Serial Mekanika Kuantum Minimalis 2.0
Kuliah #05-Deskripsi Dasar Keadaan Kuantum

Ahmad R. T. Nugraha (@fisikawan.gendeng), Hendry M. Lim

ver. 28 Februari 2026

Setelah kita memahami deskripsi polarisasi gelombang elektromagnetik (EM) secara klasik dari kuliah sebelumnya, sekarang kita akan mempelajari mekanika kuantum untuk keadaan terpolarisasi. Polarisasi dari berkas sinar atau gelombang EM dalam mekanika kuantum dinyatakan sebagai suatu *keadaan kuantum*. Keadaan kuantum direpresentasikan oleh suatu *vektor keadaan*, tetapi kita harus berhati-hati bahwa vektor keadaan ini berbeda dari sisi fisisnya dengan vektor yang kita pelajari pada fisika klasik.

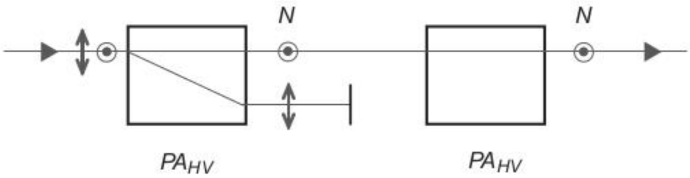
Secara khusus, kita harus menekankan perbedaan penting antara berkas optik yang akan dibahas pada kuliah kali ini dengan yang sudah dibahas di bagian sebelumnya. Pada kuliah sebelumnya, berkas optik adalah gelombang EM klasik yang dideskripsikan sebagai medan listrik $\vec{E}$. Namun, kali ini berkas yang digunakan adalah kumpulan foton yang tak terbedakan secara individual. Salah satu cara membayangkan konsep foton adalah sebagai suatu "kuantum" atau satuan terkecil yang tidak terbagi lagi dari suatu energi EM. Walau tidak terlalu dianggap tepat oleh beberapa fisikawan yang mendalami fondasi kuantum, untuk mudahnya kita bisa juga membayangkan foton sebagai "partikel" cahaya.

1 Vektor Keadaan dan Basis

Kita akan mulai membahas keadaan kuantum melalui serangkaian eksperimen yang telah dilakukan banyak fisikawan terdahulu. Pertama, bayangkan kita memiliki suatu sumber berkas cahaya. Dengan suatu teknik tertentu, anggaplah berkas ini mengandung foton-foton individual yang dapat kita hitung.

Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1, berkas cahaya sembarang datang pada suatu polarisator pembagi sinar (dilabeli sebagai PA_{HV}) yang membagi berkas menjadi komponen-komponen terpolarisasi horizontal dan vertikal. Sebanyak N buah foton terpolarisasi vertikal akan kita teruskan ke polarisator berikutnya sementara sementara foton-foton yang terpolarisasi horizontal kita blok. Setelah melewati PA_{HV} kedua, kita memperoleh seluruh N foton terpolarisasi vertikal.

Jika kita lakukan ulang eksperimen 1 ini, tetapi dengan memblokir foton terpolarisasi vertikal pada keluaran PA_{HV} pertama dan meneruskan N buah foton terpolarisasi horizontal pada PA_{HV} kedua, kita akan peroleh N buah foton terpolarisasi horizontal sebagai keluaran



Gambar 1: Eksperimen 1, foton-foton dengan polarisasi acak dipisahkan menjadi komponen vertikal dan komponen horizontal. Komponen vertikal diteruskan ke polarisator kedua dan hasilnya tetap foton terpolarisasi vertikal dengan jumlah N yang sama.

akhir. Secara klasik, kita akan mengatakan bahwa berkas cahaya yang datang pada polarisator pertama memiliki komponen-komponen polarisasi horizontal dan vertikal yang kemudian dipisahkan oleh PA_{HV}.

Untuk sistem yang sederhana seperti ini, kita boleh mengatakan bahwa apa yang sudah kita pelajari tentang polarisasi gelombang klasik dapat digunakan untuk polarisasi foton individual. Deskripsi klasik untuk gelombang terpolarisasi horizontal dan vertikal adalah dengan vektor polarisasi $\vec{P}_H$ dan $\vec{P}_H$, sementara dalam mekanika kuantum kita katakan bahwa foton terpolarisasi horizontal dan vertikal masing-masing berada pada keadaan $|H\rangle$ dan $|V\rangle$.

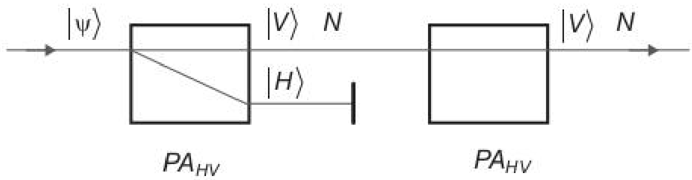
Sembarang keadaan kuantum dapat dinyatakan oleh $|\psi\rangle$. Dalam notasi yang dirumuskan oleh Paul Dirac ini, keadaan kuantum merupakan suatu vektor sehingga $|\psi\rangle$ disebut sebagai vektor keadaan. Vektor keadaan $|\psi\rangle$ merupakan salah satu jenis vektor yang disebut juga sebagai "**ket**". Perlu diperhatikan bahwa foton memiliki besaran-besaran lain seperti energi dan arah perambatan, tidak hanya polarisasi. Vektor keadaan secara lengkap dapat mengandung informasi besaran-besaran tersebut. Akan tetapi, untuk memudahkan pembahasan pada kuliah kali ini kita hanya fokus pada polarisasi.

Walau deskripsi klasik untuk polarisasi dibawa menjadi keadaan kuantum, kita jangan mencampuradukkan besaran klasik $\vec{P}_H$ dan $\vec{P}_V$ dengan keadaan kuantum yang dinyatakan dalam vektor keadaan $|H\rangle$ dan $|V\rangle$. Vektor-vektor keadaan kuantum berada pada suatu ruang abstrak yang disebut dengan **ruang Hilbert** sehingga tidak benar-benar merujuk pada arah tertentu seperti vektor polarisasi secara klasik. Perbedaan ini tidak terlalu kentara untuk fenomena polarisasi. Namun, pada kuliah-kuliah belakangan yang membahas sistem kuantum lainnya seperti spin elektron, akan lebih jelas bahwa vektor-vektor pada ruang Hilbert tidaklah sama dengan vektor-vektor spasial.

