de $\mathcal{M}$), qui à (t, p) associe la valeur en t du chemin γ vérifiant les deux équations précédentes.

Démonstration. Il suffit d'utiliser un système de coordonnées et d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 138. Soit $X : U \to \mathcal{M}$ un champ vectoriel lisse. Le flot ϕ est lisse.
De plus, si on note, pour tout t, $\phi_t : p \mapsto \phi(t, p)$, pour tout s, pour tout $p \in U \cap \phi_{-s}(U)$:

$$\phi_t \circ \phi_s(p) = \phi_{s+t}(p).$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Remarque 139. La dernière égalité fait qu'on appelle parfois ϕ le **groupe à un paramètre** associé à X.

9.2 Tiré en arrière, poussé en avant

Commençons par une digression d'algèbre linéaire. Étant donnés deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels E, F isomorphes, $u : E \to F$ un isomorphisme et $\varphi \in F^*$, on souhaite interpréter φ comme une forme linéaire sur E. Il n'y a en général pas de façon canonique (ie dépendant seulement de E, F et φ) de procéder.
En utilisant u, on peut « tirer en arrière » φ pour obtenir la forme linéaire $\varphi \circ u$ définie sur E. Notons qu'on retrouve la notion d'application transposée : $u^*\varphi = \varphi \circ u$.
On peut de même définir le « poussé en avant » d'une forme linéaire $\psi \in E^*$ par u par $u_*\psi = \psi \circ u^{-1}$. Le but de la section qui suit est de donner des notions de « tiré en arrière » et de « poussé en avant » pour les variétés différentielles.

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux variétés différentielles et $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un difféomorphisme.

Définition 140 (Tiré en arrière)**.** Soit $T : \mathcal{N} \to T^r_s\mathcal{N}$ un champ tensoriel.
Le **tiré en arrière de** T **par** ϕ est le champ tensoriel $\phi^*T : \mathcal{M} \to T^r_s\mathcal{M}$ défini par, pour tout $p \in \mathcal{M}$, pour tous $\omega_1, \ldots, \omega_r \in T^*_p\mathcal{M}$, pour tous $v_1, \ldots, v_s \in T_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
&(\phi^*T)_p(\omega_1, \ldots, \omega_r, v_1, \ldots, v_s) \\
&= T_{\phi(p)}(\omega_1 \circ (T_p\phi)^{-1}, \ldots, \omega_r \circ (T_p\phi)^{-1}, T_p\phi(v_1), \ldots, T_p\phi(v_s)).
\end{aligned}$$

Exemple 141. Soit $f : \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. On a :

$$\phi^*f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}, p \mapsto f(\phi(p)).$$

Exemple 142. Soit $X : \mathcal{N} \to T\mathcal{N}$ un champ vectoriel. On a :

$$\phi^*X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}, p \mapsto (T_{\phi^{-1}(p)}\phi)^{-1}(X_{\phi(p)}).$$

Exemple 143. Soit $\omega : \mathcal{N} \to T^*\mathcal{N}$ une 1-forme différentielle. On a :

$$\phi^*\omega : \mathcal{M} \to T^*\mathcal{M}, p \mapsto \omega_{\phi(p)} \circ T_p\phi.$$

Définition 144 (Poussé en avant)**.** Soit $T : \mathcal{M} \to T^r_s\mathcal{M}$ un champ tensoriel.
Le **poussée en avant de** T **par** ϕ est le champ tensoriel $\phi_*T : \mathcal{N} \to T^r_s\mathcal{N}$ défini par, pour tout $p \in \mathcal{N}$, pour tous $\omega_1, \ldots, \omega_r \in T^*_p\mathcal{N}$, pour tous $v_1, \ldots, v_s \in T_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
&(\phi_*T)_p(\omega_1, \ldots, \omega_r, v_1, \ldots, v_s) \\
&= T_{\phi^{-1}(p)}(\omega_1 \circ T_p\phi, \ldots, \omega_r \circ T_p\phi, (T_p\phi)^{-1}(v_1), \ldots, (T_p\phi)^{-1}(v_s)).
\end{aligned}$$

Exemple 145. Soit $f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ une fonction numérique. On a :

$$\phi_*f : \mathcal{N} \to \mathbf{R}, p \mapsto f(\phi^{-1}(p)).$$

Exemple 146. Soit $X : \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ un champ vectoriel. On a :

$$\phi_*X : \mathcal{N} \to T\mathcal{N}, p \mapsto \left(f \mapsto X_{\phi^{-1}(p)}(f \circ \phi)\right).$$

9.3 Dérivée de Lie

Définition 147. Soit X un champ vectoriel sur $\mathcal{M}$ et f une fonction numérique sur $\mathcal{M}$. On définit la **dérivée directionnelle de f suivant X** par :

$$X(f) : \mathcal{M} \to \mathbf{R}, p \mapsto X_p(f).$$

Remarque 148. On note que $X(f)$ ne dépend pas des variations de X, ce qui justifie l'expression « dérivée directionnelle » .

Exemple 149. On se donne une carte $(x^1, \dots, x^n)$. On écrit $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.
On a : $X(f)(p) = X^i(p) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$, ce qu'on écrit un peu abusivement $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Remarque 150. On a : $X(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^* f\right|_{t=0}$ où ϕ est le flot associé à X.

Le but de cette section est de généraliser cette notion de dérivée directionnelle aux champs de tenseurs. Commençons par introduire un objet pour l'instant purement algébrique, le crochet de Lie.

Définition 151. Soit X et Y deux champs vectoriels sur $\mathcal{M}$.
On définit le **crochet de Lie** de X et Y, noté $[X, Y]$, par :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}), [X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Exemple 152. On se donne $(x^1, \dots, x^n)$ une carte de $\mathcal{M}$.
On écrit $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. On a :

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) - Y^i \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\
&= \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Remarque 153. Il est possible d'interpréter le crochet de Lie comme le défaut de commutation de deux flots au sens suivant : si on transporte un point p pendant un temps t à l'aide d'un champ vectoriel X, puis pendant un temps s à l'aide d'un champ vectoriel Y, on n'obtient pas le même point si on inverse les deux transports. On note ϕ_t la flot de X et ψ_s la flot de Y, et on se donne $x \in \mathcal{M}$. On raisonne sur une carte définie au voisinage de x. On pose, pour t au voisinage de 0, $\gamma(t) = (\psi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \psi_t \circ \phi_t)(x)$.
On a, après calcul :

$$\gamma(t) = (\psi_{-t} \circ \phi_{-t} \circ \psi_t)(x + tX_x + o(t)) = x + t[X, Y] + o(t).$$

Proposition 154. Muni de $[\cdot, \cdot]$, $\Gamma T\mathcal{M}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre de Lie.

Jusqu'à la fin du paragraphe, on se donne X un champ vectoriel dont on note ϕ le flot.

Définition 155 (Dérivée de Lie d'un champ vectoriel)**.** On définit la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs Y le long de X par : $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$.

La proposition suivante donne un point de vue géométrique sur la dérivée de Lie, ainsi qu'une écriture permettant de la généraliser à d'autres objets.

Proposition 156. Soit Y un champ vectoriel sur $\mathcal{M}$. On a :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \mathcal{L}_X Y_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\phi_t^* Y\right)_p \Big|_{t=0}.$$

Démonstration. Soit $p \in \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbf{R})$.
On a, en notant ψ le flot associé à Y :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_t^* Y)_p(f)\Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_{\phi_t}\phi_{-t}\right)\left(Y_{\phi_t(p)}\right)(f)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y_{\phi_t(p)}(f \circ \phi_{-t})\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi_s(\phi_t(p))\Big|_{s=0}(f \circ \phi_{-t})\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f((\phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t)(p))\Big|_{s=0}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f((\phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t)(p))\Big|_{t=0}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_{-t}(\psi_s(p)))\Big|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\psi_s(\phi_t(p)))\Big|_{t=0}\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-X_{\psi_s(p)}(f) + X_p(f \circ \psi_s)\right)\Big|_{s=0} \\
&= -Y_p(X(f)) + X_p(Y(f)) \\
&= [X,Y]_p(f) = (\mathcal{L}_X Y)_p(f).
\end{aligned}$$

Définition 157. Étant donné un champ tensoriel T sur $\mathcal{M}$, sa dérivée de Lie $\mathcal{L}_X T$ est le champ tensoriel du même type défini par : $\forall p \in \mathcal{M}, (\mathcal{L}_X T)_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\phi_t^* T\right)_p \Big|_{t=0}$.

