Serial Mekanika Kuantum Minimalis 2.0
Kuliah #02-Aljabar Vektor dan Matriks

Ahmad R. T. Nugraha (@fisikawan.gendeng)

ver. 20 Februari 2026

Mekanika kuantum pada dasarnya adalah teori yang bersifat linier sehingga membutuhkan sokongan aljabar linier. Pada sesi kali ini, kita akan membahas operasi-operasi dasar aljabar linier, khususnya yang melibatkan vektor dan matriks. Tidak semua teknik aljabar yang diperlukan dalam mekanika kuantum akan dibahas sekarang. Seiring waktu ada yang diungkap belakangan mengikuti materi mekanika kuantum yang bersesuaian.

1 Vektor dan Himpunan Basis

Suatu vektor sembarang $\vec{a}$ yang berada pada bidang dua dimensi (2D) x-y dapat ditulis sebagai berikut:

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y, \tag{1}$$

dengan $\vec{u}_x$ dan $\vec{u}_y$ merupakan vektor-vektor satuan tanpa dimensi yang masing-masing mengarah ke sumbu-x dan sumbu-y positif. Sembarang vektor yang berada pada bidang x-y dapat dinyatakan dengan memberikan komponen-komponennya (koordinat) pada arah $\vec{u}_x$ dan $\vec{u}_y$, seperti pada pers. (1) dengan komponen-komponennya adalah a_x dan a_y. Vektor $\vec{u}_x$ dan $\vec{u}_y$ disebut sebagai vektor basis dan keduanya membentuk suatu himpunan basis. Himpunan basis ini mengandung dua buah vektor karena berada pada ruang vektor 2D. Ruang vektor berdimensi N pada dasarnya memiliki N buah vektor basis.

Untuk memudahkan penulisan, kita misalkan vektor $\vec{a}$ menyatakan sebuah objek yang memiliki beberapa komponen. Spesifikasi vektor $\vec{a}$ pada 2D akan memerlukan dua bilangan, yakni komponen-komponennya, a_x dan a_y. Persamaan (1) adalah salah satu cara saja dalam menyatakan vektor $\vec{a}$, tetapi kita sebetulnya bisa melakukannya dengan cara lain. Vektor $\vec{a}$ dapat pula dinyatakan dalam bentuk vektor baris seperti

$$\vec{a} \doteq \left(a_x, a_y\right), \tag{2}$$

atau sebuah vektor kolom seperti

$$\vec{a} \doteq \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sepanjang kita memiliki komponen-komponen vektor $\vec{a}$, kita akan bisa mengetahui detail vektor $\vec{a}$ tersebut bagaimanapun notasi yang digunakan untuk merepresentasikan vektor $\vec{a}$. (Catatan: Notasi '$\doteq$' kita gunakan untuk menyatakan 'dapat direpresentasikan oleh'.)

Dalam bentuk vektor kolom, vektor-vektor basis yang berada pada bidang x-y dapat ditulis sebagai berikut

$$\vec{u}_x \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_y \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Vektor kolom yang ekuivalen dengan pers. (1) adalah

$$\vec{a} = a_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Vektor baris yang ekuivalen dengan pers. (1) juga dapat ditulis dengan cara yang serupa seperti vektor kolom.

Salah satu hal yang menarik mengenai notasi pada pers. (1) adalah eksplisitnya notasi tersebut mengandung vektor-vektor basis $\vec{u}_x$ dan $\vec{u}_y$ sehingga tidak ada kerancuan mengenai sistem koordinat yang digunakan. Namun, vektor baris dan vektor kolom pada pers. (2) dan (3) tidak merujuk pada vektor basis tertentu secara eksplisit. Kita perlu mengetahui apa basis yang digunakan dalam notasi tersebut. Jika basisnya berubah, vektor baris dan vektor kolom akan ikut berubah. Kita bisa ilustrasikan melalui suatu contoh spesifik.

