UFC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

SEMESTRE 2022.2

AICT - Homework 2

ALUNO: Igor Braga Palhano

MATRÍCULA: 509337

PROFESSOR: André Almeida, Gilderlan Araújo, Bruno Sokal

DISCIPLINA: AÇÕES INTEGRADAS EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA (AICT)

DATA DE ENTREGA DO TRABALHO: 16/12/2022

ntrodução

Álgebra tensorial é uma importante área do conhecimento incrivelmente versátil em suas aplicações, desde Processamento digital de imagens até aplicações em sistemas de comunicação, seu uso e entendimento impacta diretamente a industrial e novas tecnologias por representar uma facilitção no processamento de informação.

Para que seja possível o entedimento deste trabalho é iperativo entendermos algumas operações básicas com tensores de ordem superior, como a **Vetorização, Desvetorização, Produto externo, Norma de Frobenius, Produto de Kronecker e Produto de Khatri-Rao**.

O que é um tensor?

Tensor é uma matriz multidimencional. Sua ordem é númbero de suas dimeções. I_1 x I_2 x ... x I_N denota o tamanho do tensor.

Um tensor de ordem zero é um escalar, bem como um tensor de ordem 1 é um vetor, um tensor de ordem 2 é uma matriz e um tensor de ordem 3 ou superior é dito **tensor de ordem superior**.

Norma de Frobenius

A norma de Frobenius é calculada por:

$$||\mathbf{X}||_F = \sqrt{<\mathbf{X},\mathbf{X}>} = \left(\sum_{i_1}^{I_1} \sum_{i_2}^{I_2} \cdots \sum_{i_N}^{I_N} |x|^2_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \right)^{1/2},$$

Desta forma, a norma de Frobenius pode representar uma medida da ”energia”de um tensor, sendo utilzada em diversas ocasiões, como no cálculo do Erro médio quadrático (MNSE), ou do ângulo entre dois tensores.

Produto externo

Sejam dois tensores (**X** e **Y** por exemplo), de ordem N e M, respectivamente. O produto externo entre **X** e **Y** é um terceiro tensor **Z** com ordem N + M. O processo é próximo do produto entre dois vetores (por exemplo **a** e **b**), sendo **a** um vetor linha e **b** um vetor coluna, o resultado deste produto é uma matrizes com N linhas e M colunas.

Produto de Kronecker

O produto de Kronecker é definido como uma operação entre as matrizes **X** e **Y**, onde para se gera uma terceira matriz **Z**, tal que cada elemento de **X** multiplica todos os elementos da matriz **Y**, armazenando este resultado. Suponha que **X** possui ordem N x N e **Y** ordem M x M, a matriz **Z** possui dimenção MN x MN. Perceba que por definição, a operação de Kronecker não é comutativa.

Produto de Khatri-Rao

O produto de Khatri-Rao é também dito um produto de Kronecker ”Coluna a coluna”. A matriz **Z** gerada pelo produto de Khatri-Rao entre **X** e **Y**, com dimenções M x M e N x N, respectivamente, possui dimenção MN x M. É mandatório para este caso que as matrizes possuam a mesma quantidade de colunas, caso contrário, não é possível realizar o produto de Khatri-Rao entre as matrizes desejadas.

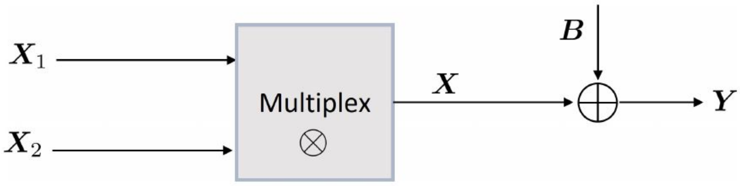
Vetorização e Desvetorização

A vetorização e a desvetorização são operações como seus nomes indicam: Cada um respectivamente torna um tensor **Y** em um vetor, ou torna um vetor construido a partir de um tensor **Y** novamente um tensor.

Questionário

os problemas aqui resolvidos foram dados pelo prof. Bruno Sokal, com o título de Homework 2. Trata-se na estimação de dois sinais X_1 e X_2 a partir de uma matriz Y gerada a partir da multiplexação destes sinais e a adição do ruído branco aditivo gaussiano (do inglês, Adictive White Gaussian Noise, AWGN). A imagem abaixo nos mostra a construção do sistema.

