

# Метод внутренней точки. Самосогласованные барьеры

## Методы оптимизации

Александр Безносиков

Московский физико-технический институт

4 апреля 2025

# От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

# От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

- Задача со штрафом:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (g_j^+)^2(x) \right],$$

где  $y^+ = \max\{y, 0\}$ .

# От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

- Задача со штрафом:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (g_j^+)^2(x) \right],$$

где  $y^+ = \max\{y, 0\}$ .

- Итоговое решение штрафной задачи может не удовлетворять ограничениям. **Вопрос:** как ввести штраф так, чтобы оно гарантированно было в пределах множества  $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_i(x) \leq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}$ ?

# От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где  $\mathbb{I}_G(x)$  – индикаторная функция множества  $G$ :

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

# От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где  $\mathbb{I}_G(x)$  – индикаторная функция множества  $G$ :

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче,  
**вопрос:** какие есть проблемы?

# От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где  $\mathbb{I}_G(x)$  – индикаторная функция множества  $G$ :

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос**: какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор не непрерывен и не дифференцируем.

# От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где  $\mathbb{I}_G(x)$  – индикаторная функция множества  $G$ :

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос**: какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор не непрерывен и не дифференцируем.
- Идея: воспроизвести поведение индикатора более плавно и непрерывно.



# Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1)  $\text{int}G$  – непустое множество, 2) для любой точки  $x \in G$  существует последовательность  $\{x_i\} \in \text{int}G$  такая, что  $x_i \rightarrow x$ , 3)  $G$  – ограниченное множество, 4) для любого  $x \in \text{int}G$  и для любого  $i = 1, \dots, m$  следует, что  $g_i(x) < 0$ , 5)  $f$  непрерывно дифференцируема на  $G$ .

# Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1)  $\text{int}G$  – непустое множество, 2) для любой точки  $x \in G$  существует последовательность  $\{x_i\} \in \text{int}G$  такая, что  $x_i \rightarrow x$ , 3)  $G$  – ограниченное множество, 4) для любого  $x \in \text{int}G$  и для любого  $i = 1, \dots, m$  следует, что  $g_i(x) < 0$ , 5)  $f$  непрерывно дифференцируема на  $G$ .
- Введем функцию  $F$ : 1) непрерывно дифференцируемую на  $\text{int}G$  и 2) для любой последовательности  $\{x_i\} \in \text{int}G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$  (граница множества  $G$ ), выполнено  $F(x_i) \rightarrow +\infty$ .

# Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1)  $\text{int}G$  – непустое множество, 2) для любой точки  $x \in G$  существует последовательность  $\{x_i\} \in \text{int}G$  такая, что  $x_i \rightarrow x$ , 3)  $G$  – ограниченное множество, 4) для любого  $x \in \text{int}G$  и для любого  $i = 1, \dots, m$  следует, что  $g_i(x) < 0$ , 5)  $f$  непрерывно дифференцируема на  $G$ .
- Введем функцию  $F$ : 1) непрерывно дифференцируемую на  $\text{int}G$  и 2) для любой последовательности  $\{x_i\} \in \text{int}G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$  (граница множества  $G$ ), выполнено  $F(x_i) \rightarrow +\infty$ .
- Примеры:

- Барьер Кэррола:

$$F(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)},$$

- Логарифмический барьер:

$$F(x) = - \sum_{i=1}^m \ln(-g_i(x)).$$

# Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается:  $F$  это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к  $\partial G$  улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на  $\text{int}G$  равен 0. **Вопрос:** идеи?

# Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается:  $F$  это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к  $\partial G$  улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на  $\text{int} G$  равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр  $\rho > 0$  и рассмотрим и модифицируем значение  $F$  следующим образом:  $\frac{1}{\rho} F(x)$

# Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается:  $F$  это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к  $\partial G$  улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на  $\text{int} G$  равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр  $\rho > 0$  и рассмотрим и модифицируем значение  $F$  следующим образом:  $\frac{1}{\rho} F(x)$
- При  $\rho \rightarrow +\infty$ , следует, что  $\frac{1}{\rho} F(x) \rightarrow 0$  на  $\text{int} G$ .

# Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается:  $F$  это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к  $\partial G$  улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на  $\text{int} G$  равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр  $\rho > 0$  и рассмотрим и модифицируем значение  $F$  следующим образом:  $\frac{1}{\rho} F(x)$
- При  $\rho \rightarrow +\infty$ , следует, что  $\frac{1}{\rho} F(x) \rightarrow 0$  на  $\text{int} G$ .
- Итого рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ F_{\rho}(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} F(x) \right].$$

# Барьерная задача

- $F_\rho$  – непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ . Следует из того, что  $F$  непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ .



# Барьерная задача

- $F_\rho$  – непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ . Следует из того, что  $F$  непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ .
- $\{x_i\} \in \text{int}G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$  (граница множества  $G$ ), выполнено  $F_\rho(x_i) \rightarrow +\infty$ . Следует из непрерывности  $f$  и определения  $F$ .

# Барьерная задача

- $F_\rho$  – непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ . Следует из того, что  $F$  непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ .
- $\{x_i\} \in \text{int}G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$  (граница множества  $G$ ), выполнено  $F_\rho(x_i) \rightarrow +\infty$ . Следует из непрерывности  $f$  и определения  $F$ .
- Формально задача  $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$  – это задача с ограничениями.  
Вопрос: почему?

# Барьерная задача

- $F_\rho$  – непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ . Следует из того, что  $F$  непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ .
- $\{x_i\} \in \text{int}G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$  (граница множества  $G$ ), выполнено  $F_\rho(x_i) \rightarrow +\infty$ . Следует из непрерывности  $f$  и определения  $F$ .
- Формально задача  $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$  – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему?  $F_\rho$  определена только на  $\text{int}G$ .

# Барьерная задача

- $F_\rho$  – непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ . Следует из того, что  $F$  непрерывно дифференцируемая на  $\text{int}G$ .
- $\{x_i\} \in \text{int}G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$  (граница множества  $G$ ), выполнено  $F_\rho(x_i) \rightarrow +\infty$ . Следует из непрерывности  $f$  и определения  $F$ .
- Формально задача  $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$  – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему?  $F_\rho$  определена только на  $\text{int}G$ . Но это не проблема: пусть мы стартуем из  $x^0 \in \text{int}G$  и можем гарантировать, что метод минимизации  $F_\rho(x)$  выдает точки  $x^k$  такие, что  $F_\rho(x^k) \leq F_\rho(x^0)$ . А мы знаем, что  $F_\rho \rightarrow \infty$  при приближении к  $\partial G$ , а значит в какой-то момент, приближаясь к границе,  $F_\rho$  будет больше  $F_\rho(x^0)$ . Получаем, что  $x^k$  остается в  $\text{int}G$ . Это означает, что задача с ограничениями превращается в безусловную, потому что ограничения «не чувствуются».

# Свойства барьерной задачи

Чуть более формально последнее утверждение с предыдущего слайда.

## Свойство барьерной задачи

Для любого  $\rho > 0$  функция  $F_\rho(x)$  принимает минимум на  $\text{int } G$ . А множества вида

$$U = \{x \in \text{int } G \mid F_\rho(x) \leq a\}$$

являются компактами для любого  $a$ .

# Доказательство

- Чтобы показать замкнутость  $U$ , рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in U$ , сходящуюся к  $x$ . **Вопрос:** что нужно доказать?

# Доказательство

- Чтобы показать замкнутость  $U$ , рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in U$ , сходящуюся к  $x$ . **Вопрос:** что нужно доказать?  $x \in U$ .

