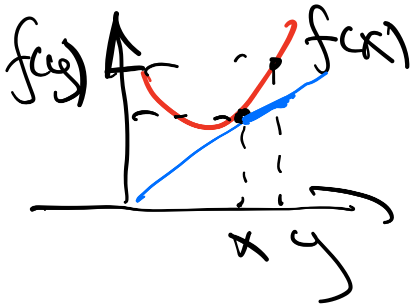
Субградиент и субдифф-л.

$f: V \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad \operatorname{dom} f = \{x \in V \mid |f(x)| < +\infty\}$

вып.
конечн.

$\forall y, x \in \operatorname{dom} f$

$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$



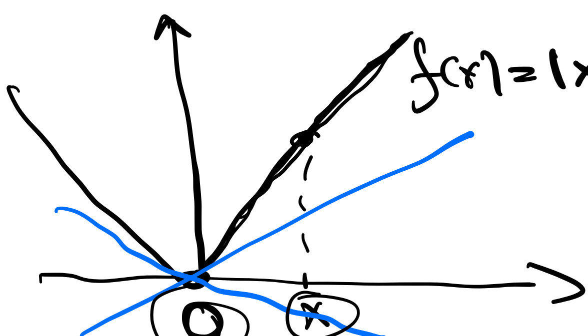
Опр. Пусть $f: V \to \overline{\mathbb{R}}$, тогда $g \in V$ - субград. в точке $x \in \operatorname{dom} f$ $\forall y \in V \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle$

Опр. субдифф-л f в (.) x

$\partial f(x) = \{g \mid g$ - субградиент f в (.) $x\}$

Пример 1.

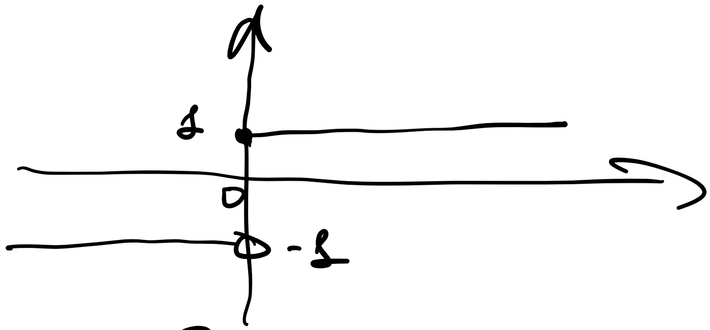


1) $x > 0 \Rightarrow g = 1$

2) $x = 0 \Rightarrow g \in [-1, 1]$

Пример 2.

$g(0)$ - ?

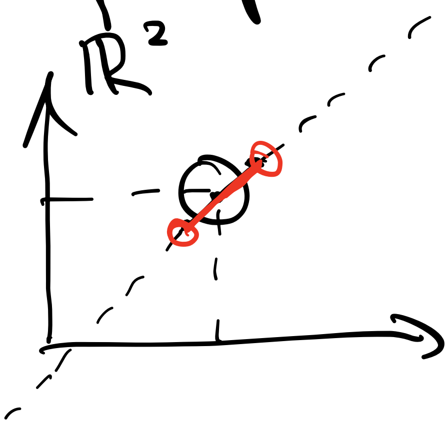


Вопросы
1) Всегда ли $\exists$?
2) как искать?
3) Как с связью с ∂f - ?
4) $\operatorname{conv}\{-1, 1\}$ почему?

Св-ва.

Опр. $S \subset V$. $\operatorname{relint}(S) = \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0 \; B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{aff}(S) \subset S\}$

Пример.



$\operatorname{relint} S = S \setminus \{\text{концы}\}$

1) $\exists\, x \in \mathrm{relint}(\mathrm{dom} f)$, тогда $\partial f(x)$ — выпукл. компакт

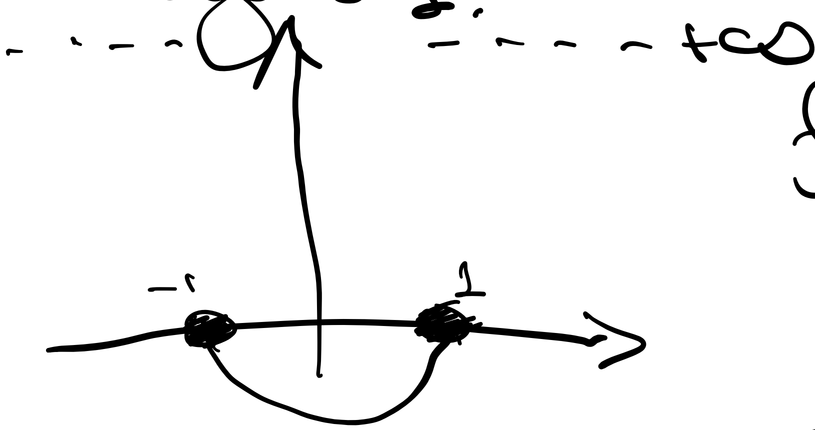
2) $\exists\, f$ — выпукла, $x \in \mathrm{relint}(\mathrm{dom} f)$, тогда f — дифф. в $(\cdot)\ x$ $\Longleftrightarrow$ $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

