Семинар 3

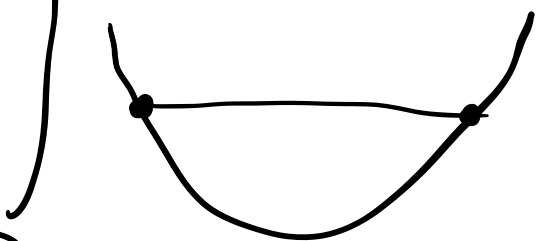
Выпуклые множества

<u>Опр</u> $f: Q \to \mathbb{R}$, где Q – непустое, выпуклое подмножество вещ. вект. пр.

$\forall x, y \in Q$ и $\forall \alpha: 0 \le \alpha \le 1$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

f – выпуклая



$\geq$ – вогнутая

<u>Пример</u>

$f(x) = \langle a, x \rangle + b$

$b = \alpha b + (1-\alpha) b$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha \langle a, x \rangle + (1-\alpha)\langle a, y \rangle + b =$$
$$= \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

<u>Пример</u>

$f(x) = \|x\|$

$$\underbrace{\|\alpha x + (1-\alpha) y\|}_{f(\alpha x + (1-\alpha)y)} \le \alpha \underbrace{\|x\|}_{f(x)} + (1-\alpha)\underbrace{\|y\|}_{f(y)}$$

Опр U — вып. мн.

$f: U \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Эффективная область определения функции:

$\mathrm{dom}\, f = \{x \in U : |f(x)| < +\infty\}$

Замечание

1. С обычными числами — как всегда
2. $+\infty + +\infty = +\infty$

   $-\infty + -\infty = -\infty$

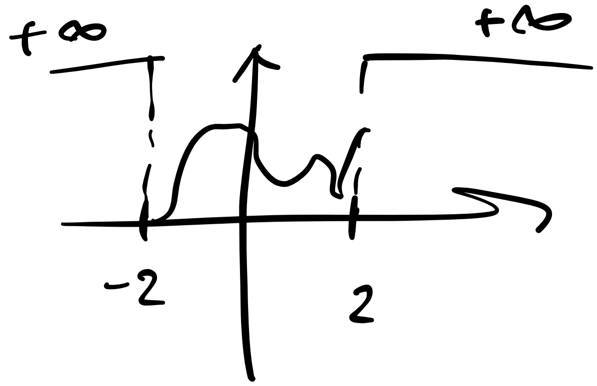
   $+\infty + -\infty =$ нельзя
3. $a \cdot +\infty = +\infty$ $(a>0)$

   $+\infty \cdot +\infty = +\infty$

   $a \cdot +\infty = -\infty$ $(a<0)$

   $-\infty \cdot +\infty = -\infty$

   $\left.\begin{array}{l} 0 \cdot +\infty \\ 0 \cdot -\infty \end{array}\right\}$ — нельзя

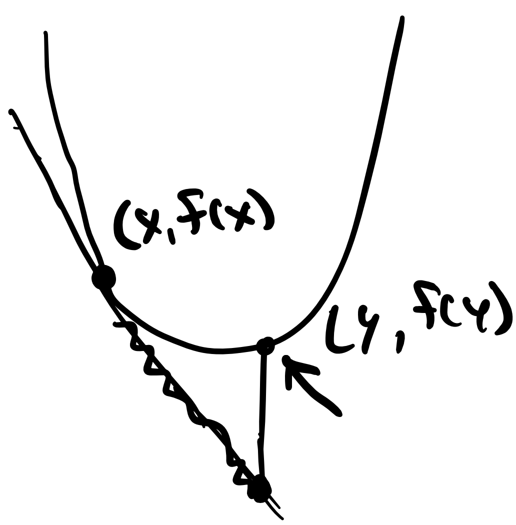


I Критерий выпуклости

1. $\mathrm{dom}\, f$ — открытое
2. f — дифф на $\mathrm{dom}\, f$

Тогда f — выпукла $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$



2 Критерий выпуклости

1. dom f – открытое
2. f – дважды дифф. на dom f

Тогда f – выпуклая $\Leftrightarrow \nabla^2 f \succeq 0$

$$\uparrow$$

$$\succ 0$$

$$f(x) = \exp(\alpha x), \quad f''(x) = \alpha^2 \exp(\alpha x) \geq 0$$

Пример

$$f(x) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a \geq 0 \\ ac - b^2 \geq 0 \end{cases}$$

