Выпуклые множества.
Основная часть

Задача 1. Проверьте, являются ли выпуклыми множества

1) (1 балл) $S = \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 x_2 \geq 1\}$.
2) (1 балл) $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_d\}$.
3) (2 балла) $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$, где $a \neq b \in \mathbb{R}^d$.

Задача 2. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и пусть $\|\cdot\|$ – норма на $\mathbb{R}^d$.

1) (2 балла) Для $a \geq 0$ определим множество S_a как:

$$S_a = \{x \mid \mathrm{dist}(x, S) \leq a\},$$

где

$$\mathrm{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$

Множество S_a называется расширенным на a относительно S. Докажите, что если S выпукло, то S_a также выпукло.

2) (2 балла) Для $a \geq 0$ определим множество S_{-a} как:

$$S_{-a} = \{x \mid B(x, a) \subset S\},$$

где $B(x, a)$ - открытый шар (в норме $\|\cdot\|$) с центром в x и радиусом a. Множество S_{-a} называется суженным на a относительно S. Докажите, что если S выпукло, то S_{-a} также выпукло.

Задача 3. (2 балла) Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ и $x^0 \in X$. Докажите, что множество

$$K(X, x^0) = \left\{y \in \mathbb{R}^d \mid y^T x^0 \geq y^T x \text{ for all } x \in X\right\}$$

является выпуклым конусом.

Выпуклые множества.
Дополнительная часть

Задача 1. (2 балла) Назовем множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ "средневыпуклым", если для любых его элементов x и y их середина также принадлежит X, т.е. $\frac{x+y}{2} \in X$. Докажите, что для замкнутых множеств "средневыпуклость" равносильна выпуклости.

Задача 2. (1.5 балла) Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_{d+2}\}$ - множество из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$. Покажите, что X можно разбить на два подмножества S и $T = X \setminus S$ таким образом, что пересечение их выпуклых оболочек (см. определение в Пособии на странице 160) не пусто.

Задача 3. Проверьте, верны ли следующие утверждения. Свою точку зрения объясните.

1) (1.5 балла) Проекция выпуклого множества на любое подпространство тоже выпукла.

Пояснение. Проекцией на множество $\mathcal{X}$ называется $\Pi_{\mathcal{X}}(x) := \underset{y \in \mathcal{X}}{\arg\min} \frac{1}{2}\|x - y\|_2$.

2) (3 балла) Если проекция на любое *собственное* (не совпадающее со всем пространством) подпространство выпукла, то и изначальное множество выпукло?