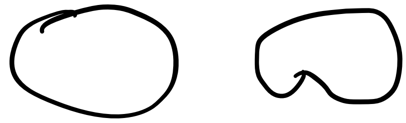
Семинар 4. Выпуклые множества

Опр $S \subseteq \mathbb{R}^n$: выпуклое, если $\forall x_1, x_2 \in S$ и $\forall \theta \in [0,1] \Rightarrow$
$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S$



Опр $S \subseteq \mathbb{R}^n$: аффинное, если $\forall x_1, x_2 \in S$ и $\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S$

1. Пример

$a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ $\quad \{x \mid a^T x \geq b\} = S$

$x_1, x_2 \in S$: $a^T x_1 \geq b$, $a^T x_2 \geq b$

$\hat{x} = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$

$$a^T \hat{x} = a^T(\theta x_1 + (1-\theta) x_2) = \theta a^T x_1 + (1-\theta) a^T x_2 \geq$$
$$\geq \theta b + (1-\theta) b = b$$

2. Пример

$S = \{x \mid \|x - c\| \leq r\}$

$$\left.\begin{array}{l}\|x_1 - c\| \leq r \\ \|x_2 - c\| \leq r\end{array}\right\} \Rightarrow \|\theta x_1 + (1-\theta) x_2 - c\| =$$

$$= \|\theta(x_1 - c) + (1-\theta)(x_2 - c)\| =$$
$$= \theta \|x_1 - c\| + (1-\theta)\|x_2 - c\| \leq$$
$$\leq \theta r + (1-\theta) r = r$$

3. Пример

$S = \{x \mid \|x - c\| = r\}$, $r > 0$

$$\begin{cases} x_1 = x + c \\ x_2 = -x + c \end{cases}, \quad \|x\| = r \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = c \notin S$$

4. $S = \{x \mid \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$

$$\|x - a\|_2^2 \leq \|x - b\|_2^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-a)^T(x-a) \le (x-b)^T(x-b)$$

$$\cancel{x^Tx} - a^Tx - x^Ta + a^Ta \le \cancel{x^Tx} - b^Tx - xb + b^Tb$$

$$\underbrace{2(b-a)^T}_{a'} x \le \underbrace{b^Tb - a^Ta}_{b'} \quad \text{- выпуклое}$$

5. Пример

$$S_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T, \underline{z^TXz \ge 0}, \forall z \in \mathbb{R}^n\}$$

$X_1, X_2 \in S_+^n$

$$\theta X_1 + (1-\theta)X_2 = (\theta X_1 + (1-\theta)X_2)^T =$$

$$= \theta \underset{X_1}{\underset{\shortparallel}{X_1^T}} + (1-\theta)\underset{X_2}{\underset{\shortparallel}{X_2^T}}$$

$$z^T(\theta X_1 + (1-\theta)X_2)z =$$

$$= \theta \underbrace{z^TX_1z}_{\ge 0} + (1-\theta)\underbrace{z^TX_2z}_{\ge 0} \ge 0$$

6. Пример

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} \mid x_1x_2 \ge 1\} \qquad x\ y$$

$$(\theta x_1 + (1-\theta)y_1)(\theta x_2 + (1-\theta)y_2) =$$

$$= \theta^2 \underbrace{x_1x_2} + \theta(1-\theta)\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)} + (1-\theta)^2 \underbrace{y_1y_2} \ge$$

$$\ge \theta^2 + 2\theta(1-\theta)\sqrt{\underbrace{x_1x_2y_1y_2}_{\ge 1}} + (1-\theta)^2 \ge 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{Утв}} & S \text{ - выпуклое} \\ & \operatorname{int} S \text{ - выпуклое} \\ & \operatorname{cl} S \text{ - выпуклое} \end{array}}$$

Опр Выпуклая комбинация $x_1, \dots x_k$

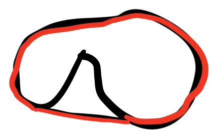
$$\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \quad \sum_1 \theta_i = 1$$
$$0 \le \theta_i \le 1$$

Утв Если S — выпуклое, $x_1, \dots, x_k \in S$, то $\forall$ выпуклая комбинация точек $\in S$.

Опр Выпуклая оболочка S

Наименьшее по включению выпуклое множество T, которое содержит S

$\mathrm{conv}\, S$



Утв $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$:

а) $S \subseteq \mathrm{conv}\, S$

б) $S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{conv}\, S \subseteq \mathrm{conv}\, T$

в) S — выпуклое $\Leftrightarrow S = \mathrm{conv}\, S$

7. Пример

$$\mathrm{conv}\{xx^T \mid \|x\|_2 = 1\} = \{A \in S^n_+ \mid \mathrm{Tr}(A) = 1\}$$

$\subseteq$

$x \in \mathbb{R}^n$ и $\|x\|_2 = 1$

$\mathrm{Tr}(xx^T) = \mathrm{Tr}(x^T x) = \|x\|_2^2 = 1$

$A \in \mathrm{conv}\{\dots\}$

Утв

$$\mathrm{conv}\, S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid \theta_1 + \dots + \theta_k = 1, 0 \le \theta_i \le 1\}$$

$A=\theta_1 x_1 x_1^T+\ldots+\theta_n x_n x_n^T$, $\theta_i \geq 0$, $\|x_i\|_2=1$, $\sum_1^n \theta = 1$

т.к. Tr — линейный, то

$Tr(A)=\sum_1^n \theta = 1$

2

$A\in S_+^n$, $Tr(A)=1$

$A=S^T diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) S$, S — ортогональная

$A=\lambda_1 s_1 s_1^T+\ldots+\lambda_n s_n s_n^T$

$Tr(A)=Tr(S^T diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)S)=$

$=Tr(SS^T diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n))=$

$=Tr(diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n))=\sum_1^n \lambda_i=1$

Операции, сохраняющие выпуклость

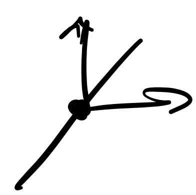
Опр $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — аффинная, если $F(x)=Ax+b$

1) Пересечение
2) линейная комбинация
3) Взятие образа при аф.
4) Взятие прообраза
5) Произведение

Опр C — конус, если $\forall c\in C$ и $\theta\geq 0$ точка $\theta c\in C$

Утв конус выпуклый $\Leftrightarrow$ $\forall c_1, c_2$ θ_1, θ_2: $\theta_1 c_1+\theta_2 c_2\in C$

$\emptyset$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$



Опр Коническая оболочка C

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_k c_k \mid c_i \in C, \theta_i \geq 0\}$$

Зам Пересечение $\forall$ # конусов = конус

$\forall$ # выпуклых конусов = конус

Пример $C = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underbrace{\|x\| \leq t}\}$

$$\|\underbrace{\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2}_{\tilde{x}}\| \leq \theta_1 \|x_1\| + \theta_2 \|x_2\| \leq \underbrace{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2}_{\tilde{t}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \theta_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \in C$$

Пример S_+^n — выпуклый конус

$$\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 \in S_+^n$$

Теорема (Теорема об отделимости)

S и T — непересекающиеся, выпуклые

Найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$: $\forall x \in S \;\; a^T x - b \leq 0$

$\forall y \in T \;\; a^T y - b \geq 0$

Теорема (о строгой отделимости)

S и T — непересекающиеся, непустые, выпуклые $\mathbb{R}^n$

S — компакт

T — замкнуто

Найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$: $\sup\limits_{x \in S} a^T x < b < \inf\limits_{y \in T} a^T y$