Метод внутренней точки. Самосогласованные барьеры

Методы оптимизации

Александр Безносиков

Московский физико-технический институт

16 ноября 2023

От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x),$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots m.$$

От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad f(x),$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m.$$

- Задача со штрафом:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (g_j^+)^2(x) \right],$$

где $y^+ = \max\{y, 0\}$.

От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \dots m. \end{aligned}$$

- Задача со штрафом:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (g_j^+)^2(x) \right],$$

где $y^+ = \max\{y, 0\}$.

- Итоговое решение штрафной задачи может не удовлетворять ограничениям. **Вопрос:** как ввести штраф так, чтобы мы гарантированно было в пределах множества $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_i(x) \leq 0 \text{ для } i = 1, \dots m\}$?

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы?

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор недифференцируем.

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор недифференцируем.
- <u>Идея:</u> воспроизвести поведение индикатора более плавно и непрерывно.

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы?

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор ненепрерывен и недифференцируем.

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор ненепрерывен и недифференцируем.
- Идея: воспроизвести поведение индикатора более плавно и непрерывно.

Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1) $\mathrm{int}\, G$ – непустое множество, 2) для любой точки $x \in G$ существует последовательность $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такая, что $x_i \to x$, 3) G – ограниченное множество, 4) для любого $x \in \mathrm{int}\, G$ и для любого $i = 1, \ldots m$ следует, что $g_i(x) < 0$, 5) f непрерывно дифференцируема на G.

Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1) $\mathrm{int}\,G$ – непустое множество, 2) для любой точки $x \in G$ существует последовательность $\{x_i\} \in \mathrm{int}\,G$ такая, что $x_i \to x$, 3) G – ограниченное множество, 4) для любого $x \in \mathrm{int}\,G$ и для любого $i = 1, \ldots m$ следует, что $g_i(x) < 0$, 5) f непрерывно дифференцируема на G.
- Введем функция F: 1) непрерывно дифференцируемую на $\mathrm{int}\,G$ и 2) для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}\,G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F(x_i) \to +\infty$.

Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1) $\mathrm{int}\, G$ – непустое множество, 2) для любой точки $x \in G$ существует последовательность $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такая, что $x_i \to x$, 3) G – ограниченное множество, 4) для любого $x \in \mathrm{int}\, G$ и для любого $i = 1, \ldots m$ следует, что $g_i(x) < 0$, 5) f непрерывно дифференцируема на G.
- Введем функция F: 1) непрерывно дифференцируемую на $\mathrm{int}\, G$ и 2) для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F(x_i) \to +\infty$.
- Примеры:
  - Барьер Кэррола:
  $$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)},$$
  - Логарифмический барьер:
  $$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(x)).$$

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\mathrm{int}G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\mathrm{int}G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим и модифицируем значение F следующим образом: $\frac{1}{\rho}F(x)$

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\operatorname{int} G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим и модифицируем значение F следующим образом: $\frac{1}{\rho}F(x)$
- При $\rho \to +\infty$, следует, что $\frac{1}{\rho}F(x) \to 0$ на $\operatorname{int} G$.

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\mathrm{int}\, G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим и модифицируем значение F следующим образом: $\frac{1}{\rho}F(x)$
- При $\rho \to +\infty$, следует, что $\frac{1}{\rho}F(x) \to 0$ на $\mathrm{int}\, G$.
- Итого рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[F_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho}F(x) \right].$$

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$.

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$.
- $\{x_i\} \in \mathrm{int}G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$.
- $\{x_i\} \in \mathrm{int}G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.
- Формально задача $\min_{x\in\mathbb{R}^d} F_\rho(x)$ – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему?

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\,G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\,G$.
- $\{x_i\} \in \mathrm{int}\,G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.
- Формально задача $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$ – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему? F_ρ определена только на $\mathrm{int}\,G$.

