Задача с ограничениями

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$
$$\text{s.t. } h_i(x) = 0 \qquad i = 1..m$$

Переписали:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x) \qquad \rho > 0$$
$$\text{s.t. } h_i(x) = 0 \qquad i = 1..m$$

решения эквивалентны $h_i(x) = 0$

Упростили:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \underbrace{f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x)}_{f_\rho(x)}$$

$f_\rho(x)$ ← штрафная функция

нет ограничений

⊕ задача без ограничений

⊖ не та же самая задача = решения другие

⊖ можем выйти за пределы ограничений

↳ $$\lim_{\rho \to +\infty} f_\rho(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ удовл. огранич.} \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

Метод штрафных функций

$$\rho^{k+1} = \rho^k \cdot \alpha \qquad \alpha > 1$$

$$x^{k+1} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^d} f_{\rho^{k+1}}(x)$$

оценить x^{k+1} хорошо или нет

Более общая постановка

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$
$$\text{s.t. } h_i(x) = 0 \quad i = 1 \ldots m$$
$$g_j(x) \le 0 \quad j = 1 \ldots n$$

$$f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(g_j(x)\right)_+^2$$

$y_+ = \max\{0; y\}$

Свойства штрафной функции и задачи

1) x^* – решение исходной задачи,
x^*_ρ – решение штрафной, тогда

$$f(x^*) \ge f(x^*_\rho)$$

Док-во:

$h_i(x^*) = 0$

$$f(x^*) = f_\rho(x^*) \ge \min_{x \in \mathbb{R}^d} f_\rho(x) = f_\rho(x^*_\rho) \ge f(x^*_\rho)$$

∎

2) С увеличением ρ решение штрафной задачи не ухудшает степень нарушения ограничений. Т.е. $\rho_1 > \rho_2 \hookrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_2}) \geq \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_1})$$

Док-во:

$x^*_{\rho_1}$ – решение

$x^*_{\rho_2}$ – решение

$$+\begin{cases} \cancel{f(x^*_{\rho_1})} + \rho_1 \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_1}) \leq \cancel{f(x^*_{\rho_2})} + \rho_1 \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_2}) \\ \cancel{f(x^*_{\rho_2})} + \rho_2 \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_2}) \leq \cancel{f(x^*_{\rho_1})} + \rho_2 \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_1}) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\cancel{(\rho_1 - \rho_2)}}_{>0} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_1}) \leq \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{(\rho_1 - \rho_2)}}_{>0} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x^*_{\rho_2}) \quad \blacksquare$$