Remarque 158. Cette définition coïncide avec la dérivée de Lie d'un champ scalaire ou d'un champ vectoriel.

Remarque 159. La dérivée de Lie est compatible avec les opérations linéaires. Par exemple :

— Pour tous champs tensoriels T, S :

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_X S.$$

— Pour tout champ vectoriel Y, pour toute 1-forme ω :

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = \mathcal{L}_X \omega(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y).$$

Pour les exemples suivants, on se donne $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$, et on écrit localement $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Exemple 160. Soit ω une 1-forme différentielle et Y un champ vectoriel, qu'on écrit localement $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$ et $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. On a :

$$X^j \frac{\partial(\omega_i Y^i)}{\partial x^j} = \left(\mathcal{L}_X \omega\right)_i Y^i + \omega_i \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right),$$

donc :

$$\left(\mathcal{L}_X \omega\right)_i = X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}.$$

Exemple 161. Soit g un champ de tenseurs deux fois covariant, qu'on écrit :

$$g = g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j.$$

On a :

$$\mathcal{L}_X g = \left(X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + g_{ij} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

Exemple 162. Soit T un champ de tenseurs de type (r, s), qu'on écrit :

$$T = T^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}.$$

On a :

$$\left(\mathcal{L}_X T\right)^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} = X^k \frac{\partial T^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}}{\partial x^k} + T^{i'_1, \ldots, i'_r}_{j'_1, \ldots, j'_s} \left(-\frac{\partial X^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} - \cdots - \frac{\partial X^{i_r}}{\partial x^{i'_r}} + \frac{\partial X^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} + \cdots + \frac{\partial X^{j'_s}}{\partial x^{j_s}} \right).$$

Remarque 163. Comme le montrent les exemples ci-dessous, à l'exception des champs scalaires, les dérivées de Lie ne définissent pas à proprement parler des dérivées directionnelles, puisque les dérivées de X interviennent dans le résultat du calcul.
C'est dans l'optique de remédier à ce problème que nous aborderons la notion de connexion dans la prochaine section.

10 Connexions

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle lisse.

10.1 Définition

Définition 164. Une **connexion** sur un fibré lisse $(E, \mathcal{M}, \pi)$ est une application

$$\nabla : \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma E \to \Gamma E, (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) Pour toute section lisse $\sigma \in \Gamma E$, $\Gamma T\mathcal{M} \to \Gamma E, X \mapsto \nabla_X \sigma$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbf{R})$-linéaire.

ii) Pour tous champs vectoriels lisse $X \in \Gamma T\mathcal{M}$, $\Gamma E \to \Gamma E, \sigma \mapsto \nabla_X \sigma$ est $\mathbf{R}$-linéaire.

iii) Pour toute fonction numérique $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbf{R})$, pour tout champ vectoriel lisse $X \in \Gamma T\mathcal{M}$, pour toute section lisse $\sigma \in \Gamma E$:

$$\nabla_X(f\sigma) = (\mathcal{L}_X f)\, \nabla_X \sigma + f \nabla_X \sigma.$$

Remarque 165. La première condition permet de pallier au défaut constaté pour la dérivée de Lie : $(\nabla_X \cdot)_p$ ne dépend que de la valeur de X en p (et non des dérivées partielles de ses composantes). Le troisième condition exprime la compatibilité de la connexion avec la dérivée directionnelle des champs scalaires.

Exemple 166. On vérifie que $\nabla_X \sigma = (\mathcal{L}_X \sigma^1, \ldots, \mathcal{L}_X \sigma^n)$ est une connexion sur le fibré trivial $\mathcal{M} \times \mathbf{R}^n$.

Par compatibilité, on peut étendre une connexion à tous les fibrés lisses construits à partir de $(E, \mathcal{M}, \pi)$, comme le fibré dual ou les fibrés tensoriels.

Exemple 167. Étant donnée une connexion ∇, on peut l'étendre aux sections du fibré dual ΓE^* par :

$$\text{Pour tout } X \in \Gamma T\mathcal{M}, \text{ pour tout } \sigma \in \Gamma E, \text{ pour tout } \omega \in \Gamma E^* :$$
$$\mathcal{L}_X(\omega(\sigma)) = (\nabla_X \omega)\,(\sigma) + \omega(\nabla_X \sigma).$$

Exemple 168. Étant donnée une connexion ∇, on peut l'étendre aux fibrés tensoriels avec l'identité :

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X(T) \otimes S + T \otimes \nabla_X(S).$$

où X désigne un champ vectoriel et où T, S sont des champs tensoriels.

Jusqu'à la fin de cette section, on se donne ∇ une connexion sur un fibré lisse $(E, \mathcal{M}, \pi)$.

Définition 169. Étant donnée une carte $(x^1, \ldots, x^n)$ sur $\mathcal{M}$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une trivialisation locale sur E, on définit les **symboles de Christoffel** de ∇ par :

$$\Gamma^k_{ij} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (e_j)^k .$$

Remarque 170. Notons que Γ^k_{ij} ne définit pas un champ tensoriel.

Remarque 171. Dans le cas où E est le fibré tangent, la trivialisation locale de $T\mathcal{M}$ sera toujours celle associée à la carte $(x^1, \ldots, x^n)$.

Pour les exemples qui vont suivre, on se donne X un champ vectoriel, qu'on écrit localement $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Exemple 172. Soit σ une section de E qu'on écrit localement $\sigma = \sigma^i e_i$. On a :

$$\begin{aligned}\nabla_X \sigma &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sigma^j e_j\right) = X^i \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} e_j + X^i \sigma^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (e_j) \\ &= X^i \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} e_j + X^i \sigma^j \Gamma^k_{ij} e_k = \left(X^i \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i} + X^i \sigma^j \Gamma^k_{ij} \right) e_k.\end{aligned}$$

Notons que, contrairement à la dérivée de Lie, $(\nabla_X \cdot)_p$ ne dépend que de la valeur de X en p (et non de ses dérivées). En particulier, si $X_p = 0$, alors $(\nabla_X \cdot)_p = 0$.

Exemple 173. Soit ω une section du fibré dual, qu'on écrit localement $\omega = \omega_i e^i$. On a : $\omega(\sigma) = \omega_i \sigma^i$, donc

$$X^j \frac{\partial(\omega_i \sigma^i)}{\partial x^j} = (\nabla_X \omega)_i \sigma^i + \omega_k \left(X^i \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i} + X^i \sigma^j \Gamma^k_{ij} \right)$$

donc

$$X^j \omega_i \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^j} + X^j \sigma^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = (\nabla_X \omega)_i \sigma^i + \omega_k X^i \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^i} + \omega_k X^i \sigma^j \Gamma^k_{ij}$$

donc

$$(\nabla_X \omega)_i = X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \omega_k X^j \Gamma^k_{ji}.$$

En particulier :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \nabla_X e^i = -X^j \Gamma^i_{jk} e^k$$

puis :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} e^i = -\Gamma^i_{jk} e^k.$$

Exemple 174. Soit g un champ de tenseurs de type $(0,2)$, qu'on écrit localement $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$. On a : $\nabla_X g = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g$. De plus :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,n]\!], \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} e^k \otimes e^l + g_{kl} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} e^k \right) \otimes e^l + g_{kl} e^k \otimes \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} e^l \right) \\
&= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} e^k \otimes e^l - g_{kl} \Gamma^k_{im} e^m \otimes e^l - g_{kl} \Gamma^l_{im} e^k \otimes e^m \\
&= \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml} \Gamma^m_{ik} - g_{km} \Gamma^m_{il} \right) e^k \otimes e^l,
\end{aligned}$$

donc :

$$(\nabla_X g)_{kl} = X^i \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml} \Gamma^m_{ik} - g_{km} \Gamma^m_{il} \right)$$

Exemple 175. Soit T un champ de tenseurs de type (r,s), qu'on écrit :

$$T = T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T)^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = X^k &\left(\frac{\partial T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}}{\partial x^i} + T^{i'_1,i_2,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \Gamma^{i_1}_{ki'_1} + \cdots + T^{i_1,\dots,i_{r-1},i'_r}_{j_1,\dots,j_s} \Gamma^{i_n}_{ki'_r} \right) \\
&- X^k \left(T^{i_1,\dots,i_r}_{j'_1,j_2,\dots,j_s} \Gamma^{j'_1}_{kj_1} + \cdots + T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_{s-1},j'_s} \Gamma^{j'_s}_{kj_s} \right).
\end{aligned}$$

Exemple 176. Établissons les relations entre les coefficients de Christoffel (d'une connexion sur le fibré tangent) pris dans deux cartes.
On se donne $(y^1,\dots,y^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ dont le domaine de définition intersecte celui de $(x^1,\dots,x^n)$.
On note $\Gamma'^{k'}_{i'j'}$ les coefficients de Christoffel de ∇ dans $(y^1,\dots,y^n)$. On a :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^{i'}}} \left(\frac{\partial}{\partial y^{j'}} \right) &= \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial y^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i \partial y^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}} \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k},
\end{aligned}$$

donc :

$$\Gamma'^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}} \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^{i'} \partial y^{j'}}.$$

Notons que, si un symbole de Christoffel ne définit pas un tenseur, la différence de deux symboles de Christoffel en définit un, dans le sens où le changement de coordonnées vérifie les règles du calcul tensoriel.

