

Моментум и ускорение. Оптимальный метод

Методы оптимизации

Александр Безносиков

Московский физико-технический институт

21 сентября 2023



Вопрос с прошлой лекции

- Была получена верхняя оценка на сходимость градиентного спуска для L -гладких и μ -сильно выпуклых задач. **Вопрос:** сколько итераций/оракульных вызовов нужно сделать, чтобы найти ε -решение?

$$O\left(\frac{L}{\mu}\right)$$

Вопрос с прошлой лекции

- Была получена верхняя оценка на сходимость градиентного спуска для L -гладких и μ -сильно выпуклых задач. **Вопрос:** сколько итераций/оракульных вызовов нужно сделать, чтобы найти ε -решение?

$$O\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{\|x^0 - x^*\|_2}{\varepsilon}\right) \text{ итераций/оракульных вызовов.}$$

Вопрос с прошлой лекции

- Была получена верхняя оценка на сходимость градиентного спуска для L -гладких и μ -сильно выпуклых задач. **Вопрос:** сколько итераций/оракульных вызовов нужно сделать, чтобы найти ε -решение?

$$O\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{\|x^0 - x^*\|_2}{\varepsilon}\right) \text{ итераций/оракульных вызовов.}$$

- Вопрос на котором ответим сегодня: а можно ли лучше?

Метод тяжелого шарика

- Б.Т. Поляк в 1964 году предложил метод тяжелого шарика.

Алгоритм 1 Метод тяжелого шарика

Вход: размер шагов $\{\gamma_k\}_{k=0} > 0$, моментумы $\{\tau_k\}_{k=0} \in [0; 1]$,
стартовая точка $x^0 = x^{-1} \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

```
1: for  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  do  
2:   Вычислить  $\nabla f(x^k)$   
3:    $x^{k+1} = x^k - \gamma_k \nabla f(x^k) + \tau_k (x^k - x^{k-1})$   
4: end for
```

Выход: x^K

Метод тяжелого шарика

- Б.Т. Поляк в 1964 году предложил метод тяжелого шарика.

Алгоритм 2 Метод тяжелого шарика

Вход: размер шагов $\{\gamma_k\}_{k=0} > 0$, моментумы $\{\tau_k\}_{k=0} \in [0; 1]$,
стартовая точка $x^0 = x^{-1} \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

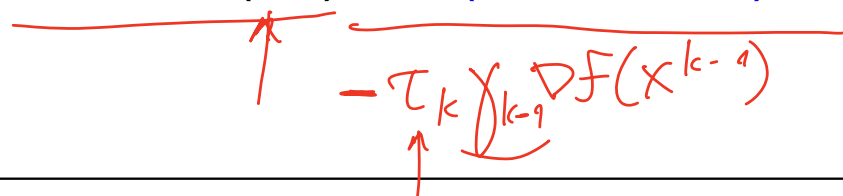
1: **for** $k = 0, 1, \dots, K - 1$ **do**

2: Вычислить $\nabla f(x^k)$

3: $x^{k+1} = x^k - \gamma_k \nabla f(x^k) + \tau_k (x^k - x^{k-1})$

4: **end for**

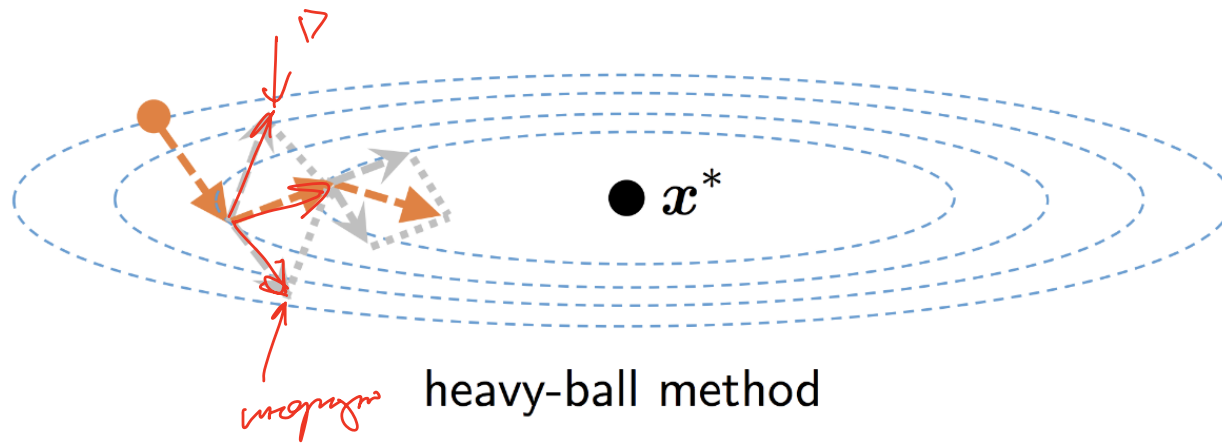
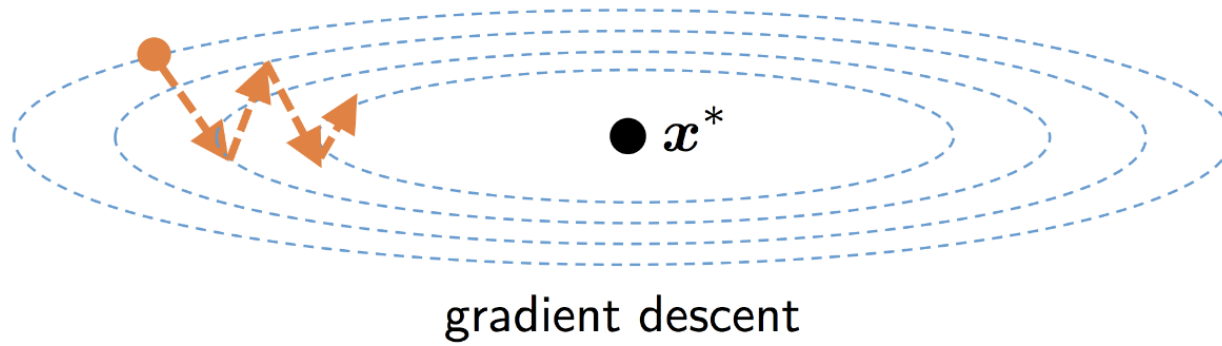
Выход: x^K



