Serial Mekanika Kuantum Minimalis 2.0
Kuliah #04-Kalkulus Jones

Ahmad R. T. Nugraha (@fisikawan.gendeng), Hendry M. Lim

ver. 25 Februari 2026

Cahaya terpolarisasi dapat dideskripsikan menggunakan kalkulus Jones, yang digagas oleh R. C. Jones pada tahun 1940-an. Cahaya terpolarisasi direpresentasikan oleh vektor Jones, sementara elemen optik direpresentasikan oleh matriks Jones. Ketika cahaya melintasi elemen optik, polarisasi yang dihasilkan dari cahaya yang datang dapat dihitung dengan mengalikan matriks Jones elemen optik dan vektor Jones cahaya datang. Dengan kalkulus Jones, kita akan bisa menghitung bagaimana suatu kombinasi beberapa elemen optik mengubah polarisasi suatu gelombang. Kalkulus Jones juga dapat membantu kita lebih mudah memahami perilaku operator-operator kuantum nantinya.

Kenapa "kalkulus"? Sedikit berbeda makna dengan versi modernnya, peneliti zaman dulu menggunakan istilah "kalkulus" dengan arti "aturan berhitung". Sebagai contoh, selain kalkulus Jones, ada kalkulus *lambda* dalam ilmu komputer dan kalkulus Ricci dalam relativitas khusus. Sementara itu, kalkulus yang kita kenal di era modern (misalnya: turunan dan integral) sebenarnya memiliki nama "lengkap" kalkulus *infinitesimal*.

1 Vektor Jones

Pada pelajaran sebelumnya, kita sudah mendefinisikan vektor polarisasi

$$\vec{P} = \frac{E_{0x}}{E_0}\vec{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0}\mathrm{e}^{i\phi}\vec{u}_y. \tag{1}$$

Untuk polarisasi linier, nilai $\phi = 0$ sehingga

$$\vec{P} = \frac{E_{0x}}{E_0}\vec{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0}\vec{u}_y. \tag{2}$$

Jika vektor $\vec{P}$ membentuk sudut θ terhadap sumbu-x, nilai θ dapat dihitung menggunakan formula

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right), \tag{3}$$

dan komponen-komponen $\vec{P}$ dapat dinyatakan dalam θ:

$$\vec{P} = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y. \tag{4}$$

Tabel 1: Beberapa vektor Jones yang sering digunakan.

Jenis Polarisasi	**Vektor Polarisasi**	**Vektor Jones**
Horizontal	$\vec{P}_H$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
Vertikal	$\vec{P}_V$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
$+45°$ linier	$\vec{P}_{+45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P}_H + \vec{P}_V)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
$-45°$ linier	$\vec{P}_{-45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P}_H - \vec{P}_V)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
Linier dengan sudut θ terhadap horizontal	$\vec{P}_\theta = \cos\theta\vec{P}_H + \sin\theta\vec{P}_V$	$\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$
melingkar kiri	$\vec{P}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P}_H + i\vec{P}_V)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$
melingkar kanan	$\vec{P}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P}_H - i\vec{P}_V)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$

Sekarang, kita bisa mengambil suatu konvensi bahwa vektor polarisasi linier horizontal dan vertikal setara dengan basis vektor satuan $\vec{u}_x$ dan $\vec{u}_y$ sebagai berikut:

$$\vec{P}_H = \vec{u}_x \tag{5}$$

dan

$$\vec{P}_V = \vec{u}_y. \tag{6}$$

Dengan notasi vektor kolom, kita bisa tuliskan kedua vektor polarisasi ini menjadi

$$\vec{P}_H = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{7}$$

dan

$$\vec{P}_V = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{8}$$

Persamaan (7) dan (8) masing-masing merupakan vektor-vektor Jones untuk polarisasi linier horizontal dan vertikal.