Figura 01 - Sistema de comunicação simulado:



Questão 01

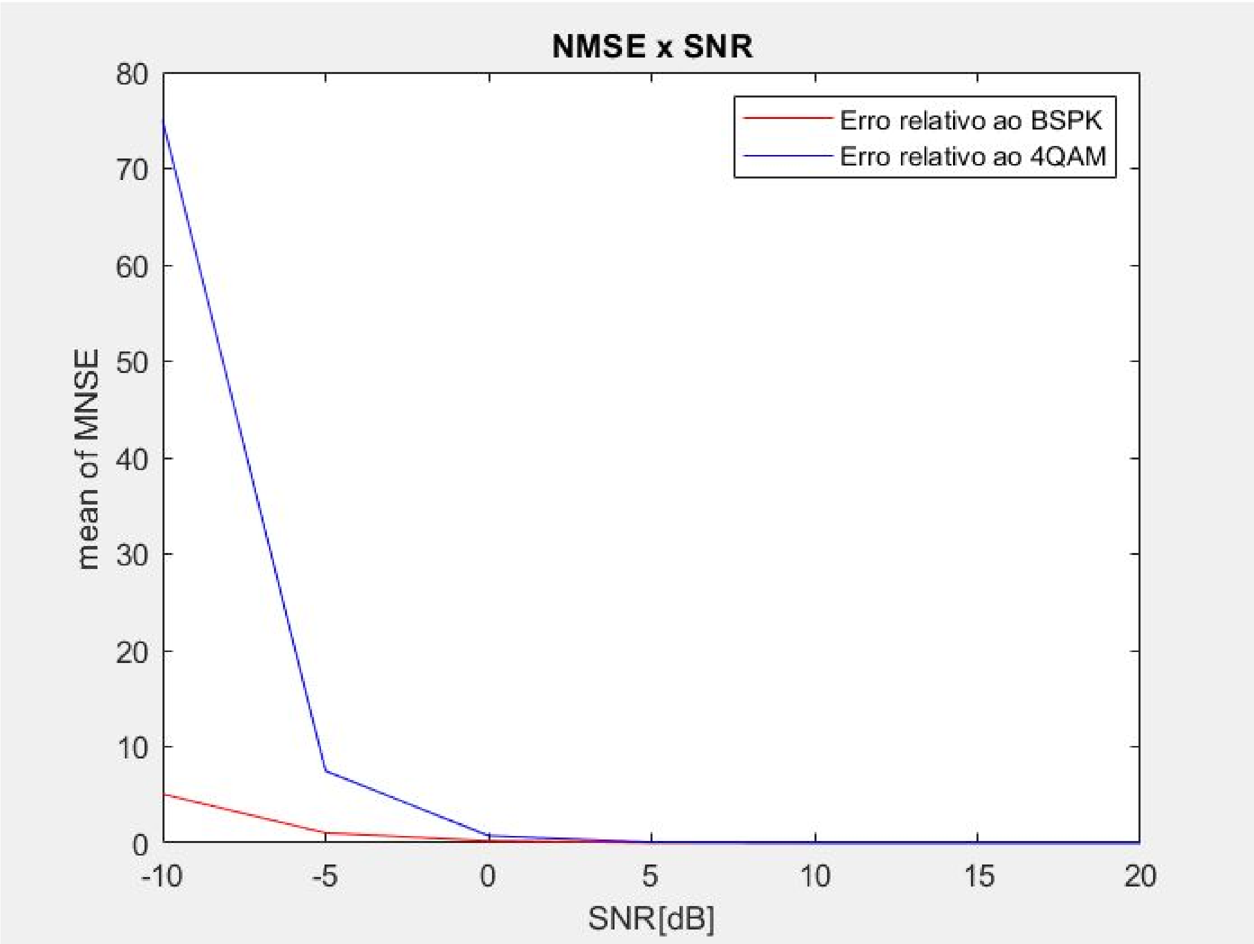
(a) Descrevendo o processo de obtenção de X_1 e X_2 que, para este caso, foram multiplexados a partir do produto de Kronecker:
Considerando que o primeiro elemento tanto de X_1 e X_2 são conhecidos, o que iremos fazer é uma vetorização nos elementos que compões **X** no intuito de estimar X_1 e X_2, isto é, iremos percorrer **X** utilizando um kernel com as dimenções de X_2. Na primeira realização deste processo, já conhecemos $X_1(1,1)$, sendo assim, temos um bom candidato a X_2 apenas dividindo essa submatriz gerada a partir dos elementos de **X**. A partir deste candidato a X_2, que aqui chamaremos de X_2 estimado, temos como reconstruir a matriz X_1 percorrendo **X** de modo a reconstruir a matriz X_1 a partir da lógica do produto de Kronecker acima explicada.

