Sistemas con múltiples grados de libertad

Problema N°1

Las propiedades de masa y rigidez del edificio de 3 pisos son mostradas en la Figura 1.
Determinar mediante el método de descomposición modal:

1) Las frecuencias y modos de vibración (resuelva a mano y verifique con Matlab).
2) Si a la estructura se le impone los siguientes desplazamientos iniciales: $x_1(0) = 0.3in$, $x_2(0) = -0.8in$, $x_3(0) = 0.3in$, determine los desplazamientos en el instante de tiempo $t=2\pi/\omega_1$. Admitiendo una relación de amortiguamiento crítico de 0% y de 10% en cada modo.

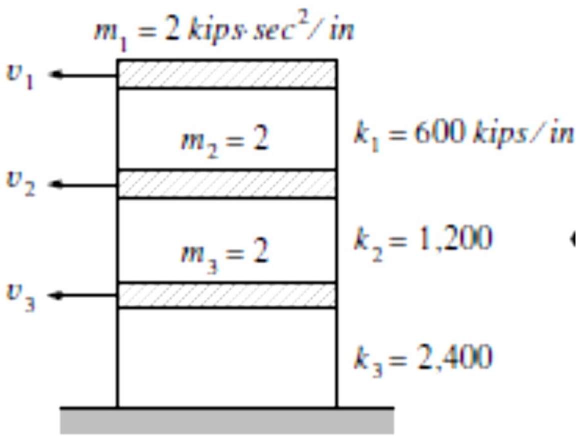

Figura 1

Rta.: Las Frecuencias y Modos de vibración (normalizados al primer valor) son:

```
w =                          Vn =
      11.651                           1          1          1
       27.46                     0.54751    -1.5135     -6.034
      45.937                     0.19739   -0.86818     11.671
```

Los desplazamientos en el instante t = 0.53928s:

```
No Amortiguados:
ans =
     -0.19829    -0.027333      0.68127
10% Amortiguamiento:
ans =
     -0.05981     0.010735     0.061167
```

Problema N°2

Si a la estructura del problema N°1 se le impone una fuerza en el techo $P_1(t)$= 5000N *sen(ω*t), en el cual $\omega=1.1*\omega_1$. Evaluar la amplitud y fase de la respuesta de régimen permanente en los tres pisos. Admita una relación de amortiguamiento crítico de 10% en cada modo.

Rta.: La amplitud y fase en régimen permanente, para cada piso es de:

$$\rho = \begin{bmatrix} 4.1266 \\ 2.6266 \\ 1.1552 \end{bmatrix} \varphi = \begin{bmatrix} -0.80865 \\ 0.11878 \\ 0.060435 \end{bmatrix}$$

<u>Problema N°3</u>

Sabiendo que las propiedades del sistema mostrado en la Figura 2 son las siguientes:
m = 4kg, k = 4N/m, admita una relación de amortiguamiento crítico para todos los modos de ξ=0.1.
Determinar mediante el método de descomposición modal:

1) Las frecuencias y modos de vibración (resuelva a mano y verifique con Matlab).
2) Si al sistema se le impone un desplazamiento inicial: $v_1(0)$ = 1m, determine los desplazamientos a lo largo del tiempo de cada una de las masas.

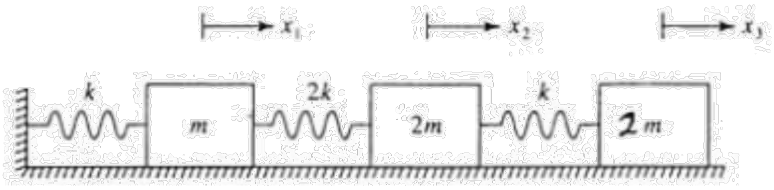

Figura 2

En clase práctica o consulta con Ayudante, se verá una guía para la solución numérica en software. Se recomienda variar los parámetros y las C.I. para comprender su incidencia en la respuesta del sistema.