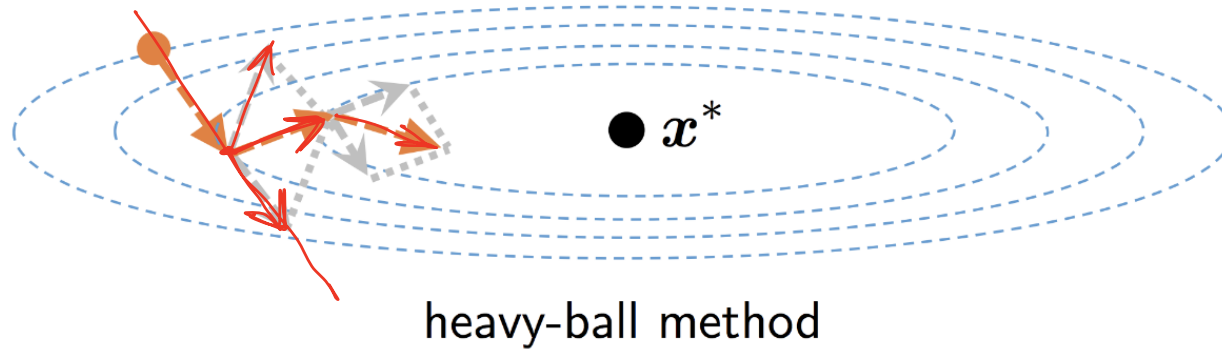
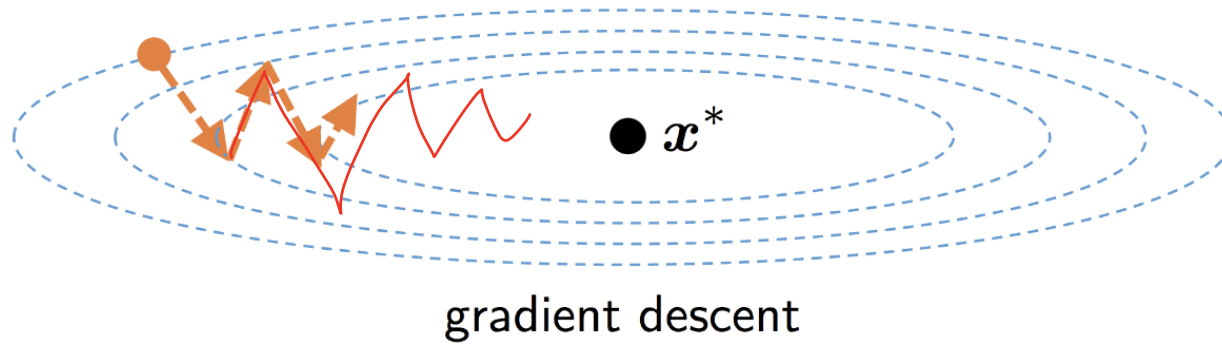
$-\tau_k \gamma_{k-1} \nabla f(x^{k-1})$

- Добавим к градиентному спуску моментумный член — предположим, что у точки, отвечающей за текущее положение значение x^k есть инерция.

Сравнение тяжелого шарика и градиентного спуска



Сравнение тяжелого шарика и градиентного спуска



Интерактивная иллюстрация доступна по ссылке.

Плюсы и минусы

Вопрос: какие плюсы и минусы видите у методы тяжелого шарика?

Плюсы и минусы

Вопрос: какие плюсы и минусы видите у методы тяжелого шарика?

Плюсы

- Понятная физика и интуиция.
- Легкость в имплантации.
- Дешевизна вычислений.

Минусы

- Нужно подбирать теперь 2 параметра. Мы сейчас умеем только в теории оценивать γ_k . Теперь что-то нужно делать с τ_k ... Типично τ_k берут близким к единице или устремляют к единице.
- Мы шли за ускорением градиентного спуска. А оно вообще есть в общем случае?

Плюсы и минусы

Вопрос: какие плюсы и минусы видите у методы тяжелого шарика?

Плюсы

- Понятная физика и интуиция.
- Легкость в имплантации.
- Дешевизна вычислений.

