Выпуклые функции.
Основная часть

Задача 1. (2 балла) Пусть дана функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Выясните является ли она выпуклой, если $f(x) = x_1^2 x_2^2$.

Задача 2. (3 балла) Пусть дана функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Выясните является ли функция выпуклой/μ-сильно выпуклой, если $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^4$. В случае μ-сильной выпуклости нужно найти и μ.

Задача 3. (3 балла) Пусть дана функция $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$. Здесь $\mathbb{S}$ – симметричные матрицы. Выясните является ли функция выпуклой/вогнутой, если

1) $f(X) = \lambda_{\max}(X)$
2) $f(X) = \lambda_{\min}(X)$

Задача 4. (2 балла) Пусть $f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}$ – функция с областью определения $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^d$. Покажите, что f выпукла если и только если ее сужение на любую прямую выпукло. Формально это будет значить, что для любых $x_0 \in \operatorname{dom} f, u \in \mathbb{R}^d$, функция $g : t \mapsto f(x_0 + tu)$ выпукла на $\operatorname{dom} g := \{t \in \mathbb{R} : x_0 + tu \in \operatorname{dom} f\}$.

Выпуклые функции.
Дополнительная часть

Задача 1. (2 балла) Докажите, что для всех $p, q \in \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{d} x_i = 1\}$ справедливо следующее утверждение

$$\sum_{i=1}^{d} \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) p_i \geq 0.$$

Задача 2. (2 балла) Пусть $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – выпукла, $g(0) = 0$. Определим

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt, \; x > 0$$

Покажите, что $f(x)$ – тоже выпукла.

Задача 3. (3 балла) Выясните является ли функция $f : \mathbb{S}^d_{++} \to \mathbb{R}$ выпуклой/вогнутой, если $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$.

Задача 4. (3 балла) Воспользовавшись неравенством Йенсена для выпуклой на $\mathbb{R}_{++}$ функции $f(x) = -\ln x$, докажите неравенство Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^{d} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

для $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $\mathbb{R}_{++}$ – положительные действительные числа.