Outro método que poderiamos utilizar seria conseguir a matriz X_2 pelo método citado e vetorizala ($\text{vec}(X_2)$), e assim construir uma matriz X_3 onde suas colunas são obtidas a partir da vetorização de X_2 multiplicada pelos elementos de X_1 e então, realizar uma operação de SVD truncada para obtermos as matrizes $\mathbf{v}^T$, **S** e **u**, onde a primeira coluna de **u** ($\mathbf{u}(:,1)$) multiplicada pela raiz do maior valor singular seria a $\text{vec}(X_1)$ e, analogamente, $\mathbf{v}^T$ multiplicado pelo mesmo valor seria $\text{vec}(X_2)$, este método é conhecido como Least-Squares Kronecker Factorization (LSKF).

(b) Para a plotagem da MNSE x SNR pedida foi construido o sistema como solicitado, X_1 é um vetor 1 x 2 que contem valores 1, -1, escolhidos aleatoriamente de forma uniforme, enquanto X_2 é uma matriz 2 x2 com valores -1 -j, -1 +j, 1 - j, 1 + j escolhidos da mesma forma.

A seguir, a figura 2 traz o gráfico gerado por simulação do sistema, realizada 5000 vezes.

Figura 02 - Gráfico MNSE x SNR para sistema multiplexado a partir do produto de Kronecker.



Questão 02

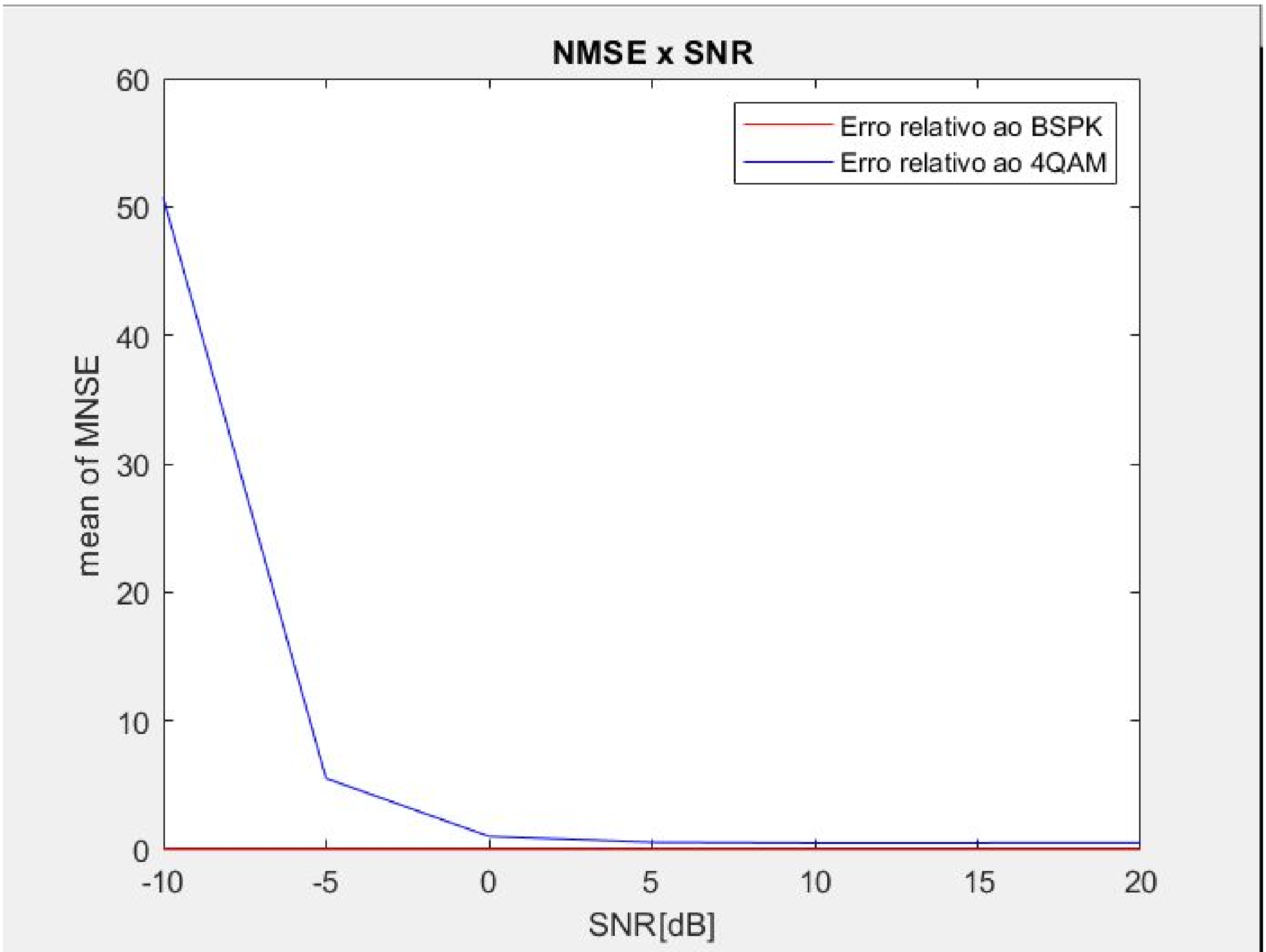
(a) Como citado anteriormente, para a existência do produto de Khatri-Rao entre duas matrizes, estas podem ser quaisquer deesde que tenham o mesmo número de colunas, para o caso, como as matrizes são da ordem 1 x 2 e 2 x 2, respectivamente, é possível a realização da multiplexação a partir deste produto.