Eksperimen 1 dapat digambarkan kembali dalam notasi baru mekanika kuantum seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Di sini kita dapat katakan bahwa sumber foton memproduksi foton-foton individual dalam suatu keadaan polarisasi $|\psi\rangle$. Kita tidak perlu tahu polarisasi spesifik dari sumber berkas foton seperti apa. Pada dasarnya spesifikasi tersebut tidak penting.

Dengan menggunakan polarisator PA_{HV} dan pemblokan, kita kemudian dapat menyiapkan keadaan kuantum tertentu, misalnya foton-foton yang terpolarisasi vertikal saja.

Kita bisa tahu bahwa foton-foton tersebut terpolarisasi pada keadaan $|V\rangle$ melalui proses konfirmasi menggunakan PA_{HV} kedua karena keluaran dari polarisator ini masih tetap 100% foton berada pada keadaan $|V\rangle$. Demikian pula, jika kita ingin menyiapkan foton dalam keadaan $|H\rangle$, kita akan memblokir keluaran vertikal dari PA_{HV} pertama sehingga foton-foton terpolarisasi horizontal diteruskan ke PA_{HV} kedua dengan keluaran akhir 100% foton terpolarisasi horizontal lagi.



Gambar 2: Eksperimen 1 dinyatakan dalam vektor-vektor keadaan kuantum.

Eksperimen 1 mengindikasikan bahwa kita dapat menuliskan sembarang keadaan kuantum untuk polarisasi dalam keadaan basis tertentu seperti halnya suatu vektor polarisasi klasik dapat dinyatakan dalam vektor basis. Untuk sistem sederhana foton terpolarisasi yang kita bahas dalam kuliah ini, cukup aman bagi kita mengasumsikan $|H\rangle$ dan $|V\rangle$ membentuk suatu basis yang dapat merepresentasikan vektor-vektor keadaan lainnya di ruang Hilbert keadaan polarisasi. Keadaan polarisasi secara umum dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier keadaan $|H\rangle$ dan $|V\rangle$:

$$|\psi\rangle = c_H\,|H\rangle + c_V\,|V\rangle\,, \tag{1}$$

dengan konstanta c_H dan c_V merupakan bilangan kompleks. Suatu keadaan kuantum dalam bentuk ini dikatakan pula sebagai *superposisi* keadaan-keadaan $|H\rangle$ dan $|V\rangle$.

2 Ortogonalitas dan *Inner Product*

Secara klasik, vektor-vektor polarisasi $\vec{P}_H$ dan $\vec{P}_V$ bersifat saling ortogonal, yakni tidak ada komponen $\vec{P}_H$ sepanjang $\vec{P}_V$, dan demikian sebaliknya. Eksperimen 1 mengindikasikan sifat ini turut berlaku untuk vektor-vektor keadaan kuantum. Ketika foton-foton pada keadaan $|V\rangle$ memasuki polarisator kedua, tidak ada satupun komponen $|H\rangle$ yang keluar. Serupa dengan itu, jika eksperimen 1 diulang dengan mengirimkan foton-foton pada keadaan $|H\rangle$ pada polarisator kedua, tidak ada satupun komponen $|V\rangle$ yang keluar.

Perkalian skalar untuk vektor-vektor ortogonal bernilai 0. Namun, sebelum kita membicarakan perkalian skalar [atau lebih tepatnya adalah perkalian dalam (*inner product*)] pada ruang Hilbert, kita perlu mendefinisikan suatu vektor baru yang disebut sebagai "**bra**". Untuk setiap vektor ket $|\psi\rangle$, kita dapat memberikan pasangan vektor bra $\langle\psi|$ seperti halnya vektor kolom dipasangkan dengan vektor baris. Ruang vektor bra sering pula disebut sebagai ruang "**dual**" (kembaran) dari ruang vektor ket.

Kita sudah pelajari bahwa perkalian skalar dapat dilakukan dengan menempatkan suatu vektor baris di sebelah kiri vektor kolom. Serupa dengan itu, dalam mekanika kuantum kita menempatkan bra di sebelah kiri ket untuk membentuk “**bracket**” dan mendapatkan *inner product*:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = c, \tag{2}$$

dengan c adalah suatu bilangan kompleks. Karena $|H\rangle$ dan $|V\rangle$ bersifat ortogonal, kita dapat tuliskan

$$\langle H|V\rangle = \langle H|V\rangle = 0. \tag{3}$$

Lebih lanjut lagi, kita dapat memilih himpunan basis yang ortonormal, yakni dengan tambahan syarat normalisasi:

$$\langle H|H\rangle = \langle V|V\rangle = 1. \tag{4}$$

Seperti yang dinyatakan pada pers. 1, sembarang keadaan polarisasi dapat dituliskan sebagai $|\psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle$. Pertanyaannya, jika kita telah memiliki sebuah keadaan tertentu, bagaimana kita bisa menemukan setiap koefisien pada kombinasi linier ini? Jawabannya, koefisien-koefisien ini dapat ditemukan dengan memproyeksikan basis yang relevan pada $|\psi\rangle$ dengan proses *inner product*. Sebagai contoh, untuk menentukan c_H, kita lakukan:

$$\begin{aligned}\langle H|\psi\rangle &= \langle H|(c_H|H\rangle + c_V|V\rangle)\\ &= \langle H|c_H|H\rangle + \langle H|c_H|V\rangle\\ &= c_H\langle H|H\rangle + c_V\underbrace{\langle H|V\rangle}_{=0}\\ &= c_H.\end{aligned} \tag{5}$$

Demikian pula kita bisa temukan $\langle V|\psi\rangle = c_V$.

Jika kita memiliki $\psi\rangle$ yang sudah dinyatakan dalam basis tertentu, kita dapat menemukan bra pasangannya dengan mengganti seluruh ket menjadi bra dan memberikan konjugat kompleks pada setiap koefisien basisnya. Untuk vektor keadaan polarisasi:

$$|\psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle \Leftrightarrow \langle\psi| = c_H^*\langle H| + c_V^*\langle V|. \tag{6}$$

Dari sini kita bisa menemukan pula

$$\langle\psi|H\rangle = c_H^* = \langle H|\psi\rangle^*. \tag{7}$$

Persamaan ini merupakan sifat umum *inner product* dari vektor-vektor keadaan bahwa penukaran urutan perkalian menghasilkan konjugat kompleksnya.

