$\min\limits_{x \in Q} f(x)$

Q – простое мн-во

1) $\mathbb{R}^d$ 2) шар 3) симплекс $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i \geq 0 \;\; \sum x_i = 1\}$

$\left.\begin{aligned} g_i(x) &= 0 \\ h_j(x) &\leq 0 \end{aligned}\right\}$ за пределами курса

Оракулы:

1) нулевого: f
2) первого: $\nabla f, f$
3) второго: $\nabla^2 f, \nabla f, f$

p-порядка: $\nabla^p f \ldots$

Как описывать сложность?

1) число итераций
2) оракульная сложность
3) арифметич.

Критерии сходимости:

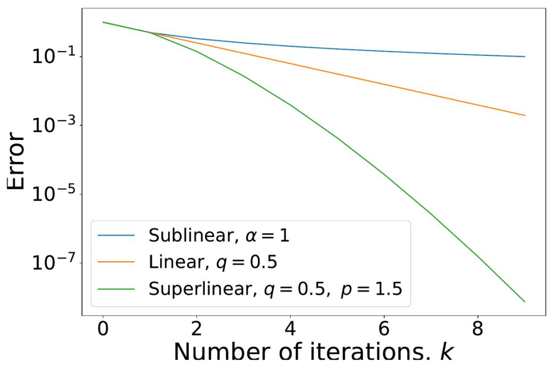
1) $\|x^k - x^*\|_2 < \varepsilon$ x^* – решение
2) $f(x^k) - \underbrace{f^*}_{\min f(x)} < \varepsilon$
3) $\|\nabla f(x^k)\|_2 < \varepsilon$

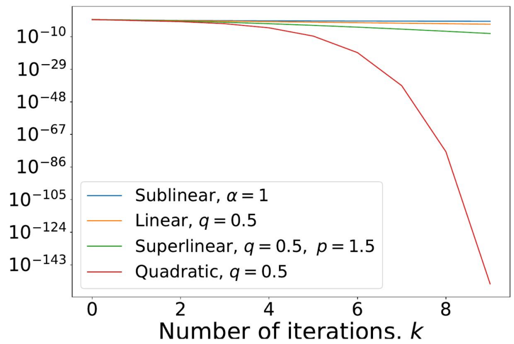
$\|x^k - x^{k-1}\|_2 < \varepsilon$

$|f(x^k) - f(x^{k-1})| < \varepsilon$

Скорости сходимости:

1) Сублинейная $\|x^k - x^*\|_2 \leq \dfrac{C}{k^\alpha}$ $C > 0$ $\alpha > 0$
2) Линейная (геометрическая) $\|x^k - x^*\|_2 \leq C q^k$ $q \in (0;1)$ $C > 0$
3) Сверхлинейная $\|x^k - x^*\|_2 \leq C q^{k^p}$ $p > 1$
4) Квадратичная $\|x^k - x^*\|_2 \leq C q^{2^k}$



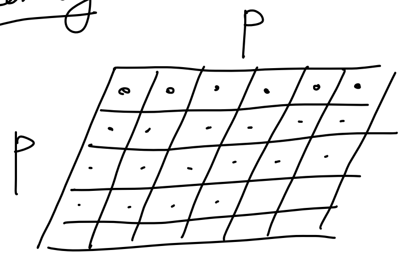


Пример f – M-липшицевой (∞-норме)

$$|f(x)-f(y)| \le M\|x-y\|_\infty = M\max_i |x_i-y_i|$$

$$\min_{x\in B_\infty^d(1)} f(x)$$

1). **Метод** – полный перебор



p^d кубиков

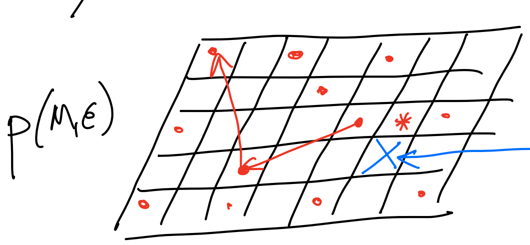
выбираем мин. знач. в кубике

$f(x)-f^*\le\varepsilon$ ← хотим, то $\left(\dfrac{M}{2\varepsilon}\right)^d$ вычислений f