## Доказательство

- Чтобы показать замкнутость  $U$ , рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in U$ , сходящуюся к  $x$ . **Вопрос:** что нужно доказать?  $x \in U$ . Возможны две опции:  $x \in \text{int}G$  или  $\partial G$ ? Если  $x \in \partial G$ , то  $F_\rho(x_i) \rightarrow F_\rho(x) = \infty$ , что невозможно, так как  $F_\rho(x_i) \leq a$ . Значит  $x \in \text{int}G$ .



# Доказательство

- Чтобы показать замкнутость  $U$ , рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in U$ , сходящуюся к  $x$ . **Вопрос:** что нужно доказать?  $x \in U$ . Возможны две опции:  $x \in \text{int}G$  или  $\partial G$ ? Если  $x \in \partial G$ , то  $F_\rho(x_i) \rightarrow F_\rho(x) = \infty$ , что невозможно, так как  $F_\rho(x_i) \leq a$ . Значит  $x \in \text{int}G$ . Но на  $\text{int}G$  функция  $F_\rho$  непрерывна, откуда следует необходимое, нужно только перейти к пределу в  $F_\rho(x_i) \leq a$ .

# Доказательство

- Чтобы показать замкнутость  $U$ , рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in U$ , сходящуюся к  $x$ . **Вопрос:** что нужно доказать?  $x \in U$ . Возможны две опции:  $x \in \text{int}G$  или  $\partial G$ ? Если  $x \in \partial G$ , то  $F_\rho(x_i) \rightarrow F_\rho(x) = \infty$ , что невозможно, так как  $F_\rho(x_i) \leq a$ . Значит  $x \in \text{int}G$ . Но на  $\text{int}G$  функция  $F_\rho$  непрерывна, откуда следует необходимое, нужно только перейти к пределу в  $F_\rho(x_i) \leq a$ .
- Ограниченность  $U$  следует из ограниченности  $G$ .

# Доказательство

- Чтобы показать замкнутость  $U$ , рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in U$ , сходящуюся к  $x$ . **Вопрос:** что нужно доказать?  $x \in U$ . Возможны две опции:  $x \in \text{int}G$  или  $\partial G$ ? Если  $x \in \partial G$ , то  $F_\rho(x_i) \rightarrow F_\rho(x) = \infty$ , что невозможно, так как  $F_\rho(x_i) \leq a$ . Значит  $x \in \text{int}G$ . Но на  $\text{int}G$  функция  $F_\rho$  непрерывна, откуда следует необходимое, нужно только перейти к пределу в  $F_\rho(x_i) \leq a$ .
- Ограниченность  $U$  следует из ограниченности  $G$ .
- $F_\rho$  непрерывна на компакте  $U$ , тогда она принимает минимальное значение на нем (теорема Вейерштрасса). Но по определению  $U$ , этот минимум на  $U$  будет минимумом и на  $\text{int}G$ .

# Свойства решений барьерной задачи

## Свойство решений барьерной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что  $\overline{\text{int}G} = G$  (замыкание  $\text{int}G$ ). Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует  $\rho(\epsilon) > 0$  такое, что множество решений барьерной задачи  $X_\rho^*$  для любых  $\rho \geq \rho(\epsilon)$  содержится в

$$X_\epsilon^* = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* : \|x - x^*\|_2 \leq \epsilon\},$$

где  $X^*$  – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

# Свойства решений барьерной задачи

## Свойство решений барьерной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что  $\overline{\text{int}G} = G$  (замыкание  $\text{int}G$ ). Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует  $\rho(\epsilon) > 0$  такое, что множество решений барьерной задачи  $X_\rho^*$  для любых  $\rho \geq \rho(\epsilon)$  содержится в

$$X_\epsilon^* = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* : \|x - x^*\|_2 \leq \epsilon\},$$

где  $X^*$  – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

- $X^*$  непустое, так как  $G$  замкнутое и ограниченное, а  $f$  непрерывна на этом компакте.
- То, что  $X_\rho^*$  непустое, доказали в первом свойстве.