Misalkan untuk sistem koordinat x-y kita memiliki sebuah vektor:

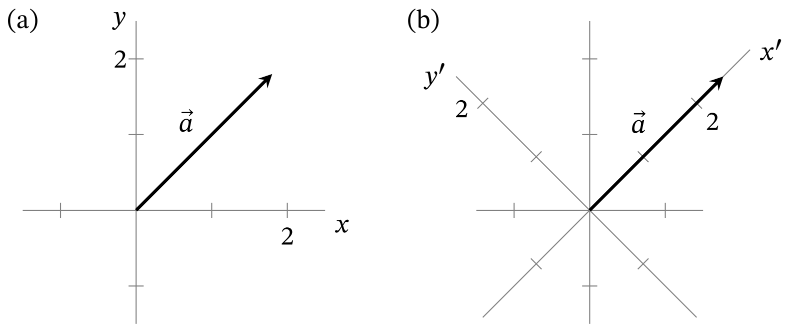
$$\vec{a} = 2\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \doteq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Visualisasi vektor dengan panjang $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ini ditunjukkan pada Gambar 1(a). Kita juga dapat menyatakan $\vec{a}$ di dalam sistem koordinat x'-y', yang merupakan rotasi dari sistem x-y sebesar 45 berlawanan jarum jam, seperti ditunjukkan pada Gambar 1(b). Pada sistem koordinat ini, panjang vektor sebesar $2\sqrt{2}$ sudah berimpit dengan vektor satuan $\vec{u}'_x$ sehingga kita bisa tuliskan

$$\vec{a} = 2\sqrt{2}\vec{u}'_x \doteq \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Seperti ditunjukkan pada Gambar 1, vektor $\vec{a}$ tidak berubah, yakni tetap memiliki panjang dan arah yang sama. Pada pers. (6) dan pers. (7), kita hanya menyatakan $\vec{a}$ menggunakan dua himpunan basis yang berbeda. Jika kita menggunakan notasi vektor satuan, tidak ada keraguan mengenai sistem koordinat yang sedang kita gunakan. Namun, ketika kita sekarang menggunakan notasi vektor kolom, tidak ada indikasi basis apa yang sedang kita bicarakan. Misalnya pada pers. (6), jika kita melihat sekilas bentuk $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, bagaimana kita bisa mengetahui apakah vektor tersebut dinyatakan pada basis x-y atau basis x'-y'?

Walau tidak selalu diperlukan, supaya tidak membingungkan, kita boleh membubuhkan tambahan subskrip pada setiap representasi vektor untuk mengindikasikan basis mana



Gambar 1: Vektor $\vec{a}$ dinyatakan dalam (a) sistem koordinat x-y dan (b) sistem koordinat x'-y'.

yang digunakan. Untuk contoh di atas, kita dapat menuliskan vektor-vektor kolom dalam bentuk $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{x,y}$ dan $\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{x',y'}$. Itulah alasan mengapa kita menggunakan simbol $\doteq$ pada catatan ini, yang bermakna "diwakili oleh", yakni sebagai pembeda antara suatu vektor dan representasinya sebagai baris atau kolom. Vektornya sendiri selalu sama dalam hal besar dan arahnya, independen alias tidak bergantung pada representasinya. Namun, suatu vektor yang sama dapat direpresentasikan secara berbeda bergantung pada basis yang digunakan.

2 Perkalian Dalam (*Inner Product*)

Dari pelajaran matematika di sekolah, kita pernah mengenal perkalian skalar adalah sebuah cara mengalikan dua buah vektor yang menghasilkan suatu skalar. Perkalian skalar disebut pula sebagai perkalian titik (*dot product*) atau secara umum adalah "perkalian dalam" *inner product*. Untuk melakukan perkalian dalam, kita mengalikan komponen-komponen dua buah vektor, kemudian menjumlahkannya. Di dalam bentuk vektor baris dan kolom, hasil kali dalam dari vektor $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$ dan $\vec{b} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z$ dapat dituliskan sebagai

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \doteq \begin{bmatrix} a_x, a_y, a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{8}$$

Dalam mekanika kuantum, kita pada dasarnya tidak lagi berhadapan dengan ruang vektor di ruang riil tiga dimensi (3D) saja. Oleh karena itu, penggunaan subskrip x, y, z untuk menandakan koordinat tidaklah terlalu relevan. Alih-alih subskrip koordinat, kita dapat angka. Selain itu, secara umum elemen setiap vektor merupakan bilangan kompleks. Sebagai contoh penggunaan angka dalam indeks komponen vektor, kita bisa tuliskan

$$\vec{a} \doteq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

dengan a_1, a_2, dan a_3 bilangan kompleks.