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$.
- $\{x_i\} \in \mathrm{int}G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.
- Формально задача $\min_{x\in\mathbb{R}^d} F_\rho(x)$ – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему? F_ρ определена только на $\mathrm{int}G$. Но это не проблема: пусть мы стартуем из $x^0 \in \mathrm{int}G$ и можем гарантировать, что метод минимизации $F_\rho(x)$ выдает точки x^k такие, что $F_\rho(x^k) \leq F_\rho(x^0)$. А мы знаем, что $F_\rho \to \infty$ при приближении к ∂G, а значит в какой-то момент, приближаясь к границе, F_ρ будет больше $F_\rho(x^0)$. Получаем, что x^k остается в $\mathrm{int}G$. Это означает, что задача с ограничениями превращается в безусловную, потому что ограничения «не чувствуются».

Свойства барьерной задачи

Чуть более формально последнее утверждение с предыдущего слайда.

Свойство барьерной задачи

Для любого $\rho > 0$ функция $F_\rho(x)$ принимает минимум на $\mathrm{int}G$. А множества вида

$$U = \{x \in \mathrm{int}G \mid F_\rho(x) \leq a\}$$

являются компактами для любого a.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$

$x_i \to x \to \partial G$

$\quad\quad\;\; \to \operatorname{int} G$

$\in \operatorname{int} G$

$\underset{\in \operatorname{int} G}{F_g(x_i)} \leq a$

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможно две опции: $x \in \mathrm{int}G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \mathrm{int}G$.

$x \in \partial G$

x_i в ε-окр ∂G

$F_\rho(x_i) > a$

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможно две опции: $x \in \mathrm{int} G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \le a$. Значит $x \in \mathrm{int} G$. Но на $\mathrm{int} G$ функция F_ρ непрерывна, откуда следует необходимое, ножно только перейти к пределу в $F_\rho(x_i) \le a$.

$$\underbrace{\lim F_\rho(x_i)}_{F_\rho(x)\ \le\ a} \le \overset{\lim}{a}$$

$x \in U$

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможно две опции: $x \in \operatorname{int} G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \operatorname{int} G$. Но на $\operatorname{int} G$ функция F_ρ непрерывна, откуда следует необходимое, ножно только перейти к пределу в $F_\rho(x_i) \leq a$.
- Ограниченность U следует из ограниченности G.

F_ρ достиг минимума на U

x $\quad F_\rho(x) \le a$

int G

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможно две опции: $x \in \mathrm{int}G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \mathrm{int}G$. Но на $\mathrm{int}G$ функция F_ρ непрерывна, откуда следует необходимое, ножно только перейти к пределу в $F_\rho(x_i) \leq a$.
- Ограниченность U следует из ограниченности G.
- F_ρ непрерывно на компакте U, тогда принимает минимальное значение на нем (теорема Вейштрасса). Но по определению U этот минимум на U будет минимум и на $\mathrm{int}G$.

Свойства решений барьерной задачи

Свойство решений штрафной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что $\overline{\mathrm{int}G} = G$ (замыкание $\mathrm{int}G$). Тогда для любого $e > 0$ существует $\rho(e) > 0$ такое, что множество решений барьерной задачи X^*_ρ для любых $\rho \geq \rho(e)$ содержится в

$$X^*_e = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* \ : \ \|x - x^*\|_2 \leq e\},$$

где X^* – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

Свойства решений барьерной задачи

Свойство решений штрафной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что $\overline{\text{int}G} = G$ (замыкание $\text{int}G$). Тогда для любого $e > 0$ существует $\rho(e) > 0$ такое, что множество решений барьерной задачи X^*_ρ для любых $\rho \geq \rho(e)$ содержится в

$$X^*_e = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* \ : \ \|x - x^*\|_2 \leq e\},$$

где X^* – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

- X^* непустое, так как G замкнутое и ограниченное, а f непрерывна на этом компакте.
- То, что X^*_ρ непустое, доказали в первом свойстве.

Доказательство

- От противного: $\exists \varepsilon > 0$

$g_i \to \infty$: $x_i^* \in X^*_{g_i} \hookrightarrow x_i^* \notin X^*_\varepsilon$

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in \underbrace{X^*(\rho_i)}_{\underbrace{\subset \mathrm{int}\, G}_{\text{огран.}}}$ не лежащие в X_e^*.

x_i^* – огран посл.