Минусы

- Нужно подбирать теперь 2 параметра. Мы сейчас умеем только в теории оценивать γ_k . Теперь что-то нужно делать с τ_k ... Типично τ_k берут близким к единице или устремляют к единице.
- Мы шли за ускорением градиентного спуска. А оно вообще есть в общем случае? Нет...

Ускоренный градиентный метод

- Ю.Е. Нестеров в 1983 году предложил ускоренный градиентный метод.

Алгоритм 3 Ускоренный градиентный метод

Вход: размер шагов $\{\gamma_k\}_{k=0} > 0$, моментумы $\{\tau_k\}_{k=0} \in [0; 1]$,
стартовая точка $x^0 = y^0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

```
1: for  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  do
2:   Вычислить  $\nabla f(y^k)$ 
3:    $x^{k+1} = y^k - \gamma_k \nabla f(y^k)$ 
4:    $y^{k+1} = x^{k+1} + \tau_k(x^{k+1} - x^k)$ 
5: end for
```

Выход: x^K

Ускоренный градиентный метод и тяжелый шарик

- **Вопрос:** В чем ключевое отличие метода Нестерова от тяжелого шарика?

Тяжелый шарик:

$$x^{k+1} = x^k - \gamma_k \nabla f(x^k) + \tau_k (x^k - x^{k-1})$$

Ускоренный градиентный метод:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= y^k - \gamma_k \nabla f(y^k) \\ y^{k+1} &= x^{k+1} + \tau_k (x^{k+1} - x^k) \\ g^k &= x^k + \tau_{k-1} (x^k - x^{k-1}) \end{aligned}$$

Ускоренный градиентный метод и тяжелый шарик

- **Вопрос:** В чем ключевое отличие метода Нестерова от тяжелого шарика?

Тяжелый шарик:

$$x^{k+1} = x^k - \gamma_k \nabla f(x^k) + \tau_k (x^k - x^{k-1})$$

Ускоренный градиентный метод:

$$x^{k+1} = y^k - \gamma_k \nabla f(y^k)$$

$$y^{k+1} = x^{k+1} + \tau_k (x^{k+1} - x^k)$$

- Перепишем ускоренный градиентный метод:

$$x^{k+1} = \underbrace{x^k + \tau_k (x^k - x^{k-1})}_{\text{экстраполяция}} - \gamma_k \nabla f(\underbrace{x^k + \tau_k (x^k - x^{k-1})}_{\text{«взгляд вперед»}}).$$

Моментум в точке подсчета градиента/«взгляд вперед»/экстраполяция

Ускоренный градиентный метод и тяжелый шарик

- Сходимость метода Нестерова доказана в пособии.
- Сейчас существуют модификации идеи Нестерова, которые также позволяют добиваться того же результата.

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f(x^k) - f(x^*)$$
$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} = \frac{\ln K}{K}$$

Алгоритм 4 Линейный каплинг: внутренний цикл

Вход: размер шагов $\{\gamma_k\}_{k=0} > 0$ и $\{\eta_k\}_{k=0} > 0$, моменты $\{\tau_k\}_{k=0} \in [0; 1]$, стартовая точка $x^0 = y^0 = z^0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \dots, K - 1$ **do**

2: Вычислить $\nabla f(x^k)$

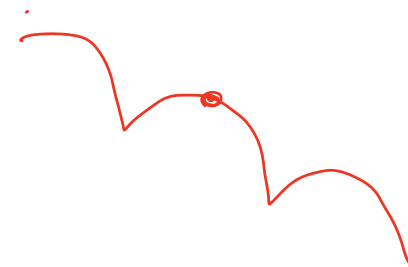
3: $y^{k+1} = x^k - \eta_k \nabla f(x^k)$ ← ordinary

4: $z^{k+1} = z^k - \gamma_k \nabla f(x^k)$ ← aggressive

5: $x^{k+1} = \tau_k z^{k+1} + (1 - \tau_k) y^{k+1}$

6: **end for**

Выход: $\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k$



Нам понадобится

- Сам метод (зафиксировали параметры):

Алгоритм 5 Линейный каплинг: внутренний цикл

Вход: размер шагов $\gamma > 0$ и $\eta > 0$, моментум $\tau \in [0; 1]$, стартовая точка $x^0 = y^0 = z^0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

```
1: for  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  do  
2:   Вычислить  $\nabla f(x^k)$   
3:    $y^{k+1} = x^k - \eta \nabla f(x^k)$   
4:    $z^{k+1} = z^k - \gamma \nabla f(x^k)$   
5:    $x^{k+1} = \tau z^{k+1} + (1 - \tau) y^{k+1}$   
6: end for
```

Выход: $\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k$

- А также выпуклость и гладкость:

$$\frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \leq f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq \frac{L}{2} \|x - y\|_2^2.$$

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - x^*\|^2 &= \|z^k - \gamma \nabla f(x^k) - x^*\|^2 \\
&= \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); z^k - x^* \rangle \\
&\quad + \gamma^2 \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); x^k - x^* \rangle \\
&\quad + \gamma^2 \|\nabla f(x^k)\|^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); z^k - x^k \rangle
\end{aligned}$$

$$\|\nabla f(x^k)\|^2 : L\text{-smoothness} + \gamma^{k+1} (\nabla f(x^k))$$

$$f(y^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k); y^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|y^{k+1} - x^k\|^2$$