Cara serupa di atas dapat dilakukan untuk mendapatkan vektor-vektor Jones lainnya. Sebagai contoh tambahan, jika vektor polarisasi untuk suatu medan terpolarisasi linier membentuk sudut 45° terhadap sumbu horizontal, kita bisa gunakan pers. (4):

$$\begin{aligned}\vec{P}_{+45} &= \cos 45°\vec{u}_x + \sin 45°\vec{u}_y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P}_H + \vec{P}_V), \end{aligned} \tag{9}$$

sehingga notasi vektor Jones untuk $\vec{P}_{+45}$ adalah

$$\vec{P}_{+45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Dengan begitu, kita akan memperoleh vektor-vektor Jones untuk berbagai polarisasi jika vektor polarisasi dari sembarang gelombang terpolarisasi dinyatakan dalam basis horizontal/vertikal sebagai vektor kolom seperti pada Tabel 1.

2 Matriks Jones

Beberapa elemen optik tertentu seperti polarisator linier dan pelat gelombang dapat memodifikasi polarisasi gelombang. Objek matematis yang mengubah suatu vektor menjadi vektor lainnya adalah matriks sehingga elemen-elemen optik yang mengubah polarisasi dapat direpresentasikan oleh matriks, dalam hal ini adalah matriks Jones, yang kita notasikan dengan **J**, dilengkapi subskrip sesuai konteks elemen optiknya.

Tabel 2 memberikan daftar matriks Jones untukbeberapa elemen optik yang sering digunakan. Untuk saat ini, kita tidak memberikan penurunan matematisnya dan bisa cukup mempercayai bahwa Tabel 2 sudah memberikan matriks-matriks Jones yang sesuai. Meski begitu, kita bisa memeriksa apa efek dari beberapa matriks Jones spesifik.

Sebagai contoh penerapan vektor Jones dan matriks Jones, mari kita tinjau pelat setengah gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut θ terhadap horizontal. Apa efek dari pelat setengah gelombang ini ketika menerima gelombang yang datang dengan polarisasi horizontal?

Tabel 2: Matriks Jones untuk beberapa elemen optik.

Elemen Optik	**Simbol**	**Matriks Jones**
Polarisator horizontal	$\mathbf{J}_H$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarisator vertikal	$\mathbf{J}_V$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarisator linier, sudut θ terhadap horizontal	$\mathbf{J}_\theta$	$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$
Pelat 1/4-gelombang, sumbu cepat pada $\pm 45°$	$\mathbf{J}_{\lambda/4\pm45}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{bmatrix}$
Pelat 1/4-gelombang, sumbu cepat θ	$\mathbf{J}_{\lambda/4\theta}$	$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\sin\theta\cos\theta \\ (1-i)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + i\cos^2\theta \end{bmatrix}$
Pelat 1/2-gelombang, sumbu cepat θ	$\mathbf{J}_{\lambda/2\theta}$	$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

Dari tabel, vektor Jones untuk berkas sinar datang adalah

$$\vec{P}_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sedangkan matriks Jones untuk pelat setengah gelombang adalah

$$\mathbf{J}_{\lambda/2\theta} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Polarisasi yang dihasilkan setelah keluar dari pelat tersebut adalah

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \mathbf{J}_{\lambda/2\theta}\vec{P}_H \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Secara fisis, apa yang direpresentasikan oleh vektor Jones dari polarisasi keluaran ini? Berdasarkan Tabel 1, kita bisa lihat bahwa vektor tersebut terkait dengan berkas terpolarisasi linier yang polarisasinya membentuk sudut 2θ terhadap horizontal. Contoh ini menunjukkan bahwa jika suatu berkas terpolarisasi linier datang membentur pelat setengah gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut θ terhadap polarisasi sinar datang, berkas yang keluar dari pelat gelombang akan memiliki polarisasi yang berubah terotasi sebesar 2θ. Artinya, dengan merotasikan pelat setengah gelombang, kita dapat merotasikan cahaya terpolarisasi linier menjadi cahaya terpolarisasi linier lainnya.

Keluaran polarisator linier

Tinjau suatu polarisator linier yang sumbu transmisinya membentuk sudut $+45°$ terhadap horizontal. Apa hasil dari polarisator linier ini jika menerima berkas sinar datang yang terpolarisasi vertikal?

