

Circuitos Elétricos

Circuitos Elétricos

Marley Fagundes Tavares
Ricardo Augusto De Araujo
Natalí Nunes dos Reis

© 2018 por Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Editora e Distribuidora Educacional S.A.

Presidente
Rodrigo Galindo

Vice-Presidente Acadêmico de Graduação e de Educação Básica
Mário Ghio Júnior

Conselho Acadêmico
Ana Lucia Jankovic Barduchi
Camila Cardoso Rotella
Danielly Nunes Andrade Noé
Grasiele Aparecida Lourenço
Isabel Cristina Chagas Barbin
Lidiâne Cristina Vivaldini Olo
Thatiâne Cristina dos Santos de Carvalho Ribeiro

Revisão Técnica
Hugo Tanzarella Teixeira
Márcio Sirovec De Castilhos

Editorial
Camila Cardoso Rotella (Diretora)
Lidiâne Cristina Vivaldini Olo (Gerente)
Elmir Carvalho da Silva (Coordenador)
Letícia Bento Pieroni (Coordenadora)
Renata Jéssica Galdino (Coordenadora)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Tavares, Marley Fagundes
T231c Circuitos elétricos / Marley Fagundes Tavares, Ricardo
Augusto De Araujo, Natali Nunes dos Reis. – Londrina :
Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2018.
208 p.

ISBN 978-85-522-0663-7

1. Engenharia. 2. Circuitos Elétricos. I. Tavares, Marley
Fagundes. II. Araújo, Ricardo Augusto De. III. Reis, Natali
Nunes dos. IV. Título.

CDD 620

Thamiris Mantovani CRB-8/9491

2018
Editora e Distribuidora Educacional S.A.
Avenida Paris, 675 – Parque Residencial João Piza
CEP: 86041-100 – Londrina – PR
e-mail: editora.educacional@kroton.com.br
Homepage: <http://www.kroton.com.br/>

Sumário

Unidade 1 Leis e teoremas de circuitos elétricos	7
Seção 1.1 - Leis de circuitos	9
Seção 1.2 - Teorema de circuitos elétricos	21
Seção 1.3 - Teorema de Máxima Transferência de Potência	35
Unidade 2 Métodos de análise de circuitos elétricos	51
Seção 2.1 - Análise nodal	52
Seção 2.2 - Análise de malhas	68
Seção 2.3 - Transformação de tipos de circuitos elétricos	83
Unidade 3 Elementos armazenadores de energia	99
Seção 3.1 - Capacitores	101
Seção 3.2 - Indutores, indutores em série, indutores em paralelo, associação de indutores	113
Seção 3.3 - Circuitos de primeira ordem sem fonte	125
Unidade 4 Circuitos de primeira e segunda ordem	139
Seção 4.1 - Circuitos de primeira ordem com fonte	141
Seção 4.2 - Circuitos de segunda ordem sem fonte	160
Seção 4.3 - Circuitos de segunda ordem com fonte	178

Palavras do autor

O estudo e a análise de circuitos elétricos são essenciais para você, estudante de engenharia, pois este é, provavelmente, o seu primeiro contato direto com o “mundo” dos circuitos elétricos e eletrônicos. Em sua vida profissional, você analisará sistemas elétricos tanto simples quanto complexos, utilizando as regras e metodologias estudadas ao longo desta disciplina.

Por isso, é muito importante que você se dedique a estudar o conteúdo para compreender melhor os conceitos e se aprofundar na prática. Assim, ao final desta disciplina, esperamos que você obtenha conhecimento sobre os principais conceitos relacionados à análise de circuitos elétricos, identificando as leis, os teoremas e métodos de estudo desses sistemas, compreendendo cada um deles e suas aplicabilidades. E, para alcançar esses objetivos, a disciplina está estruturada em quatro unidades, a saber:

- Leis e teoremas de circuitos elétricos.
- Métodos de análise de circuitos elétricos.
- Elementos armazenadores de energia.
- Circuitos de primeira e segunda ordens.