Kita telah menjabarkan perkalian skalar pada pers. (8) dalam bentuk perkalian vektor baris dan vektor kolom, dengan vektor barisnya ditulis di sebelah kiri. Cara ini harus kita lakukan untuk perkalian dalam, yakni menggunakan bentuk vektor baris dan vektor kolom, karena untuk menghasilkan skalar kita tidak bisa mengalikan langsung dua buah vektor baris atau dua buah vektor kolom.

Jika kita memiliki dua buah vektor kolom, kita harus mengubah salah satunya menjadi bentuk vektor baris sebelum melakukan perkalian dalam. Ada dua langkah untuk melakukannya secara lengkap. Pertama, kita menulis elemen vektor kolom sebagai sebuah vektor baris. Kedua, kita ambil konjugat kompleks setiap elemen. Vektor baris dari vektor kolom pada pers. (9) adalah

$$\vec{a} \doteq \left[a_1^*, a_2^*, a_3^*\right]. \tag{10}$$

Sebaliknya, kita dapat mengubah vektor baris ke vektor kolom dengan cara yang sama. Perhatikan sekali lagi bahwa konjugat kompleks dilakukan karena vektor di dalam mekanika kuantum secara umum melibatkan bilangan kompleks sehingga kita harus terbiasa dengan pengambilan konjugat kompleks dari suatu vektor.

Mengapa kita mengambil konjugat kompleks ketika mengubah vektor baris ke vektor kolom maupun sebaliknya? Misalkan kita melakukan perkalian dalam untuk sebuah vektor dengan dirinya sendiri. Kita perlu dua bentuk vektor, yakni sebuah vektor baris dan sebuah vektor kolom. Hasil kali dalamnya adalah

$$\begin{aligned} \left[a_1^*, a_2^*, a_3^*\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + a_3^* a_3 \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Perhatikan bahwa konjugat kompleks memastikan kita akan memperoleh bilangan riil ketika melakukan perkalian dalam dari suatu vektor dengan dirinya sendiri. Akar kuadrat dari hasil dari perkalian skalar sebuah vektor terhadap dirinya sendiri disebut dengan magnitudo atau norma (*norm*) dari vektor tersebut. Norma merupakan ukuran "panjang" dari sebuah vektor sehingga selalu bernilai positif. Sebuah vektor dikatakan ternormalisasi jika normanya bernilai 1.

Secara umum, hasil kali dalam untuk dua buah vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ yang berada di ruang berdimensi N dapat dituliskan sebagai:

$$\left[a_1^*, \cdots, a_N^*\right]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} a_i^* b_i \tag{12}$$

Di dalam ruang 3D, vektor-vektor akan saling ortogonal atau tegak lurus satu sama lain jika vektor yang satu membentuk sudut 90° dengan yang lainnya. Serupa dengan itu, dua buah vektor bersifat ortogonal jika hasil kali dalamnya bernilai nol. Vektor-vektor basis di dalam ruang 3D selalu ortogonal satu sama lain. Dengan kata lain, pada koordinat kartesian x, y, x, kita memiliki $\vec{u}_x \perp \vec{u}_y \perp \vec{u}_z$. Jika kita memiliki himpunan basis yang semua vektornya saling tegak lurus dan ternormalisasi, kita katakan himpunanan vektor basis tersebut “ortonormal”. Vektor-vektor satuan $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ adalah contoh himpunan basis yang ortonormal.

3 Matriks Persegi

Pada bagian ini, kita akan fokus pada matriks persegi, yakni matriks yang memiliki jumlah kolom dan baris yang sama. Pengetahuan dasar tentang cara mencari determinan dan perkalian matriks dianggap sudah dimiliki pembaca.

