Домашнее задание 5

Deadline - 18.10.2024 в 23:59

Основная часть

Выпуклые множества

Задача 1. Проверьте, являются ли выпуклыми множества

1) (0.5 балла) $S = \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 x_2 \geq 1\}$.
2) (0.5 балла) $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_d\}$.
3) (1 балл) $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\}$, где $a \neq b \in \mathbb{R}^d$.

Задача 2. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и пусть $\|\cdot\|$ – норма на $\mathbb{R}^d$.

1) (1 балл) Для $a \geq 0$ определим множество S_a как:

$$S_a = \{x \mid \mathrm{dist}(x, S) \leq a\},$$

где

$$\mathrm{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$

Множество S_a называется расширенным на a относительно S. Докажите, что если S выпукло, то S_a также выпукло.

2) (1 балл) Для $a \geq 0$ определим множество S_{-a} как:

$$S_{-a} = \{x \mid B(x, a) \subset S\},$$

где $B(x, a)$ - открытый шар (в норме $\|\cdot\|$) с центром в x и радиусом a. Множество S_{-a} называется суженным на a относительно S. Докажите, что если S выпукло, то S_{-a} также выпукло.

Задача 3. (1 балл) Пусть дано множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ и $x^0 \in X$. Докажите, что множество

$$K(X, x^0) = \left\{y \in \mathbb{R}^d \mid y^T x^0 \geq y^T x \text{ for all } x \in X\right\}$$

является выпуклым конусом.

Выпуклые функции

Задача 1. (1 балл) Пусть дана функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Выясните является ли она выпуклой, если $f(x) = x_1^2 x_2^2$.

Задача 2. (1.5 балла) Пусть дана функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Выясните является ли функция выпуклой/μ-сильно выпуклой, если $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^4$. В случае μ-сильной выпуклости нужно найти и μ.

Задача 3. (1.5 балла) Пусть дана функция $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$. Здесь $\mathbb{S}$ – симметричные матрицы. Выясните является ли функция выпуклой/вогнутой, если

1) $f(X) = \lambda_{\max}(X)$
2) $f(X) = \lambda_{\min}(X)$

Задача 4. (1 балл) Пусть $f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}$ – функция с областью определения $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d$. Покажите, что f выпукла если и только если ее сужение на любую прямую выпукло. Формально это будет значить, что для любых $x_0 \in \operatorname{dom} f, u \in \mathbb{R}^d$, функция $g : t \mapsto f(x_0 + tu)$ выпукла на $\operatorname{dom} g := \{t \in \mathbb{R} : x_0 + tu \in \operatorname{dom} f\}$.

Дополнительная часть

Выпуклые множества

Задача 1. (1 балл) Назовем множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ "средневыпуклым если для любых его элементов x и y их середина также принадлежит X, т.е. $\frac{x+y}{2} \in X$. Докажите, что для замкнутых множеств "средневыпуклость"равносильна выпуклости.

Задача 2. (1.25 балла) Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_{d+2}\}$ - множество из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$. Покажите, что X можно разбить на два подмножества S и $T = X \setminus S$ таким образом, что пересечение их выпуклых оболочек (см. определение в Пособии на странице 160) не пусто.

Задача 3. Проверьте, верны ли следующие утверждения. Свою точку зрения объясните.

1) (1.25 балла) Проекция выпуклого множества на любое подпространство тоже выпукла.

Пояснение. Проекцией на множество $\mathcal{X}$ называется $\Pi_{\mathcal{X}}(x) := \arg\min\limits_{y \in \mathcal{X}} \frac{1}{2}\|x - y\|_2$.

2) (1.5 балла) Если проекция на любое *собственное* (не совпадающее со всем пространством) подпространство выпукла, то и изначальное множество выпукло?

Выпуклые функции

Задача 1. (1 балл) Докажите, что для всех $p, q \in \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{d} x_i = 1\}$ справедливо следующее утверждение

$$\sum_{i=1}^{d} \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) p_i \geq 0.$$

Задача 2. (1 балл) Пусть $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – выпукла, $g(0) = 0$. Определим

$$f(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x g(t)dt, \ x > 0$$

Покажите, что $f(x)$ – тоже выпукла.

Задача 3. (1.5 балла) Выясните является ли функция $f : \mathbb{S}^d_{++} \to \mathbb{R}$ выпуклой/вогнутой, если $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$.

Задача 4. (1.5 балла) Воспользовавшись неравенством Йенсена для выпуклой на $\mathbb{R}_{++}$ функции $f(x) = -\ln x$, докажите неравенство Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^{d} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

для $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $\mathbb{R}_{++}$ – положительные действительные числа.