$- \gamma \nabla f(x^k)$ ↗

$$f(y^{k+1}) \leq f(x^k) - \gamma \|\nabla f(x^k)\|^2 - \frac{\gamma^2 L}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2$$

$$f(y^{k+1}) \leq f(x^k) - \gamma \left(1 - \frac{\gamma L}{2}\right) \|\nabla f(x^k)\|^2$$

$$\|f(x^k)\|^2 \leq [f(x^k) - f(y^{k+1})] \cdot \frac{2}{\gamma(2 - \gamma L)} \quad \gamma \in (0; \frac{2}{L})$$

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); x^k - x^* \rangle \\
&\quad + \frac{2\gamma^2}{\gamma(2 - \gamma L)} [f(x^k) - f(y^{k+1})] - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); z^k - x^k \rangle
\end{aligned}$$

$$\|z^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); x^k - x^* \rangle + \frac{2\gamma^2}{\eta(2-\eta L)} [f(x^k) - f(y^{k+1})] - \frac{2\gamma(1-\tau)}{\tau} (f(x^k) - f(y^k))$$

$$\frac{2\gamma^2}{\eta(2-\eta L)} = \frac{2\gamma(1-\tau)}{\tau}$$

$$\frac{2\gamma}{\eta(2-\eta L)} = \frac{1-\tau}{\tau}$$

$$\leq \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k); x^k - x^* \rangle + \frac{2\gamma^2}{\eta(2-\eta L)} (f(y^k) - f(y^{k+1}))$$

$$2\gamma \langle \nabla f(x^k); x^k - x^* \rangle \leq \|z^k - x^*\|^2 - \|z^{k+1} - x^*\|^2 + \frac{2\gamma^2}{\eta(2-\eta L)} (f(y^k) - f(y^{k+1}))$$

$$\frac{1}{k} \sum_{k=0}^{k-1} 2\gamma \langle \nabla f(x^k); x^k - x^* \rangle \leq \|z^0 - x^*\|^2 / k + \frac{2\gamma^2}{k\eta(2-\eta L)} (f(y^0) - f(x^*))$$

$$\frac{1}{k} \sum 2\gamma (f(x^k) - f(x^*)) \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{k} + \frac{2\gamma^2}{k\eta(2-\eta L)} (f(x^0) - f(x^*))$$

$$2\gamma (f(\frac{1}{k} \sum x^k) - f(x^*))$$

Воспользуемся линией 4 Алгоритма 5:

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|z^k - \gamma \nabla f(x^k) - x^*\|_2^2 \\ &= \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), z^k - x^* \rangle + \gamma^2 \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\quad - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), z^k - x^k \rangle + \gamma^2 \|\nabla f(x^k)\|^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Воспользуемся линией 4 Алгоритма 5:

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|z^k - \gamma \nabla f(x^k) - x^*\|_2^2 \\ &= \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), z^k - x^* \rangle + \gamma^2 \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\quad - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), z^k - x^k \rangle + \gamma^2 \|\nabla f(x^k)\|^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Оценим $[-\langle \nabla f(x^k), z^k - x^k \rangle]$ и $\|\nabla f(x^k)\|^2$.

Доказательство

Начнем с $\|\nabla f(x^k)\|^2$. Для этого применим свойство гладкой.

$$f(y^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), y^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|y^{k+1} - x^k\|_2^2.$$

Доказательство

Начнем с $\|\nabla f(x^k)\|^2$. Для этого применим свойство гладкой.

$$f(y^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), y^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|y^{k+1} - x^k\|_2^2.$$

Подставим итерационный шаг для y^{k+1} (линия 3 Алгоритма 5):

$$\begin{aligned} f(y^{k+1}) &\leq f(x^k) - \eta \|\nabla f(x^k)\|_2^2 + \frac{L\eta^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|_2^2. \\ &= f(x^k) - \eta \left(1 - \frac{L\eta}{2}\right) \|\nabla f(x^k)\|_2^2. \end{aligned}$$

Доказательство

Начнем с $\|\nabla f(x^k)\|^2$. Для этого применим свойство гладкой.

$$f(y^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), y^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|y^{k+1} - x^k\|_2^2.$$

Подставим итерационный шаг для y^{k+1} (линия 3 Алгоритма 5):

$$\begin{aligned} f(y^{k+1}) &\leq f(x^k) - \eta \|\nabla f(x^k)\|_2^2 + \frac{L\eta^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|_2^2. \\ &= f(x^k) - \eta \left(1 - \frac{L\eta}{2}\right) \|\nabla f(x^k)\|_2^2. \end{aligned}$$

Выберем $\eta \in (0; \frac{2}{L})$, тогда

$$\|\nabla f(x^k)\|_2^2 \leq \frac{2}{\eta(2 - L\eta)} (f(x^k) - f(y^{k+1})). \quad (2)$$

Соединяем (1) и (2):

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(x^k) - f(y^{k+1})) \\ &\quad + 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - z^k \rangle.\end{aligned}\tag{3}$$

Соединяем (1) и (2):

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(x^k) - f(y^{k+1})) \\ &\quad + 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - z^k \rangle.\end{aligned}\tag{3}$$

Осталось $[-\langle \nabla f(x^k), z^k - x^k \rangle]$.