Kita menggunakan M_{ij} untuk menandai elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari sebuah matriks $\vec{M}$ (kita gunakan huruf tebal kapital untuk menyatakan suatu matriks persegi pada catatan ini). Ingat bahwa hasil kali sebuah matriks dengan sebuah vektor kolom menghasilkan suatu vektor kolom lainnya. Di dalam dimensi N, komponen-komponen vektor $\vec{b}$ yang berasal dari operasi $\vec{b} = \mathbf{M}\vec{a}$ dapat ditulis sebagai hasil perkalian skalar dari baris-baris matriks $\mathbf{M}$ dengan vektor $\vec{a}$

$$b_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} a_j. \tag{13}$$

Persamaan (8) tidak lain menyatakan perkalian sebuah matriks dengan sebuah vektor kolom. Demikian pula, kita dapat menyatakan elemen-elemen dari hasil perkalian matriks $\mathbf{M} = \vec{A}\vec{B}$ dalam bentuk perkalian skalar dari baris ke-i matriks pertama dan kolom ke-j matriks kedua, yakni

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} B_{kj}. \tag{14}$$

Mungkin kita sudah menyadari bahwa secara umum $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$, yang akan kita konfirmasi pada saat latihan soal. Urutan perkalian dari matriks sangatlah penting karena perkalian matriks secara umum tidak komutatif. Secara spesifik, kita katakan bahwa matriks tidak selalu “komut” satu sama lain dengan implikasi yang sangat mendalam pada mekanika kuantum yang akan kita diskuskan pada kuliah-kuliah mendatang.

4 Vektor *Eigen* dan Nilai *Eigen*

Selanjutnya, kita akan membahas masalah matematika yang sering muncul dan kerap kali merupakan hasil dari masalah fisika, yakni permasalahan nilai *eigen*. Dalam masalah ini, kita diberikan sebuah matriks $\mathbf{M}$ dan kita perlu memperoleh vektor $\vec{x}$ serta konstanta λ yang merupakan penyelesaian dari persamaan

$$\mathbf{M}\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{15}$$

Dengan kata lain, terdapat beberapa vektor khusus sedemikian rupa sehingga ketika kita mengalikannya dengan matriks $\mathbf{M}$ akan memberikan kita bentuk skalarnya. Vektor-vektor yang merupakan penyelesaian dari pers. (15) dinamakan sebagai vektor *eigen* dari matriks **M**, sementara konstanta yang terkait dinamakan sebagai nilai *eigen* dari matriks **M**.

Bagaimana cara kita menyelesaikannya? Kita bisa mulai dengan menulis ulang pers. (15) sebagai

$$\mathbf{M}\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0. \tag{16}$$

Untuk memfaktorkan vektor $\vec{x}$ keluar, kita perlu sebuah matriks identitas **I** yang memiliki nilai diagonal 1, dan nilai 0 selain itu. Sebagai contoh, matriks identitas dalam ruang 3D:

$$\mathbf{I} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Cara lain untuk menyatakan matriks identitas adalah dengan delta Kronecker yang didefinisikan sebagai

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = j \\ 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}. \tag{18}$$

Matriks identitas sangat berguna karena perkaliannya dengan vektor atau matriks lain menghasilkan vektor atau matriks itu sendiri. Contohnya:

$$\mathbf{I}\vec{x} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \doteq \vec{x}. \tag{19}$$

Dengan menggunakan fakta ini, kita dapat menyisipkan matriks identitas ke pers. (16) dan memperoleh

$$\mathbf{M}\vec{x} - \lambda\vec{x} = \mathbf{M}\vec{x} - \lambda\vec{I}\vec{x} = \left(\mathbf{M} - \lambda\vec{I}\right)\vec{x} = 0. \tag{20}$$

Untuk kasus 2D, pers. (20) secara eksplisit dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

yang ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} (M_{11} - \lambda)x_1 + M_{12}x_2 &= 0, \\ M_{21}x_1 + (M_{22} - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Persamaan (22) memiliki tiga parameter yang tidak diketahui, yakni λ, x_1 dan x_2. Persamaan (21) maupun (22) memiliki penyelesaian jika dan hanya jika determinan matriks pada pers. (21) bernilai 0 (dikenal sebagai persamaan karakteristik atau persamaan sekuler), yakni

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= (M_{11} - \lambda)(M_{22} - \lambda) - M_{12}M_{21} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Untuk sementara, dalam prinsip penyelesaian permasalahan nilai *eigen* kita bisa mencukupkan pada langkah di atas sampai kita nanti memecahkan contoh soal. Jika kita perhatikan pers. (23) yang berorde dua terhadap nilai *eigen* λ, tentunya terdapat dua penyelesaian untuk λ, yang katakanlah λ_a dan λ_b. Setelah nilai-nilai *eigen* λ_a dan λ_b diperoleh, setiap nilai *eigen* tersebut memiliki vektor *eigen* terkait, yakni $\vec{x}_a$ dan $\vec{x}_b$. Untuk memperoleh vektor-vektor *eigen* ini, kita perlu substitusikan setiap nilai *eigen* ke persamaan semula [pers. (21)], kemudian selesaikan persamaan untuk vektor *eigen* tersebut.