A primeira unidade trata, principalmente, das leis e dos teoremas que regem os circuitos elétricos, sendo apresentados os principais conceitos sobre a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff – lei das correntes (LKC) e lei das tensões (LKT). Nesta unidade, também serão discutidos os teoremas de Thevenin, Norton, superposição, máxima transferência de potência, substituição e reciprocidade.

Na segunda unidade, o objetivo será compreender os métodos para análise de circuitos, sendo expostos métodos, como a análise nodal e a análise de malhas.

Já na terceira unidade, serão analisados os elementos capacitivos e indutivos no sistema elétrico, verificando suas características e peculiaridades. Finalmente, na quarta unidade, serão estudados circuitos RLC (resistor – indutor – capacitor), sendo explorados métodos de estudo e apresentadas as características dos sistemas em questão.

Caro aluno, esperamos que você esteja motivado a estudar e aprender os conceitos e as aplicações dos circuitos elétricos.

Bons estudos e ótimo aprendizado!

Leis e teoremas de circuitos elétricos

Convite ao estudo

Caro aluno, nesta unidade, o tema central em estudo são as leis e os teoremas que regem os circuitos elétricos, sendo apresentados, primeiramente, os fundamentos gerais, ou seja, as leis básicas, como a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff. Posteriormente, serão estudados métodos de análise de circuitos, sendo apresentados teoremas que o embasarão no estudo e na prática dessas análises.

Na primeira seção, o estudo estará centrado na apresentação da Lei de Ohm e das Leis de Kirchhoff – Lei de Kirchhoff das correntes (LKC) e Lei de Kirchhoff das tensões (LKT) – e na análise de circuitos com fontes dependentes, sendo disponibilizados os principais conceitos sobre esses fundamentos e aplicabilidades.

Na segunda seção, será abordada uma parte inicial dos teoremas para análise de circuitos elétricos, sendo expostas as metodologias dos teoremas de Norton, Thevenin e superposição e verificado o princípio da linearidade. Na última seção, por fim, serão identificados os demais teoremas aplicados em sistemas elétricos, tais como teorema da máxima transferência de potência, teorema da substituição e da reciprocidade.

Portanto, o objetivo desta unidade é que você, aluno, possa adquirir conhecimentos fundamentais para analisar circuitos resitivos, aplicando os métodos expostos ao longo da unidade.

Agora, considere o seguinte contexto para aplicação prática do conteúdo desta unidade: você é engenheiro em uma empresa que produz aparelhos elétricos e eletrônicos. É parte do seu trabalho analisar circuitos elétricos, ou parte deles, dos produtos produzidos na empresa, a fim de verificar as peculiaridades e características dos sistemas, tais como

capacidade de resistividade do circuito, condução de corrente, análise da tensão aplicada ao sistema, entre outros. Assim, para exemplificar uma das suas atividades, deverão ser analisados diversos aspectos do sistema, utilizando leis e teoremas para o estudo. Para isso, serão utilizados dois circuitos elétricos, os quais possuem cargas puramente resistivas como elemento principal, um tratando os elementos em série e o outro apresentando os elementos em paralelo.

Nesse sentido, com o andamento das seções, o nível do aprendizado será aprofundado, abordando novas etapas para a concretização das análises dos circuitos elétricos. Bons estudos e ótimo trabalho nesta unidade!

Seção 1.1

Leis de circuitos

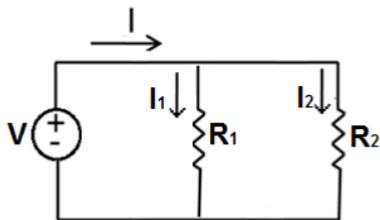
Diálogo aberto

O estudo dos circuitos elétricos é essencial em sua profissão, pois, ao longo de sua rotina profissional, serão analisados sistemas dessa natureza constantemente, verificando a capacidade de resistividade, a condução de corrente, os níveis de tensão aceitáveis, entre outros.