10.2 Transport parallèle

On se donne E un fibré lisse sur $\mathcal{M}$ et ∇ une connexion sur E. En plus de définir une bonne notion de dérivée directionnelle, une connexion permet d'établir un lien entre les fibres E_p de E, en y définissant une notion de transport.

Commençons par définir une notion de dérivée covariante le long du « champ » de vecteurs tangents à une courbe (on ne parle pas de champ car il n'est pas défini sur $\mathcal{M}$ tout entier, ni même sur une partie de $\mathcal{M}$).

Définition 177. Étant donné I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{M}$ une courbe lisse, on pose $\Gamma_\gamma(E)$ l'ensemble des applications lisses $X : I \to E$ telles que :

$$\forall t \in I, X(t) \in E_{\gamma(t)}.$$

Étant donné $X \in \Gamma_\gamma(E)$, on définit $\nabla_{\dot\gamma} X$ dans un système de coordonnées par :

$$\forall t \in I, (\nabla_{\dot\gamma} X(t))^k = \dot X^k(t) + \gamma^i(t) X^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)).$$

Notons que $\nabla_{\dot\gamma} X \in \Gamma_\gamma(t)$, et qu'on dispose d'une règle de Leibniz semblable à celle de la connexion ∇.

Définition 178. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{M}$ une courbe lisse. Pour tout $s \in I$ et $X \in E_{\gamma(s)}$, le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{lcl} \nabla_{\dot\gamma} Y & = & 0 \\ Y(s) & = & X \end{array} \right.$ admet une unique solution globale (I, Y). On note, pour tout $t \in I$, $P_s^t(\gamma) X = Y(t)$.

L'application $P_s^t(\gamma) : E_{\gamma(s)} \to E_{\gamma(t)}, X \mapsto P_s^t(\gamma) X$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. La famille $(P_s^t(\gamma))_{(t,s)\in I^2}$ est le **transport parallèle de γ**

Justification. En coordonnées locales, on se ramène à un problème de Cauchy linéaire associé à un opérateur borné sur tout segment, qui admet une unique solution globale, ce qui conclut l'existence d'une solution globale. Le deuxième point vient d'une remarque qui suit.

Remarque 179. Autrement dit, $P_t^s(\gamma)$ prend un vecteur X tangent à $\mathcal{M}$ en $\gamma(t)$, et le transporte parallèlement (c'est-à-dire sans modifier la position relative entre X et le champ de vecteurs dérivés de γ) le long de γ jusqu'à arriver en $\gamma(s)$.

Remarque 180. Pour tous $r, s, t \in I$, on a la relation de Chasles suivante :

$$P_r^s(\gamma) \circ P_s^t(\gamma) = P_r^t(\gamma).$$

En prenant $t = r$, on obtient que $P_r^s(\gamma)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriel.

10.3 Transport parallèle et géodésiques

Soit ∇ une connexion sur $T\mathcal{M}$. Le but de cette section est de définir la notion de géodésique, qui en physique correspond à la courbe décrite par un mobile en chute libre (ie dont l'accélération est nulle).

Définition 181. Une courbe lisse $\gamma : I \to \mathcal{M}$ est une **géodésique** si :

$$\forall t \in I, \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0.$$

Remarque 182. Les géodésiques sont parfois appelées **courbes auto-parallèles**.
En effet, c'est une courbe pour laquelle le transport de ses vecteurs tangents est trivial.

Exemple 183. Soit γ une géodésique sur $\mathcal{M}$ et $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$ définie en $\gamma(0)$. On note $(\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ les coordonnées locales de γ dans la carte précédente.
On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{\mathrm{d}^2\gamma^k}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t} = 0.$$

où Γ^k_{ij} sont les coefficients de Christoffel de ∇ dans la carte $(x^1, \ldots, x^n)$.
Il s'agit de **l'équation des géodésiques**.

Proposition 184. Soit p un point de $\mathcal{M}$ et v un vecteur tangent à $\mathcal{M}$ en p.
Il existe une unique géodésique maximale (I, γ) telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser un système de coordonnées et d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Remarque 185. Attention, la géodésique n'est pas nécessairement définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Voir le théorème de Hopf-Rinow pour plus de détails.

10.4 Coordonnées normales

Soit p un point de $\mathcal{M}$. L'objectif de cette section est de donner une carte contenant p dans laquelle les calculs sont particulièrement aisés.

Définition 186. Pour tout vecteur $v \in T_p\mathcal{M}$, il existe une unique géodésique maximale (I_v, γ_v) telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.
Notons que $\forall \lambda \in \mathbf{R}^*, I_v = \lambda I_{\lambda v}$ et $\forall t \in I_{\lambda v}, \gamma_v(t) = \gamma_{\lambda v}\left(\frac{t}{\lambda}\right)$, donc il existe un voisinage U de $0_{T_p\mathcal{M}}$ tel que $\forall v \in U, [0,1] \subset I_v$.
On définit ainsi l'application $\exp_p : U \to \mathcal{M}, v \mapsto \gamma_v(1)$.

Proposition 187. L'application $\exp_p$ est différentiable en 0 et sa différentielle vaut Id.

Démonstration. Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit que $\exp_p$ est lisse.
On a, dans un système de coordonnées locales :

$$\frac{\exp_p(tv) - p}{t} = \frac{\gamma_{tv}(1) - p}{t} = \frac{\gamma_v(t) - \gamma_v(0)}{t} = \dot{\gamma_v}(0) + o(1) = v + o(1).$$

donc la différentielle de $\exp_p$ en 0 est l'identité de $T_p\mathcal{M}$.

Corollaire 188. L'application $\exp_p$ induit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local d'un voisinage de $0_{T_p\mathcal{M}}$ vers un voisinage de p dans $\mathcal{M}$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème d'inversion locale.

Définition 189. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ un système de coordonnées sur $\mathcal{M}$ défini au voisinage de p. **Le système de coordonnées normales associé à** $(x^1, \ldots, x^n)$ est défini par la carte de la forme $U \to \mathbf{R}^n, q \mapsto \varphi \circ \exp_p^{-1}(q)$ avec $\varphi : T_p\mathcal{M} \to \mathbf{R}^n$ l'isomorphisme défini par $\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = e_i$ (avec $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$).

La proposition suivante montre un des avantages de se placer en coordonnées normales.

Proposition 190. Dans un système de coordonnées normales au point p, les coefficients de Christoffel au point p sont nuls.

Démonstration. On se donne $(x^1, \ldots, x^n)$ un système des coordonnées défini au voisinage de p, de coordonnées normales associées $(y^1, \ldots, y^n)$.
Soit $v \in T_p\mathcal{M}$. On note $(y^1(t), \ldots, y^n(t))$ les coordonnées normales de $\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1)$.
On a, par définition : $(y^1(t), \ldots, y^n(t)) = (tv^1, \ldots, tv^n)$, donc, en écrivant l'équation des géodésiques en coordonnées normales : $\Gamma^k_{ij}(p)v^iv^j = 0$, donc $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$

10.5 Tenseur de torsion

On se donne ∇ une connexion sur $T\mathcal{M}$.

Définition 191. Le tenseur de **torsion** de ∇ est l'application

$$\begin{array}{rccc} T & : & \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} & \to & \Gamma T\mathcal{M} \\ & & (X,Y) & \mapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}.$$

Remarque 192. L'application T est $\mathbf{R}$-bilinéaire antisymétrique.