Пример

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

$$\nabla^2 f(x) = A \succeq 0$$

Пример

$$f(x) = \ln(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n})$$

$$\nabla f(x) = \frac{1}{\sum_i e^{x_i}} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{pmatrix}}_{z} = \frac{1}{1^T z} z$$

$$\nabla^2 f(x) = \nabla\left(\frac{1}{1^T z}\right) z + \frac{1}{1^T z} \nabla z =$$

$$= -\frac{\nabla(1^T z)}{(1^T z)^2} z + \frac{1}{1^T z} \nabla z =$$

$$= -\frac{zz^T}{(1^Tz)^2} + \frac{1}{1^Tz}\operatorname{diag}(z) =$$

$$= \frac{1}{(1^Tz)^2}\left((1^Tz)\operatorname{diag}(z) - zz^T\right)$$

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0$$

$$v^T \nabla^2 f(x)\, v =$$

$$= \frac{1}{(1^Tz)^2}\left(\left(\sum_i z_i\right)\left(\sum v_i^2 z_i\right) - \left(\sum v_i z_i\right)^2\right) \geq 0$$

$$(a^Ta)(b^Tb) \geq (a^Tb)^2, \quad a_i = v_i\sqrt{z_i}, \quad b_i = \sqrt{z_i}$$

Пример

$$f(x) = \left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{на } \mathbb{R}^n_{++}$$

вогнутая

$$\nabla f(x)_k = \frac{1}{n x_k}\left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = (1-n)\,\frac{\left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}}{n^2 x_k^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{1}{n^2}\,\frac{\left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}}{x_j x_k}$$

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{n^2}\left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(n \operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_n^2}\right) - \right.$$

$$\left. - qq^T\right), \text{ где } q_i = \frac{1}{x_i}$$

$$\nabla^2 f(x) \preceq 0$$

$$v^T \nabla^2 f(x) v = -\frac{1}{n^2}\left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(n \sum_1 \frac{v_i^2}{x_i^2} - \left(\sum_1 \frac{v_i}{x_i}\right)^2\right) \le 0$$

$a = 1$

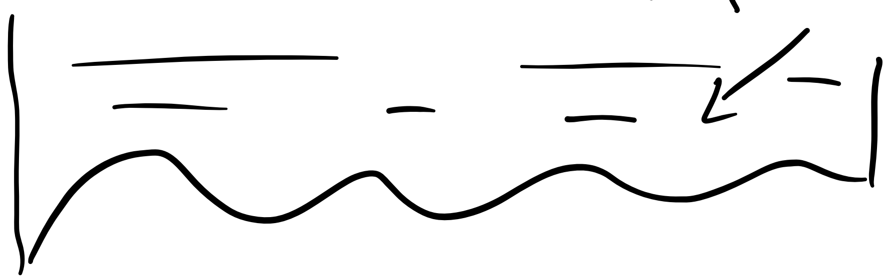
$b_i = \frac{v_i}{x_i}$

<u>Опр</u> U — вещ. век. пространство

Q — выпукл. множество в U

Надграфиком (эпиграфом)

$$\mathrm{epi}\, f = \{(x, t) \in Q \times \mathbb{R} : f(x) \le t\}$$



<u>Теорема</u>

f — выпуклая $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}\, f$ — выпуклый

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

<u>Пример</u>

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$f(x) = -\ln x$ — выпуклая

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$

$$-\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{-\ln a - \ln b}{2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Утв 1 f_i — выпуклые

$c_i \geq 0$

$f(x) = \sum_i c_i f$ — выпуклая

Утв 2 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$g = f(AX+b)$ — выпуклой

Утв 3 f_i — выпуклые

$f(x) = \max\{f_i\}$ — выпуклая

Утв 4 h — выпуклая

g — выпуклая и неубывающая

$f = g(h(x))$ — выпуклая