Воспользуемся линией 5 Алгоритма 5:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x^k), x^k - z^k \rangle &= \langle \nabla f(x^k), x^k - \frac{1}{\tau}(x^k - (1 - \tau)y^k) \rangle \\ &= \frac{1 - \tau}{\tau} \langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle.\end{aligned}$$

Воспользуемся линией 5 Алгоритма 5:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x^k), x^k - z^k \rangle &= \langle \nabla f(x^k), x^k - \frac{1}{\tau}(x^k - (1 - \tau)y^k) \rangle \\ &= \frac{1 - \tau}{\tau} \langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle.\end{aligned}$$

Далее пользуемся выпуклостью:

$$\langle \nabla f(x^k), x^k - z^k \rangle \leq \frac{1 - \tau}{\tau} (f(y^k) - f(x^k)). \quad (4)$$

Доказательство

Соединяем (3) и (4):

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(x^k) - f(y^{k+1})) \\ &\quad + 2\gamma \cdot \frac{1 - \tau}{\tau} (f(y^k) - f(x^k)).\end{aligned}$$

Подгоним параметры следующим образом $\frac{\gamma}{\eta(2 - L\eta)} = \frac{1 - \tau}{\tau}$:

$$\begin{aligned}\|z^{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|z^k - x^*\|_2^2 - 2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(y^k) - f(y^{k+1})).\end{aligned}$$

Переставляем:

$$2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \leq \|z^k - x^*\|_2^2 - \|z^{k+1} - x^*\|_2^2 \\ + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(y^k) - f(y^{k+1})).$$

Переставляем:

$$2\gamma \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle \leq \|z^k - x^*\|_2^2 - \|z^{k+1} - x^*\|_2^2 + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(y^k) - f(y^{k+1})).$$

Далее выпуклость:

$$2\gamma (f(x^k) - f(x^*)) \leq \|z^k - x^*\|_2^2 - \|z^{k+1} - x^*\|_2^2 + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)} (f(y^k) - f(y^{k+1})).$$


Доказательство

Суммируем по k и усредняем:

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (f(x^k) - f(x^*)) &\leq \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\|z^k - x^*\|_2^2 - \|z^{k+1} - x^*\|_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)K} \sum_{k=0}^{K-1} (f(y^k) - f(y^{k+1})) \\ &= \frac{1}{K} \left(\|z^0 - x^*\|_2^2 - \|z^K - x^*\|_2^2 \right) \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{\eta(2 - L\eta)K} (f(y^0) - f(y^K)) \\ &\leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{K} + \frac{2\gamma^2(f(y^0) - f(x^*))}{\eta(2 - L\eta)K}. \end{aligned}$$

Доказательство

Подставим начальные условия: $x^0 = y^0 = z^0$ и применим неравенство Йенсена:

$$2\gamma \left[f \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k \right) - f(x^*) \right] \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{K} + \frac{2\gamma^2(f(x^0) - f(x^*))}{\eta(2 - L\eta)K}.$$


Доказательство

Подставим начальные условия: $x^0 = y^0 = z^0$ и применим неравенство Йенсена:

$$2\gamma \left[f \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k \right) - f(x^*) \right] \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{K} + \frac{2\gamma^2(f(x^0) - f(x^*))}{\eta(2 - L\eta)K}.$$

Далее μ -сильная выпуклость

$$\frac{\mu}{2} \|x^0 - x^*\|^2 \leq f(x^0) - f(x^*)$$

$$\begin{aligned} f \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k \right) - f(x^*) &\leq \frac{f(x^0) - f(x^*)}{2\mu\gamma K} + \frac{\gamma(f(x^0) - f(x^*))}{\eta(2 - L\eta)K} \\ &= \left(\frac{1}{2\mu\gamma K} + \frac{\gamma}{\eta(2 - L\eta)K} \right) (f(x^0) - f(x^*)). \end{aligned}$$

Оптимизируем оценку с помощью выбора $\eta = \frac{1}{L}$:

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \left(\frac{1}{2\mu\gamma K} + \frac{\gamma L}{K}\right) (f(x^0) - f(x^*)).$$

Доказательство

Оптимизируем оценку с помощью выбора $\eta = \frac{1}{L}$:

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \left(\frac{1}{2\mu\gamma K} + \frac{\gamma L}{K}\right) (f(x^0) - f(x^*)).$$

И еще раз $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\mu L}}$:

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \sqrt{\frac{2L}{\mu K^2}} (f(x^0) - f(x^*)).$$

\uparrow
 $1/2$

Доказательство

А теперь $K = \sqrt{\frac{8L}{\mu}}$

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}(f(x^0) - f(x^*)).$$

Доказательство

А теперь $K = \sqrt{\frac{8L}{\mu}}$

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}(f(x^0) - f(x^*)).$$

Вопрос: а зачем?

Доказательство

А теперь $K = \sqrt{\frac{8L}{\mu}}$

$$f\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k\right) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}(f(x^0) - f(x^*)).$$

Вопрос: а зачем? за K итераций мы гарантированно «приблизились к решению» в 2 раза. Тогда пусть это одна итерация нашего нового внешнего алгоритма. Т.е. мы запускаем линейный каплинг на K итераций, а потому перезапускаем с новой стартовой точкой $\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x^k$, взятой из прошлого запуска каплинга. Это называется рестарты.

