Семинар 7

① Сопряжённые множества

Опр $X \subseteq \mathbb{R}^n$ - непустое

$$X^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \ \forall x \in X \}$$

Факт X^* — всегда выпуклое, замкнутое и содержит 0

Опр X_1 и X_2 взаимосопряжённые, если $X_1^* = X_2$ и $X_2^* = X_1$

Опр X самосопряжённое, если $X^* = X$

Опр Второе сопряжённое

$$X^{**} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \ \forall y \in X^* \}$$

Утв
1. X^* замкнуто, выпукло и содержит 0
2. $X^{**} = cl(conv(X \cup \{0\}))$
3. $(\bigcup X_i)^* = \bigcap X_i^*$
4. $X^* = (cl(X))^*$

Опр Двойственная норма

$$\|y\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, y \rangle$$

$\|\cdot\|_p$ — сопряжённая $\|\cdot\|_q$: $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

Пример

$$B_{\|\cdot\|}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le r\}$$

$$(B_{\|\cdot\|}(0,r))^* - ?$$

1. $\langle x, y\rangle \ge -\|x\|\|y\|_* \ge -r\|y\|_*$

Если $\|y\|_* \le \frac{1}{r}$, то $\langle x, y\rangle \ge -1$

$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_* \le \frac{1}{r}\} \subseteq (B_{\|\cdot\|}(0,r))^*$

2. Если $\|y\|_* > \frac{1}{r}$, то $\exists e \in \mathbb{R}^n$ $\|e\| \le 1$ и $\langle y, e\rangle > \frac{1}{r}$

Возьмём $x = -r\frac{e}{\|e\|}$

Т.е. $\langle x, y\rangle = \langle -\frac{er}{\|e\|}, y\rangle = \frac{r}{\|e\|}\langle -e, y\rangle <$

$< -\frac{r}{\|e\|}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{1}{\|e\|} \le -1$, то $\langle x, y\rangle < -1$ и

$y \notin (B_{\|\cdot\|}(0,r))^*$

$$(B_{\|\cdot\|}(0,r))^* = B_{\|\cdot\|_*}(0, \tfrac{1}{r})$$

Двойственные конусы

K

Опр $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \ge 0 \ \forall x \in K\}$

$\lambda x \in K$

Свойства:

1. K^* выпуклый и замкнутый
2. Если $K_1 \subseteq K_2$, то $K_2^* \subseteq K_1^*$
3. Если K – выпуклый и замкнутый, то $K^{**} = K$

Пример $K = \mathbb{R}^n_+$

$$K^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \ \forall x \geq 0 \}$$

$$K^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq 0 \} = K$$

Сопряжённые функции

Опр $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f^* = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle x, y \rangle - f(x) \}$

сопряжённая функция

Опр Функция собственная, если не принимает $-\infty$

Свойства

1. f^* — всегда выпуклая и замкнутая
2. Если $f(x)$ выпуклая и замкнутая, то $f^{**} = f$
3. f — выпуклая и замкнутая, собственная

   а) f — μ-сильно выпуклая

   б) f^* — $\frac{1}{\mu}$ — липшицева

Эквивалентно

Пример $f(x) = \langle a, x \rangle + b$

$$f^*(y) = \sup_x \{ \langle y, x \rangle - \langle a, x \rangle - b \} =$$

$$= \sup_x \{ \langle y - a, x \rangle - b \} = \begin{cases} -b, & y = a \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример $f(x)=e^x$

$f^*(y)=\sup\limits_x\{xy-e^x\}$

1) $y<0: +\infty$
2) $y=0: 0$
3) $y>0: x^*=\log y \Rightarrow f^*(y)=y\log y-y$

Пример $f(x)=\log(1+e^x)$

$f^*(y)=\sup\limits_x\{xy-\log(1+e^x)\}$

1) $y<0: f^*(y)\to+\infty: x\to-\infty$
2) $y>1: f^*(y)\to+\infty: x\to+\infty$
3) $y=0: f^*(y)=\sup\limits_x(-\log(1+e^x))=0$
4) $y=1: f^*(y)=\sup\limits_x\{x-\log(1+e^x)\}=0$
5) $0<y<1: y-\frac{1}{1+e^x}e^x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+e^x)y-e^x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x(1-y)=y \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\log y-\log(1-y)$

