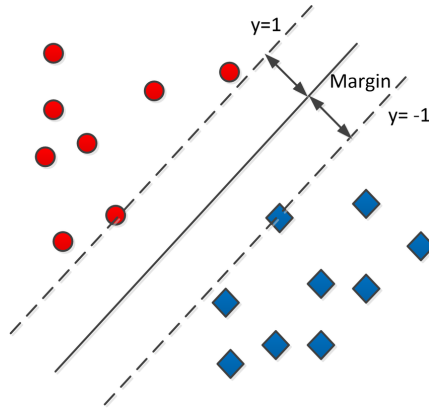


ККТ.

Основная часть

Задача 1. (5 баллов) Рассмотрим задачу о разделении двух подмножеств \mathbb{R}^d гиперплоскостью. Считаем, что даны точки $x_i \in \mathbb{R}^d$ и метки класса $y_i \in \{-1, 1\}$. Мы хотим построить линейную модель с параметрами θ, θ_0 , для которой

$$x_i^\top \theta + \theta_0 > 0 \iff y_i > 0$$



Заметим, что наши классы могут быть линейно разделены с помощью разных гиперплоскостей. Чтобы получить "наилучшую" разделяющую гиперплоскость, потребуем более сильное условие

$$y_i(x_i^\top \theta + \theta_0) \geq 1$$

которое означает, чтобы наша линейная модель не просто верно предсказывает знак, но и имеет некоторую степень робастности, т.е. устойчивости к незначительным изменениям признаков. Но проблема с несколькими плоскостями все еще остается – для любой разделяющей прямой можно раздуть ее коэффициенты, чтобы новое условие выполнялось. Поэтому будем минимизировать ℓ_2 норму параметра θ :

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \theta_0} \quad & \frac{1}{2} \|\theta\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i(x_i^\top \theta + \theta_0) \geq 1 \end{aligned}$$

Полученная задача подходит для данных, которые полностью линейно отделимы. Теперь перейдем к более общему случаю, для этого ослабим условия, добавив штраф с некоторой константой ρ :

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \theta_0, \xi} \quad & \frac{1}{2} \|\theta\|_2^2 + \rho \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & \xi_i \geq 0, y_i(x_i^\top \theta + \theta_0) \geq 1 - \xi_i \end{aligned}$$

Выпишите условия ККТ для этой задачи. Выразите параметр θ через оптимальное решение двойственной задачи. Покажите, что оптимальное решение не изменится, если оставить только точки x_i , для которых $y_i(x_i^\top \theta + \theta_0) = 1 - \xi_i$ (*опорные векторы*).

Задача 2. (5 баллов) Пусть f – сильно выпуклая дифференцируемая на \mathbb{R}^n функция, матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ такова, что все ее миноры имеют полный ранг (например, это происходит с вероятностью 1, если элементы матрицы как случайные величины имеют совместную плотность).

Докажите, что задача с ℓ_1 регуляризацией

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f(Ax) + \|x\|_1 \right]$$

имеет единственное решение, при чем среди его компонент не более $\min(n, d)$ ненулевых.

ККТ.

Дополнительная часть

Задача 1. (10 баллов) Для задачи

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} & \left[\text{tr} X - \log \det X \right] \\ \text{s.t. } & Xs = y, \end{aligned}$$

где $\langle s, y \rangle = 1$, с помощью теоремы о достаточности условий ККТ докажите, что решение задачи единственно и записывается в виде

$$X^* = I + yy^\top - \frac{ss^\top}{s^\top s}.$$