Solusi:
Polarisasi keluaran diberikan oleh

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \mathbf{J}_{+45}\vec{P}_V \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{P}_{+45}. \end{aligned}$$

Dari hasil ini, kita bisa lihat polarisator linier yang sudut transmisinya $45°$ akan mengubah berkas terpolarisasi vertikal menjadi berkas terpolarisasi $+45°$. Namun, kita mungkin bertanya-tanya apa maksud dari faktor tambahan $1/\sqrt{2}$? Ingat bahwa amplitudo dari medan listrik akan tereduksi setelah melewati polarisator linier. Pada contoh ini, amplitudo dari vektor polarisasi berkurang oleh faktor $1/\sqrt{2}$ dan medan listriknya pun akan tereduksi dengan faktor yang sama. Sementara itu, intensitasnya akan berkurang oleh faktor $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$.

Perlu diperhatikan bahwa vektor polarisasi dari cahaya masukan ke elemen optik biasanya dinormalisasi untuk memiliki magnitudo sebesar 1. Keluaran dari elemen optik secara umum akan berupa vektor polarisasi satuan yang dikalikan dengan suatu konstanta kompleks. Amplitudo dari konstanta ini menentukan perubahan amplitudo medan listrik, sedangkan fasenya menentukan pergeseran fase dari medan.

Keluaran polarisator pelat setengah gelombang

Buktikan bahwa jika suatu berkas gelombang terpolarisasi melingkar *kanan* melalui suatu pelat setengah gelombang, keluarannya adalah berkas terpolarisasi melingkar *kiri*, tidak tergantung pada orientasi sumbu cepat dari pelat gelombang. Berkas keluaran juga mengandung perubahan fase yang secara keseluruhan tidak memengaruhi magnitudo.

Solusi:
Kita harus membuktikan bahwa $\mathbf{J}_{\lambda/2\theta}\vec{P}_R = c\vec{P}_L$, dengan c adalah bilangan kompleks yang memiliki besar $|c| = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\lambda/2\theta}\vec{P}_R &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos 2\theta - i \sin 2\theta \\ \sin 2\theta + i \cos 2\theta \end{bmatrix} \\
&= e^{-i2\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\
&= c\vec{P}_L,
\end{aligned}$$

dengan $c = e^{-i2\theta}$ memenuhi $|c| = 1$.

3 Urutan Operasi

Misalkan sebuah gelombang dengan polarisasi masukan $\vec{P}_0$ melewati serangkaian elemen optik yang mengubah polarisasinya. Secara berurut, gelombang ini merasakan elemen-elemen optik yang memiliki matriks Jones $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_n$. Setelah melewati elemen optik pertama, polarisasi gelombang ini berubah menjadi $\vec{P}_1$, yaitu

$$\vec{P}_1 = \mathbf{J}_1\vec{P}_0. \tag{11}$$

Polarisasi ini kemudian menjadi masukan bagi elemen kedua, yang menghasilkan

$$\vec{P}_2 = \mathbf{J}_2\vec{P}_1 = \mathbf{J}_2(\mathbf{J}_1\vec{P}_0) = \mathbf{J}_2\mathbf{J}_1\vec{P}_0. \tag{12}$$

Jika kita generalisasi proses di atas, polarisasi akhir $\vec{P}_n$ setelah melalui operasi transformasi oleh n buah elemen optik adalah

$$\vec{P}_n = \mathbf{J}_n \dots \mathbf{J}_2\mathbf{J}_1\vec{P}_0. \tag{13}$$

Perhatikan urutan operasi matriks ini. Elemen optik pertama yang dihadapi oleh polarisasi masukan berada tepat di sebelah vektor polarisasi masukan tersebut. Matriks Jones untuk elemen optik kedua kemudian mengikuti ke sebelah kirinya, hingga akhirnya yang paling kiri adalah matriks Jones untuk elemen optik terakhir.