3) $\exists\, f$ — выпукла, непр. в $(\cdot)\ x$, тогда $\partial f(x) \neq \varnothing$

4) Если f — выпукла, то $\partial f(x)$ м.б. $\varnothing$

5) Если $\forall x \in \mathrm{dom} f \hookrightarrow \partial f(x) \neq \varnothing$, то f — выпукла.

Задача 1.



$$f(x) = \begin{cases} +\inf, & |x| \geq 1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{else} \end{cases}$$

▷ $\mathrm{dom} f = (-1, 1)$, f выпукла.

1) $x \in (-1, 1)$

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

2) $x = -1$ $\quad \exists g \in \partial f(-1)$

$$f(y) \geq f(-1) + g(y+1)$$

$$-\sqrt{1-y^2} \geq g(y+1)$$

$$y_n = \frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} -1$$

$$g \leq -\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}}{\frac{1}{n}} = -\sqrt{2n-1} \longrightarrow -\infty$$

$$-\infty$$

3) $x = 1$ - аналогично

$\boxtimes$

Субдифференциал и операции над ним.

Теорема (Дубовицкий – Милютин)

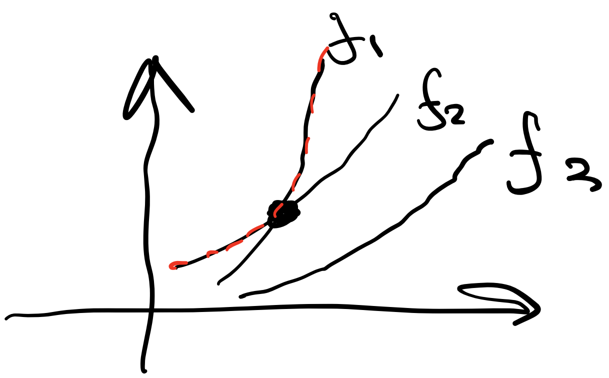
Пусть $\{f_i\}$ — функции, $i = \overline{1,n}$, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{dom}\, f_i$ и $\forall i$ f_i непр. в (.) x, тогда рассм.

$$f(x) = \max_{i=\overline{1,n}} \{f_i(x)\} \hookrightarrow \partial f(x) =$$

$$= \underline{\mathrm{conv}}\left(\bigcup_{I} \partial f_i(x)\right)$$

$$I = \{i \mid f_i(x) = f(x)\}$$

Пример. 1



Задача 1 $f(x) = |x-a|$

$$|x-a| = \max\{\underbrace{x-a}_{f_1}, \underbrace{-x+a}_{f_2}\},\quad I = \begin{cases} \{1,2\}, & x = a \\ \{1\}, & x > a \\ \{2\}, & x < a \end{cases}$$

1. Пусть $x = a$

$\partial(|x-a|)(x) = \operatorname{conv}\{\partial(x-a)(a), \partial(-x+a)(a)\}$

$\partial(x-a)(a) = \{1\}$

$\partial(-x+a)(a) = \{-1\}$

$\partial(|x-a|)(a) = \operatorname{conv}\{-1, 1\} = [-1, 1]$

2. Пусть $x > a$

$\partial(|x-a|)(x) = \operatorname{conv}\{\partial(x-a)(x)\} = \{1\}$

$\blacksquare$

Теорема (Моро-Рокафеллар)

Пусть $\{f_i\}$ выпукла, $\operatorname{dom} f_i \neq \varnothing$, $i = \overline{1,n}$

Пусть f_i непр-на в x $\forall i = \overline{1,n}$, кроме мб одной f_k $(f_k(x) \neq \pm\inf)$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, $\alpha_i > 0$, тогда

$$\partial f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \underbrace{\partial f_i(x)}_{\text{мн-во}} \text{ — сумма Минковского}$$

$$A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$$

$$A + \varnothing = \varnothing$$

Задача 2.

$f(x) = |x-1| + |x+1|$, ∂f - ?