Pada umumnya, kita akan bekerja dengan keadaan-keadaan ternormalisasi sehingga kita dapat menerapkan kondisi untuk ψ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \left(c_H^*\langle H| + c_V^*\langle V|\right)(c_H|H\rangle + c_V|V\rangle)\\ &= c_H^*c_H\langle H|H\rangle + c_H^*c_V\underbrace{\langle H|V\rangle}_{=0} + c_V^*c_H\underbrace{\langle V|H\rangle}_{=0} + c_V^*c_V\langle V|V\rangle\\ &= |c_H|^2 + |c_V|^2 = 1.\end{aligned} \tag{8}$$

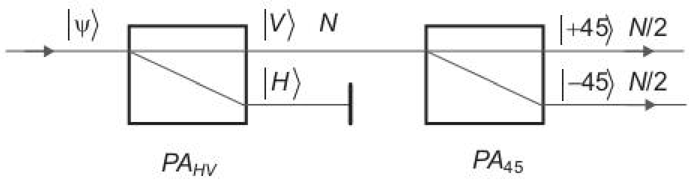
Kondisi ini menyatakan bahwa, untuk suatu vektor ternormalisasi, jumlah dari kuadrat magnitudo koefisien-koefisiennya bernilai 1. Interpretasi fisis dari rumusan matematis ini terkait erat dengan konsep probabilitas untuk menemukan objek kuantum pada keadaan tertentu.

3 Keadaan $|\pm 45\rangle$

Eksperimen 1 telah memungkinkan kita membangun eksistensi vektor-vektor basis dan ortogonalitasnya. Sekarang kita gunakan konsep serupa untuk memahami keadaan kuantum lainnya, yakni keadaan $|\pm 45\rangle$.

Bayangkan kita menyiapkan suatu berkas foton dalam keadaan $|V\rangle$ dan mengirimkan berkas tersebut melalui suatu polarisator yang sumbu-sumbunya terorientasi pada dua sudut $\pm 45°$. Kita sebut polarisator semacam ini sebagai PA_{45}.

Seperti ditunjukkan pada Gambar 3, jika N buah foton terpolarisasi vertikal datang pada PA_{45}, $N/2$ foton akan diteruskan melalui suatu kanal atau saluran bersudut $+45°$ sebagai keadaan $|+45\rangle$. Sementara itu, setengah sisanya diteruskan melalui saluran bersudut $-45°$ sebagai keadaan $|-45\rangle$. Jika kita mengulang eksperimen ini dengan mengirim foton $|H\rangle$ PA_{45}, kita akan mendapatkan hasil yang sama.



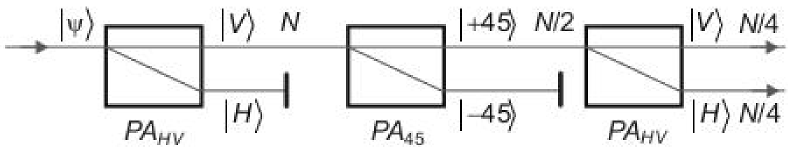
Gambar 3: Eksperimen 2, sejumlah N foton disiapkan dalam keadaan tertentu oleh polarisator pertama, misalnya $|V\rangle$, kemudian diteruskan pada polarisator kedua yang secara rata-rata membagi jumlah foton menjadi setengah jumlah awal pada masing-masing saluran terpolarisasi $\pm 45°$.

Ketika kita mengatakan bahwa setengah jumlah foton akan keluar dari setiap saluran, kita tidak memaksudkan jumlah eksak benar-benar sebanyak setengah jumlah foton awal. Pada dasarnya setengah jumlah tersebut adalah nilai rata-rata.

Transmisi foton melalui PA_{45} merupakan proses acak. Kita tidak mungkin memastikan setiap foton satu per satu akan keluar dari saluran yang mana. Namun, setelah sekian foton keluar dari setiap saluran tersebut, probabilitas (peluang) foton untuk keluar dari masing-masing saluran adalah $1/2(50\%)$. Jika kita mengulang eksperimen 2 berkali-kali, kita akan menemukan bahwa rata-rata jumlah foton yang keluar dari setiap saluran adalah $N/2$ dengan simpangan baku sekitar $\sqrt{N/2}$.

Pengamatan kita konsisten dengan apa yang diperoleh menggunakan gelombang klasik. Suatu gelombang yang terpolarisasi pada $\vec{P}_V$ akan terbagi oleh PA_{45} menjadi komponen-komponen $\vec{P}_{+45}$ dan $\vec{P}_{-45}$ yang setara walau tentu saja ada perbedaan bahwa suatu gelombang klasik dapat terbagi secara deterministik, sedangkan sejumlah foton terbagi secara acak. Pengamatan ini mengindikasikan $|V\rangle$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $|+45\rangle$ dan $|-45\rangle$. Demikian pula $|H\rangle$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $|+45\rangle$ dan $|-45\rangle$.

Sekarang, apakah kita bisa menyatakan hal sebaliknya, bahwa $|+45\rangle$ merupakan kombinasi linier dari $|H\rangle$ dan $|V\rangle$? Jawabannya adalah bisa. Kita ilustrasikan melalui eksperimen 3 yang ditunjukkan pada Gambar 4. Dalam eksperimen ini, kita menambahkan polarisator PA_{HV} untuk melihat apa jadinya jika sebanyak $N/2$ foton dalam keadaan $|+45\rangle$ memasuki polarisator ini. Hasilnya ternyata keadaan tersebut terbagi rata menjadi $N/4$ keadaan $|V\rangle$ dan $N/4$ keadaan $|H\rangle$. Demikian pula jika kita meneruskan keadaan $|-45\rangle$ melalui PA_{HV}, kita akan memperoleh $N/4$ keadaan $|V\rangle$ dan $N/4$ keadaan $|H\rangle$.