Доказательство

Тогда, если сделать T рестартов:

$$f(x^T) - f(x^*) \leq \frac{1}{2^T} (f(x^0) - f(x^*)).$$

Откуда можно сразу же получить оракульную сложность:

$$f(x^T) - f(x^*) \leq \frac{1}{2^T} (f(x^0) - f(x^*)) \leq \varepsilon.$$

$$T \geq \log_2 \left(\frac{f(x^0) - f(x^*)}{\varepsilon} \right)$$

$$K \cdot T = O \left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log_2 \frac{f(x^0) - f(x^*)}{\varepsilon} \right) \text{ вызовов оракула.}$$

Сходимость линейного каплинга

О сходимости линейного каплинга

Пусть задача безусловной оптимизации с L -гладкой, μ -сильно выпуклой целевой функцией f решается с помощью реставрированного линейного каплинга. Тогда при $\eta = \frac{1}{L}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\mu L}}$ и $K = \sqrt{\frac{8L}{\mu}}$, чтобы добиться точности ε по функции $(f(x) - f(x^*) \leq \varepsilon)$, необходимо

$$O \left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{f(x^0) - f(x^*)}{\varepsilon} \right) \overset{1-\tau}{\tau} = \dots \text{ вызовов оракула.}$$

Вопросы остаются

- Метод лучше градиентного спуска.
- Но можно ли еще лучше?
- **Вопрос:** как понять, можно ли лучше?

Вопросы остаются

- Метод лучше градиентного спуска.
- Но можно ли еще лучше?
- **Вопрос:** как понять, можно ли лучше? получить нижние оценки.

Вопросы остаются

- Метод лучше градиентного спуска.
- Но можно ли еще лучше?
- **Вопрос:** как понять, можно ли лучше? получить нижние оценки.
- Для получения нижних оценок нужно придумать не метод, а «плохую» функцию, которую будет «долго» оптимизировать любой метод. **Вопрос:** а что здесь значит «любой метод»?

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .
- $M_{k+1} = \text{span}\{x', \nabla f(x'')\}$ (линейная оболочка), где $x', x'' \in M_k$.

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .
- $M_{k+1} = \text{span}\{x', \nabla f(x'')\}$ (линейная оболочка), где $x', x'' \in M_k$.
- После K вызовов оракула выход метода есть некоторая точка из M_K .

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .
- $M_{k+1} = \text{span}\{x', \nabla f(x'')\}$ (линейная оболочка), где $x', x'' \in M_k$.
- После K вызовов оракула выход метода есть некоторая точка из M_K .

Вопрос: подходят ли изученные методы, под такое определение?

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .
- $M_{k+1} = \text{span}\{x', \nabla f(x'')\}$ (линейная оболочка), где $x', x'' \in M_k$.
- После K вызовов оракула выход метода есть некоторая точка из M_K .

Вопрос: подходят ли изученные методы, под такое определение? да, градиентный спуск, метод тяжелого шарика, линейный каплинг и ускоренный градиентный метод.

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .
- $M_{k+1} = \text{span}\{x', \nabla f(x'')\}$ (линейная оболочка), где $x', x'' \in M_k$.
- После K вызовов оракула выход метода есть некоторая точка из M_K .

Вопрос: подходят ли изученные методы, под такое определение? да, градиентный спуск, метод тяжелого шарика, линейный каплинг и ускоренный градиентный метод.

Вопрос: все ли методы, которые считают градиент здесь учтены?

Класс алгоритмов

- Дана начальная точка x^0 . Эта начальная точка порождает некоторое множество M_0 – множество всех достигнутых на данный момент точек (на данном шаге k). $M_0 = \{x^0\}$.
- На текущем оракульном вызове метод может считать градиент функции в точке x^k : $\nabla f(x^k)$, где $x^k \in M_k$, то есть метод может посчитать градиент во всех точках, которые уже достиг. Изначально можем посчитать градиент только в x^0 .
- $M_{k+1} = \text{span}\{x', \nabla f(x'')\}$ (линейная оболочка), где $x', x'' \in M_k$.
- После K вызовов оракула выход метода есть некоторая точка из M_K .

Вопрос: подходят ли изученные методы, под такое определение? да, градиентный спуск, метод тяжелого шарика, линейный каплинг и ускоренный градиентный метод.

Вопрос: все ли методы, которые считают градиент здесь учтены? нет, но это вопрос уже не сегодняшней лекции.

«Плохая» функция

Квадратичная (ее достаточно) функция:

$$f(x) = \frac{L - \mu}{8} x^T A x + \frac{\mu}{2} x^T x - \frac{L - \mu}{4} e_1^T x,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & \zeta \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ζ определим позже.

«Плохая» функция

Квадратичная (ее достаточно) функция:

$$f(x) = \frac{L-\mu}{8} x^T A x + \frac{\mu}{2} x^T x - \frac{L-\mu}{4} e_1^T x,$$

где

$$d \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & \zeta \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \preceq A \preceq 4I \\ 0 \preceq 4I - A \end{matrix}$$

ζ определим позже.

Функция L -гладкая и μ -сильно выпуклая (задача из домашнего задания).

