Домашнее задание 7, субдифференциал и субградиент

Deadline - 01.11.2024 в 23:59

Основная часть

Задача 1. (1 балл) Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = \max\{-x, x, x^2\}$. Найдите субдифференциал данной функции $\partial f(x)$.

Задача 2. (0.5 балла) Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = \mathrm{ReLU}(x) = \max\{0, x\}$.

Задача 3. (1.5 балла) Пусть $f(x) = \|x\|_\infty$. Докажите, что

$$\partial f(0) = \mathbf{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\},$$

где e_i это i-тый вектор канонического базиса (т.е. столбец единичной матрицы).

Задача 4. (1 балл) Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = |x-2| + |x+2| + |x-1|$. Найдите субдифференциал данной функции $\partial f(x)$.

Задача 5. (1 балл) Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = \exp\left(\|Ax - b\|_p\right)$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $p \in [1; +\infty]$. Найдите субдифференциал $\partial f(x)$.

Дополнительная часть

Задача 1. (1 балл) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть индикаторная функция следующего множества

$$\mathcal{B}_{\|\cdot\|}(0,1) = \left\{x : \|x\|_p \leq 1\right\},$$

где $p \in [1; +\infty]$. Найдите субдифференциал $\partial f(x)$.

Задача 2. (1.5 балла) Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ - функция, определенная на множестве S из Евклидова пространства E. Пусть $x_0 \in S$ и пусть $f^* : S_* \to \mathbb{R}$ - сопряженная функция, где S_* из сопряженного пространства E^*. Покажите,что

$$\partial f(x) = \{g \in S_* : \langle g, x\rangle = f^*(g) + f(x)\}$$

Задача 3. (1 балл) Пусть $\lambda_{\max} : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ - функция максимального собственного значения, заданная на $\mathbb{S}^d$. Найдите субдифференциал $\partial \lambda_{\max}(X)$. Здесь $\mathbb{S}^d$ - симметричные матрицы.

Указание: воспользуйтесь вариационным представлением $\lambda_{\max}$ и формулой для субдифференциала максимума.

Задача 4. (1.5 балла) Покажите, что функция $\lambda_{\max}(X)$ дифференцируема в точке $X \in \mathbb{S}^d$ тогда и только тогда, когда максимальное собственное значение матрицы X является простым (т. е. имеет кратность 1). Чему равен градиент $\nabla \lambda_{\max}(X)$?