$f^*(y)=y\log y-y\log(1-y)-$

$-\log\left(1+\frac{y}{1-y}\right)$

$\parallel$

$\log\left(\frac{1}{1-y}\right) =$

$= y\log y-y\log(1-y)+\log(1-y)=$

$= y\log y+(1-y)\log(1-y)$

Пример $f(x) = \|x\|$

$f^*(y) = 0$ с $\operatorname{dom} f^* = B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$

1) $\|y\|_* > 1 \quad \exists z \ \|z\| \le 1$ и $\langle y, z \rangle > 1$

Возьмём $x = tz$ и $t \to \infty$

$\langle y, x \rangle - \|x\| = t(\langle y, x \rangle - \|z\|) \to +\infty$

2) $\|y\|_* \le 1$

$\langle y, x \rangle \le \|x\| \|y\|_*$

$\langle y, x \rangle - \|x\| \le 0$

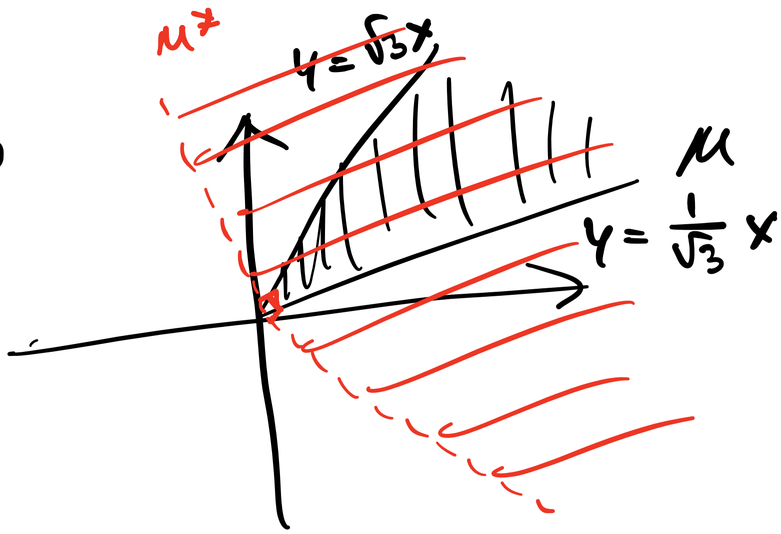
При $x = 0 \quad = 0 \Rightarrow f^*(y) = 0$

Пример

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \ \frac{y}{x} \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]\}$

M^* – ?

$z: \langle x, z \rangle \ge 0$

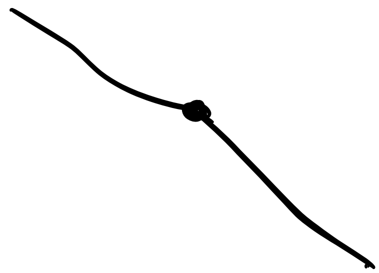


Пример $f(x) = \max\{2x, -3x+1\}$

$f^*(y) - ?$

$$f^*(y) = \sup_x \{xy - f(x)\} =$$
$$= \sup_x \{xy - \max\{2x, -3x+1\}\}$$
$$= \sup_x \{xy + \min\{-2x, 3x-1\}\}$$
$$= \sup_x \{\min\{x(y-2), x(y+3)-1\}\}$$

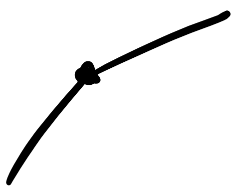
1) $y < -3$



$x \to -\infty$

$f^*(y) = +\infty$

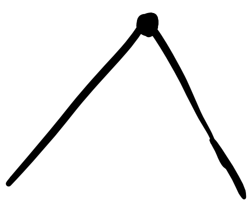
2) $y > 2$



$x \to +\infty$

$f^*(y) = +\infty$

3) $y \in [-3, 2]$



$-2x = 3x - 1 \Rightarrow$

$x^* = \frac{1}{5}$

$f^*(y) = \frac{y-2}{5}$