Gambar 4: Eksperimen 3 menambahkan eksperimen 2 dengan polarisator PA_{HV} untuk membagi $|+45\rangle$ menjadi komponen-komponen $|V\rangle$ dan $|H\rangle$.

4 Representasi Vektor Baris dan Kolom

Pada kuliah aljabar vektor, kita telah menyebutkan bahwa ada beberapa cara untuk merepresentasikan sebuah vektor, antara lain dengan vektor baris dan kolom. Tidak hanya vektor-vektor dalam ruang fisik, kita juga dapat menyatakan vektor-vektor keadaan kuantum dalam vektor baris dan kolom. Oleh karena itu, kita bisa menuliskan

$$|\psi\rangle \doteq \begin{bmatrix} c_H \\ c_V \end{bmatrix}_{HV} = \begin{bmatrix} \langle H|\psi\rangle \\ \langle V|\psi\rangle \end{bmatrix}_{HV}. \tag{9}$$

Kita menempatkan subskrip HV pada notasi vektor ini untuk memperjelas bahwa koefisien-koefisiennya dinyatakan dalam basis HV. Tanpa subskrip, kita harus mengerti basis yang sedang digunakan berdasarkan konteks pembahasan. Perhatikan bahwa ada urutan yang perlu disepakati dalam notasi kita, yakni $|H\rangle$ ditempatkan lebih dulu sebelum $|V\rangle$ mengikuti konvensi sebelumnya. Sebetulnya tidak ada hal yang spesial tentang basis HV. Kita dapat pula menuliskan

$$|\psi\rangle \doteq \begin{bmatrix} c_{+45} \\ c_{-45} \end{bmatrix}_{45} = \begin{bmatrix} \langle +45|\psi\rangle \\ \langle -45|\psi\rangle \end{bmatrix}_{45}. \tag{10}$$

Ket telah dituliskan sebagai vektor kolom, sementara bra dapat ditulis sebagai

$$\langle\psi| = c_H^*\langle H| + c_V^*\langle V|, \tag{11}$$

yang merupakan vektor baris:

$$\langle\psi| \doteq \begin{bmatrix} c_H^* & c_V^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle H|\psi\rangle^* & \langle V|\psi\rangle^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\psi|H\rangle & \langle\psi|V\rangle. \end{bmatrix} \tag{12}$$

Perhatikan dalam proses manipulasi matematis persamaan di atas, kita telah memanfaatkan relasi $\langle\psi_1|\psi_2\rangle^* = \langle\psi_2|\psi_1\rangle$. Tabel 1 menunjukkan analogi representasi vektor pada beberapa ruang vektor (ruang riil 2D, ruang vektor baris/kolom, dan ruang Hilbert).

Tabel 1: Representasi vektor pada tiga jenis ruang vektor yang berbeda

Properti	**Ruang Riil 2D**	**Vektor Kolom/Baris**	**Ruang Hilbert Kuantum**
Vektor basis	$\vec{u}_x, \vec{u}_y$	Vektor kolom $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ Vektor baris $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$	Ket $\lvert H\rangle, \lvert V\rangle$ Bra $\langle H\rvert, \langle V\rvert$
Vektor umum	$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$	Vektor kolom $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ Vektor baris $\begin{bmatrix}a_1^* & a_2^*\end{bmatrix} =$ $a_1^*\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + a_2^*\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$	Ket $\lvert\psi\rangle = c_H \lvert H\rangle + c_V \lvert V\rangle$ Bra $\langle\psi\rvert = c_H^* \langle H\rvert + c_V^* \langle V\rvert$
Inner Product	Perkalian titik $\vec{a}\cdot\vec{b}$	$\begin{bmatrix}a_1^* & a_2^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$	*Bracket* $\langle\psi_1\vert\psi_2\rangle$
Ortogonalitas	$\vec{u}_x\cdot\vec{u}_y = 0$	$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$	$\langle H\vert V\rangle = 0$
Normalisasi	$\vec{u}_x\cdot\vec{u}_x = 1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1$	$\langle H\vert H\rangle = 1$
Pencarian koefisien (*Inner product* dengan vektor basis.)	$a_x = \vec{u}_x\cdot\vec{a}$	$a_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$	$c_H = \langle H\vert\psi\rangle$

Proyeksi keadaan $|{+45}\rangle$ pada $|H\rangle$

Hitunglah $\langle H|{+45}\rangle$.

Solusi:

Yang ditanyakan merupakan koefisien basis $|H\rangle$ untuk menyatakan keadaan $|{+45}\rangle$ atau dengan kata lainnya suatu proyeksi keadaan $|{+45}\rangle$ pada $|H\rangle$. Kita perlu mengetahui dulu representasi pasangan bra dari ket $|H\rangle$. Dalam basis HV, keadaan $|H\rangle$ sebagai vektor kolom adalah

$$|H\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{HV},$$

dengan kembarannya (bra) berupa vektor baris:

$$\langle H| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{HV}.$$

Sekarang kita bisa hitung langsung yang ditanyakan:

$$\begin{aligned}
\langle H|{+45}\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{HV} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{HV} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{HV} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{HV} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [(1)(1) + (0)(1)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

5 Probabilitas dan Amplitudo Probabilitas

Setelah memiliki suatu keadaan kuantum dalam bentuk kombinasi linier basis tertentu, kita mestinya penasaran apa makna dari koefisien-koefisien yang terlibat sebagai faktor bilangan kompleks yang mengiringi setiap basis yang mendeskripsikan keadaan kuantum. Kita akan melihat bahwa kuadrat koefisien-koefisien tersebut memberikan probabilitas menemukan suatu objek kuantum berada pada keadaan tertentu.

Kita bisa manfaatkan beberapa hasil dari bagian sebelumnya. Sebagai contoh, keadaan $|{+45}\rangle$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier $|H\rangle$ dan $|V\rangle$:

$$|{+45}\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle. \tag{13}$$

Meskipun secara matematis kita telah menurunkan bahwa $c_H = \langle H|\psi\rangle$ dan $c_V = \langle V|\psi\rangle$, bagaimana sebetulnya dalam eksperimen kita dapat menentukan koefisien-koefisien tersebut dan apa maknanya?