Urutan operasi matriks sangatlah penting karena secara umum pertukaran operasi dua buah matriks tidaklah sama satu dengan lainnya. Sebagai contoh, pada sebuah sistem dengan berkas sinar pertama-tama melewati pelat setengah gelombang bersudut $\theta = 45°$ yang keluaran berkasnya kemudian melewati polarisator horizontal, kita perlu tuliskan urutan operasi matriksnya sebagai berikut:

$$\mathbf{J}_H\mathbf{J}_{\lambda/2(45)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Jika urutan operasinya dibalik, kita peroleh:

$$\mathbf{J}_{\lambda/2(45)}\mathbf{J}_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

yang jelas sangat berbeda. Dalam hal ini, tidak hanya matematikanya yang berbeda, tetapi fisikanya juga. Polarisasi keluaran akan sangat bergantung pada urutan suatu berkas sinar melalui elemen-elemen pengubah polarisasi.

Matriks-matriks Jones yang sudah diurutkan dengan benar untuk serangkaian elemen-elemen pengubah polarisasi dapat dikalikan langsung menghasilkan sebuah matriks Jones "efektif" untuk sistem secara keseluruhan. Polarisasi keluarannya kemudian ditentukan dengan mengalikan vektor polarisasi masukan dengan matriks Jones efektif itu.

Matriks Jones efektif

Tentukan matriks Jones efektif yang bersesuaian dengan proses masuknya berkas sinar pada tiga elemen optik ini secara berurutan: (1) pelat setengah gelombang dengan sumbu cepat pada sudut $+22,5°$ terhadap horizontal, (2) pelat seperempat gelombang dengan sumbu cepatnya sejajar vertikal, (3) pelat seperempat gelombang dengan sumbu cepat pada sudut $45°$ terhadap horizontal. Jika cahaya terpolarisasi horizontal memasuki sistem tersebut, polarisasi apa yang akan dihasilkan?

Solusi:

Sesuai dengan urutan, kita definisikan dulu masing-masing matriks Jones:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \cos(2(22,5^\circ)) & \sin(2(22,5^\circ)) \\ \sin(2(22,5^\circ)) & -\cos(2(22,5^\circ)) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \cos^2 90^\circ + i \sin^2 90^\circ & (1-i)\sin 90^\circ \cos 90^\circ \\ (1-i)\sin 90^\circ \cos 90^\circ & \sin^2 90^\circ + i\cos^2 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dan

$$\mathbf{J}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Secara efektif, matriks Jones yang dihasilkan adalah:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_3\mathbf{J}_2\mathbf{J}_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Polarisasi yang keluar dari sistem ini adalah:

$$\vec{P}_3 = \mathbf{J}\vec{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

yang mengindikasikan polarisasi vertikal.

4 Latihan (Soal-Jawab)

Soal 1

Tinjau suatu sistem polarisator yang terdiri atas tiga polarisator berurut: (1) pelat setengah gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut θ_1 dari horizontal, (2) polarisator horizontal, dan (3) pelat setengah gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut θ_2 dari horizontal. Berdasarkan sistem tersebut:

(i) Tentukan matriks Jones efektifnya.

(ii) Pada kondisi bagaimana matriks Jones efektif sistem tersebut ekuivalen dengan sebuah polarisator linear yang sumbu transmisinya membentuk sudut θ terhadap horizontal?

Jawaban

(i) Berdasarkan prinsip kalkulus Jones, matriks efektif dihitung dengan mengalikan matriks elemen optik secara berurutan dari kanan ke kiri. Susunannya adalah:

$$\mathbf{J}_{eff} = \mathbf{J}_{\lambda/2,\theta_2}\mathbf{J}_H\mathbf{J}_{\lambda/2,\theta_1}.$$

Kita kalikan terlebih dahulu dua matriks yang paling kanan (polarisator horizontal dan pelat setengah gelombang pertama):

$$\mathbf{J}_H\mathbf{J}_{\lambda/2,\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kalikan hasil ini dengan matriks pelat setengah gelombang kedua:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{eff} &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta_2 \cos 2\theta_1 & \cos 2\theta_2 \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Sebuah polarisator linear dengan sudut transmisi θ terhadap horizontal memiliki matriks Jones:

$$\mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Agar $\mathbf{J}_{eff}$ ekuivalen dengan $\mathbf{J}_\theta$, elemen matriks di luar diagonal utamanya harus sama (simetris), yakni elemen baris 1 kolom 2 harus sama dengan elemen baris 2 kolom 1:

$$\cos 2\theta_2 \sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \;\Rightarrow\; \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) = 0.$$

Kondisi ini terpenuhi jika $\theta_1 = \theta_2$, secara khusus $\theta_1 = \theta_2 = \theta/2$.

