$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} f_0(x)$$

$$\text{s.t. } f_i(x) \le 0 \qquad i = 1..m$$

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times d} \quad b \in \mathbb{R}^n$$

- Лагранжиан:

$$L(x,\lambda,\nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \nu^T(Ax-b)$$

$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1..m \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}^n$

- Двойственная функция:

$$g(\lambda,\nu) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} L(x,\lambda,\nu)$$

<u>свойства</u>

1) $\forall \lambda_i \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow \quad g(\lambda,\nu) \le f_0(x^*)$

2) Условие Слейтера: $\exists x \in \mathbb{R}^d : \ f_i(x) < 0, \ Ax = b$

Если f_0, f_i - выпуклые и выполнено условие Слейтера, то

$$\sup_{\lambda_i \geq 0, \nu\in\mathbb{R}^n} g(\lambda,\nu) = f_0(x^*)$$

<u>Опр.</u> (седловая точка) $(x^*, \lambda^*, \nu^*) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n$ называется седловой точкой для функции $L(x,\lambda,\nu)$, если $\forall (x,\lambda,\nu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n$

$$\hookrightarrow L(x,\lambda^*,\nu^*) \geq L(x^*,\lambda^*,\nu^*) \geq L(x^*,\lambda,\nu)$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+, \nu\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda,\nu)$$

Теорема (Куна-Таккера)

f_0, f_i – выпуклые, выполнено условие Слейтера, тогда следующие условия эквивалентны

1) x^* – лок. минимум задачи с огран.

2) для x^* $\exists \lambda_i^* \geq 0$, $\nu^* \in \mathbb{R}^n$: (x^*, λ^*, ν^*) – седлов. т. Лагранжа

Док-во

1) $\Leftarrow$ 2) x^* – удовл. огранич. ? От противного

$\exists i : f_i(x^*) > 0$ (или $Ax^* \neq b$)

$\sup\limits_{\lambda_i \geq 0, \nu \in \mathbb{R}^n} L(x^*, \lambda, \nu)$ – ? $\sup = +\infty$

$\lhd$ $L(x^*, \lambda^*, \nu^*) \geq L(x^*, \lambda, \nu)$ противоречие так x^*, λ^*, ν^* – седловая

$\lambda_i = 2\lambda_i^*$ $\lambda_{j \neq i} = \lambda_j^*$, тогда $L(x^*, \lambda, \nu) > L(x^*, \lambda^*, \nu^*)$

$\boxed{x^* \text{ – удовл. огранич.}}$

$\sup\limits_{\lambda_i \geq 0, \nu \in \mathbb{R}^n} L(x^*, \lambda, \nu) = f_0(x^*)$ $(\lambda_i = 0)$

$\forall \lambda_i \geq 0, \nu \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow L(x^*, \lambda, \nu) \leq f_0(x^*)$

из условия, что (x^*, λ^*, ν^*) – седловая точка, то

$\forall \lambda_i \geq 0, \nu \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow L(x^*, \lambda, \nu) \leq L(x^*, \lambda^*, \nu^*)$

$\boxed{L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = f_0(x^*)}$ (услов. дополнит.)

$$\underset{f_0(x) + \sum \lambda_j^* f_j(x) + (\nu^*)^T (Ax - b)}{\underset{\parallel}{L(x, \lambda^*, \nu^*)}} \geq L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = f_0(x^*)$$

$$f_0(x) + \sum \lambda_j^* f_j(x) + (\nu^*)^T(Ax-b) \geq f_0(x^*)$$

Если x - удовл. ограничениям

$$f_0(x) + \underbrace{\sum \underbrace{\lambda_j^*}_{\geq 0} \underbrace{f_j(x)}_{\leq 0}}_{\leq 0} \geq f_0(x^*)$$

$$f_0(x) \geq f_0(x^*) \quad \forall x \text{ - удовл. ограничениям}$$

$\boxed{x^* \text{ - глоб. минимум}}$

1) $\Rightarrow$ 2) Условие Слейтера:

$$\sup_{\lambda_i \geq 0, \nu \in \mathbb{R}^n} g(\lambda, \nu) = f_0(x^*)$$

$\exists\ \lambda_i^* \geq 0$, $\nu^* \in \mathbb{R}^n$ - решение двойственной

$$f_0(x^*) = g(\lambda^*, \nu^*) = \underbrace{\inf_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, \lambda^*, \nu^*)}_{\leq L(x^*, \lambda^*, \nu^*)}$$

$$f_0(x^*) \leq \underbrace{L(x^*, \lambda^*, \nu^*)} = f_0(x^*) + \underbrace{\sum \underbrace{\lambda_j^*}_{\geq 0} \underbrace{f_j(x^*)}_{\leq 0}}_{\leq 0} + \underbrace{(\nu^*)^T(Ax^*-b)}_{?\,0}$$

$$f_0(x^*) \leq \underset{\substack{\| \\ f_0(x^*)}}{L(x^*, \lambda^*, \nu^*)} = f_0(x^*) + \underbrace{\text{то} \leq 0}_{=0}$$

