Контрольная работа. Демо вариант

1. **(Матрично-векторное дифференцирование)**

   Найдите градиент:

   $$f(x) = \left\| x^\top B \cdot \left\| b^\top x \right\|_2^2 \cdot Ax \right\|_F^2,$$

   где $b, x \in \mathbb{R}^d$ и $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

2. **(Выпуклость множеств)**

   Проверьте множество S на выпуклость:

   $$S = \{X \in \mathbb{S}^{d \times d} \mid X \succ 0,\ \mathrm{tr}(X^{-1}) \leq 1\}.$$

3. **(Выпуклость функций)**

   Докажите, что функция $f(x)$ строго выпуклая:

   $$f(x) = -\sum_{i=1}^{d} \log(x_i),$$

   где $x \in \mathbb{R}^d_{++}$.

4. **(Субградиент)**

   Найдите субградиент функции f, заданной в целых числах по формуле:

   $$f(k) = \begin{cases} -\frac{1}{|k|}, & k \not\vdots\, 2, \\ 0, & k \vdots\, 2 \end{cases}$$

   и продолженной в остальных точках до кусочно-линейной.

5. **(Сопряженные множества)**

   Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq 3\}$, а $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - \mathbf{1}\|_1 \leq 2\}$, где $\mathbf{1}$ – вектор единиц размера d. Найдите сопряженные к A и B, а так же найдите их пересечение и объединение.

6. **(Сопряженные функции)**

   Найдите сопряженную функцию для функции (в зависимости от p):

   $$f(x) = |x|^p,\ p \leq 1,$$

   где $x \in \mathbb{R}$.

7. **(Двойственность)**

   Составьте двойственную задачу:

   $$\min_{X \in \mathbb{S}^d_{++}} \log \det X^{-1}$$
   $$\text{s.t. } a_i^\top X a_i \leq 1,\ i \in \overline{1, m},$$

   где $a_i \in \mathbb{R}^d$.

8. **(KKT)**

   Примените условия KKT для поиска всех решений следующей задачи:

   $$\min_{x \in \mathbb{R}^2} e^{x_1 - x_2}$$
   $$\text{s.t. } e^{x_1} + e^{x_2} \leq 20,$$
   $$x_1 \geq 0.$$

   Можно ли вы показать, что эти точки являются локальными решениями? Глобальными решениями?

9. **(Нахождение констант гладкости и/или сильной выпуклости)**

   Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, производная которой является липшицевой с параметром $L > 0$. Пусть $a, x \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$, и пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := g(\langle a, x\rangle + b)$. Покажите, что градиент функции f является липшицевым с параметром $L\|a\|^2$.

10. **(Градиентный спуск)**

    Напишите как будет выглядеть метод градиентного спуска для задачи безусловной минимизации функции:

$$f(x, y) = 6x^2 - 4\sqrt{13}xy + 26y^2.$$

11. **(Метод Ньютона)**

    Найдите итерацию метода Ньютона функции Розенброка (функции узкой долины), найдите её минимум и значение в нём:

$$\min_{x,y\in\mathbb{R}} (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2,$$

12. **(Метод Франк-Вульфа)**

    Выпишите для этой задачи k-ую итерацию метода Франк-Вульфа в явном виде:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^d} \|Ax + b\|_2^2 \\ &\text{s.t. } \sum_{i=1}^{d} x_i = R, \\ &\qquad x_i \geq 0, \ i \in \overline{1, d}, \end{aligned}$$

    где $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$ и $b \in \mathbb{R}^n$.

    Подсказка: $\gamma_k = \frac{2}{k+2}$.