Kita sudah meninjau eksperimen yang memisahkan komponen-komponen keadaan $|{+45}\rangle$ menjadi keadaan basis $|H\rangle$ dan $|V\rangle$. Kita ingat bahwa keadaan $|{+45}\rangle$ terurai menjadi keadaan-keadaan $|H\rangle$ dan $|V\rangle$ yang sama rata. Oleh karena itu, kita bisa mengasumsikan bahwa magnitudo c_H dan c_V mestilah sama. Jika kita menetapkan kondisi bahwa keadaan $|{+45}\rangle$ ternormalisasi, kita akan memiliki $|c_H|^2 + |c_V|^2 = 1$ sehingga

$$|c_H|^2 = |c_V|^2 = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

atau

$$|c_H| = |c_V| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Hasil di atas bukanlah matematika biasa karena ada konsep penting fisika yang terlibat. Melalui deskripsi keadaan kuantum dalam kombinasi linier basis tertentu, kita telah memberikan makna fisis pada koefisien-koefisien yang mengiringi setiap basis. Pada contoh di atas, kuadrat magnitudo dari koefisien yang dikalikan dengan keadaan polarisasi basis tertentu akan sama dengan probabilitas foton terukur memiliki polarisasi tersebut. Dengan demikian, koefisien c_H dan c_V dapat disebut sebagai "amplitudo probabilitas", sementara kuadrat magnitudonya, yakni $|c_H|^2$ dan $|c_V|^2$ adalah probabilitas foton berada pada keadaan polarisasi $|H\rangle$ dan $|V\rangle$.

Perlu diperhatikan bahwa koefisien-koefisien ini secara umum merupakan bilangan kompleks. Setelah kita mengetahui magnitudonya, kita dapat fasenya juga. Dengan menggunakan pers. (15), kita dapat menulis ulang pers. (13) menjadi

$$\begin{aligned} |{+45}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i\phi_H} |H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i\phi_V} |V\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{i\phi_H} \left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i(\phi_V - \phi_H)} |V\rangle \right) \end{aligned} \tag{16}$$

Konstanta $\mathrm{e}^{i\phi_H}$ yang ada di bagian depan ruas kanan pers. (16) merupakan faktor fase absolut. Magnitudonya sebesar satu dan pada eksperimen ini tidak akan memengaruhi besaran lainnya sehingga kita dapat memilih $\mathrm{e}^{i\phi_H} = 1$ secara eksplisit atau $\phi_H = 0$. Dengan begitu, kita dapat menuliskan

$$|{+45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i\phi_V} |V\rangle \right). \tag{17}$$

Dari sini, masih diperlukan informasi tambahan untuk menentukan fase ϕ_V secara eksak, yakni dengan meninjau keadaan $|{-45}\rangle$.

Jika kita melakukan eksperimen untuk menguraikan keadaan $|{-45}\rangle$ ke dalam basis $|H\rangle$ dan $|V\rangle$, kita akan memperoleh perilaku yang sama seperti untuk keadaan $|{+45}\rangle$, yakni sebanyak 50% foton berada pada keadaan $|H\rangle$ dan 50% lainnya berada pada keadaan $|V\rangle$. Oleh karena itu, analisis matematis menggunakan fase dapat kembali dilakukan:

$$|{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i\phi'_V} |V\rangle \right). \tag{18}$$

Fase ϕ'_V haruslah berbeda dari ϕ_V. Kalau tidak begitu, $|{+45}\rangle$ dan $|{-45}\rangle$ tidak ada bedanya. Karena keadaan $|{+45}\rangle$ dan $|{-45}\rangle$ saling ortogonal, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} \langle {+45} | {-45} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle H| + \mathrm{e}^{-i\phi_V} \langle V| \right) \left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i\phi'_V} |V\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle H|H\rangle + \mathrm{e}^{i\phi'_V} \langle H|V\rangle + \mathrm{e}^{-i\phi_V} \langle V|H\rangle + \mathrm{e}^{i(\phi'_V - \phi_V)} \langle V|V\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \mathrm{e}^{i(\phi'_V - \phi_V)} \right) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Persamaan ini terpenuhi jika

$$\phi'_V - \phi_V = \pi. \tag{20}$$

Mengingat bahwa keadaan $| \pm 45\rangle$ masih merupakan keadaan terpolarisasi linier yang semestinya memiliki koefisien berupa bilangan riil, kita dapat memilih $\phi_V = 0$ (sehingga

$\phi'_V = \pi$) untuk memperoleh

$$|{+45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + |V\rangle\right), \tag{21}$$

$$|{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle - |V\rangle\right). \tag{22}$$

Pilihan $\phi_V = 0$ dalam hal ini memberikan hasil yang konsisten dengan bentuk vektor polarisasi klasik $\vec{P}_{+45}$ dan $\vec{P}_{-45}$.

Sebagai rekapitulasi, kita simpulkan bahwa keadaan $|{+45}\rangle$ dan $|{-45}\rangle$ sama-sama dapat terurai menjadi 50% keadaan $|H\rangle$ dan 50% keadaan $|V\rangle$ mengikuti formulasi probabilitas,

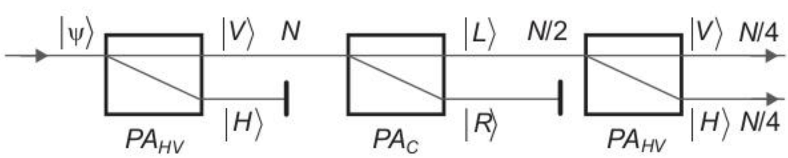
$$P\big(\langle H\big|| + 45\rangle\big) = |c_H|^2 = |\langle H| + 45\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \tag{23}$$

$$P\big(\langle V\big|| + 45\rangle\big) = |c_V|^2 = |\langle V| + 45\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Notasi yang kita gunakan untuk probabilitas di sini mengindikasikan bahwa probabilitas yang terukur dalam eksperimen adalah probabilitas kondisional, yang pernah kita pelajari pada kuliah pertama. $P\big(\langle H\big||{+45}\rangle\big)$ merupakan probabilitas kita mengukur foton berada pada keadaan terpolarisasi horizontal ketika berkas sinar datang disiapkan pada keadaan $|{+45}\rangle$. Untuk menentukan fasenya, kita kemudian perlu informasi tambahan seperti ortogonalitas keadaan $|{+45}\rangle$ dan $|{-45}\rangle$.