Rta.: Las Frecuencias y Modos de vibración (normalizados al primer valor) son:

```
w =                    Vn =

    0.3594                    1           1           1
         1               1.4354           1    -0.43541
    1.9674               1.9354          -1    0.064586
```

Los desplazamientos en función del tiempo son:

$$X_{modo\,1}(t) = \begin{bmatrix} 0.141 \\ 0.202 \\ 0.272 \end{bmatrix} * 0.567 * \cos(0{,}357 * t - 0.1) * e^{-0.1*0.359*t}$$

$$X_{modo\,2}(t) = \begin{bmatrix} 0.224 \\ 0.224 \\ -0.224 \end{bmatrix} * 0.899 * \cos(0.995 * t - 0.1) * e^{-0.1*1*t}$$

$$X_{modo\,3}(t) = \begin{bmatrix} 0.424 \\ -0.185 \\ 0.027 \end{bmatrix} * 1.707 * \cos(1.957 * t - 0.1) * e^{-0.1*1.967*t}$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N} \emptyset_i * P_i * \cos(\omega d_i * t - \theta_i) * e^{-\xi_i * \omega_i * t} = X_{modo\,1}(t) + X_{modo\,2}(t) + X_{modo\,3}(t)$$

<u>Problema N°4</u>

Un sistema auxiliar que consiste de un bloque de masa m_2 está conectado a un sistema principal con masa m1 mediante un resorte de rigidez k_2 como muestra la Figura 3. El sistema auxiliar puede ser

usado como atenuador de vibraciones del sistema principal si los valores de m_2 y k_2 son elegidos correctamente. Demuestre que si $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ la amplitud del sistema primario es nula (x1(t) = 0).
La solución de este ejercicio debe realizarse de forma analítica para obtener un resultado concluyente. Se recomienda comenzar por plantear las ecuaciones de movimiento de ambas masas.

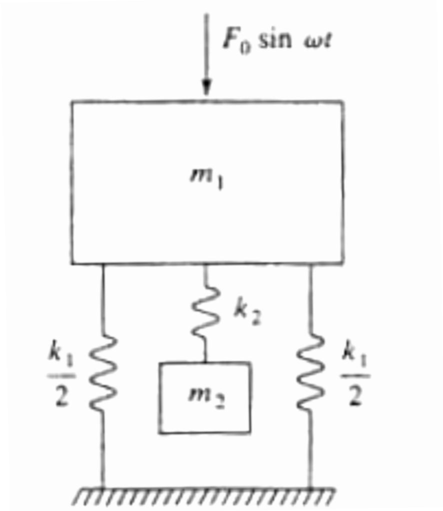

Figura 3

Rta.: Como se indica en la consigna: $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$

$X_1 = 0$ (amplitud en régimen permanente de la masa 1)

$X_2 = -\frac{F_0}{K_2}$ (amplitud en régimen permanente de la masa 2)

En general, el diseño de un TMD como el mostrado, parte de la selección de K_2 de acuerdo al desplazamiento máximo permitido en el sistema de absorción (X_2). También se suele definir al cociente de masas $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, y una regla práctica es elegir $0.05 \leq \mu \leq 0.25$. De esta forma, conocida la frecuencia de la carga, obtenemos la masa 2, y verificamos que cumpla con la regla de diseño.

Para una explicación más detallada, ver *“Engineering Vibration” 4th Ed. – Daniel J. Inman - Sec. 5.3 Vibration Absorbers* (pág. 455).

Problema N°5

El modelo simplificado de un vehículo mostrado en la Figura 4 se puede representar como un sistema de 2 grados de libertad como muestra el esquema. El movimiento de rotación en el plano tiene la coordenada θ(t) y el movimiento vertical la coordenada x(t). Las propiedades de sistema son las siguientes: $J=m\,r^2$, $r^2=0.64m^2$, m=4000 kg, c1=c2=2000Ns/m, k1=k2= 20kN/m, l1=0.9m, l2=1.4m.

1) Deduzca las ecuaciones de movimiento y las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento.
2) Si al sistema se le imparte un desplazamiento inicial x(0)=0.05m determine la respuesta a lo largo del tiempo del sistema.

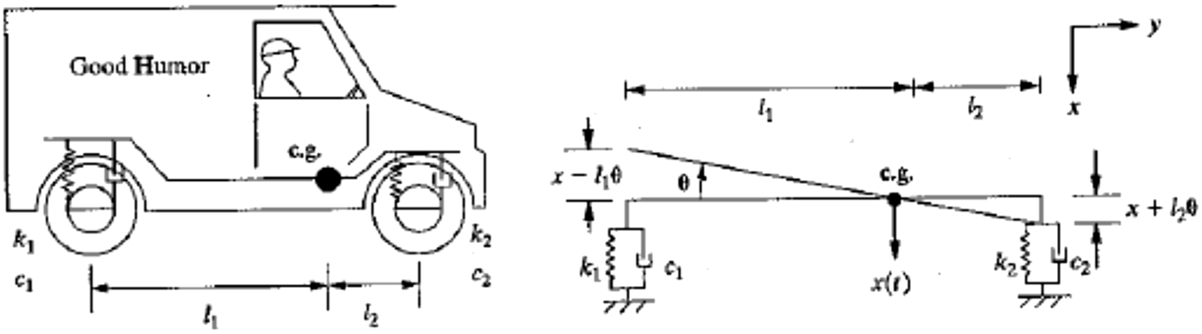

Figura 4

Rta.: El sistema matricial queda de la forma:

$$M * \ddot{X} + C * \dot{X} + K * X = \tilde{0} \qquad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c1 + c2 & c2 * l2 - c1 * l1 \\ c2 * l2 - c1 * l1 & c1 * l1^2 + c2 * l2^2 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k1 + k2 & k2 * l2 - k1 * l1 \\ k2 * l2 - k1 * l1 & k1 * l1^2 + k2 * l2^2 \end{bmatrix}$$

<u>Problema N°6</u>

La vibración vertical de las alas de un avión puede ser modelada como muestra la Figura 5. La rigidez que conecta la masa de las turbinas es función de las propiedades de las alas, E = 6.9e9 N/m^2, I = 5.2e-6 m^4 y l = 2 m. Admita que la masa de la turbina es m=3000kg. Para las siguientes condiciones iniciales determine la respuesta. $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$=[0 0 0]^T m/s , $\boldsymbol{x}(0) =$ [0.2 0 0]T m.

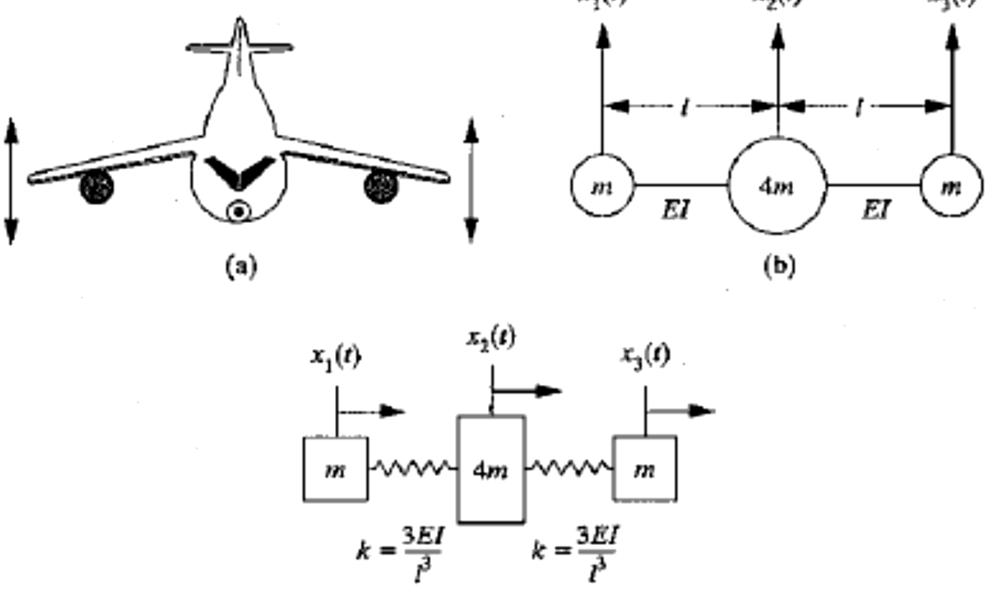

Figura 5

Rta.: El sistema matricial queda de la forma:

$$M * \ddot{X} + K * X = \tilde{0}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{x}1 \\ \ddot{x}2 \\ \ddot{x}3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es importante interpretar el primer autovalor ($\boldsymbol{\lambda}$=0) y su respectivo autovector ($[1\ \ 1\ \ 1]^T$). Esto indica que todo el avión se desplaza por igual, sin movimientos relativos entre las masas. Esto es un Movimiento de Cuerpo Rígido (como un solo objeto), y se debe a la falta de referencia o "anclaje" a algún sistema fijo (ver diagrama simplificado en Figura 5).

Problema N°7

A partir de los datos obtenidos en el sistema ensayado en clase, determinar las frecuencias naturales, formas modales y la relación de amortiguamiento crítico de cada modo.