$\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X^*_e, т.е. существуют $x^*_i \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X^*_e.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}^*_i \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему?

$\tilde{x}_i^* \in \operatorname{int} G$ $\quad$ $\tilde{x}^*$ $\in \operatorname{int} G$

$\in \partial G$

G

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \mathrm{int}G$, G есть замыкание $\mathrm{int}G$.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \mathrm{int}G$, G есть замыкание $\mathrm{int}G$.
- Также $\tilde{x}^*$ не должен лежать в X^*. **Вопрос:** почему?

$\tilde{x}^* \in G \setminus X^*$

$f(\tilde{x}^*) > \underline{f(x^*) + \delta}$ $\quad \delta > 0$

$\min\limits_{G} f$

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \text{int}G$, G есть замыкание $\text{int}G$.
- Также $\tilde{x}^*$ не должен лежать в X^*. **Вопрос:** почему? Иначе, начиная с некоторого номера i, $\tilde{x}^*$ начнут попадать в X_e^*.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \text{int}G$, G есть замыкание $\text{int}G$.
- Также $\tilde{x}^*$ не должен лежать в X^*. **Вопрос:** почему? Иначе, начиная с некоторого номера i, $\tilde{x}^*$ начнут попадать в X_e^*.
- Так как $\tilde{x}^*$ вне X^*, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(\tilde{x}^*) > f(x^*) + \delta,$$

где $x^* \in X^* \subseteq G$.

Доказательство

- С другой стороны: так как G есть замыкание $\operatorname{int} G$, а f непрерывна на G, то можно найти такую точку $\tilde{x} \in \operatorname{int} G$, что

$$f(\tilde{x}) \le f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

$\tilde{x}$ близко x^*

$\in \operatorname{int} G$

$$F_{\rho_i}(\tilde{x}_i^*) = f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}_i^*)$$

$$\wedge|$$

$$\underbrace{F_{\rho_i}(\tilde{x})}_{\in \operatorname{int} G} = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x})$$

$F_\rho(x_i) \ge C \to \infty$

$\operatorname{int} G$

$F(x_i) \le \tilde{C}$

$\to -\infty$

$$\lim f(\tilde{x}_i^*) \le f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} \underbrace{F(\tilde{x}_i^*)}_{\in \operatorname{int} G}$$

$$\le \lim \Big(f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} \underbrace{F(\tilde{x})}_{\text{const}} - \frac{1}{\rho_i} \underbrace{\tilde{C}}_{\text{const}} \Big) = f(\tilde{x}) \le f(x^*) + \frac{\delta}{2}$$

$$f(x^*) + \delta < f(\tilde{x}^*)$$

Доказательство

- С другой стороны: так как G есть замыкание $\mathrm{int}\,G$, а f непрерывна на G, то можно найти такую точку $\tilde{x} \in \mathrm{int}\,G$, что

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

- Тогда

$$f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}_i^*) = F_{\rho_i}(x_i) = \min_{x \in \mathrm{int}\,G} F_{\rho_i}(x_i) \leq F_{\rho_i}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x})$$

Доказательство

- С другой стороны: так как G есть замыкание $\mathrm{int}G$, а f непрерывна на G, то можно найти такую точку $\tilde{x} \in \mathrm{int}G$, что

$$f(\tilde{x}) \le f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

- Тогда

$$f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i}F(\tilde{x}_i^*) = F_{\rho_i}(x_i) = \min_{x \in \mathrm{int}G} F_{\rho_i}(x_i) \le F_{\rho_i}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i}F(\tilde{x})$$

- Мы уже показывали, что F_ρ принимает свое минимальное значение (а значит ограничено снизу) на $\mathrm{int}G$. Аналогично, можно показать, что $F(x) \ge F^* > -\infty$ на $\mathrm{int}G$. Поэтому

$$f(\tilde{x}_i^*) \le f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i}F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i}F^*.$$

Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \le f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

- Функция f непрерывна на G. Переходим к пределу в неравенстве:

$$f(\tilde{x}^*) \le f(\tilde{x}).$$

Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

- Функция f непрерывна на G. Переходим к пределу в неравенстве:

$$f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}).$$

- Но

$$f(x^*) + \delta < f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

Противоречие.

