Домашнее задание 1

Deadline - 20.09.2024 в 23:59

Следующие обозначения:
$\mathbb{R}_{++}$ - положительные вещественные числа
I_n - матрица с единицами на диагонали (вне диагонали 0)
$A \in \mathbb{S}^n \quad \iff \quad A = A^\top$
$A \in \mathbb{S}^n_+ \quad \iff \quad A \in \mathbb{S}^n; \quad \forall x: \quad x^\top A x \geq 0$
$A \in \mathbb{S}^n_{++} \quad \iff \quad A \in \mathbb{S}^n; \quad \forall x \neq 0: \quad x^\top A x > 0$
Норма Фробениуса для матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяется как $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$
Для матриц скалярное произведение определено как $\langle X, Y \rangle := \mathrm{Tr}(X^\top Y)$

Основная часть

Задача 1. Пусть f – одна из следующих функций:

1) (1 балл) $f : E \to \mathbb{R}$ – функция $f(t) := \det(A - tI_n)$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E := \{t \in \mathbb{R} : \det(A - tI_n) \neq 0\}$.

2) (1.5 балла) $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(t) := \|(A + tI_n)^{-1} b\|^2$, где $A \in \mathbb{S}^n_{++}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Для каждого из указанных вариантов вычислите первую и вторую производные $f'(t)$ и $f''(t)$.

Задача 2. Пусть f – одна из следующих функций:

1) (2 балла) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \dfrac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, где $A \in \mathbb{S}^n$.

2) (2.5 балла) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \langle x, x \rangle^{\langle x, x \rangle}$.

Для каждого из указанных вариантов вычислите градиент ∇f и гессиан $\nabla^2 f$ (относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Задача 3. Для каждой из следующих функций f покажите, что вторая производная $d^2 f$ является знакополуопределенной (как квадратичная форма) и установите ее знак:

1) (3 балла) $f : \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(X) := \langle X^{-1}, A \rangle$, где $A \in \mathbb{S}^n_+$.

Дополнительная часть

Задача 1. Пусть f – одна из следующих функций:

1) (1.5 балл) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$

2) (1.5 балла)$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$, где $A \in \mathbb{S}^n$.

3) (2 балла) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \ln(\sum_{i=1}^m e^{\langle a_i, x\rangle})$, где $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Эта функция называется LogSumExp, и она используется для гладкого приближения $\max(Ax)$. Подумайте, почему так. Также см. функцию softmax с семинара.

Для каждого из указанных вариантов вычислите градиент ∇f и гессиан $\nabla^2 f$ (относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Задача 2. Для каждой из следующих функций f покажите, что вторая производная $d^2 f$ является знакоопределенной (как квадратичная форма) и установите ее знак:

1) (2 балла)$f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. (*Hint*: log derivative trick)

2) (2 балл)$f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$, где $p < 1$, $p \neq 0$.

3) (1 балла)$f : \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(X) := (\det(X))^{1/n}$.

(*Hint*: В некоторых пунктах могут оказаться полезными неравенства Коши–Буняковского и Йенсена.)