# Доказательство

- От противного:

# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .

# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $G$  ограничено, то  $X^*(\rho_i)$  ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\tilde{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}^*$ . Посмотрим, что мы можем сказать про  $\tilde{x}^*$ .



# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $G$  ограничено, то  $X^*(\rho_i)$  ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\tilde{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}^*$ . Посмотрим, что мы можем сказать про  $\tilde{x}^*$ .
- Отметим, что предел  $\tilde{x}^*$  лежит в  $G$ . **Вопрос:** почему?

# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $G$  ограничено, то  $X^*(\rho_i)$  ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\tilde{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}^*$ . Посмотрим, что мы можем сказать про  $\tilde{x}^*$ .
- Отметим, что предел  $\tilde{x}^*$  лежит в  $G$ . **Вопрос:** почему?  $\tilde{x}_i^* \in \text{int} G$ ,  $G$  есть замыкание  $\text{int} G$ .

# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $G$  ограничено, то  $X^*(\rho_i)$  ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\tilde{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}^*$ . Посмотрим, что мы можем сказать про  $\tilde{x}^*$ .
- Отметим, что предел  $\tilde{x}^*$  лежит в  $G$ . **Вопрос:** почему?  $\tilde{x}_i^* \in \text{int} G$ ,  $G$  есть замыкание  $\text{int} G$ .
- Также  $\tilde{x}^*$  не должен лежать в  $X^*$ . **Вопрос:** почему?

# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $G$  ограничено, то  $X^*(\rho_i)$  ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\tilde{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}^*$ . Посмотрим, что мы можем сказать про  $\tilde{x}^*$ .
- Отметим, что предел  $\tilde{x}^*$  лежит в  $G$ . **Вопрос:** почему?  $\tilde{x}_i^* \in \text{int} G$ ,  $G$  есть замыкание  $\text{int} G$ .
- Также  $\tilde{x}^*$  не должен лежать в  $X^*$ . **Вопрос:** почему? Иначе, начиная с некоторого номера  $i$ ,  $\tilde{x}^*$  начнут попадать в  $X_\epsilon^*$ .

# Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое  $\epsilon > 0$  и последовательность  $\{\rho_i\} \rightarrow \infty$ , что  $X^*(\rho_i)$  не содержится в  $X_\epsilon^*$ , т.е. существуют  $x_i^* \in X^*(\rho_i)$  не лежащие в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $G$  ограничено, то  $X^*(\rho_i)$  ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\tilde{x}_i^* \rightarrow \tilde{x}^*$ . Посмотрим, что мы можем сказать про  $\tilde{x}^*$ .
- Отметим, что предел  $\tilde{x}^*$  лежит в  $G$ . **Вопрос:** почему?  $\tilde{x}_i^* \in \text{int} G$ ,  $G$  есть замыкание  $\text{int} G$ .
- Также  $\tilde{x}^*$  не должен лежать в  $X^*$ . **Вопрос:** почему? Иначе, начиная с некоторого номера  $i$ ,  $\tilde{x}^*$  начнут попадать в  $X_\epsilon^*$ .
- Так как  $\tilde{x}^*$  вне  $X^*$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что

$$f(\tilde{x}^*) > f(x^*) + \delta,$$

где  $x^* \in X^* \subseteq G$ .

# Доказательство

- С другой стороны: так как  $G$  есть замыкание  $\text{int}G$ , а  $f$  непрерывна на  $G$ , то можно найти такую точку  $\tilde{x} \in \text{int}G$ , что

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

# Доказательство

- С другой стороны: так как  $G$  есть замыкание  $\text{int}G$ , а  $f$  непрерывна на  $G$ , то можно найти такую точку  $\tilde{x} \in \text{int}G$ , что

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

- Тогда

$$f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}_i^*) = F_{\rho_i}(\tilde{x}_i^*) = \min_{x_i \in \text{int}G} F_{\rho_i}(x_i) \leq F_{\rho_i}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x})$$