Remarque 193. La torsion d'une connexion représente le défaut de commutativité de la connexion à l'ordre 1.

Exemple 194. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$. Soit X, Y deux champs vectoriels, qu'on écrit localement : $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. On a :

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} - Y^i X^j \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &- \left(X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= X^i Y^j \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

On pose $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$, de sorte que :

$$T(X,Y) = X^i Y^j T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Définition 195. Une connexion est une **dérivée covariante** si sa torsion est nulle.

Remarque 196. Une connexion est une dérivée covariante si et seulement si ses coefficients de Christoffel sont symétriques en les indices : $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

10.6 Tenseur de Riemann

On se donne ∇ une connexion sur $T\mathcal{M}$.

Définition 197. Le **tenseur de Riemann** de ∇, noté R, est défini par :

$$R : \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M},\mathbf{R})}(\Gamma T\mathcal{M}), (X,Y) \mapsto \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Remarque 198. À l'instar du tenseur de torsion, le tenseur de Riemann représente le défaut de commutation d'une connexion à l'ordre 2. On peut en donner une interprétation géométrique aisée dans le cas d'une connexion sans torsion. On se donne trois champs de vecteurs X, Y, Z avec $[X,Y] = 0$. On transporte Z selon X, puis selon Y.
On obtient un vecteur v_1. En échangeant les rôles de X et Y, on obtient un vecteur v_2.
La différence $v_2 - v_1$ vaut $R(X,Y)Z$.

Exemple 199. On se donne une carte $(x^1, \ldots, x^n)$ sur $\mathcal{M}$, et X, Y, Z trois champs vectoriels qu'on écrit respectivement localement $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Z = Z^i\frac{\partial}{\partial x^i}$.
On a :

$$\nabla_X\nabla_Y = X(Y^i)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} + Y^iX^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} + Y^iX^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}},$$

et : $\nabla_{[X,Y]} = [X,Y]^i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$, donc :

$$R(X,Y) = Y^iX^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} - X^iY^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = X^iY^jR\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Soit $i, j, k \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^l_{jk}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\frac{\partial}{\partial x^m} = \left(\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\right)\frac{\partial}{\partial x^l},\end{aligned}$$

et :

$$\nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} = \nabla_0 = 0,$$

donc :

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}$$

On pose $R^l{}_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}$, de sorte que :

$$R(X,Y)Z = X^iY^jZ^kR^l{}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Ainsi, le tenseur de Riemann est un tenseur 1-contravariant et 3-covariant.
Notons que, comme $\forall X, Y \in \Gamma T\mathcal{M}, R(X,Y) = -R(Y,X)$, le tenseur de Riemann est antisymétrique par rapport à ses deux premières coordonnées covariantes.

Remarque 200. L'application $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbf{R})$-trilinéaire.

Par la suite, on suppose que ∇ est sans torsion.
Dans ce cas, le tenseur de RIEMANN présente de nombreuses symétries, dont les identités de BIANCHI.

Proposition 201 (Première identité de BIANCHI)**.** On a, pour tous champs vectoriels $X, Y, Z \in \Gamma T\mathcal{M}$:

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0.$$

Démonstration. Comme ∇ est sans torsion, on a :

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X =& \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[Z,X]} Y \\ &+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y \nabla_{[Y,Z]} X \\ &= \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [X, Y] \\ &- \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Z,Y]} X - \nabla_{[X,Z]} Y \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne provient de l'identité de JACOBI.

Remarque 202. Dans un système de coordonnées, cela donne : $R_{lijk} + R_{lkij} + R_{ljki} = 0$.

Proposition 203 (Seconde identité de BIANCHI)**.** On a, pour tous champs vectoriels $X, Y, Z \in \Gamma T\mathcal{M}$:

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0.$$

Démonstration. Soit $p \in \mathcal{M}$. On se donne $(x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées normales définies au voisinage de p.
La dépendance en X, Y, Z étant locale et $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbf{R})$-linéaire, il suffit de vérifier l'identité ci-dessus pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ et $Z = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Les calculs suivants sont laissés en exercice au lecteur.

Remarque 204. La seconde identité de BIANCHI admet une interprétation géométrique. Imaginons un pavé de côtés $(\delta x, \delta y, \delta z)$ dont un sommet est le point $P(x, y, z)$.
On prend un vecteur V, astreint à se déplacer sur les arêtes du pavé selon un transport parallèle. En le transportant autour de la face d'abscisse $x + \delta x$, on obtient une variation à l'ordre 1 : $-\delta V^l = R^l{}_{iyz}(x + \delta x, y, z) V^i \delta y \delta z$. En sommant les contributions pour chacune des faces du pavé, on a : $\delta_{\text{tot}} V^l = \left(\partial_x R^l_{iyz} V^i + \partial_y R^l_{xjz} V^j + \partial_z R^l_{xyk} V^k \right) \delta x \delta y \delta z$. Or chaque arête du pavé est parcourue exactement deux fois, dans deux sens opposés, donc $\delta_{\text{tot}} V^l = 0$, ce qui donne la seconde identité de BIANCHI.

11 Métriques

On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle lisse.

11.1 Connexion de Levi-Civita

Définition 205. Un champ tensoriel g tel que, pour tout point p de $\mathcal{M}$, g_p est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée est appelé **tenseur métrique**.

Théorème 206. Soit g un tenseur métrique sur $\mathcal{M}$. Il existe une unique dérivée covariante ∇ telle que, pour tout champ vectoriel X, $\nabla_X g = 0$.
On l'appelle **connexion de Levi-Civita** de g.

Démonstration. On procède par analyse-synthèse. Soit ∇ une telle dérivée covariante. Soit X, Y, Z trois champs vectoriels. On a :

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

On trouve de même :

$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \text{ et } Y(g(Z,X)) = g(\nabla_Y Z, Y) + g(Z, \nabla_Y X).$$

Donc, comme g est symétrique et que ∇ est sans torsion :

$$\begin{aligned} &X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X,Z]) + g(X, [Y,Z]), \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &g(Z, \nabla_X Y) \\ &= \frac{1}{2}\left(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z])\right). \end{aligned}$$

Cette relation caractérise $\nabla_X Y$ d'après le lemme de Riesz.
On vérifie au terme d'un long calcul que ∇ ainsi définie est une dérivée covariante telle que, pour tout champ vectoriel X, $\nabla_X g = 0$.

Jusqu'à la fin de cette section, ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associée à g.

Exemple 207. Calculons les symboles de CHRISTOFFEL de la connexion de LEVI-CIVITA ∇ associée à g. Soit $(x^1, \dots, x^n)$ une carte sur $\mathcal{M}$. Soit X un champ vectoriel qu'on écrit localement $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. On a : $\nabla_X g = 0$, donc :

$$\forall k, l \in [\![1, n]\!], X^i \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml}\Gamma^m_{ik} - g_{km}\Gamma^m_{il} \right) = 0,$$

donc :

$$\forall i, k, l \in [\![1, n]\!], \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml}\Gamma^m_{ik} - g_{km}\Gamma^m_{il} = 0.$$

En permutant les indices :

$$\forall i, k, l \in [\![1, n]\!], \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{li} - g_{im}\Gamma^m_{lk} = 0 \text{ et } \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - g_{mi}\Gamma^m_{kl} - g_{lm}\Gamma^m_{ki} = 0$$

On additionne les deux premières relations, et on retranche la dernière :

$$\forall i, k, l \in [\![1, n]\!], \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = 2 g_{km}\Gamma^m_{il}.$$

Donc, en contractant à l'aide de g^{jk} :

$$\forall i, j, l \in [\![1, n]\!], \Gamma^j_{il} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} \right).$$

Terminons ce paragraphe par une propriété importante du transport parallèle associé à la connexion de LEVI-CIVITA, à savoir qu'il s'agit d'une isométrie.