(b) Como X_1 e X_2 são multiplexados a partir do produto de Khatri-Rao, o que precisamos é reconstruir coluna a coluna dos tensores X_1 e X_2. Como $X_1(1,:)$ e $X_2(1,:)$ são conhecidos, podemos verificar a primeira coluna de X e dividir esta coluna pelo primeiro elemento de $X_1(1,:)$, assim extraindo a primeiro coluna de X_2, segue-se com este método até reconstruirmos os sinais X_1 e X_2.

Outro possível método é utilizando da técnica Least-Squares Khatri-Rao Factorization (LSKRF), que consiste em coletar coluna a coluna da matriz multiplexada (para nós, esta é $\mathbf{X}$) e desvetorizar a matriz, a partir disso, realizar uma decomposição SVD nesta matriz desvetorizada e a partir disso, estimar as colunas de X_1 e X_2, sendo cada uma destas colunas obtidas de forma semelhante ao LSKF, com a mudança de que $\sqrt{\sigma_1} * \mathbf{u}_1$ agora nos retorna a coluna de atual de X_1. Analogo para X_2.

(c) Foram utilizadas a mesma matrizes construidas para o problema da questão 01 item (b). A figura 03 mostra o gráfico gerado.

Figura 03 - Gráfico MNSE x SNR para sistema multiplexado a partir do produto de Khatri-Rao.



Conclusão

Os resultados aqui obtidos são próximos dos esperados. Os gráficos apresentam mudanças bruscas de valores por conta dos valores de potência de transmissão utilizados estarem intervalados de forma grosseira (foi utilizado valores entre -10 e 20 de SNR, sendo este vetor gerado a partir de seus limites e valores dentro do intervalo, coletados a cada 5 inteiros.)

Para uma boa generalização do método será necessário ainda que as matrizes utilizadas no experimento (X_1 e X_2) tenham uma quantidade de linhas genéricas, as dimenções adotadas aqui foram escolhidas para demonstrar a efetividade do método e realizar a atividade, mas não refletem a realidade de uma realização de um sistema de comunicação.

Os obejtivos almejados, sendo estes a formação de conhecimento e capacitação em técnicas básicas de álgebra tensorial foram devidamente atingidos.