Итог по барьерам на данный момент

- По факту условная задача превращена в безусловную.
- Увеличение ρ помогает лучше аппроксимировать поведение честной индикаторной функции, а значит приближает нас к исходной задаче.
- Решение всегда удовлетворяет ограничениям.
- Более того, так как в процессе оптимизации мы не выходим за G, то можно сказать, что мы всегда «внутри», поэтому метод решающий задачу с барьером называется метод внутренней точки.
- В общем случае все. Как и для штрафов – выбираем, какое-то ρ пытаемся решить задачу с барьером. Далее можно попробовать увеличить ρ.

Итог по барьерам на данный момент

- По факту условная задача превращена в безусловную.
- Увеличение ρ помогает лучше аппроксимировать поведение честной индикаторной функции, а значит приближает нас к исходной задаче.
- Решение всегда удовлетворяет ограничениям.
- Более того, так как в процессе оптимизации мы не выходим за G, то можно сказать, что мы всегда «внутри», поэтому метод решающий задачу с барьером называется метод внутренней точки.
- В общем случае все. Как и для штрафов – выбираем, какое-то ρ пытаемся решить задачу с барьером. Далее можно попробовать увеличить ρ.
- Далее рассмотрим фундаментальные азы теории вокруг барьеров, которая сильно продвинула вперед наука в этой области.

Самосогласованная функция

Самосогласованная функция

Выпуклая трижды непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$ функция называется самосогласованной, если выполнены следующие условия

- $\left|\frac{d^3}{dt^3}F(x+th)\right| \leq 2[h^T\nabla^2 F(x)h]^{3/2}$ для любых $x \in \mathrm{int}\, G$ и $h \in \mathbb{R}^d$;
- Для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$, выполнено «барьерное» свойство: $F(x_i) \to +\infty$.

Самосогласованная функция: примеры

- Квадратичная функция с симметричной положительно полуопределенной матрицей:
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$
является самосогласованной на $\mathbb{R}^d$.
- Отрицательный логарифм:
$$f(x) = -\ln(x),$$
является самосогласованным на $\mathbb{R}_+$.
- Отрицательный логарифм квадратичной функции $g(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$:
$$f(x) = -\ln(-g(x))$$
является самосогласованным на $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) < 0\}$.

Самосогласованная функция: операции сохраняющие

- Сумма двух самосогласованных функций (F_1 на $\mathrm{int}\, G_1$ и F_2 на $\mathrm{int}\, G_2$):
$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x),$$
где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$, также является самосогласованной.
- Аффинное преобразование аргумента сохраняет самосогласованность: если $F(x)$ самосогласована на $\mathrm{int}\, G$, тогда
$$\tilde{F}(x) = F(Ax + b)$$
самосоглаована на $\mathrm{int}\, \tilde{G} = \{x \mid Ax + b \in \mathrm{int}\, G\}$.

Самосогласованный барьер

Самосогласованный барьер

Функция F является ν-самосогласованным барьером (ν всегда ≥ 1) на множестве $\mathrm{int}\, G$, если

- F самосогласована на $\mathrm{int}\, G$;
- Выполнено условие: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 F(x) h}$ для любых $x \in \mathrm{int}\, G$ и $h \in \mathbb{R}^d$.

- Пример – логарифмический барьер от лилейных ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} -\ln(b_i - a_i^T x),$$

где $\{b_i - a_i^T x\}$ удовлетворяют условию Слейтера, является m-самосогласованным барьером на
$G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^T x \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m\}$

Задача

- То с чего начинали:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \; f(x),$$
$$\text{s.t.} \; g_i(x) \leq 0, \; i = 1,\dots m.$$

Только пусть теперь все функции f и g_i выпуклые на G.