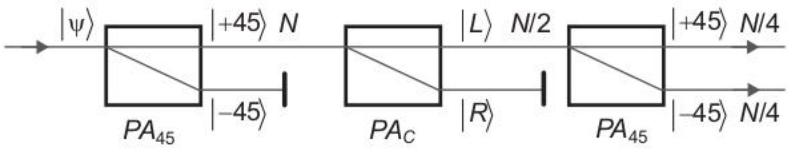
6 Amplitudo Probabilitas Kompleks

Kita telah menyebutkan bahwa amplitudo probabilitas yang dinyatakan oleh koefisien-koefisien pengiring basis merupakan bilangan kompleks. Untuk menegaskan fakta ini, kita dapat melakukan eksperimen kembali dengan beberapa buah polarisator pemisah berkas seperti ditunjukkan pada Gambar 5 dan Gambar 6.



Gambar 5: Tahap pertama eksperimen penentuan amplitudo probabilitas kompleks.

Pada eksperimen tahap pertama yang ditunjukkan Gambar 5, kita menggunakan polarisator PA_{HV} untuk menyiapkan N buah foton yang terpolarisasi pada keadaan $|V\rangle$. Foton ini kemudian memasuki polarisator PA_C yang menguraikan keadaan $|V\rangle$ ke dalam basis terpolarisasi melingkar $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ dengan jumlah foton terbagi sama rata, yakni $N/2$. Sebanyak $N/2$ foton pada keadaan $|L\rangle$ diteruskan lagi pada polarisator PA_{HV} yang membuat $|L\rangle$ terurai menjadi 50% $|H\rangle$ dan 50% $|H\rangle$. Jika kita ulang eksperimen ini untuk menguraikan $|L\rangle$, kita akan mendapatkan hasil yang sama, yakni 50% $|H\rangle$ dan 50% $|H\rangle$.



Gambar 6: Tahap kedua eksperimen penentuan amplitudo probabilitas kompleks.

Dengan analisis yang serupa sebelumnya, kita kembali dapat menuliskan keadaan terpolarisasi melingkar $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ sebagai kombinasi linier basis $|H\rangle$ dan $|V\rangle$. Karena dalam eksperimen ini probabilitas mendapati keadaan $|H\rangle$ sama dengan keadaan $|V\rangle$, kita akan punya magnitudo koefisien $|H\rangle$ dan $|V\rangle$ sama-sama sebesar $1/\sqrt{2}$. Dengan begitu, mirip pers. (17) dan (18), kita dapat menuliskan $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ sebagai

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi_V}|V\rangle\right), \tag{25}$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi'_V}|V\rangle\right). \tag{26}$$

Keadaan $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ juga merupakan keadaan-keadaan yang saling ortogonal, $\langle L|R\rangle = 0$, sehingga

$$\varphi'_V - \varphi_V = \pi. \tag{27}$$

Sampai tahap ini, proses pencarian fase untuk keadaan $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ telah mengikuti langkah-langkah yang dilakukan sebelumnya untuk keadaan $|\pm 45\rangle$. Namun, kita tidak bisa lagi memilih $\varphi_V = 0$ ($\varphi'_V = \pi$) karena akan membuat keadaan $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ tidak ada bedanya dengan $|{+45}\rangle$ dan $|{-45}\rangle$. Kita dapat membuktikan pilihan fase kali ini perlu dilakukan hati-hati dengan meninjau hasil eksperimen tahap kedua pada Gambar 5.

Pada eksperimen tahap kedua, kita mengganti semua polarisator PA_{HV} dari eksperimen tahap pertama dengan PA_{45} untuk menyiapkan keadaan $|{+45}\rangle$ yang diteruskan ke PA_C dan keluarannya diteruskan lagi ke PA_{45}. Hasilnya, kita bisa lihat bahwa ketika berkas sinar disiapkan dalam keadaan $|L\rangle$ kita akan memperoleh probabilitas pengukuran yang sama besar untuk $|L\rangle$ terurai menjadi keadaan $|{+45}\rangle$ dan $|{-45}\rangle$:

$$P\big(\langle{+45}\big||L\rangle\big) = |\langle{+45}|L\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \tag{28}$$

$$P\big(\langle{-45}\big||L\rangle\big) = |\langle{-45}|L\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Dengan menggunakan pers. (21) dan (25), kita dapat menemukan

$$\begin{aligned}\langle{+45}|L\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle H| + \langle V|\right)\left(|H\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi_V}|V\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{i\varphi_V}),\end{aligned} \tag{30}$$

Tabel 2: Notasi Dirac serta vektor kolom dari keadaan-keadaan polarisasi. Subskrip 45 merujuk pada vektor-vektor yang ditulis dalam basis $|+45\rangle, |-45\rangle$, sementara subskrip C merujuk pada basis keadaan polarisasi melingkar $|L\rangle$ dan $|R\rangle$.

Keadaan Polarisasi	**Notasi Bra, Ket dalam Basis** $\|H\rangle, \|V\rangle$	**Vektor Kolom dalam Basis** $\|H\rangle, \|V\rangle$
$\|H\rangle$	$\|H\rangle$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{HV}$
$\|V\rangle$	$\|V\rangle$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{HV}$
$\|+45\rangle \doteq \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{45}$	$\|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|H\rangle + \|V\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{HV}$
$\|-45\rangle \doteq \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{45}$	$\|-45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|H\rangle - \|V\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_{HV}$
$\|L\rangle \doteq \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{C}$	$\|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|H\rangle + i\,\|V\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}_{HV}$
$\|R\rangle \doteq \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{C}$	$\|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|H\rangle - i\,\|V\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}_{HV}$

sehingga

$$\begin{aligned} |\langle +45|L\rangle|^2 &= \frac{1}{4}1 + e^{i\varphi_V})1 + e^{-i\varphi_V}) \\ &= \frac{1}{4}(2 + 2\cos\varphi_V). \end{aligned} \tag{31}$$

Hasil terakhir ini harus sama dengan 1/2 sesuai pers. (28) sehingga $\varphi_V = \pm\pi/2$. Pilihan positif untuk φ_V menghasilkan $\varphi'_V = 3\pi/2$ sesuai pers. (27). Substitusi nilai-nilai fase ke pers. (25) dan (26) memberikan

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + i|V\rangle\right), \tag{32}$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle - i|V\rangle\right). \tag{33}$$

Walau kita harus menetapkan tanda tertentu untuk φ_V, pada akhirnya dengan eksperimen yang telah dilakukan kita berhasil menunjukkan keberadaan amplitudo probabilitas kompleks seperti pers. (32) dan (33).