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \frac{L-\mu}{4} Ax + \mu x - \frac{L-\mu}{4} e_1$$

$$1) \nabla f(x^0) \sim e_1$$

$\text{span}\{x^0; \nabla f(x^0)\}$ - монотонно 1 $\neq 0$ вектор (вектор)

$$2) \nabla f(x^1) \quad x^1 \in \text{span}\{e_1\}$$

$$\sim e_1, e_2$$

$\text{span}\{x^1, \nabla f(x^1)\}$ - монотонно 2 независимых вектора

k базис $u_k = k \neq 0$ вектор.

$$x^* \quad \nabla f(x^*) = 0$$

$$\frac{L-\mu}{4} (2x_1^* - x_2^*) + \mu x_1^* - \frac{L-\mu}{4} 1 = 0$$

$$\frac{L-\mu}{4} (-x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^*) + \mu x_i^* = 0$$

$$x_{i+1} = 2x_i + \beta x_{i-1}$$

$$\lambda^2 = 2\lambda + \beta$$

$$x_i = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i$$

«Плохая» функция: решение

Вопрос: что можем сказать про решение?

«Плохая» функция: решение

Вопрос: что можем сказать про решение? Сильная выпуклая задача — единственное решение.

«Плохая» функция: решение

Вопрос: что можем сказать про решение? Сильная выпуклая задача — единственное решение.

Вопрос: как найти?

«Плохая» функция: решение

Вопрос: что можем сказать про решение? Сильная выпуклая задача — единственное решение.

Вопрос: как найти? Условие оптимальности:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

или

$$Ax^* + \frac{4\mu}{L - \mu}x^* - e_1 = 0$$

«Плохая» функция: решение

Вопрос: что можем сказать про решение? Сильная выпуклая задача — единственное решение.

Вопрос: как найти? Условие оптимальности:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

или

$$Ax^* + \frac{4\mu}{L - \mu}x^* - e_1 = 0$$

Распишем покомпонентно. Первая компонента:

$$2x_1^* - x_2^* + \frac{4\mu}{L - \mu}x_1^* - 1 = 0 \text{ или } \frac{2(L + \mu)}{L - \mu} \cdot x^{(1)} - x^{(2)} = 1$$

«Плохая» функция: решение

Вопрос: что можем сказать про решение? Сильная выпуклая задача — единственное решение.

Вопрос: как найти? Условие оптимальности:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

или

$$Ax^* + \frac{4\mu}{L - \mu}x^* - e_1 = 0$$

Распишем покомпонентно. Первая компонента:

$$2x_1^* - x_2^* + \frac{4\mu}{L - \mu}x_1^* - 1 = 0 \text{ или } \frac{2(L + \mu)}{L - \mu} \cdot x^{(1)} - x^{(2)} = 1$$

Все координаты (кроме первой и последней):

$$-x_{k-1}^* + \frac{2(L + \mu)}{L - \mu}x_k^* - x_{k+1}^* = 0$$

«Плохая» функция: решение

Последняя координата:

$$-x_{d-1}^* + \zeta x_d^* + \frac{4\mu}{L-\mu} x_d^* = 0 \text{ или } -x_{d-1}^* + \left(\zeta + \frac{4\mu}{L-\mu} \right) x_d^* = 0$$

«Плохая» функция: решение

Последняя координата:

$$\underline{-x_{d-1}^* + \zeta x_d^* + \frac{4\mu}{L-\mu} x_d^* = 0} \quad \text{или} \quad \underline{-x_{d-1}^* + \left(\zeta + \frac{4\mu}{L-\mu}\right) x_d^* = 0}$$

Можно заметить, что все уравнения (кроме 1го и последнего) просто линейная рекуррента. Решение будет следующим, если правильно подобрать ζ :

$$x_k^* = q^k,$$

x^k

$$q = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}$$

«Плохая» функция: продвижение к решению

Более того, возьмём стартовую точку $x^0 = (0 \dots 0)^T$.

«Плохая» функция: продвижение к решению

Более того, возьмём стартовую точку $x^0 = (0 \dots 0)^T$.

Градиент:

$$\nabla f(x) = \frac{L - \mu}{4} Ax + \mu x - \frac{L - \mu}{4} e_1$$

«Плохая» функция: продвижение к решению

Более того, возьмём стартовую точку $x^0 = (0 \dots 0)^T$.

Градиент:

$$\nabla f(x) = \frac{L - \mu}{4} Ax + \mu x - \frac{L - \mu}{4} e_1$$

Заметим, что $\nabla f(x^0) \in \text{span}(e_1)$,

«Плохая» функция: продвижение к решению

Более того, возьмём стартовую точку $x^0 = (0 \dots 0)^T$.

Градиент:

$$\nabla f(x) = \frac{L - \mu}{4} Ax + \mu x - \frac{L - \mu}{4} e_1$$

Заметим, что $\nabla f(x^0) \in \text{span}(e_1)$, поэтому получается, что за первый оракульный вызов только первая координата выхода метода может быть ненулевой

«Плохая» функция: продвижение к решению

Более того, возьмём стартовую точку $x^0 = (0 \dots 0)^T$.