# Доказательство

- С другой стороны: так как  $G$  есть замыкание  $\text{int}G$ , а  $f$  непрерывна на  $G$ , то можно найти такую точку  $\tilde{x} \in \text{int}G$ , что

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

- Тогда

$$f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}_i^*) = F_{\rho_i}(\tilde{x}_i^*) = \min_{x_i \in \text{int}G} F_{\rho_i}(x_i) \leq F_{\rho_i}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x})$$

- Мы уже показывали, что  $F_\rho$  принимает свое минимальное значение (а значит ограничено снизу) на  $\text{int}G$ . Аналогично, можно показать, что  $F(x) \geq F^* > -\infty$  на  $\text{int}G$ . Поэтому

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$



# Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

# Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

- Функция  $f$  непрерывна на  $G$ . Переходим к пределу в неравенстве:

$$f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}).$$

# Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

- Функция  $f$  непрерывна на  $G$ . Переходим к пределу в неравенстве:

$$f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}).$$

- Но

$$f(x^*) + \delta < f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

Противоречие.



## Итог по барьерам на данный момент

- По факту условная задача превращена в безусловную.
- Увеличение  $\rho$  помогает лучше аппроксимировать поведение честной индикаторной функции, а значит приближает нас к исходной задаче.
- Решение всегда удовлетворяет ограничениям.
- Более того, так как в процессе оптимизации мы не выходим за  $G$ , то можно сказать, что мы всегда «внутри», поэтому метод решающий задачу с барьером называется метод внутренней точки.
- В общем случае все. Как и для штрафов – выбираем, какое-то  $\rho$  пытаемся решить задачу с барьером. Далее можно попробовать увеличить  $\rho$ .
- Далее рассмотрим фундаментальные азы теории вокруг барьеров, которая сильно продвинула вперед науку в этой области.

# Самосогласованная функция

## Самосогласованная функция

Выпуклая трижды непрерывно дифференцируемая на  $\text{int} G$  функция называется самосогласованной, если выполнены следующие условия

- $\left| \frac{d^3}{dt^3} F(x + th) \right| \leq 2[h^T \nabla^2 F(x) h]^{3/2}$  для любых  $x \in \text{int} G$  и  $h \in \mathbb{R}^d$ ;
- Для любой последовательности  $\{x_i\} \in \text{int} G$  такой, что  $x_i \rightarrow x \in \partial G$ , выполнено «барьерное» свойство:  $F(x_i) \rightarrow +\infty$ .

# Самосогласованная функция: примеры

- Квадратичная функция с симметричной положительно полуопределенной матрицей:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$

является самосогласованной на  $\mathbb{R}^d$ .

- Отрицательный логарифм:

$$f(x) = -\ln(x),$$

является самосогласованным на  $\mathbb{R}_+$ .

- Отрицательный логарифм квадратичной функции  $g(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ :

$$f(x) = -\ln(-g(x))$$

является самосогласованным на  $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) < 0\}$ .





# Самосогласованный барьер

## Самосогласованный барьер

Функция  $F$  является  $\nu$ -самосогласованным барьером ( $\nu$  всегда  $\geq 1$ ) на множестве  $\text{int}G$ , если

- $F$  самосогласована на  $\text{int}G$ ;
- Выполнено условие:  $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu} \sqrt{h^T \nabla^2 F(x) h}$  для любых  $x \in \text{int}G$  и  $h \in \mathbb{R}^d$ .

- Пример – логарифмический барьер от линейных ограничений:

$$F(x) = - \sum_{i=1}^m -\ln(b_i - a_i^T x),$$

где  $\{b_i - a_i^T x\}$  удовлетворяют условию Слейтера, является  $m$ -самосогласованным барьером на

$$G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^T x \leq b_i, \ i = 1, \dots, m\}$$

# Задача

- То с чего начинали:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Только пусть теперь все функции  $f$  и  $g_i$  выпуклые на  $G$ .