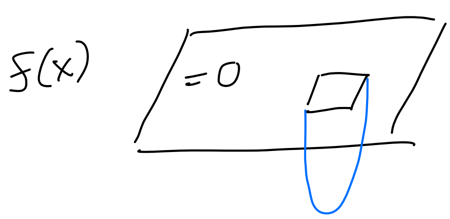
p

проблема

2). **Нижние оценки**



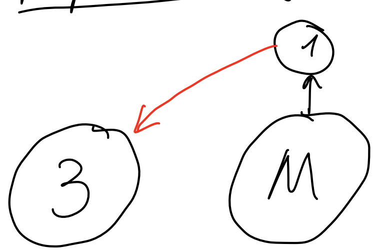
сетка мелкая = какой-то кубик не посещал метод



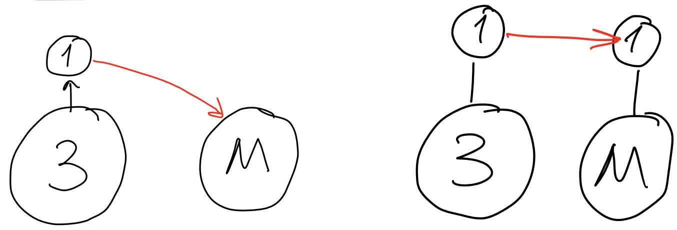
нижняя оценка

Любому методу нужно не менее $\left(\frac{M}{2\varepsilon}\right)^d$ выч.

Верхние оценки



Нижние оценки



- Выпуклость

  $f(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^d$, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

  $$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y); x-y \rangle + \underbrace{\frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2}$$

  μ – сильная выпуклость

- Липшицевость (было выше)

- L – липшицевость градиента (L – гладкость)

  $f(x)$ L-гладкая на $\mathbb{R}^d$, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

  $$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x-y\|_2$$

<u>Теорема</u> (физ. смысл L-гладкой функции)

Если f L-гладкая, то $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\left| f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x); y-x \rangle \right| \leq \frac{L}{2}\|y-x\|_2^2$$

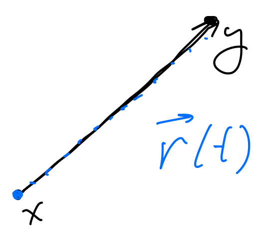
<u>Док-во:</u>

$$f(y) - f(x) \overset{\text{ф. Н.-Л.}}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)); y-x \rangle \, dt \;\circleddash$$

в нашем случае

$r(t) = x + t(y-x)$

$t \in [0;1]$



$\vec{r}(t)$ от 0 до 1
(a) (b)

$d\vec{r}(t) = (y-x)\,dt$

$$f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = \int_0^1 \langle \nabla f(\vec{r}(t)); d\vec{r}(t) \rangle$$

$$\circleddash\; \langle \nabla f(x); y-x \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x); y-x \rangle \, dt$$

$$\left| f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x); y - x \rangle \right| =$$

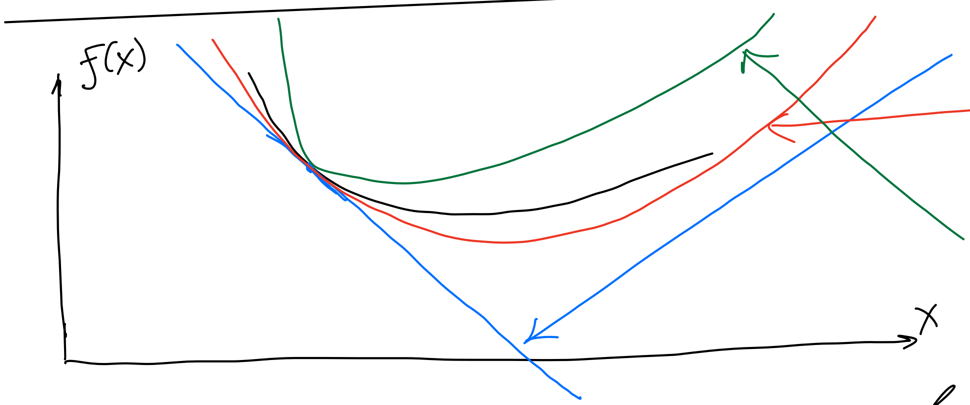
$$= \left| \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x); y - x \rangle \, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\left| \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x); y - x \rangle \right|}_{\text{КБШ}} dt$$

$$\langle a; b \rangle \leq \|a\|_2 \|b\|_2$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\| \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x) \|_2}_{L\text{-гладкость}} \|y - x\|_2 \, dt$$

$$\leq \int_0^1 L t \|y - x\|_2^2 \, dt = L \|y-x\|_2^2 \int_0^1 t \, dt = \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2 \quad \blacksquare$$



выпуклость: выше прямой

сильная выпуклость: выше параболы

гладкость: ниже параболы

$L \geq \mu$

Часто: $\exists$ L-гладкие, μ-сильно выпуклые