Первая часть седла:

$$\boxed{L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = f_0(x^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, \lambda^*, \nu^*)}$$

Вторая часть седла: $f_i(x^*) \leq 0$ $\quad Ax^* - b = 0$

$$f_0(x^*) \geq f_0(x^*) + \sum \underbrace{\lambda_j}_{\geq 0} f_j(x^*) + \nu^T(Ax^*-b) = L(x^*, \lambda, \nu)$$

$$\boxed{L(x^*,\lambda^*,\nu^*) \geq f_0(x^*) \geq L(x^*,\lambda,\nu)} \quad \blacksquare$$

Абстрагируемся от Лагранжиана:

$$\forall\ L(x,\lambda) : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$$

1 игрок : действие из X

2 игрок : действие из Λ

$L(x,\lambda)$ – прибыль 2-го игрока, если 1 игр. выбрал д. x
(убыток 1-го игрока) 2 игр. выбрал д. λ

1 игрок хочет платить меньше, а 2 игр. хочет получить больше.

Хотим найти x^*, λ^*:

$$\forall x \in X, \lambda \in \Lambda \quad L(x,\lambda^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{плохо} \\ \text{1 игроку}}}{\geq} L(x^*,\lambda^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{плохо} \\ \text{2 игроку}}}{\geq} L(x^*,\lambda)$$

- Если 1 игрок выбирает первым:

$$\underbrace{\inf_{x\in X}}_{\text{действие 1-го игр.}} \underbrace{\sup_{\lambda\in\Lambda}}_{\text{действие 2-го игрока}} L(x,\lambda)$$

- Если 2 игрок выбирает первым

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \inf_{x\in X} L(x,\lambda)$$

$$\sup_{\lambda} \inf_{x} L(x,\lambda) \underset{\neq}{\leq} \inf_{x} \sup_{\lambda} L(x,y)$$

$$\inf_{\tilde{x}} L(\tilde{x},\lambda) \leq L(x,\lambda)\ \forall x \Rightarrow \sup_{\lambda} \inf_{\tilde{x}} L(\tilde{x},\lambda) \leq \sup_{\lambda} L(x,\lambda)$$

Теорема

Множество седловых точек $L: X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ непустое

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sup_{\lambda} \inf_{x} L(x,\lambda) \quad \text{и} \quad \inf_{x} \sup_{\lambda} L(x,\lambda)$$

имеют решение и эти решения совпадают

Теорема (Сиона-Какутани)

X, Λ — выпуклые компакты

L — непрерывна, выпукла по x, вогнута по λ, тогда

L имеет седловые точки на $X \times \Lambda$

Поиск седловой точки

= (для „хороших" задач)

Решение $\min\limits_{x \in X} \max\limits_{\lambda \in \Lambda} L(x,\lambda)$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \qquad\qquad \min_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^n} L(x,\lambda)$$

$$x^{k+1} = x^k - \gamma \nabla f(x^k) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \gamma \nabla_x L(x^k,\lambda^k) \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \gamma \nabla_\lambda L(x^k,\lambda^k) \end{aligned}$$

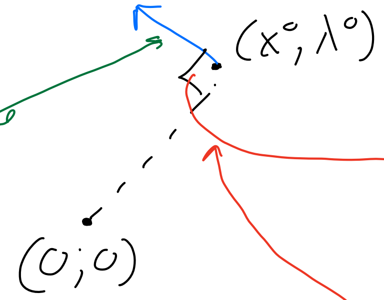
не очень хорош :-(

Пример

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \max_{\lambda \in \mathbb{R}} x\lambda \qquad \begin{aligned} x^* &= 0 \\ \lambda^* &= 0 \end{aligned}$$

стартовая точка: $(x^0;\lambda^0) \neq (0;0)$

$$\nabla_x L(x^0;\lambda^0) = \lambda^0 \qquad \nabla_\lambda L(x^0;\lambda^0) = x^0$$



направление $-\nabla_x L(x,\lambda)$, $\nabla_\lambda L(x,\lambda)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\lambda_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

не решение

90°

$\Downarrow$

метод расходится

• Экстраградиент (Г. Корпелевич)

промеж.
$$\begin{cases} x^{k+1/2} = x^k - \gamma \nabla_x L(x^k, \lambda^k) \\ \lambda^{k+1/2} = \lambda^k + \gamma \nabla_\lambda L(x^k, \lambda^k) \end{cases}$$

$$x^{k+1} = x^k - \gamma \nabla_x L(x^{k+1/2}, \lambda^{k+1/2})$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma \nabla_\lambda L(x^{k+1/2}, \lambda^{k+1/2})$$

исходные   промежут.

для этого метода $< 90^\circ$ для $\gamma > 0$