# Задача

- То с чего начинали:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Только пусть теперь все функции  $f$  и  $g_i$  выпуклые на  $G$ .

- Переформулируем в форме эпиграфа:

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}} \quad & t, \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & f(x) - t \leq 0. \end{aligned}$$

Задача остается выпуклой (эпиграф выпуклый тогда и только тогда, когда функция выпукла). Добавилась линейность целевой функции.

# Задача

- Поэтому будем рассматривать задачу вида:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

с выпуклыми функциями  $g_i$ .

# Общий случай метода

Сначала посмотрим на общую схему, которая подойдет для любой задачи.

---

## Алгоритм 1 Метод внутренней точки (общий случай)

---

**Вход:** стартовая точка  $x^0 \in \text{int}G$ , стартовое значение параметра  $\rho_{-1} > 0$ , количество итераций  $K$

1: **for**  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  **do**

2:   Увеличить  $\rho_k > \rho_{k-1}$

3:   С помощью некоторого метода решить численно задачу безусловной оптимизации с целевой функцией  $F_{\rho_k}$  и стартовой точкой  $x_k$ . Гарантировать, что выход метода  $x_{k+1}$  будет близок к реальному решению  $x^*(\rho_k)$ .

4: **end for**

**Выход:**  $x^K$

---

# Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

- Теперь перейдем к частному случаю линейной целевой функции и  $\nu$ -самосогласованных барьеров.
- Чем меньше  $\nu$  тем лучше барьер и как увидим далее – быстрее сходится метод.

# Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

- Теперь перейдем к частному случаю линейной целевой функции и  $\nu$ -самосогласованных барьеров.
- Чем меньше  $\nu$  тем лучше барьер и как увидим далее – быстрее сходится метод.

# Линейная целевая функция и самосоогласованный барьер

Введем дополнительные объекты:

- $\Phi_\rho(x) = \rho F_\rho(x) = \rho c^T x + F(x)$
- $\lambda(\Phi_\rho, x) = \sqrt{[\nabla \Phi_\rho(x)]^T [\nabla^2 \Phi_\rho(x)]^{-1} \nabla \Phi_\rho(x)}$

---

## Алгоритм 2 Метод внутренней точки (частный случай)

---

**Вход:** параметры  $e_1, e_2 \in (0; 1)$ , стартовое значение параметра  $\rho_{-1} > 0$ , стартовая точка  $x^0 \in \text{int}G$  такая, что  $\lambda(\Phi_{\rho_{-1}}, x^0) \leq e_1$ , количество итераций  $K$

- 1: **for**  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  **do**
- 2:   Увеличить  $\rho_k = \left(1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}\right) \rho_{k-1}$
- 3:   Сделать шаг демпфированного метода Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{1 + \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)} [\nabla^2 \Phi_{\rho_k}(x^k)]^{-1} \nabla \Phi_{\rho_k}(x^k)$$

(возможно, понадобится больше одного шага метода Ньютона, но при правильном соотношении  $e_1$  и  $e_2$  достаточно ровно одного)

- 4: **end for**

**Выход:**  $x^K$



# Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента):  
 $\lambda(\Phi_\rho, x)$  мы измеряем «близость»  $x$  к  $x^*(\rho)$ .

# Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента):  $\lambda(\Phi_\rho, x)$  мы измеряем «близость»  $x$  к  $x^*(\rho)$ .
- для положительно определенной матрицы  $\nabla^2 \Phi_\rho(x)$  декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида  $\|\nabla \Phi_\rho(x)\|_2$ , но по норме, индуцированной матрицей.

# Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента):  $\lambda(\Phi_\rho, x)$  мы измеряем «близость»  $x$  к  $x^*(\rho)$ .
- для положительно определенной матрицы  $\nabla^2 \Phi_\rho(x)$  декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида  $\|\nabla \Phi_\rho(x)\|_2$ , но по норме, индуцированной матрицей.
- Мы задаем  $x^0$  так, что он сразу близок к  $x^*(\rho)$ . Это можно сделать, например, запустив демпфированный метод Ньютона на большое число итераций.

# Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента):  $\lambda(\Phi_\rho, x)$  мы измеряем «близость»  $x$  к  $x^*(\rho)$ .
- для положительно определенной матрицы  $\nabla^2 \Phi_\rho(x)$  декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида  $\|\nabla \Phi_\rho(x)\|_2$ , но по норме, индуцированной матрицей.
- Мы задаем  $x^0$  так, что он сразу близок к  $x^*(\rho)$ . Это можно сделать, например, запустив демпфированный метод Ньютона на большое число итераций.
- Далее мы увеличиваем  $\rho$ . И оказывается, что теперь достаточно только одного шага Ньютона, чтобы снова гарантированно быть близко к  $x^*(\rho)$ , а точнее  $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \epsilon_1$ . А дальше закливаем. Осталось только показать, что и правда  $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \epsilon_1$ .

# Доказательство

Еще одно обозначение:  $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$ , и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей:  $\|x\|_A^2 = x^T A x$ .

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что  $H(x)$  положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

# Доказательство

Еще одно обозначение:  $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$ , и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей:  $\|x\|_A^2 = x^T A x$ .

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что  $H(x)$  положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

- В новых обозначениях:

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \|\nabla \Phi_\rho(x)\|_{H^{-1}(x)} = \|\rho c + \nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)}$$

# Доказательство

Еще одно обозначение:  $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$ , и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей:  $\|x\|_A^2 = x^T A x$ .

Сразу из определения самосоогласованного барьера следует, что  $H(x)$  положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

- В новых обозначениях:

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \|\nabla \Phi_\rho(x)\|_{H^{-1}(x)} = \|\rho c + \nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)}$$

- Попробуем оценить  $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)$  через  $\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k)$ , т.е. насколько ухудшает ситуацию увеличение  $\rho$  (здесь используем просто неравенство треугольника):

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) &= \|\rho_k c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \\ &\leq \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} + \|(\rho_k - \rho_{k-1})c\|_{H^{-1}(x^k)} \end{aligned}$$

# Доказательство

- Продолжаем с предыдущего слайда (просто подставляем  $\rho_k$  через  $\rho_{k-1}$ ):

$$\begin{aligned}\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) &\leq \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} + \|(\rho_k - \rho_{k-1})c\|_{H^{-1}(x^k)} \\ &= \lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) + \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \\ &\leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}} \|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}\end{aligned}$$

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ .



# Доказательство

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ :

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq \epsilon_1$$

# Доказательство

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ :

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

- Неравенство треугольника:

$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

# Доказательство

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ :

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

- Неравенство треугольника:

$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

- Из определения самосогласованного барьера для любого  $h$ :  
 $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu} \sqrt{h^T H(x) h}.$

# Доказательство

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ :

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

- Неравенство треугольника:

$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

- Из определения самосогласованного барьера для любого  $h$ :

$$|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu} \sqrt{h^T H(x) h}. \text{ В том числе для } h = H^{-1}(x) \nabla F(x):$$
$$[\nabla F(x)]^T H^{-1}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu} \sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-1}(x) \nabla F(x)}$$

# Доказательство

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ :

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

- Неравенство треугольника:

$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

- Из определения самосогласованного барьера для любого  $h$ :

$$|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu} \sqrt{h^T H(x) h}. \text{ В том числе для } h = H^{-1}(x) \nabla F(x):$$

$$[\nabla F(x)]^T H^{-1}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu} \sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-1}(x) \nabla F(x)}$$

В силу симметричности  $H(x)$  получаем

$$\|\nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)} \leq \sqrt{\nu}$$

# Доказательство

- Нужно оценить  $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$ :