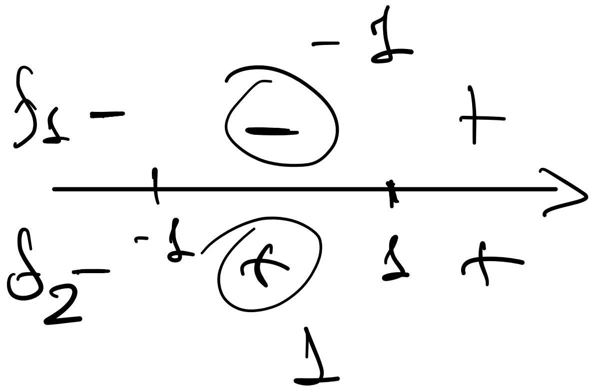
1. Д-М

$$\partial(|x-1|)(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ [-1, 1], & x = 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$

$$\partial(|x+1|)(x) = \begin{cases} 1, & x > -1 \\ [-1, 1], & x = -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

2. М-Р

$f_1 = |x-1|$, $f_2 = |x+1|$, $\alpha_i = 1$



$$\partial f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ [-2, 0] & x = -1 \\ 0, & x \in (-1, 1) \\ [0, 2] & x = 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

Субдифф. исчисление.

План субдифф.:

1) Опр-е
2) Графики
3) $\partial f(x)$, если дифф-о
4) Теорема М-Р и Д-М
5) Субдифф. исчисление

① $f(x) = \varphi(g(x))$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g = (g_1, \dots, g_m)^T$,

g_i − выпуклы

$\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

φ - выпукла, неуб.

Тогда $\partial f(x) = \bigcup\limits_{p \in \partial\varphi(g(x))} \left[\sum\limits_{i=1}^{m} p_i \partial g_i(x) \right]$

Замечание. Пусть φ - дифф., тогда

$\partial\varphi(g(x)) = \{D\varphi(g(x))\}$,

$p - D\varphi(y)$

$p_i = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y)$, $y = g(x)$

② Пусть f - вып., тогда $\partial\left[f(Ax+b)\right](x) =$

$= A^T \partial f(\underline{Ax+b})$

③ $\partial(\alpha f)(x) = \alpha\partial f(x)$, $\alpha > 0$

Задача 1. Пусть f_0 - выпукла, $q \geq 1$

$f(x) = \max\{0, f_0(x)\}^q$

$x \to x^q$ - вып, неуб, дифф

$[0, +\infty)$ $[0, +\infty)$

$\max\{0, f_0(x)\}$ ~ выпукла как max

$$\partial f(x) = \partial[\varphi(g(x))](x) = |1| =$$

$$\underline{\partial\varphi(y) = \{q y^{q-1}\}}$$

$$q \cdot \max\{0, f_0(x)\}^{q-1} \cdot \partial g(x)$$

$$\partial g(x) = |Л-М| = \begin{cases} \{0\} & f_0(x) < 0 \\ A & f_0(x) = 0 \\ \partial f_0(x) & f_0(x) > 0 \end{cases}$$

$$A = \operatorname{conv}\{0, \partial f_0(x)\}$$

Таким образом,

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{0\}, & f_0(x) < 0 \\ \{0\}, & f_0(x) = 0 \\ B, & f_0(x) > 0 \end{cases}$$

$B = q f_0(x)^{q-1} \cdot \partial f_0(x)$

Задача 2

$f(x) = |c_1^T x| + |c_2^T x|$, ∂f - ?

$f_1(x) = |c_1^T x| = \max\{-c_1^T x, c_1^T x\}$

1) Б-М

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -c_1, & c_1^T x < 0 \\ c_1, & c_1^T x > 0 \\ \mathrm{conv}\{-c_1, c_1\}, & c_1^T x = 0 \end{cases}$$

2) М-Р

$\partial f = \partial f_1 + \partial f_2$

Задача 3. $f(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

▶ $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f_i(x) = |x_i| \Rightarrow |\text{М-Р}| \Rightarrow \partial f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

$$\partial f_i(x) = |\text{Д-М}| = \begin{cases} -e_i, & x_i < 0 \\ e_i, & x_i > 0 \\ \operatorname{conv}\{-e_i, e_i\}, & x_i = 0 \end{cases}$$

$x_i = \langle e_i, x \rangle$

$$\operatorname{conv}\{-e_i, e_i\} = \lambda e_i, \quad \lambda \in [-1, 1]$$

$$\partial f(x) = \{ g \mid \|g\|_\infty \le 1, \ g^T x = \|x\|_1 \}$$

Задача: $\partial(\|x\|_2)(x)$

- Алексеев, Тихомиров, Фомин „Оптимальное управление"
- Нестеров „Методы выпуклой оптимизации"
- Пособие!!!