Домашнее задание 7, сопряженные множества и функции

Deadline - 01.11.2024 в 23:59

Основная часть

Сопряженные множества

Задача 1. Постройте X^*, если

1) (0.5 балла) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$
2) (0.5 балла) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq \frac{x_1^2}{2}\}$
3) (0.5 балла) $X = \{x \in \mathbb{R}^d : \|Ax\| \leq 1, A \in \mathbb{S}^d_{++}\}$

Задача 2. (1 балл) Постройте X^* и X^{**}, если

$X = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \sum\limits_{i=1}^{d} x_i = 1\right\}$

Сопряженные функции

Задача 3. Постройте $f^*(y)$, если

1) (0.5 балла) $f(x) = \max(|x|, x^2), x \in \mathbb{R}$
2) (0.5 балла) $f(x) = (|x| + 1)\ln(|x| + 1), x \in \mathbb{R}$
3) (0.5 балла) $f(x) = (\|x\| + 1)\ln(\|x\| + 1) - \|x\|, x \in \mathbb{R}^d$

Задача 4. (1 балл) Постройте $f^*(y)$ и $f^{**}(x)$, если

$f(x) = \operatorname{ch} x - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1, x \in \mathbb{R}$

Дополнительная часть

Сопряженные множества

Задача 1. (1 балл) Пусть $\mathbb{A}^d$ - множеством антисимметричных матриц, т.е. $X \in \mathbb{A}^d \Leftrightarrow X^T = -X$. Покажите, что $(\mathbb{A}^d)^* = \mathbb{S}^d$.

Задача 2. Докажите, что K_p и K_{p_*} являются взаимосопряженными, т.е. $(K_p)^* = K_{p_*}$ и $(K_{p_*})^* = K_p$, где $K_p = \{(x, \mu) \in R^{d+1} : \|x\|_p \leq \mu\}$ и

1) (0.75 балла) $1 < p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p_*} = 1$
2) (0.75 балла) $p = 1,\ p_* = \infty$

Сопряженные функции

Задача 3. (0.75 балла)Постройте $f^*(x)$, если $f(x) = \log\left(\sum_{i=1}^d e^{x_i}\right)$, $x \in \mathbb{R}^d$

Задача 4. Постройте $f^*(x)$, если:

1) (0.5 балла) $f(x) = \alpha g(x)$, где $\alpha > 0$
2) (0.5 балла) $f(x) = g(Ax)$, где $A \in \mathbb{S}^d_{++}$
3) (0.75 балла) $f(x) = \inf\limits_{u+v=x}(g(u) + h(v))$