Misalkan kita memiliki persamaan

$$\begin{bmatrix} M_{11}-\lambda_a & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}-\lambda_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \end{bmatrix} = 0. \tag{24}$$

Persamaan ini ekuivalen dengan dua persamaan linier yang memiliki dua parameter tidak diketahui x_{a1} dan x_{a2} sehingga kita bisa menyelesaikannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (M_{11}-\lambda_a)x_{a1} + M_{12}x_{a2} &= 0, \\ M_{21}x_{a1} + (M_{22}-\lambda_a)x_{a2} &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Pada masalah-masalah berdimensi N, secara umum kita akan memiliki N nilai eigen dan N vektor eigen.

Ada satu trik terakhir dalam upaya mencari vektor-vektor *eigen* yang terdefinisi dengan baik. Perhatikan bahwa persamaan yang menentukan vektor *eigen* [sebagai contoh: pers. (25)] tidaklah independen, alias tidak ada penyelesaian unik terhadap persamaan tersebut. Kita bisa memperoleh penyelesaian untuk x_{a2} dalam bentuk x_{a1} atau sebaliknya, tetapi keduanya tidak dapat ditentukan secara unik. Dalam hal ini, kita memiliki kebebasan menerapkan kondisi tambahan untuk mendapatkan solusi yang unik. Secara khusus, kita memilih untuk menormalisasi vektor *eigen* sehingga

$$\begin{bmatrix} x_{a1}{}^*, x_{a2}{}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{a1} \\ x_{a1} \end{bmatrix} = |x_{a1}|^2 + |x_{a2}|^2 = 1. \tag{26}$$

Penerapannya dapat kita lihat pada contoh soal.

Contoh perhitungan nilai *eigen* dan vektor *eigen*

Tentukan nilai *eigen* dan vektor *eigen* dari matriks persegi:

$$\mathbf{M} \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solusi:

Kita dapat menemukan nilai-nilai eigen dengan cara mengurangkan setiap elemen diagonal matriks $\mathbf{M}$ dengan λ, dan membuat nilai determinannya bernilai 0

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

yang memberikan

$$-\lambda(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita peroleh dua nilai λ:

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ \lambda_{+} &= 2, \quad \lambda_{-} = 1.\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan vektor *eigen* yang bersesuaian dengan nilai *eigen* $\lambda_+ = 2$, kita manfaatkan pers. (24) sehingga kita bisa menuliskan

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 1 \\ -2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{bmatrix} = 0,$$

yang menghasilkan dua persamaan dengan dua parameter yang tidak diketahui:

$$\begin{aligned} -2x_{+1} + x_{+2} &= 0, \\ -2x_{+1} + x_{+2} &= 0. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa kedua persamaan tersebut sama saja sehingga kita memperoleh $x_{+2} = 2x_{+1}$. Vektor *eigen* yang bersesuaian dengan nilai *eigen* $\lambda_+ = 2$ adalah

$$\vec{x}_+ = \begin{bmatrix} x_{+1} \\ 2x_{+1} \end{bmatrix} = x_{+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Kita dapat menormalisasinya dengan menuliskan

$$(x_{+1})^2(1^2 + 2^2) = 1, \quad x_{+1} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

sehingga salah satu pasangan nilai *eigen* dan vektor *eigen* yang kita peroleh di sini adalah

$$\lambda_+ = 2, \quad \vec{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa, untuk nilai eigen $\lambda_- = 1$, kita akan peroleh vektor *eigen*

$$\vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Latihan (Soal-Jawab)

Soal 1

Hitunglah hasil-hasil perkalian matriks berikut ini:

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

Coba cek apakah penukaran urutan perkalian pada bagian (iii) menghasilkan matriks yang sama atau berbeda?