Proposition 208. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{M}$ une courbe lisse. Pour tous $s, t \in I$, $P^t_s(\gamma)$ est une isométrie :

$$\forall X, Y \in T_{\gamma(s)}\mathcal{M}, g_{\gamma(s)}(X, Y) = g_{\gamma(t)}(P^t_s(\gamma)X, P^t_s(\gamma)Y).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{\gamma(t)}(P^t_s(\gamma)X, P^t_s(\gamma)Y) = &\left(\nabla_{\dot\gamma} g_{\gamma(t)}\right)(P^t_s(\gamma)X, P^t_s(\gamma)Y) \\ &+ g_{\gamma(t)}(\nabla_{\dot\gamma} P^t_s(\gamma)X, P^t_s(\gamma)Y) \\ &+ g_{\gamma(t)}(P^t_s(\gamma)X, \nabla_{\dot\gamma} P^t_s(\gamma)Y) = 0.\end{aligned}$$

Remarque 209. En affinant la preuve précédente, on remarque que le caractère isométrique du transport parallèle caractérise la connexion de LEVI-CIVITA parmi les dérivées covariantes sur $\mathcal{M}$.

11.2 Tenseur de Riemann d'une connexion de Levi-Civita

Commençons par un lemme concernant les coordonnées normales.

Lemme 210. Soit $p \in \mathcal{M}$. En coordonnées normales, les dérivées premières des coordonnées de g sont nulles en p.

Démonstration. On se place en coordonnées normales. Les calculs effectués auparavant pour exprimer les symboles de Christoffel en fonction des coordonnées de g donnent, pour tout champ de vecteurs X :

$$\forall k, l \in [\![1, n]\!], X^i \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml}\Gamma^m_{ik} - g_{km}\Gamma^m_{il} \right) = 0.$$

On obtient le résultat voulu en évaluant en p.

Voyons un exemple d'application de cette simplification.

Exemple 211. Calculons les coordonnées du tenseur de Riemann en fonction de la métrique g. Soit $p \in \mathcal{M}$. En coordonnées normales, on a :

$$\left(R^l{}_{ijk} \right)_p = \left. \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} \right|_p - \left. \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} \right|_p$$

avec, d'après le lemme :

$$\left. \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} \right|_p = \frac{1}{2} \left(g^{lm} \right)_p \left(\left. \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^j \partial x^i} \right|_p + \left. \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^k} \right|_p - \left. \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^m} \right|_p \right).$$

On en déduit une expression du tenseur de Riemann au point p en fonction des coordonnées de la métrique.

Remarque 212. L'expression précédente donne la symétrie dite « par paires » du tenseur de Riemann : $R_{lijk} = R_{jli}$.

Définition 213. Le **tenseur de Ricci**, noté Ric, est une contraction du tenseur de Riemann, par rapport à son indice contravariant et son troisième indice covariant :

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(R(X, Y) \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^i$$

dans un système de coordonnées locales. Autrement dit : $\mathrm{Ric}_{ij} = R^l{}_{ijl}$.

Remarque 214. La symétrie par paire du tenseur de Riemann donne la symétrie du tenseur de Ricci.

Remarque 215. Une interprétation géométrique du tenseur de Ricci est délicate.
Il s'agit d'une sorte de moyenne directionnelle de la courbure.
Notons que le tenseur de Ricci peut être nul sans que le tenseur de Riemann le soit.

Définition 216. La **tenseur de Ricci** scalaire, noté Rscal, est la trace du tenseur de Ricci : $\mathrm{Rscal} = \mathrm{Ric}^i{}_i$.

Remarque 217. Le tenseur de Ricci définit une courbure moyenne.

11.3 Hypersurfaces

On se donne $\mathcal{M}$ une variété lisse de dimension n (avec $n \in \mathbf{N}^*$) et g une métrique sur $\mathcal{M}$. On note ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g.

Définition 218. Une **hypersurface** Σ de $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathcal{M}$ de dimension $n-1$.

Remarque 219. On note $\overline{g} = g_{|\Sigma}$ la métrique induite par g sur Σ.
On l'appelle **première forme fondamentale** de Σ.

Définition 220. Une hypersurface Σ de $\mathcal{M}$ est dite **orientée** s'il existe un champ vectoriel lisse $N \in \Gamma T\mathcal{M}$ tel que, pour tout $p \in \Sigma$, N_p est orthogonal à $T_p\Sigma$ et $g_p(N_p, N_p) \neq 0$ (dans ce cas, on dit que N oriente Σ)

Remarque 221. Dans le cas où g est un champ de produits scalaires, on peut prendre N_p unitaire pour tout $p \in \Sigma$.

On note $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à $\overline{g}$.
Le but de la définition suivante est d'établir un lien entre ∇ et $\overline{\nabla}$.

Définition 222. Soit Σ une hypersurface de $\mathcal{M}$ orientée par N.
En revenant à la preuve de l'existence de la connexion de Levi-Civita, on note que : $\forall X, Y, Z \in \Gamma T\Sigma, g(Z, \nabla_X Y) = \overline{g}(Z, \overline{\nabla}_X Y)$, donc, pour tout $p \in \Sigma$, pour tous $X, Y \in \Gamma T\Sigma$, il existe un unique réel $K_p(X, Y)$ tel que :

$$(\nabla_X Y)_p = \left(\overline{\nabla}_X Y\right)_p + K_p(X, Y)N_p.$$

Notons que $K_p(X,Y) = \dfrac{g_p\left(\left(\nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y\right)_p, N_p\right)}{g_p(N_p, N_p)}$, donc l'application

$$K : (\Gamma T\Sigma)^2 \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma, \mathbf{R}), (X, Y) \mapsto (p \mapsto K_p(X, Y))$$

est bien définie et est un tenseur deux fois covariant.
On l'appelle **seconde forme fondamentale de** Σ.

11.4 Champs de Killing

Définition 223. Deux variétés lisses munies de métriques $(\mathcal{M}, g)$ et $\left(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g}\right)$ sont dites **isomorphes** s'il existe un difféomorphisme lisse $\phi : \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ tel que $\phi^* \widetilde{g} = g$.
Dans le cas où $(\mathcal{M}, g) = (\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$, l'application ϕ est qualifiée d'**isométrie**.

Par la suite, on se donne $(\mathcal{M}, g)$ une variété lisse munie d'une métrique.

Définition 224. Un champ vectoriel lisse $X \in \Gamma T\mathcal{M}$ de flot ϕ_t est un **champ de Killing** si, pour tout t ou cela a du sens, ϕ_t est une isométrie.

Théorème 225. Un champ vectoriel lisse $X \in \Gamma T\mathcal{M}$ est une isométrie si et seulement si $\mathcal{L}_X g = 0$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat par définition de la dérivée de Lie.
Passons au sens réciproque. On note ϕ_t le flot de X.
On a, pour s suffisamment proche de 0 : $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\phi_t)^* X\right|_{t=s} = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\phi_s)^* (\phi_t)^* X\right|_{t=0}$, donc, comme $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_t)^* X\right|_{t=0} = 0$, on a : $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\phi_t)^* X\right|_{t=s} = 0$.
Ainsi, $(\phi_s)^* g$ est constant égal à $(\phi_0)^* g = g$.

11.5 Variétés riemanniennes

Définition 226. Une **variété riemannienne** est un couple $(\mathcal{M}, g)$ avec $\mathcal{M}$ une variété différentielle lisse et g une métrique définie positive.

Remarque 227. Autrement dit, une variété riemannienne est une variété munie de la donnée lisse d'un produit scalaire sur tout espace tangent.

L'intérêt des variétés riemanniennes est de pouvoir y définir une notion de **longueur**.

Définition 228. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \to \mathcal{M}$ une courbe lisse.
La **longueur de** γ, notée $L(\gamma)$, est définie par :

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\mathrm{d}t.$$

Remarque 229. La longueur de γ est invariante par reparamétrage de γ.
On rappelle d'un reparamétrage de γ est un difféomorphisme lisse croissant $\varphi : \widetilde{I} \to I$ où $\widetilde{I}$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.
La reparamétrée de (I, γ) par φ est la courbe $\left(\widetilde{I}, \widetilde{\gamma}\right)$ où $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Intéressons-nous aux courbes de longueurs minimales. Nous verrons que toute courbe de longueur minimale est une géodésique à reparamétrage près.
Introduisons d'abord la notion d'abscisse curviligne.

Définition 230. Soit $[t_0, t_1]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathcal{M}$ lisse régulière (ie telle que $\forall t \in [t_0, t_1], g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \neq 0$.
L'application

$$\tau : [t_0, t_1] \to [0, L(\gamma)], t \mapsto \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}\mathrm{d}s$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme appelé **abscisse curviligne de** γ.
La reparamétrée $\widetilde{\gamma}$ de γ par τ^{-1} vérifie $\forall s \in [0, L(\gamma)], g_{\widetilde{\gamma}(s)}(\dot{\widetilde{\gamma}}(s), \dot{\widetilde{\gamma}}(s)) = 1$ (autrement dit, son vecteur vitesse est unitaire).