Sampai sini, kita sudah cukup lengkap melihat keadaan kuantum dari polarisasi cahaya dalam basis-basis berbeda seperti HV, ± 45, dan LR (atau C). Tabel 2 merangkum representasi untuk keadaan-keadaan tersebut dalam notasi Dirac dan vektor kolom.

Latihan (Soal-Jawab)

Soal 1

Dengan menggunakan representasi *bracket* maupun vektor baris-kolom, hitunglah $\langle -45|L\rangle$.

Jawaban

Sebelum melakukan perhitungan, mari kita definisikan terlebih dahulu vektor keadaan $|-45\rangle$ dan $|L\rangle$ dalam basis HV ($|H\rangle$ dan $|V\rangle$).

- Keadaan polarisasi linier $-45°$: $|-45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$.
- Keadaan polarisasi melingkar kiri (LCP): $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i\,|V\rangle)$.

1. Representasi *Bracket* (notasi Dirac): Untuk mencari *inner product* $\langle -45|L\rangle$, pertama-tama kita harus mencari bentuk *bra* dari $|-45\rangle$. Karena koefisien skalarnya bernilai riil, konjugat kompleksnya tetap sama, tinggal balik notasi *ket* menjadi *bra*:

$$\langle -45| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - \langle V|).$$

Sekarang kita kalikan dengan *ket* $|L\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle -45|L\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - \langle V|)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i\,|V\rangle)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle H|H\rangle + i\,\langle H|V\rangle - \langle V|H\rangle - i\,\langle V|V\rangle\right).\end{aligned}$$

Karena basis $|H\rangle$ dan $|V\rangle$ bersifat ortonormal ($\langle H|H\rangle = \langle V|V\rangle = 1$ dan $\langle H|V\rangle = \langle V|H\rangle = 0$), persamaannya tersederhanakan menjadi:

$$\langle -45|L\rangle = \frac{1}{2}(1 + 0 - 0 - i) = \frac{1-i}{2}.$$

2. Representasi Vektor Baris-Kolom: Vektor kolom untuk $|-45\rangle$ dan $|L\rangle$ dalam basis HV adalah:

$$|-45\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \quad |L\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}.$$

Bentuk *bra* $\langle -45|$ adalah konjugat transpos dari vektor kolomnya:

$$\langle -45| \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}.$$

Lalu kita operasikan perkalian matriks baris dan kolom:

$$\langle -45|L\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left((1)(1) + (-1)(i)\right) = \frac{1-i}{2}.$$

Kedua metode menghasilkan nilai *inner product* yang persis sama.

Soal 2

Keadaan polarisasi eliptis secara umum dapat dinyatakan dalam dua parameter θ dan ϕ, yakni

$$|e_1\rangle = \cos\theta\,|H\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|V\rangle$$

(i) Carilah keadaan ternormalisasi $|e_2\rangle$ yang ortogonal terhadap $|e_1\rangle$.

(ii) Dengan menggunakan representasi "bracket" maupun vektor baris-kolom, hitunglah $\langle +45|e_1\rangle$.

Jawaban

(i) Mencari keadaan ortogonal $|e_2\rangle$: Misalkan keadaan yang tidak diketahui adalah $|e_2\rangle = a\,|H\rangle + b\,|V\rangle$, dengan a dan b adalah bilangan kompleks. Syarat dua keadaan saling ortogonal adalah $\langle e_1|e_2\rangle = 0$. Pertama, kita tentukan *bra* dari $|e_1\rangle$ dengan mengambil konjugasi kompleks dari koefisien skalarnya dan membalik notasi ket basis menjadi bra:

$$\langle e_1| = \cos\theta\,\langle H| + e^{-i\phi}\sin\theta\,\langle V|\,.$$

Lakukan *inner product*:

$$\begin{aligned}\langle e_1|e_2\rangle &= \left(\cos\theta\,\langle H| + e^{-i\phi}\sin\theta\,\langle V|\right)(a\,|H\rangle + b\,|V\rangle)\\ &= a\cos\theta + be^{-i\phi}\sin\theta = 0.\end{aligned}$$

Persamaan di atas mensyaratkan $a\cos\theta = -be^{-i\phi}\sin\theta$. Salah satu solusi termudah yang memenuhi adalah mengatur komponen koefisien agar saling menyilang, yakni $a = \sin\theta$ dan $b = -e^{i\phi}\cos\theta$. Kita cek syarat normalisasinya ($|a|^2 + |b|^2 = 1$):

$$|a|^2 + |b|^2 = \sin^2\theta + |-e^{i\phi}\cos\theta|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Karena sudah ternormalisasi, keadaan $|e_2\rangle$ adalah:

$$|e_2\rangle = \sin\theta\,|H\rangle - e^{i\phi}\cos\theta\,|V\rangle$$

(ii) Menghitung $\langle +45|e_1\rangle$: Diketahui keadaan $|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$.

Metode Bracket: Bentuk *bra* adalah $\langle +45| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + \langle V|)$.

$$\begin{aligned}
\langle +45|e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + \langle V|)\left(\cos\theta\,|H\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|V\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta\,\langle H|H\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,\langle V|V\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta + e^{i\phi}\sin\theta\right)
\end{aligned}$$

Metode Vektor Baris-Kolom: Vektor baris untuk $\langle +45|$ dan vektor kolom untuk $|e_1\rangle$ adalah:

$$\langle +45| \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad |e_1\rangle \doteq \begin{bmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{bmatrix}$$

Lakukan perkalian matriks:

$$\langle +45|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + e^{i\phi}\sin\theta)$$

Hasil perhitungan konsisten dalam kedua representasi.

Soal 3

Tentukan vektor-vektor kolom yang merepresentasikan keadaan $|+45\rangle$ dan $|-45\rangle$ menggunakan $|L\rangle$ dan $|R\rangle$ sebagai basisnya.