Jawaban

(i) Perkalian matriks berukuran 3×3 dengan vektor kolom 3×1 dilakukan dengan menjumlahkan hasil kali elemen-elemen baris pada matriks pertama dengan elemen-elemen kolom pada matriks kedua.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 \cdot 1) + (0 \cdot 6) + (4 \cdot 3) \\ (3 \cdot 1) + (1 \cdot 6) + (0 \cdot 3) \\ (0 \cdot 1) + (0 \cdot 6) + (2 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0+12 \\ 3+6+0 \\ 0+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(ii) Lakukan seperti bagian (i):

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (5 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 3) & (5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0) & (5 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0) \\ (3 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 3) & (3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) & (3 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ (0 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 3) & (0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0) & (0 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 35 \\ 8 & 6 & 22 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Pengujian sifat komutatif pada matriks 2×2.

Kita misalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Hasil perkalian **AB**:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 \cdot 2 + 0 \cdot 0) & (5 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ (3 \cdot 2 + 7 \cdot 0) & (3 \cdot 1 + 7 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- Hasil perkalian **BA**:

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 5 + 1 \cdot 3) & (2 \cdot 0 + 1 \cdot 7) \\ (0 \cdot 5 + 0 \cdot 3) & (0 \cdot 0 + 0 \cdot 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks **AB** tidak sama dengan **BA**, yakni $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ sehingga perkalian matriks pada umumnya tidak bersifat komutatif.

Soal 2

Tentukan nilai determinan untuk setiap matriks di bawah ini:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Jawaban

(i) Untuk matriks 2×2 berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, determinan dihitung dengan $ad - bc$.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (4 \cdot 8) - (2 \cdot 1) = 32 - 2 = 30$$

(ii) Untuk matriks 3×3 dan dimensi lebih besar, kita dapat menggunakan uraian "kofaktor". Pilihan termudah adalah melakukan uraian sepanjang kolom kedua karena mengandung banyak angka nol.

$$\begin{aligned} \det &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\ &= 0 + (1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 2 - 4 \cdot 2) = 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

Soal 3

Untuk dua buah matriks berikut ini:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Hitunglah nilai-nilai *eigen* dan vektor-vektor *eigen*-nya.

(ii) Buktikan bahwa vektor-vektor *eigen*-nya ortogonal.

Jawaban

Pertama, kita lakukan pencarian nilai-nilai *eigen* dan vektor-vektor *eigen* untuk matriks $\mathbf{M}_1$.
(i) Nilai *eigen* (λ) ditentukan melalui persamaan karakteristik $\det(\mathbf{M}_1 - \lambda\mathbf{I}) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0$. Didapat $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$.
Vektor *eigen* ($\vec{v}$) ditentukan melalui persamaan $(\mathbf{M}_1 - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = 0$:

- Untuk $\lambda_1 = 2$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$. Vektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Untuk $\lambda_2 = 0$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$. Vektor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(ii) Dua vektor dikatakan ortogonal jika *inner product*-nya, yang dalam konteks ini dapat dilakukan sebagai perkalian titik, bernilai nol: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1)(1) + (1)(-1) = 1 - 1 = 0$ (terbukti ortogonal).

Berikutnya, kita lakukan pencarian nilai-nilai *eigen* dan vektor-vektor *eigen* untuk matriks $\mathbf{M}_2$.
(i) Persamaan karakteristik $\det(\mathbf{M}_2 - \lambda\mathbf{I}) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (-i)(i) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (1) = 0$$

$\lambda^2 = 1$, sehingga didapat $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$.
Lalu cari vektor *eigen*:

- Untuk $\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$.
  Dari baris pertama: $-x - iy = 0 \Rightarrow x = -iy$. Jika $y = 1$, maka $x = -i$.
  Vektor $v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ atau ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.
- Untuk $\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$.
  Dari baris pertama: $x - iy = 0 \Rightarrow x = iy$. Jika $y = 1$, maka $x = i$.
  Vektor $v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ atau ekuivalen dengan $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

(ii) Ambil $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ dan $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Hasil kali dalamnya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = (1)(1) + (-i)(-i) = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0.$$

Perhatikan bahwa $\vec{v}_1$ memiliki elemen bilangan kompleks sehingga i perlu dikonjugasikan menjadi $-i$ dalam bentuk vektor barisnya. Karena perkalian dalam antara $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ bernilai nol, vektor-vektor *eigen* dari M_2 terbukti ortogonal.