Définition 231. Une courbe lisse régulière paramétrée par abscisse curviligne $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathcal{M}$ est dite **minimisante** si, pour toute famille lisse de courbes $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]}$ définies sur $[t_0, t_1]$ vérifiant
$\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], (\gamma_\varepsilon(t_0), \gamma_\varepsilon(t_1)) = (\gamma(t_0), \gamma(t_1))$ et $\gamma_0 = \gamma, \varepsilon \mapsto L(\gamma_\varepsilon)$, la fonction $\varepsilon \mapsto L(\gamma_\varepsilon)$ admet un minimum en 0.

Théorème 232. Toute courbe minimisante est une géodésique à reparamétrage près.

Démonstration. On reprend les mêmes notations que précédemment.
On a, en dérivant sous l'intégrale dans un système de coordonnées (une telle écriture est licite grâce à un argument de partitions de l'unité, qu'on verra ultérieurement) :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}L(\gamma_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2\|\dot\gamma(t)\|}\left(\partial_k g_{ij}(\gamma(t))\,\frac{\mathrm{d}\gamma_\varepsilon^k(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)+2g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\,\frac{\mathrm{d}\dot\gamma_\varepsilon^j(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où on note, pour plus de lisibilité, $\|\dot\gamma(t)\|=\sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}$.
On intègre par parties le second terme (le terme croisé est nul puisque les γ_ε ont les mêmes extrémités) :

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\|\dot\gamma\|}g_{ij}\dot\gamma^i\,\frac{\mathrm{d}\dot\gamma_\varepsilon{}^j}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\|\dot\gamma\|}g_{ij}\dot\gamma^i\right)\frac{\mathrm{d}\gamma_\varepsilon^i}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$

Les réels $\frac{\mathrm{d}\gamma_\varepsilon^k(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ pouvant être choisis arbitrairement (grâce à un argument de partitions de l'unité, qu'on verra ultérieurement), on en déduit :

$$\frac{1}{2\|\dot\gamma\|}\partial_k g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\|\dot\gamma\|}g_{ik}\dot\gamma^i\right)$$

donc :

$$\frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j=-\frac{1}{\|\dot\gamma\|}\frac{\mathrm{d}\|\dot\gamma\|}{\mathrm{d}t}g_{ik}\dot\gamma^i+\frac{\mathrm{d}g_{ik}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma^i+g_{ik}\ddot\gamma^i.$$

Or $\frac{\mathrm{d}g_{ik}}{\mathrm{d}t}=\partial_l g_{ik}\dot\gamma^l$, donc, en renommant les indices muets :

$$\frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j=-\frac{1}{\|\dot\gamma\|}\frac{\mathrm{d}\|\dot\gamma\|}{\mathrm{d}t}g_{ik}\dot\gamma^i+\partial_j g_{ik}\dot\gamma^i\dot\gamma^j+g_{ik}\ddot\gamma^i,$$

donc, en renommant i en l :

$$g_{lk}\ddot\gamma^l-\frac{1}{2}\partial_k g_{lj}\dot\gamma^l\dot\gamma^j+\partial_j g_{lk}\dot\gamma^l\dot\gamma^j=\frac{1}{\|\dot\gamma\|}\frac{\mathrm{d}\|\dot\gamma\|}{\mathrm{d}t}g_{lk}\dot\gamma^l,$$

puis, en contractant avec g^{ik} :

$$\ddot\gamma^i+g^{il}\left(-\frac{1}{2}\partial_k g_{lj}+\partial_j g_{lk}\right)\dot\gamma^l\dot\gamma^j=\frac{1}{\|\dot\gamma\|}\frac{\mathrm{d}\|\dot\gamma\|}{\mathrm{d}t}\dot\gamma^i.$$

On reconnaît les symboles de Christoffel, de sorte que :

$$\ddot\gamma^i+\Gamma^i_{lj}\dot\gamma^l\dot\gamma^j=\frac{1}{\|\dot\gamma\|}\frac{\mathrm{d}\|\dot\gamma\|}{\mathrm{d}t}\dot\gamma^i.$$

Ainsi, en reparamétrant γ par son abscisse curviligne, le membre de droite devient nul : on retrouve l'équation des géodésiques.

Remarque 233. Toute géodésique n'est pas minimisante. En effet, les méridiens de la sphère sont des géodésiques, mais ils ne sont clairement pas toujours minimisants.

11.6 Variétés lorentziennes

Définition 234. Une **variété lorentzienne** est un couple $(\mathcal{M}, g)$ où $\mathcal{M}$ est une variété différentielle lisse et g est une métrique lisse de signature $(-1, 1, \ldots, 1)$.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on se donne $(\mathcal{M}, g)$ une variété lorentzienne de dimension n (concrètement, en relativité générale, on considère un espace-temps de dimension 4, et de dimension supérieure en théorie des cordes). L'intérêt de ce genre de structure est de munir un espace-temps $\mathcal{M}$ d'une notion de causalité.

Définition 235. Soit $p \in \mathcal{M}$. On dit qu'un vecteur $v \in T_p\mathcal{M}$ est du genre :

— **temps** si $g_p(v, v) < 0$;

— **espace** si $g_p(v, v) > 0$;

— **lumière** si $g_p(v, v) = 0$.

Une courbe lisse $\gamma : I \to \mathcal{M}$ (où I est un intervalle de $\mathbf{R}$) est dite du genre temps (resp. espace, resp. lumière) si, pour tout $t \in I$, $\dot{\gamma}(t)$ est du genre temps (resp. espace, resp. lumière).

Remarque 236. Les courbes du genre lumière (resp. temps) représentent les trajectoires de la lumière (resp. des particules matérielles). Par postulat, une courbe γ représentant la trajectoire de la lumière ou d'une particule en chute libre respectent l'équation des géodésiques $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g.

Exemple 237. Dans cet exemple, on prend $\mathcal{M} = \mathbf{R}^{n+1}$, muni de la métrique de Minkowski

$$g = -\left(\mathrm{d}x^0\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2$$

en prenant au préalable comme système de coordonnées globales la base duale de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$.

Les coordonnées de g dans $(\mathrm{d}x^0, \ldots, \mathrm{d}x^n)$ étant constantes, on en déduit que les coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita sont nuls, donc les géodésiques sont des droites.

12 Intermède : partitions de l'unité

On donne dans cette section une preuve du théorème de partition de l'unité pour une variété différentielle, qui est particulièrement utile pour étendre des objets ou encore effectuer des recollements de façon régulière.
On se donne $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.

Définition 238. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathcal{M}$.
Une **partition de l'unité associée à** $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions lisses $(\rho_i)_{i\in I}$ définies sur $\mathcal{M}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ telle que :

— $\forall i \in I, \mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$

— $(\mathrm{Supp}(\rho_i))_{i\in I}$ est localement finie (ie chaque point de $\mathcal{M}$ possède un voisinage sur lequel un nombre fini de ρ_i ne sont pas identiquement nuls)

— $\forall p \in \mathcal{M}, \sum\limits_{i\in I} \rho_i(p) = 1$

Théorème 239. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\mathcal{M}$ par des ouverts.
Il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{M}$.

Démonstration. Classiquement, en considérant

$$\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on construit une fonction positive lisse à support compact définie sur $\mathbf{R}^d$. En dilatant et en translation, pour tout point x de $\mathbf{R}^d$, pour tout ouvert U de $\mathbf{R}^d$ contenant x, il existe une fonction positive lisse à support compact inclus dans U.

Comme $\mathcal{M}$ est σ-compacte, il existe un recouvrement dénombrable de $\mathcal{M}$ par des compacts $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \overline{K_{n+1}\backslash K_n}$, il existe un ouvert V_x inclus dans $K_{n+2}\backslash K_{n-1}$ et dans un des U_i, et $f_x : V_x \to \mathbf{R}^+$ de même régularité que la variété et à support compact.
La famille $(f_x^{-1}(\mathbf{R}_*^+))_{x\in\overline{K_{n+1}\backslash K_n}}$ est un recouvrement du compact $\overline{K_{n+1}\backslash K_n}$ par des ouverts. On peut en extraire un recouvrement fini $(f_x^{-1}(\mathbf{R}_*^+))_{x\in A_n}$.
La famille $(f_x^{-1}(\mathbf{R}_*^+))_{x\in \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n}$ est un recouvrement de $\mathcal{M}$ localement fini tel que, pour tout $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$, $f_x^{-1}(\mathbf{R}_*^+)$ est inclus dans un $U_{i(x)}$. On pose, pour tout $i \in I$:

$$\rho_i = \frac{1}{\sum\limits_{x\in \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n} f_x} \sum_{x\in i^{-1}(\{x\})} f_x,$$

et on vérifie que $(\rho_i)_{i\in I}$ convient.