Задача

- То с чего начинали:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad f(x),$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \le 0, \ \ i = 1, \dots m.$$

Только пусть теперь все функции f и g_i выпуклые на G.

- Переформулируем в форме эпиграфа:

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}} \quad t, \qquad 1^T \ (1 \cdot t)$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \le 0, \ \ i = 1, \dots m$$
$$f(x) - t \le 0.$$

Задача остается выпуклой (эпиграф выпуклый тогда и только тогда, когда функция выпукла). Добавилась линейность целевой функции.

Задача

- Поэтому будем рассматривать задачу вида:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \ c^T x,$$

$$\text{s.t.} \ g_i(x) \le 0, \ i = 1, \dots m,$$

с выпуклыми функциями g_i.

Общий случай метода

Сначала посмотрим на общую схему, которая подойдет для любой задачи.

Алгоритм 1 Метод внутренней точки (общий случай)

Вход: стартовая точка $x^0 \in \mathrm{int}\, G$, стартовое значение параметра $\rho_{-1} > 0$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**

2: Увеличить $\rho_k > \rho_{k-1}$

3: С помощью некоторого метода решить численно задачу безусловной оптимизации с целевой функцией F_{ρ_k} и стартовой точкой x_k. Гарантировать, что выход метода x_{k+1} будет близок к реальному решению $x^*(\rho_k)$.

4: **end for**

Выход: x^K

Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

- Теперь перейдем к частному случаю линейной целевой функции и ν-самосогласованный барьеров.
- Чем меньше ν тем лучше барьер и как увидим далее – быстрее сходится метод.

Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

- Теперь перейдем к частному случаю линейной целевой функции и ν-самосогласованный барьеров.
- Чем меньше ν тем лучше барьер и как увидим далее – быстрее сходится метод.

Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

Введем дополнительные объекты:

- $\Phi_\rho(x) = \rho F_\rho(x) = \rho c^T x + F(x)$
- $\lambda(\Phi_\rho, x) = \sqrt{[\nabla \Phi_\rho(x)]^T [\nabla^2 \Phi_\rho(x)]^{-1} \nabla \Phi_\rho(x)}$

$\nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x) \succeq 0$

$x^T A x = \|x\|_A^2$

Алгоритм 2 Метод внутренней точки (частный случай)

Вход: параметры $e_1, e_2 \in (0;1)$, стартовое значение параметра $\rho_{-1} > 0$, стартовая точка $x^0 \in \mathrm{int}\, G$ такая, что $\lambda(\Phi_{\rho_{-1}}, x^0) \le e_1$, количество итераций K

Φ_ρ F_ρ

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**

2: Увеличить $\rho_k = \left(1 \cancel{+} \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}\right)^{-1} \rho_{k-1}$

$\lambda(\Phi_\rho, x^1)$

3: Сделать шаг демпфированного метода Ньютона:

F_ρ

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{1 + \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)} [\nabla^2 \Phi_{\rho_k}(x^k)]^{-1} \nabla \Phi_{\rho_k}(x^k)$$

(возможно, понадобится больше одного шага метода Ньютона, но при правильном соотношении e_1 и e_2 достаточно ровно одного)

4: **end for**

Выход: x^K

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.
- для положительно определенной матрицы $\nabla^2\Phi_\rho(x)$ декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида $\|\nabla\Phi_\rho(x)\|_2$, но по норме, индуцированной матрицей.

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.
- для положительно определенной матрицы $\nabla^2\Phi_\rho(x)$ декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида $\|\nabla\Phi_\rho(x)\|_2$, но по норме, индуцированной матрицей.
- Мы задаем x^0 так, что он сразу близок к $x^*(\rho)$. Это можно сделать, например, запустив демпфированного метода Ньютона на большое число итераций.