Dessa forma, para colocarmos em prática o conhecimento que deverá ser adquirido ao longo desta seção, sobre as leis que fundamentam os circuitos elétricos, considere a seguinte situação: você é o engenheiro de uma empresa de produtos elétricos e uma das suas funções é analisar os circuitos elétricos de determinados produtos, verificando as características e peculiaridades do sistema.

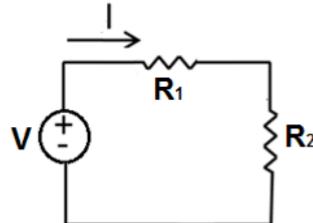
De uma forma simplificada, vamos considerar as Figuras 1.1 e 1.2 em sua análise.

Figura 1.1 | Circuito elétrico em paralelo



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 1.2 | Circuito elétrico em série



Fonte: elaborada pelo autor.

Esses circuitos, embora muito simples, podem ser considerados como módulos, ou trechos de circuitos, que estão presentes na maioria dos produtos produzidos na sua empresa.

Assim, como você poderá analisar os circuitos anteriores? Quais leis devem embasar suas análises sobre esses sistemas? Quais são as peculiaridades e características de cada elemento nos respectivos circuitos elétricos?

Para auxiliá-lo nas análises, você irá estudar, ao longo desta seção, as leis fundamentais que norteiam os circuitos elétricos. Bons estudos e ótimo trabalho!

Não pode faltar

Para iniciarmos o estudo a respeito de circuitos elétricos, é necessário, primeiramente, identificar e compreender as leis e os teoremas que os regem. Sendo assim, nesta seção, estudaremos sobre as leis fundamentais que norteiam esses sistemas, a saber:

1. Lei de Ohm.
2. Leis de Kirchhoff:
 - a. Lei de Kirchhoff das correntes.
 - b. Lei de Kirchhoff das tensões.

Ademais, serão apresentadas as análises que devem ser realizadas para circuitos elétricos contendo fontes dependentes.



Reflita

Como seriam as análises dos circuitos elétricos sem leis e teoremas que os norteassem? Qual é a importância das leis de Ohm e Kirchhoff? Essas leis embasaram as demais análises dos circuitos elétricos, tais como análise de malhas e análise nodal?

Porém, antes de iniciarmos propriamente o estudo sobre essas leis, alguns conceitos serão apresentados para auxiliar na compreensão dos assuntos apresentados na sequência:

- **Círculo elétrico:** é conceituado como o conjunto de n fontes e cargas (dispositivos elétricos) interconectados (THOMAS; ROSA; TOUSSAINT, 2011; SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014).
- **Ramo:** é denominado como a representação de um único elemento, podendo ser uma fonte de tensão ou um resistor, por exemplo (ALEXANDER; SADIKU, 2013).
- **Nó:** é designado como um ponto ou uma junção elétrica entre dois ou mais elementos de um ramo (THOMAS; ROSA; TOUSSAINT, 2011; ALEXANDER; SADIKU, 2013).
- **Laço ou loop:** é definido como qualquer caminho fechado em um circuito elétrico (THOMAS; ROSA; TOUSSAINT, 2011; ALEXANDER; SADIKU, 2013).

I – Lei de Ohm

Em 1826, o físico alemão George Simon Ohm estabeleceu a relação entre tensão, corrente e resistência em um circuito, denominada de Lei de Ohm (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014). A partir das informações obtidas por meio dessa lei foi possível definir que a tensão (V) sobre um resistor (R) é diretamente proporcional à corrente (I) percorrida nesse mesmo elemento, podendo ser representada por:

$$V \propto I$$

Ademais, Ohm definiu a constante de proporcionalidade para um resistor como:

$$V = I \times R$$

Em que:

V : tensão medida em volts (V);

I : corrente medida em ampères (A);

R : resistência medida em ohms (Ω).