Soal 2

Tinjau suatu sistem polarisator yang terdiri atas tiga polarisator berurut: (1) pelat setengah gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut θ_1 dari horizontal, (2) polarisator vertikal, dan (3) pelat setengah gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut θ_2 dari horizontal. Berdasarkan sistem tersebut, tentukan matriks Jones efektifnya.

Jawaban

Matriks Jones efektifnya dihitung dengan urutan:

$$\mathbf{J}_{eff} = \mathbf{J}_{\lambda/2,\theta_2}\mathbf{J}_V\mathbf{J}_{\lambda/2,\theta_1}.$$

Perkalian matriks polarisator vertikal dan pelat setengah gelombang pertama:

$$\mathbf{J}_V\mathbf{J}_{\lambda/2,\theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{bmatrix}.$$

Kalikan dengan matriks pelat setengah gelombang kedua:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{eff} &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin 2\theta_2 \sin 2\theta_1 & -\sin 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \\ -\cos 2\theta_2 \sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_2 \cos 2\theta_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Soal 3

Tinjau suatu sistem polarisator yang terdiri atas tiga polarisator berurut: pelat seperempat gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut 45° dari horizontal, polarisator horizontal, dan pelat seperempat gelombang yang sumbu cepatnya membentuk sudut −45° dari horizontal. Berdasarkan sistem tersebut:

(i) Tentukan matriks Jones efektifnya.

(ii) Jika sebuah gelombang terpolarisasi melingkar kanan memasuki sistem polarisator ini, bagaimana keluaran polarisasinya dan apakah intensitas berkas yang dihasilkan berubah?

(iii) Jika sebuah gelombang terpolarisasi melingkar kiri memasuki sistem polarisator ini, bagaimana keluaran polarisasinya dan apakah intensitas berkas yang dihasilkan berubah?

Jawaban

(i) Matriks Jones untuk pelat seperempat gelombang pada sudut +45° dan −45° berdasarkan tabel adalah: $\mathbf{J}_{\lambda/4,+45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{J}_{\lambda/4,-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Matriks efektif sistem dihitung sebagai:

$$\mathbf{J}_{eff} = \mathbf{J}_{\lambda/4,-45^\circ}\mathbf{J}_H\mathbf{J}_{\lambda/4,+45^\circ}.$$

Dikalikan secara berurutan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{eff} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1(1)+i(0) & 1(-i)+i(0)\\ i(1)+1(0) & i(-i)+1(0)\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & -i^2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix} \quad (\text{karena } -i^2 = 1).
\end{aligned}$$

(ii) Vektor untuk gelombang terpolarisasi melingkar kanan adalah $\vec{P}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$. Keluaran polarisasinya adalah:

$$\vec{P}_{out} = \mathbf{J}_{eff}\vec{P}_R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1(1)+(-i)(-i)\\ i(1)+1(-i)\end{bmatrix},$$

$$\vec{P}_{out} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-1\\ i-i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Keluaran polarisasinya berupa vektor nol, yang berarti intensitas berkas yang dihasilkan berubah menjadi 0 (cahaya diblokir sepenuhnya oleh sistem).

(iii) Vektor untuk gelombang terpolarisasi melingkar kiri adalah $\vec{P}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$. Keluaran polarisasinya adalah:

$$\vec{P}_{out} = \mathbf{J}_{eff}\vec{P}_L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1(1)+(-i)(i)\\ i(1)+1(i)\end{bmatrix},$$

$$\vec{P}_{out} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-(-1)\\ i+i\end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2\\ 2i\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = \vec{P}_L.$$

Keluaran polarisasinya tetap $\vec{P}_L$ (terpolarisasi melingkar kiri). Intensitas berkas yang dihasilkan tidak berubah (100% ditransmisikan karena faktor skalanya tetap 1).