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.
- для положительно определенной матрицы $\nabla^2\Phi_\rho(x)$ декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида $\|\nabla\Phi_\rho(x)\|_2$, но по норме, индуцированной матрицей.
- Мы задаем x^0 так, что он сразу близок к $x^*(\rho)$. Это можно сделать, например, запустив демпфированного метода Ньютона на большое число итераций.
- Далее мы увеличиваем ρ. И оказывается, что теперь достаточно только одного шага Ньютона, чтобы снова гарантированно быть близко к $x^*(\rho)$, а точнее $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq e_1$. А дальше зацикливаем. Осталось только показать, что и правда $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq e_1$.

Доказательство

Еще одно обозначение: $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$, и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей: $\|x\|_A^2 = x^T A x$.

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что $H(x)$ положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

Доказательство

Еще одно обозначение: $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$, и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей: $\|x\|_A^2 = x^T A x$.

$\sqrt{\nabla H^{-1} \nabla}$

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что $H(x)$ положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

- В новых обозначениях:

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \|\underline{\nabla \Phi_\rho(x)}\|_{H^{-1}(x)} = \|\underline{\rho c + \nabla F(x)}\|_{H^{-1}(x)}$$

$$\sqrt{\nabla (\nabla^2)^{-1} \nabla}$$

$$\lambda(\varphi_{\rho_{k-1}}; x^k) \le e_1 \qquad \lambda(\varphi_{\rho_k}; x^k) \le \,?$$

Доказательство

Еще одно обозначение: $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$, и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей: $\|x\|_A^2 = x^T A x$.
Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что $H(x)$ положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

- В новых обозначениях:

$\rho_{k-1} = \rho_k \left(1 - \frac{e_2}{\sqrt{\vartheta}}\right)$

$\frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k} \|\rho_k c\|_{H^{-1}(x^k)}$

$1 - \frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}$ $1 - \left(1 - \frac{e_2}{\sqrt{\vartheta}}\right) = \frac{e_2}{\sqrt{\vartheta}}$

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \|\nabla \Phi_\rho(x)\|_{H^{-1}(x)} = \|\rho c + \nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)}$$

- Попробуем оценить $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)$ через $\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k)$, т.е. насколько ухудшает ситуацию увеличение ρ (здесь используем просто неравенство треугольника):

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) = \boxed{\|\rho_k c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}}$$

$\le (\rho_k - \rho_{k-1} + \rho_{k-1}) c + \nabla$

$$\le \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} + \|(\rho_k - \rho_{k-1}) c\|_{H^{-1}(x^k)}$$

$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}; x^k) \le e_1$

$$|h^T \nabla F(x)| \le \sqrt{J} \sqrt{h^T \nabla^2 F(x) h} \quad \forall h$$

$$|(\nabla F(x))^T H^{-1} \nabla F(x)| \le \sqrt{J} \sqrt{\nabla F^T H^{-1} \nabla F} \qquad h = H^{-1} \nabla F(x)$$

- Продолжаем с предыдущего слайда (просто подставляем ρ_k через ρ_{k-1}):

$$\sqrt{\nabla F^T H^{-1} \nabla F} \le \sqrt{J}$$

$$\begin{aligned}
\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) &\le \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} + \|(\rho_k - \rho_{k-1}) c\|_{H^{-1}(x^k)} \\
&= \lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) + \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \\
&\le e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}} \|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \le e_1 + \frac{e_2}{J}\left(e_1 + \sqrt{J}\right)
\end{aligned}$$

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}$.

$$\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} - \|\nabla\|_{H^{-1}} \le \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \le e_1$$

$$\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}} \le e_1 + \|\nabla F(x)\|_{H^{-1}} \le \sqrt{J}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:

$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованный барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 H(x) h}$.

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованный барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 H(x) h}$. В том числе для $h = H^{-1}\nabla F(x)$:
$$[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu}\sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) F(x)}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованный барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 H(x) h}$. В том числе для $h = H^{-1}\nabla F(x)$:
$$[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu}\sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) F(x)}$$
В силу симметричности $H(x)$ получаем
$$\|\nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)} \leq \sqrt{\nu}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованный барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 H(x) h}$. В том числе для $h = H^{-1}\nabla F(x)$:
$$[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu}\sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) F(x)}$$
В силу симметричности $H(x)$ получаем
$$\|\nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)} \leq \sqrt{\nu}$$
- Итого:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \sqrt{\nu}$$

Доказательство

- Объединяйем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

Доказательство

- Объединяйем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

$\rho > 1$

- Функция Φ_{ρ_k} является самосогласованной, как сумма двух самосогласованных (линейной и самосогласованного барьера). Один демпфированного метод Ньютона дает:

Φ самосогл.

