Двойственная задача

$$\min_x f_0(x)$$
$$\text{s.t. } f_i(x) \le 0$$
$$h_j(x) = 0$$

<u>Опр</u> Лагранжиан

$$L(x,\lambda,\vartheta) = f_0(x) + \overbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j h_j(x)}$$

<u>Опр</u> Двойственная функция

$$g(\lambda,\vartheta) = \inf_x L(x,\lambda,\vartheta)$$

<u>Утв</u> Двойственная функция всегда является вогнутой по λ и ϑ.

<u>Доказательство</u>

$$g(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2, \alpha\vartheta^1 + (1-\alpha)\vartheta^2) =$$
$$= \inf_x \Big(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} (\alpha\lambda^1_i + (1-\alpha)\lambda^2_i) f_i(x) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (\alpha\vartheta^1_j + (1-\alpha)\vartheta^2_j) h_j(x)\Big) =$$
$$= \inf_x \left(\alpha L(x,\lambda^1,\vartheta^1) + (1-\alpha) L(x,\lambda^2,\vartheta^2)\right) \ge$$
$$\ge \alpha \underbrace{\inf_x L(x,\lambda^1,\vartheta^1)}_{g(\lambda^1,\vartheta^1)} + (1-\alpha) \underbrace{\inf_x L(x,\lambda^2,\vartheta^2)}_{g(\lambda^2,\vartheta^2)}$$

<u>Утверждение</u>

p^* – оптимальное значение исходной задачи тогда $g(\lambda, \vartheta) \le p^*$ ←

Доказательство

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j h_j(\bar{x}) \le 0, \quad \bar{x} - \text{достижимая точка}$$

$$L(\bar{x}, \lambda, \vartheta) \le f_0(\bar{x})$$

$$g(\lambda, \vartheta) = \inf_x L(x, \lambda, \vartheta) \le L(\bar{x}, \lambda, \vartheta) \le f_0(\bar{x})$$

Двойственная задача

$$\max_{\lambda, \vartheta} g(\lambda, \vartheta)$$
$$\text{s.t } \lambda \succeq 0$$

Примеры

1) $$\min_x x^T x$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$L(x, \vartheta) = \langle x, x \rangle + \langle \vartheta, Ax - b \rangle$$

$$\nabla_x L(x, \vartheta) = 2x + A^T\vartheta = 0 \Rightarrow x^* = -\frac{1}{2} A^T \vartheta$$

$$g(\vartheta) = \underbrace{\frac{1}{4} \langle A^T\vartheta, A^T\vartheta \rangle}_{} - \underbrace{\langle \vartheta, \frac{1}{2} A A^T \vartheta - b \rangle}_{} =$$

$$= -\frac{1}{4} \vartheta^T A A^T \vartheta - \vartheta^T b$$

$$\max_{\vartheta} -\frac{1}{4} \vartheta^T A A^T \vartheta - \vartheta^T b$$

Пример

$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$
$$x \succeq 0 \sim x_i \ge 0 \sim -x_i \le 0$$

$$L(x,\lambda,\vartheta)=c^Tx-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\vartheta^T(Ax-b)=$$

$$=-\vartheta^Tb+(c+A^T\vartheta-\lambda)^Tx$$

$$g(\lambda,\vartheta)=\inf_x L(x,\lambda,\vartheta)=-\vartheta^Tb+\overbrace{\inf_x(c+A^T\vartheta-\lambda)^Tx}$$

$$g(\lambda,\vartheta)=\begin{cases}-\vartheta^Tb, & c+A^T\vartheta-\lambda=0\\ -\infty, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\max_{\vartheta,\lambda}\ -\vartheta^Tb$$
$$\text{s.t. } c+A^T\vartheta-\lambda=0$$
$$\lambda\succeq 0$$

<u>Пример</u>

$$\min_x\ x^TWx$$
$$\text{s.t. } x_i^2=1,\quad W\in S^d$$

$$L(x,\vartheta)=x^TWx+\sum_{i=1}^{d}\vartheta_i(x_i^2-1)=$$

$$=x^T(\underbrace{W+\mathrm{diag}(\vartheta)}_{\succeq 0})x-1^T\vartheta$$

$$g(\vartheta)=\begin{cases}-1^T\vartheta, & W+\mathrm{diag}(\vartheta)\succeq 0\\ -\infty, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\max_{\vartheta}\ -1^T\vartheta$$
$$\text{s.t. } W+\mathrm{diag}(\vartheta)\succeq 0$$

Связь сопряжённых и двойственных функций

$$f^*(y) = \sup_x (\langle y, x \rangle - f(x))$$

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{s.t. } x = 0 \end{cases}$$

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu^T x$$

$$g(\nu) = \inf_x (f(x) + \nu^T x) = -\sup_x (-\nu^T x - f(x)) =$$

$$= -f^*(-\nu)$$

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{s.t. } Ax \le b \\ \quad\ \ Cx = d \end{cases}$$

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \lambda^T (Ax - b) + \nu^T (Cx - d)$$

$$g(\lambda, \nu) = \inf_x (f(x) + \lambda^T (Ax - b) + \nu^T (Cx - d)) =$$

$$= -\lambda^T b - \nu^T d + \inf_x (f(x) + (A^T \lambda + C^T \nu)^T x) =$$

$$= -\lambda^T b - \nu^T d - f^*(-A^T \lambda - C^T \nu)$$

Пример

$$\min \|x\|$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$f^*(y) = \begin{cases} 0, & \|y\|_* \le 1 \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$g(\nu) = -\nu^T b - f^*(-A^T \nu) =$$

$$= \begin{cases} -\nu^T b, & \|A^T \nu\|_* \le 1 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\max_{\vartheta} -\vartheta^T b$$
$$\text{s.t. } \|A^T\vartheta\|_* \le 1$$

Пример

$$\min_x \sum_{i=1}^d x_i \log x_i$$
$$\text{s.t. } Ax \preceq b$$
$$1^T x = 1$$

$$f^*(y) = \sup_{x_i} \sum_{i=1}^d (y_i x_i - x_i \log x_i)$$

$$\sup_{x_i}(y_i x_i - x_i \log x_i) \Rightarrow y_i = \log x_i + 1 \rightarrow x_i = e^{y_i - 1}$$

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^d \left(y_i e^{y_i-1} - e^{y_i-1}(y_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^d e^{y_i-1}$$

$$g(\lambda, \vartheta) = -\lambda^T b - \vartheta - \sum_{i=1}^d e^{-a_i^T\lambda - \vartheta - 1}$$

$$\max_{\lambda,\vartheta} \left(-\lambda^T b - \vartheta - \sum_{i=1}^d e^{-a_i^T\lambda - \vartheta - 1}\right)$$
$$\text{s.t. } \lambda \succeq 0$$

Слабая и сильная двойственность

$$g(\lambda, \vartheta) \le p^*$$

$d^* \le p^*$ — слабая двойственность

$d^* = p^*$ — сильная двойственность

Условие Слейтера

$$\min f_0(x)$$
$$\text{s.t. } f_i(x) \le 0$$
$$Ax = b$$

f_i — выпуклые

выполнено условие Слейтера, если

$\exists x \in D: \ f_i(x) < 0 \quad Ax = b$