Градиент:

$$\nabla f(x) = \frac{L - \mu}{4} Ax + \mu x - \frac{L - \mu}{4} e_1$$

Заметим, что $\nabla f(x^0) \in \text{span}(e_1)$, поэтому получается, что за первый оракульный вызов только первая координата выхода метода может быть ненулевой

После второго вызова оракула: $\nabla f(x^1) \in \text{span}(e_1, e_2)$, $x^1 \in M_1$, то есть за 2 оракульных вызова максимум 2 первых координаты могут быть ненулевыми.

«Плохая» функция: продвижение к решению

Более того, возьмём стартовую точку $x^0 = (0 \dots 0)^T$.

Градиент:

$$\nabla f(x) = \frac{L - \mu}{4} Ax + \mu x - \frac{L - \mu}{4} e_1$$

Заметим, что $\nabla f(x^0) \in \text{span}(e_1)$, поэтому получается, что за первый оракульный вызов только первая координата выхода метода может быть ненулевой

После второго вызова оракула: $\nabla f(x^1) \in \text{span}(e_1, e_2)$, $x^1 \in M_1$, то есть за 2 оракульных вызова максимум 2 первых координаты могут быть ненулевыми.

После K оракульных вызовов только первые K координат могут быть ненулевыми, остальные точно нулевые.

«Плохая» функция: гарантии

Возьмем $d = 2K$, где K - кол-во вызовов оракула. **Вопрос:** зачем?

$$\int_a^b \langle \nabla f(\vec{r}(t)), d\vec{r}(t) \rangle = f(r(b)) - f(r(a))$$

$$a=0 \quad b=1$$

$$r(\tau) \stackrel{!}{=}$$

$$\dot{x} + \tau(y \neq x)$$

$$\tau \text{ or } 4 \text{ or } 1$$

«Плохая» функция: гарантии

Возьмем $d = 2K$, где K - кол-во вызовов оракула. **Вопрос:** зачем?
Изначальное расстояние до решения:

$$\|x^0 - x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^{2K} q^{2i} = (1 + q^{2K}) \sum_{i=1}^K q^{2i}$$

$$\log \left(\text{poly}(L, \mu, \varepsilon, \|x^0 - x^*\|, f(x^0) - f(x^*)) \right)$$
$$\log \left(\exp \frac{L}{\mu} \right)$$

«Плохая» функция: гарантии

Возьмем $d = 2K$, где K - кол-во вызовов оракула. **Вопрос:** зачем?
Изначальное расстояние до решения:

$$\|x^0 - x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^{2K} q^{2i} = (1 + q^{2K}) \sum_{i=1}^K q^{2i}$$

После K вызовов оракула итоговый вывод можно оценить так (только первые K координат ненулевые):

$$\begin{aligned} \|x^K - x^*\|_2^2 &\geq \sum_{i=K+1}^{2K} q^{2i} = q^{2K} \sum_{i=1}^K q^{2i} = \frac{q^{2K}}{1 + q^{2K}} \|x^0 - x^*\|_2^2 \\ &\geq \frac{q^{2K}}{2} \|x^0 - x^*\|_2^2 = \left(1 - \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}\right)^{2K} \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2} \\ &\leq \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^K \end{aligned}$$

Нижняя оценка на оракульную сложность

Нижняя оценка на оракульную сложность

Для любого метода из класса, описанного выше, существует безусловная задача оптимизации с L -гладкой, μ -сильно выпуклой целевой функцией f такая, что для решения этой задачи методу необходимо

$$\Omega \left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{\|x^0 - x^*\|_2}{\epsilon} \right) \text{ вызовов оракула.}$$

$$\frac{1}{\epsilon} \quad \frac{1}{\epsilon} \ln \epsilon$$

Нижняя оценка на оракульную сложность

Нижняя оценка на оракульную сложность

Для любого метода из класса, описанного выше, существует безусловная задача оптимизации с L -гладкой, μ -сильно выпуклой целевой функцией f такая, что для решения этой задачи методу необходимо

$$\Omega \left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{\|x^0 - x^*\|_2}{\varepsilon} \right) \text{ вызовов оракула.}$$

- Линейный каплинг является оптимальным методом с точки зрения оракульных вызовов для L -гладких и μ -сильно выпуклых задач.

Нижняя оценка на оракульную сложность

Нижняя оценка на оракульную сложность

Для любого метода из класса, описанного выше, существует безусловная задача оптимизации с L -гладкой, μ -сильно выпуклой целевой функцией f такая, что для решения этой задачи методу необходимо

$$\Omega \left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{\|x^0 - x^*\|_2}{\varepsilon} \right) \text{ вызовов оракула.}$$

- Линейный градиент является оптимальным методом с точки зрения оракульных вызовов для L -гладких и μ -сильно выпуклых задач.
- Для L -гладких и выпуклых задач тоже.

Нижняя оценка на оракульную сложность

Нижняя оценка на оракульную сложность

Для любого метода из класса, описанного выше, существует безусловная задача оптимизации с L -гладкой, μ -сильно выпуклой целевой функцией f такая, что для решения этой задачи методу необходимо

$$\Omega \left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{\|x^0 - x^*\|_2}{\varepsilon} \right) \text{ вызовов оракула.}$$

- Линейный каплинг является оптимальным методом с точки зрения оракульных вызовов для L -гладких и μ -сильно выпуклых задач.
- Для L -гладких и выпуклых задач тоже.
- Для ускоренного градиентного метода результаты такие же.