

Субдифференциал и субградиент.

Основная часть

Задача 1. (2 балла) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = \max\{-x, x, x^2\}$. Найдите субдифференциал данной функции $\partial f(x)$.

Задача 2. (1 балл) Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \text{ReLU}(x) = \max\{0, x\}$.

Задача 3. (3 балла) Пусть $f(x) = \|x\|_\infty$. Докажите, что

$$\partial f(0) = \text{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\},$$

где e_i это i -тый вектор канонического базиса (т.е. столбец единичной матрицы).

Задача 4. (2 балла) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = |x - 2| + |x + 2| + |x - 1|$. Найдите субдифференциал данной функции $\partial f(x)$.

Задача 5. (2 балла) Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = \exp(\|Ax - b\|_p)$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $p \in [1; +\infty]$. Найдите субдифференциал $\partial f(x)$.

Субдифференциал и субградиент.

Дополнительная часть

Задача 1. (2 балла) Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ есть индикаторная функция следующего множества

$$\mathcal{B}_{\|\cdot\|}(0, 1) = \{x : \|x\|_p \leq 1\},$$

где $p \in [1; +\infty]$. Найдите субдифференциал $\partial f(x)$.

Задача 2. (3 балла) Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ - функция, определенная на множестве S из Евклидова пространства E . Пусть $x_0 \in S$ и пусть $f^* : S_* \rightarrow \mathbb{R}$ - сопряженная функция, где S_* из сопряженного пространства E^* . Покажите, что

$$\partial f(x) = \{g \in S_* : \langle g, x \rangle = f^*(g) + f(x)\}$$

.

Задача 3. (2 балла) Пусть $\lambda_{\max} : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ - функция максимального собственного значения, заданная на \mathbb{S}^d . Найдите субдифференциал $\partial \lambda_{\max}(X)$. Здесь \mathbb{S}^d - симметричные матрицы.

Указание: воспользуйтесь вариационным представлением λ_{\max} и формулой для субдифференциала максимума.

Задача 4. (3 балла) Покажите, что функция $\lambda_{\max}(X)$ дифференцируема в точке $X \in \mathbb{S}^d$ тогда и только тогда, когда максимальное собственное значение матрицы X является простым (т.е. имеет кратность 1). Чему равен градиент $\nabla \lambda_{\max}(X)$?