

Сопряженные конусы.

Основная часть

Задача 1. Постройте X^* , если

1) (1 балл) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}$

2) (1 балл) $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq \frac{x_1^2}{2}\}$

3) (1 балл) $X = \{x \in \mathbb{R}^d : \|Ax\| \leq 1, A \in \mathbb{S}_{++}^d\}$

Задача 2. (2 балла) Постройте X^* и X^{**} , если

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d x_i = 1 \right\}$$

Сопряженные конусы.

Дополнительная часть

Задача 1. (2 балла) Пусть \mathbb{A}^d - множество антисимметричных матриц, т.е. $X \in \mathbb{A}^d \Leftrightarrow X^T = -X$. Покажите, что $(\mathbb{A}^d)^* = \mathbb{S}^d$.

Задача 2. Докажите, что K_p и K_{p_*} являются взаимосопряженными, т.е. $(K_p)^* = K_{p_*}$ и $(K_{p_*})^* = K_p$, где $K_p = \{(x, \mu) \in R^{d+1} : \|x\|_p \leq \mu\}$ и

1) (1.5 балла) $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_*} = 1$

2) (1.5 балла) $p = 1$, $p_* = \infty$