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

- Неравенство треугольника:

$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

- Из определения самосогласованного барьера для любого  $h$ :

$$|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu} \sqrt{h^T H(x) h}. \text{ В том числе для } h = H^{-1}(x) \nabla F(x):$$

$$[\nabla F(x)]^T H^{-1}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu} \sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-1}(x) \nabla F(x)}$$

В силу симметричности  $H(x)$  получаем

$$\|\nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)} \leq \sqrt{\nu}$$

- Итого:

$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \sqrt{\nu}$$

# Доказательство

- Объединяем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

# Доказательство

- Объединяем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

- Функция  $\Phi_{\rho_k}$  является самосогласованной, как сумма двух самосогласованных (линейной и самосогласованного барьера).  
Один шаг демпфированного метода Ньютона дает:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \frac{2\lambda^2(\Phi_{\rho_k}, x^k)}{1 - \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)}.$$



# Доказательство

- Объединяем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

- Функция  $\Phi_{\rho_k}$  является самосогласованной, как сумма двух самосогласованных (линейной и самосогласованного барьера). Один шаг демпфированного метода Ньютона дает:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \frac{2\lambda^2(\Phi_{\rho_k}, x^k)}{1 - \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)}.$$

В частности, если  $e_1 = 0,05$  и  $e_2 = 0,08$ , то

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq 0,05 = e_1.$$

Что и требовалось.

# Доказательство

- Мы всегда близко к текущему  $x^*(\rho)$ .
- Уже знаем, что увеличение  $\rho$  влечет за собой приближение к исходной задаче.
- Осталось понять, как быстро приближаемся к решению исходной задачи с увеличением  $\rho$ .

# Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть  $x = x^*(\rho)$ , также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i^T x).$$

# Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть  $x = x^*(\rho)$ , также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i^T x).$$

- Так как  $x = x^*(\rho)$ , то по условию оптимальности:

$$\nabla \Phi_\rho(x) = \rho c + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i - a_i^T x} = 0.$$

# Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть  $x = x^*(\rho)$ , также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i^T x).$$

- Так как  $x = x^*(\rho)$ , то по условию оптимальности:

$$\nabla \Phi_\rho(x) = \rho c + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i - a_i^T x} = 0.$$

- Возьмем скалярное произведение с  $(x - x^*)$ :

$$\rho c^T (x - x^*) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i^T (x^* - x)}{b_i - a_i^T x} = \sum_{i=1}^m \frac{b_i - a_i^T x}{b_i - a_i^T x} = m$$

# Доказательство

- В итоге (пользуясь, что для нашего барьера  $\nu = m$ ):

$$f(x) - f(x^*) = c^T(x - x^*) = \frac{m}{\rho} = \frac{\nu}{\rho}$$

# Доказательство

- В итоге (пользуясь, что для нашего барьера  $\nu = m$ ):

$$f(x) - f(x^*) = c^T(x - x^*) = \frac{m}{\rho} = \frac{\nu}{\rho}$$

- Так как  $\rho$  увеличивается линейно, то и к решению мы приближаемся линейно.
- В общем случае справедлива следующая теорема.

# Сходимость

## Сходимость метода внутренней точки

Пусть с помощью метода внутренней точки решается задача оптимизации с линейной целевой функцией и выпуклыми ограничениями вида неравенств, при этом используются  $\nu$ -самосоогласованные барьеры. Тогда чтобы достичь  $\varepsilon$  решения ( $f(x) - f(x^*) \leq \varepsilon$ ), необходимо

$$K = \mathcal{O} \left( \sqrt{\nu} \log \frac{\nu}{\varepsilon \rho_0} \right) \text{ итераций метода.}$$



## Итого

- Метод внутренней точки – хорошая альтернатива методу барьеров, которая дополнительно гарантирует соблюдение ограничений.
- Для выпуклых задач метод внутренней точки обладает фундаментальной теорией и сильными гарантиями сходимости.