Jawaban

Vektor keadaan apa pun dapat direpresentasikan sebagai vektor kolom $\begin{bmatrix} c_L \\ c_R \end{bmatrix}_{LR}$ dengan koefisien c_L dan c_R dicari melalui proyeksi (*inner product*) terhadap vektor basisnya, yaitu $c_L = \langle L|\psi\rangle$ dan $c_R = \langle R|\psi\rangle$.
Mari kita tuliskan *bra* dari keadaan basis $|L\rangle$ dan $|R\rangle$. Ingat kita perlu mengambil konjugat kompleks pada bilangan imajiner i:

$$\begin{aligned}
|L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i\,|V\rangle) \;\Rightarrow\; \langle L| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - i\,\langle V|) \\
|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i\,|V\rangle) \;\Rightarrow\; \langle R| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + i\,\langle V|)
\end{aligned}$$

Representasi Keadaan $|+45\rangle$ dalam Basis LR:

Gunakan bentuk eksplisit $|{+45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$,

$$c_L = \langle L|{+45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - i\langle V|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = \frac{1}{2}(1-i),$$
$$c_R = \langle R|{+45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + i\langle V|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = \frac{1}{2}(1+i).$$

Dengan demikian, vektor kolom representasinya adalah:

$$|{+45}\rangle_{LR} \doteq \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Representasi Keadaan $|{-45}\rangle$ dalam Basis LR:
Gunakan bentuk eksplisit $|{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$,

$$c_L = \langle L|{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - i\langle V|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) = \frac{1}{2}(1+i),$$
$$c_R = \langle R|{-45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + i\langle V|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) = \frac{1}{2}(1-i),$$

sehingga vektor kolom representasinya adalah:

$$|{-45}\rangle_{LR} \doteq \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}.$$

Soal 4

Misalkan $|\theta\rangle$ menyatakan keadaan suatu berkas foton yang terpolarisasi linier pada sudut θ dari horizontal. Dengan memanfaatkan analogi polarisasi linier dari fisika klasik, tulislah $|\theta\rangle$ sebagai kombinasi linier dari $|H\rangle$ dan $|V\rangle$.

Jawaban

Dalam fisika klasik, vektor polarisasi linier yang membentuk sudut θ terhadap sumbu horizontal (sumbu-x) direpresentasikan secara geometris oleh:

$$\vec{P} = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y$$

Berdasarkan analogi dengan mekanika kuantum yang telah dirangkum pada tabel 1, vektor basis $\vec{u}_x$ dan $\vec{u}_y$ masing-masing bersesuaian langsung dengan keadaan basis ortonormal $|H\rangle$ dan $|V\rangle$. Oleh karena itu, keadaan foton $|\theta\rangle$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari amplitudo probabilitasnya:

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|H\rangle + \sin\theta\,|V\rangle$$

Soal 5

Dengan menggunakan $|\theta\rangle$ sesuai soal sebelumnya,

(i) Tentukan probabilitas foton yang disiapkan dalam keadaan $|\theta\rangle$ untuk dapat terukur memiliki polarisasi vertikal.

(ii) Tentukan probabilitas foton yang disiapkan dalam keadaan $|\theta\rangle$ untuk dapat terukur memiliki polarisasi melingkar kanan.

Jawaban

Diketahui keadaan awal foton adalah $|\theta\rangle = \cos\theta\,|H\rangle + \sin\theta\,|V\rangle$.
(i) Probabilitas untuk mengukur foton dalam keadaan polarisasi vertikal $|V\rangle$ didapatkan dengan menghitung kuadrat nilai mutlak dari *inner product* antara keadaan pengukuran dan keadaan awal:

$$P(\langle V||\theta\rangle) = |\,\langle V|\theta\rangle\,|^2.$$

Pertama-tama, kita hitung amplitudo probabilitasnya (*inner product*):

$$\begin{aligned}\langle V|\theta\rangle &= \langle V|\,(\cos\theta\,|H\rangle + \sin\theta\,|V\rangle)\\ &= \cos\theta\,\langle V|H\rangle + \sin\theta\,\langle V|V\rangle\,.\end{aligned}$$

Karena basis HV bersifat ortonormal, maka $\langle V|H\rangle = 0$ dan $\langle V|V\rangle = 1$. Persamaan tersebut menjadi:

$$\langle V|\theta\rangle = \cos\theta(0) + \sin\theta(1) = \sin\theta,$$

sehingga probabilitas pengukurannya adalah:

$$P(\langle V||\theta\rangle) = |\sin\theta|^2 = \sin^2\theta.$$

(ii) Probabilitas untuk mengukur foton dalam polarisasi melingkar kanan $|R\rangle$ dirumuskan sebagai $P(\langle R||\theta\rangle) = |\,\langle R|\theta\rangle\,|^2$. Dari definisi keadaan polarisasi dasar, keadaan $|R\rangle$ adalah:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i\,|V\rangle).$$

Bentuk *bra*-nya dicari dengan mengambil konjugat kompleks dari faktor imajiner:

$$\langle R| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + i\,\langle V|).$$

Sekarang kita evaluasi *inner product* $\langle R|\theta\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle R|\theta\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + i\langle V|)\right](\cos\theta\,|H\rangle + \sin\theta\,|V\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta\,\langle H|H\rangle + \sin\theta\,\langle H|V\rangle + i\cos\theta\,\langle V|H\rangle + i\sin\theta\,\langle V|V\rangle\right).\end{aligned}$$

Terapkan kembali ortonormalitas basis ($\langle H|H\rangle = 1$, $\langle V|V\rangle = 1$, $\langle H|V\rangle = 0$, $\langle V|H\rangle = 0$), sehingga diperoleh:

$$\langle R|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Dengan menggunakan formula Euler, bentuk kompleks tersebut dapat ditulis sebagai $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$. Probabilitas pengukurannya adalah:

$$P(\langle R||\theta\rangle) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}\right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 |e^{i\theta}|^2 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}.$$

Hasil ini menunjukkan bahwa foton yang disiapkan pada keadaan polarisasi linier berarah mana pun (θ) selalu memiliki peluang mutlak sebesar 50% untuk terukur sebagai polarisasi melingkar kanan.