On donne une application importante de ce résultat.

Théorème 240 (Théorème de Whitney)**.** Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ compacte. Il existe $N \in \mathbf{N}$ et $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbf{R}^N$ un plongement.

Démonstration. Comme $\mathcal{M}$ est compacte, on peut la recouvrir d'un nombre fini d'atlas $((U_i, \phi_i))_{i\in[\![1,m]\!]}$. On note $(\rho_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une partition de l'unité associée à $(U_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$. En retravaillant la preuve précédente, on montre qu'on peut choisir $(\rho_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ de sorte que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, ρ_i est constante égale à 1 sur un ouvert V_i inclus dans U_i, avec $(V_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ recouvrant $\mathcal{M}$. On peut étendre chaque carte ϕ_i à $\mathcal{M}$ tout entier en considérant $\phi_i\rho_i$. On pose ainsi :

$$\varphi : \mathcal{M} \to \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}, p \mapsto ((\phi_1\rho_1)(p), \ldots, (\phi_m\rho_m)(p), \rho_1(p), \ldots, \rho_m(p))$$

où n est la dimension de $\mathcal{M}$. On montre facilement, en raisonnant sur chaque V_i, que φ est un plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{R}^{(n+1)m}$.

13 Variétés orientées

13.1 Généralités

On se donne $\mathcal{M}$ un espace topologique séparé et σ-compact. Toutes les cartes considérées ici sont à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ avec $n \in \mathbf{N}$, et les changements de cartes sont supposés lisses.

Définition 241. Deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ) sur $\mathcal{M}$ ont la même orientation si :

$$\mathrm{Jac}(\phi \circ \psi^{-1}) > 0.$$

Remarque 242. L'orientation définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des cartes sur $\mathcal{M}$.

Définition 243. Un atlas sur $\mathcal{M}$ **définit une orientation** si toutes ses cartes ont la même orientation. Une variété différentielle dont l'atlas définit une orientation est dite **orientée**.

Par la suite, on se donne $\mathcal{M}$ une variété lisse de dimension n.

Définition 244. Une **forme volume** sur $\mathcal{M}$ est un élément non nul de $\Omega^n\mathcal{M}$.

14 Applications physiques

14.1 Principe de moindre action

Le but de ce paragraphe est de généraliser l'approche faite précédemment pour montrer que les courbes minimisantes sont des géodésiques à reparamétrage près.

Un **système physique** est un couple $(\mathcal{M}, L)$ où $\mathcal{M}$ est une variété lisse et où $L : T\mathcal{M} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (q, v, t) \mapsto L(q, v, t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
L'**action** S est définie par :

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)\mathrm{d}t$$

avec $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathcal{M}$ une courbe lisse.
On pose $\mathcal{P}_{t_1,q_1}^{t_2,q_2}$ l'ensemble des courbes lisses $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathcal{M}$ tels que $\gamma(t_1) = q_1$ et $\gamma(t_2) = q_2$.
Étant donné $\gamma \in \mathcal{P}_{t_1,q_1}^{t_2,q_2}$, une **variation de** γ est une application lisse

$$[t_1, t_2] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \mathcal{M}, (t, \varepsilon) \mapsto \gamma_\varepsilon(t)$$

telle que $\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \gamma_\varepsilon \in \mathcal{P}_{t_1,q_1}^{t_2,q_2}$ et $\gamma_0 = \gamma$.
Une chemin $\gamma \in \mathcal{P}_{t_1,q_1}^{t_2,q_2}$ est dit **stationnaire** si, pour toute variation $(\gamma_\varepsilon(t))_{(t,\varepsilon)\in[t_1,t_2]\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S(\gamma_\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Cette définition est plus connue sous le nom de **principe de moindre action**. Soit γ un chemin stationnaire et $\gamma_\varepsilon(t)$ une variation de γ. On a, en dérivant sous l'intégrale, dans un système de coordonnées :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \left.\frac{\mathrm{d}\gamma_\varepsilon^i(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \left.\frac{\mathrm{d}\dot\gamma_\varepsilon^i(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \right) \mathrm{d}t = 0.$$

En intégrant par parties le second membre :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \left.\frac{\mathrm{d}\dot\gamma_\varepsilon^i(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \left.\frac{\mathrm{d}\gamma_\varepsilon^i(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{d}t,$$

donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) \right) \left.\frac{\mathrm{d}\gamma_\varepsilon^i(t)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{d}t = 0.$$

La relation précédente étant vraie pour toute variation de γ, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \frac{\partial L}{\partial q^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t), t).$$

Il s'agit des **équations d'Euler-Lagrange**.

On suppose que $\mathcal{M} = \mathbf{R}^n$. Il est commode de noter $\mathbf{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ l'**impulsion** associée à L, de sorte que l'équation d'EULER-LAGRANGE se réécrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}.$$

On voit clairement que $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ joue le rôle de la résultante des forces.
On suppose que le système est classique et conservatif de masse m, placé dans un potentiel V. Le lagrangien $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dfrac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q})$ (qui traduit une compétition entre effets cinétiques et force) permet de retrouver le principe fondamental de la dynamique. L'équation d'EULER-LAGRANGE donne, pour un chemin rendant l'action stationnaire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}.$$

14.2 Théorème de Noether

Soit $(\mathcal{M}, L)$ un système physique avec L indépendant du temps.
Un **groupe de symétries** de $(\mathcal{M}, L)$ est une application lisse
$g : \mathbf{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, (s, q) \mapsto g_s(q)$ telle que :

$$\forall s, t \in \mathbf{R}, g_{s+t} = g_s \circ g_t \text{ et } g_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} .$$

vérifiant : $\forall s \in \mathbf{R}, \forall (q, v, t) \in T\mathcal{M} \times \mathbf{R}, L(q, v) = L(g_s(q), T_q g_s(v))$. On se donne γ un chemin lisse rendant l'action stationnaire. On a, pour tout $t \in \mathbf{R}$, en dérivant l'égalité précédente par rapport à s, dans un système de coordonnées :

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \left.\frac{\mathrm{d}g_s(\gamma(t))^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \left.\frac{\mathrm{d}T_{\gamma(t)}g_s(\dot\gamma(t))^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = 0$$

Or :

$$\forall (q, v) \in T\mathcal{M}, \forall i \in [\![1, n]\!], \left.\frac{\mathrm{d}T_q g_s(v)^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(v^j \left.\frac{\partial g_s^i}{\partial q^j}\right|_q\right)\right|_{s=0} = v^j \left.\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\left.\frac{\mathrm{d}g_s^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\right)\right|_q ,$$

donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left.\frac{\mathrm{d}T_{\gamma(t)}g_s(\dot\gamma(t))^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\mathrm{d}g_s(\gamma(t))^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\right),$$

donc, en réinjectant dans l'équation initiale et en utilisant les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}I(\gamma(t), \dot\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = 0$$

avec I définie par : $\forall (q, v) \in T\mathcal{M}, I(q, v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(q, v) \left.\frac{\mathrm{d}g_s(q)^i}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}$.
Ainsi, à tout groupe de symétrie d'un système physique correspond une constante du mouvement. Nous venons d'établir le **théorème de Noether**, qui heuristiquement s'énonce ainsi :

> « À toute symétrie d'un système physique correspond une quantité conservée. »

Voyons quelques exemples d'applications. On suppose que $\mathcal{M} = \mathbf{R}^n$.
On se donne un système classique conservatif de masse m placé dans un potentiel V.

— On suppose que le système est invariant sous l'action de $g_s : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + s\mathbf{u}$ avec $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire fixé. Le théorème de Noether donne que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$ est conservé (autrement dit, l'impulsion du système dans la direction $\mathbf{u}$ est constante).