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \frac{2\lambda^2(\Phi_{\rho_k}, x^k)}{1 - \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)}. \leq e_1$$

Доказательство

- Объединяйем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

$\cdot\ \nu \geqslant 1$

- Функция Φ_{ρ_k} является самосогласованной, как сумма двух самосогласованных (линейной и самосогласованного барьера). Один демпфированного метод Ньютона дает:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \frac{2\lambda^2(\Phi_{\rho_k}, x^k)}{1 - \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)}.$$

В частности, если $e_1 = 0,05$ и $e_2 = 0,08$, то

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq 0,05 = e_1.$$

Что и требовалось.

Доказательство

- Мы всегда близко к текущему $x^*(\rho)$.
- Уже знаем, что увеличение ρ влечет за собой приближение к исходной задаче.
- Осталось понять, как быстро приближаемся к решению исходной задачи с увеличением ρ.

Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть $x = x^*(\rho)$, также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T x).$$

$x = x^*(\rho)$ $\nabla \varphi_\rho(x) = 0$

ρc –

Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть $x = x^*(\rho)$, также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T x).$$

- Так как $x = x^*(\rho)$, то по условию оптимальности:

$$\nabla \Phi_\rho(x) = \rho c + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i - a_i^T x} = 0.$$

$| \langle \ ; x - x^* \rangle$

$$\rho c^T x - \rho c^T x^* = \sum \frac{a_i^T (x^* - x)}{b_i - a_i^T x} = \sum \frac{b_i - a_i^T x}{b_i - a_i^T x} = m = \nu$$

$$c^T x - c^T x^* = \frac{\nu}{\rho}$$

$f(x) - f(x^*)$

Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть $x = x^*(\rho)$, также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T x).$$

- Так как $x = x^*(\rho)$, то по условию оптимальности:

$$\nabla \Phi_\rho(x) = \rho c + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i - a_i^T x} = 0.$$

- Возьмем скалярное произведение с $(x - x^*)$:

$$\rho c^T (x - x^*) = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^T (x^* - x)}{b_i - a_i^T x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i^T x}{b_i - a_i^T x} = m$$

Доказательство

- В итоге (пользуясь, что для нашего барьера $\nu = m$):

$$f(x) - f(x^*) = c^T(x - x^*) = \frac{m}{\rho} = \frac{\nu}{\rho}$$

Доказательство

- В итоге (пользуясь, что для нашего барьера $\nu = m$):

$$f(x) - f(x^*) = c^T(x - x^*) = \frac{m}{\rho} = \frac{\nu}{\rho}$$

- Так как ρ увеличивается линейно, то и к решению мы приближаемся линейно.
- В общем случае справедлива следующая теорема.

Сходимость

Сходимость метода внутренней точки

Пусть с помощью метода внутренней точки решается задача оптимизации с линейной целевой функцией и выпуклыми ограничениями вида неравенств, при этом используются ν-самосогласованные барьеры. Тогда чтобы достичь ε решения $(f(x) - f(x^*) \varepsilon)$, необходимо

$$K = \mathcal{O}\left(\sqrt{\nu} \log \frac{\nu}{\varepsilon \rho_0}\right) \text{ итераций метода.}$$

$$\left(1 + \frac{0{,}08}{\sqrt{\nu}}\right)^{-k} \sim \varepsilon$$

Итого

- Метод внутренней точки – хорошая альтернатива методу барьеров, которая дополнительно гарантирует соблюдение ограничений.
- Для выпуклых задач метод внутренней точки обладает фундаментальной теорией и сильными гарантиями сходимости.