Контрольная работа. Тестовый вариант

Суммарный первичный балл за контрольную 16. Финальный балл получается делением набранного первичного балла на 4 (максимально можно набрать 4 балла – не округляется до 3, т.е. можно набрать больше). Задачи первой части стоят 1 первичный балл. Задачи второй части стоят 2 балла.

В тестовом варианте контрольной задач больше, чем будет на контрольной. В контрольной будет 8 задач в первой части и 4 задачи во второй.

0. Фамилия имя и номер группы (официальной).

1.1. Пусть $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Найдите градиент функции $f(x) = \log\left(1 + \|Ax - b\|_2^2\right)$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ и $b \in \mathbb{R}^n$.

1.2. Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклое множество. Верно ли, что в таком случае следующее множество

$$\mathcal{Y} = \left\{x \in \mathcal{X} \mid |x_i| \leq 1, i = \overline{1, d}\right\}$$

тоже выпуклое?

1.3. Пусть $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Верно ли, что функция $f(x) = \exp\left[\|Ax\|_2^2\right]$ является выпуклой, где $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$?

1.4. Пусть $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Вычислить сопряжённую по Фенхелю функцию f^*.

1.5. Выпишите двойственную задачу для задачи:

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{R}^{n \times m}} \ & \langle C, X\rangle \\ \text{s.t. } & AX \leq B, \end{aligned}$$

где $C \in \mathbb{R}^{n \times m}, A \in \mathbb{R}^{k \times n}, B \in \mathbb{R}^{k \times m}$.

1.6. Выпишите условия ККТ для следующей задачи:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^3} \ & -5x_1^2 + x_2^2 + x_3 \\ \text{s.t. } & x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4, \\ & -1 \leq x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

1.7. Пусть дана следующая задача оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} \left[x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 1000x_4^2\right].$$

Выпишите для этой задачи итерации следующих методов: градиентный спуск с постоянным шагом, метод Ньютона. Какие есть ограничения на параметры данных методов? Какие гарантии сходимости можно дать для каждого из методов, если стартовая точка $x^0 = (1, 1, 1, 1)^T$.

1.8. Пусть одна итерация метода имеет вид $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$. Найдите явный вид для шага вида $\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x + \alpha d_k)$, если функция $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = \|Ax + b\|_2^2$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

1.9. Найдите шаг метода проекции градиента в явном виде для задачи $\min_{x \in \mathbb{R}^d} \{f(x) \mid \|x\|_2 \leq 1\}$.

1.10. Пусть с помощью некоторого итеративного метода решается задача выпуклой безусловной оптимизации и можно гарантировать, что для некоторой $C > 0$ и для любого $k \geq 1$ выполнено $f(x^k) - f^* \leq \frac{C}{k^2}$. Покажите, что тогда верно и следующее: для некоторой $\tilde{C} > 0$ и для любого $k \geq 1$ выполнено $f(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k x^i) - f^* \leq \frac{\tilde{C}}{k^2}$.

2.1. Пусть $f : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ такая, что $f(X) = \text{trace}\left((BX^2 + A)(X + C)^\top\right)$, где $A, B, C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Найдите $df(X)[dX]$ и $d^2 f(X)[dX, dX]$.

2.2. Пусть $\mathcal{X} \subseteq \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_{++}\right\}$ – выпуклое множество. Покажите, что множество $\mathcal{Y} = \left\{ \frac{x}{t} \;\middle|\; (x,t) \in \mathcal{X} \right\}$ – тоже выпуклое.

2.3. Найдите сопряженную функцию для $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такой, что $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_p^2$, где $\|\cdot\|_p$ – p-норма в $\mathbb{R}^d$ и $p \in (1; \infty)$, т.е. $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$.

2.4. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\min_{X \in \mathcal{S}_{++}^d} \ \text{trace}(X) - \log \det X$$
$$\text{s.t. } Xs = y,$$

где $s \in \mathbb{R}^d$ и $y \in \mathbb{R}^d$ фиксированные векторы.

1. Выпишите условия ККТ для данной задачи.
2. Найдите X^*, если известно, что $s^T y = 1$.

2.5. Пусть X и Y – конечномерные нормированные вещественные векторные пространства, $f : X \to Y$ – всюду дифференцируемое отображение. Покажите эквивалентность следующих утверждений:

1. Отображение f – *липшицево* с константой $L > 0$, то есть, для любых $x, y \in X$ выполнено:
$$\|f(y) - f(x)\| \le L\|y - x\|;$$
2. Производная Df всюду ограничена: $\|Df(x)\|_{\text{op}} \le L$ для любого $x \in X$, где $\|\cdot\|_{\text{op}}$ – операторная норма.

2.6. На лекции было дано две версии метода сопряженных градиентов. Докажите их эквивалентность для квадратичной задачи/системы линейных уравнений с положительно определенной матрицей.

Algorithm 1 Метод сопряженных градиентов

Require: стартовая точка $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $r_0 = Ax_0 - b$, $p_0 = -r_0$ количество итераций K
for $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  $\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$
  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p_k$
  $r_{k+1} = Ax^{k+1} - b$
  $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$
  $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$
end for
Ensure: x^K

Algorithm 2 Метод сопряженных градиентов (классическая версия)

Require: стартовая точка $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $r_0 = Ax_0 - b$, $p_0 = -r_0$ количество итераций K
for $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$
  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p_k$
  $r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$
  $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$
  $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$
end for
Ensure: x^K