— On suppose que le système est décrit par trois coordonnées et est invariant sous l'action de $g_\theta : \mathbf{q} \mapsto R_{\mathbf{u}}(\theta)\mathbf{q}$ avec $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire fixé, $R_{\mathbf{u}}(\theta)$ désignant la rotation d'axe $\mathbf{u}$ et d'angle θ. Le théorème de Noether donne que $\mathbf{p} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}R_{\mathbf{u}}(\theta)\mathbf{q}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}$ est conservée. Or, à l'ordre 1 en θ : $R_{\mathbf{u}}(\theta)\mathbf{q} = \mathbf{q} + \theta\mathbf{u} \times \mathbf{q}$, donc $\left.\frac{\mathrm{d}R_{\mathbf{u}}(\theta)\mathbf{q}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = \mathbf{u} \times \mathbf{q}$.
Ainsi, la quantité $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{q}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ est conservée. Il s'agit du moment cinétique du système $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ dans la direction $\mathbf{u}$.

14.3 Un bref historique de la mécanique

D'une manière générale, une modélisation de l'univers est la donnée d'une variété différentielle et d'un ensemble de lois physiques invariantes sous l'action d'un certain groupe de symétries.

La mécanique newtonienne repose sur une modélisation de l'univers par la variété de dimension 4 $\mathbf{R} \times E$ où E est l'espace euclidien affine de dimension 3.
Le groupe de symétrie des lois physiques est le groupe engendré par les translations spatio-temporelles, les isométries spatiales, et les transformations de GALILÉE.
Ces différentes transformations correspondent également aux changements de référentiels inertiels. L'avènement de l'électromagnétisme a remis en question cette modélisation. En effet, les équations de MAXWELL mettent en évidence que la vitesse de la lumière dans le vide, dans tout référentiel inertiel, est la même, ce qui n'est pas compatible avec les transformations de GALILÉE (autrement dit, les équations de MAXWELL ne sont pas invariantes par transformation de GALILÉE). Des années plus tard, POINCARÉ et LORENTZ mettent en évidence une nouvelle classe de transformations compatibles avec les équations de MAXWELL, les transformations de LORENTZ.

En remplaçant les transformations de GALILÉE par les transformations de LORENTZ, on obtient le **groupe de Lorentz** (dont la version affine est le **groupe de Poincaré**), qui a la particularité d'être le groupe orthogonal de la forme quadratique $-t^2+x^2+y^2+z^2$, appelée métrique de MINKOWSKI. Cela invite à modéliser l'univers comme une variété lorentzienne de dimension 4 (autrement dit une variété différentielle munie d'une métrique de signature $(-+++)$), munie de la métrique de MINKOWSKI $m = -\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$. Ce dernier cadre est celui de la **relativité restreinte**, qui correspond à un univers vide, sans gravitation.

Dans le cas d'un univers avec gravitation, on modélise l'univers par une variété lorentzienne de dimension 4 vérifiant l'équation d'EINSTEIN : $\mathrm{Ric}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}\, \mathrm{Rscal} = T_{ij}$ où T_{ij} est le **tenseur énergie-impulsion**, représentant le contenu en matière-énergie de l'espace-temps. On obtient ainsi la théorie de la **relativité générale**, au sein de laquelle la gravitation joue un rôle singulier : elle est modélisée comme une courbure de l'espace-temps.

14.4 Action de Hilbert-Einstein

Le but de cette sous-section est de donner une preuve des équations d'Einstein à l'aide du principe de moindre action.
La densité de lagrangien de l'univers $\mathcal{L}$ peut être décomposé en somme de deux densités : une qui correspond à la gravitation $\mathcal{L}(g)$ (qui ne dépend que du tenseur métrique), et une autre qui correspond au contenu en matière et en énergie $\mathcal{L}(g,\psi)$ où ψ est un champ décrivant le contenu en matière-énergie (par exemple le champ électromagnétique). L'action totale vaut :

$$S = \int_{\mathcal{M}} \left(\mathcal{L}_G(g) + \mathcal{L}_M(g,\psi)\right)\sqrt{-\det(g_{ij})}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière écriture peut être rendue rigoureuse au moyen de partitions de l'unité (nous ne nous attarderons pas sur ce détail ici).
La quantité scalaire invariante par changement de coordonnées la plus simple à considérer est le tenseur de Ricci scalaire, ce qui invite à poser $\mathcal{L}_G(g) = \mathrm{Rscal}$.
La solution au problème (g,ψ) doit rendre extrémale l'action totale. Autrement dit, la variation à l'ordre 1 de l'action doit être nulle en faisant varier g et ψ.
On se donne h une métrique lorentzienne.
La dérivée de S dans la direction h vaut :

$$\begin{aligned}\delta_g S(h) = &\int_{\mathcal{M}} \left(\delta_g\mathcal{L}_G(h) + \delta_g\mathcal{L}_M(h)\right)\sqrt{-\det(g_{ij})}\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathcal{M}} \left(\mathcal{L}_G(g) + \mathcal{L}_M(g,\psi)\right)\delta_g\left(\sqrt{-\det(g_{ij})}\right)(h)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Calculons les différents termes. On a :

$$\delta_g\mathcal{L}_G(h) = \delta_g\left(g^{ij}\right)(h)\,\mathrm{Ric}_{ij} + g^{ij}\delta_g(\mathrm{Ric}_{ij})(h).$$

Or :

$$\begin{aligned}\left((g+th)^{ij}\right) &= ((g+th)_{ij})^{-1} = ((g_{ij}) + t(h_{ij}))^{-1} \\ &= (g^{ij}) - t(g^{ij})(g^{ij})(h_{ij}) + o(t) = (g^{ij}) - t(h^{ij}) + o(t)\end{aligned}$$

donc $\delta_g\left(g^{ij}\right)(h) = -h^{ij}$. De plus, en se plaçant en un point p de $\mathcal{M}$ et en utilisant un système de coordonnées normales associé à ce point :

$$\delta_g\left(\mathrm{Ric}_{ij}\right)(h) = \delta_g\left(\partial_i\Gamma^k_{jk} - \partial_j\Gamma^k_{ik}\right)(h) = \partial_i\delta_g\left(\Gamma^k_{jk}\right)(h) - \partial_j\delta_g\left(\Gamma^k_{ik}\right)(h)$$

L'expression $\delta_g\left(\Gamma^k_{jk}\right)(h)$ peut être interprétée comme la différence infinitésimale de deux symboles de Christoffel, donc est un tenseur. Ainsi, l'expression précédente de $\delta_g\left(\mathrm{Ric}_{ij}\right)(h)$ ne dépend pas du choix du système de coordonnées.
En intégrant sur $\mathcal{M}$, le terme correspondant à $\delta_g(\mathrm{Ric}_{ij})(h)$ est nul.

De plus :

$$\delta_g\left(\sqrt{-\det(g_{ij})}\right)(h) = \frac{1}{2\sqrt{-\det(g_{ij})}}\delta_g\left(\det(g_{ij})\right)(h),$$

avec $\det(g_{ij}+th_{ij}) = \det(g_{ij})(1+t\,\mathrm{Tr}((g^{ij})(h_{ij}))) + o(t) = \det(g_{ij})(1+tg^{kl}h_{kl}) + o(t)$, donc :

$$\delta_g\left(\sqrt{-\det(g_{ij})}\right)(h) = \frac{1}{2}\sqrt{-\det(g_{ij})}g^{kl}g_{ki}g_{lj}h^{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{-\det(g_{ij})}g_{ij}h^{ij}.$$

Ainsi :

$$\delta_g S(h) = \int_{\mathcal{M}}\left(-\mathrm{Ric}_{ij} + \frac{1}{2}g_{ij}\,\mathrm{Rscal} + \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{L}_M - \partial_{g_{ij}}\mathcal{L}_M\right)\sqrt{-\det(g_{ij})}h^{ij}\mathrm{d}x.$$

Cette quantité étant nulle pour tout h, on en déduit l'équation d'Einstein :

$$\mathrm{Ric}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\,\mathrm{Rscal} = T_{ij}$$

où $T_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{L}_M - \partial_{g_{ij}}\mathcal{L}_M$ est le tenseur énergie-impulsion.

On se place dans le vide, de sorte que le tenseur énergie-impulsion est nul. En contractant, on obtient $\mathrm{Rscal} = 0$, puis, en réinjectant dans les équations d'Einstein :

$$\mathrm{Ric}_{ij} = 0.$$