Podendo, ainda, ser deduzida a equação em:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

É possível, ainda, definir a potência dissipada por um resistor, em termos das seguintes equações:

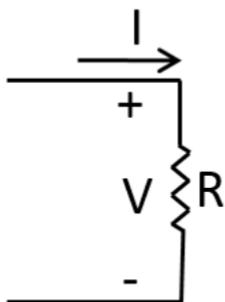
$$P = I^2 \times R$$

$$P = I^2 \times R$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

É importante destacar que, para considerar os conceitos analisados anteriormente, é necessário verificar o sentido da corrente (I) e a polaridade da tensão (V), devendo elas estarem de acordo com o sinal passivo (convenção), conforme ilustrado na Figura 1.3 (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014).

Figura 1.3 | Circuito resistivo



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando ainda a Figura 1.3, podemos verificar que, se a corrente fluir do maior para o menor potencial, será obtido $V = IR$. Em contrapartida, se a corrente fluir do menor potencial para o maior, será adquirido $V = -IR$.



Pesquise mais

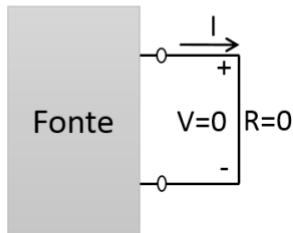
Apresentamos, nesta seção, apenas os conceitos relacionados à resistência em um circuito elétrico, porém existe uma grandeza, denominada condutância, que permite analisar a capacidade de um elemento conduzir corrente elétrica (inverso da definição de resistência) em um determinado circuito elétrico.

Para saber mais sobre esse assunto, leia a Seção 2.2, do livro *Fundamentos de Circuitos Elétricos* (ALEXANDER; SADIKU, 2013), disponível na nossa biblioteca virtual. Disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>>. Acesso em: 31 out. 2017.

Outra análise importante a se realizar, tratando de circuitos resistivos, é a averiguação dos valores extremos que um resistor pode possuir. Como esse elemento pode apresentar valores entre zero (0) e infinito (∞), serão verificados dois casos em questão, sendo: (1) valor do resistor igual a zero ($R = 0$) – curto-circuito – e (2) valor do resistor igual a infinito ($R = \infty$) – circuito aberto.

Para o estudo do primeiro caso (curto-circuito), utilizaremos a Figura 1.4 para auxiliar na análise do circuito.

Figura 1.4 | Curto-círcuito



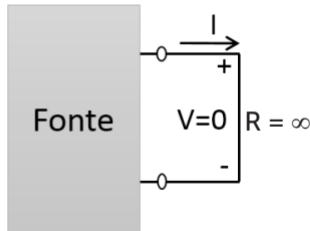
Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse caso, analisando a Figura 1.4, fica evidente que a tensão e a resistência para o caso (1) possuem valor zero, porém a corrente pode possuir qualquer valor. Dessa forma, temos que:

$$V = IR = 0$$

Para o segundo caso (círculo aberto), verificaremos as características apresentadas na Figura 1.5.

Figura 1.5 | Circuito aberto



Fonte: elaborada pelo autor.

Analizando a Figura 1.5, podemos perceber que, nesse caso, a corrente possui valor igual a zero (0), porém a tensão pode possuir qualquer valor. Dessa forma, temos que:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V}{R} = 0$$



É importante enfatizarmos a diferença entre **curto-círcuito** e **círculo aberto**.

É conceituado como **curto-círcuito** um elemento do circuito com resistência próxima a zero (consequentemente, tensão próxima a zero). Já o **círculo aberto** é conceituado dessa forma quando possui um elemento do circuito com resistência próxima a infinito (consequentemente, corrente próxima a zero).

II – Leis de Kirchhoff

As Leis de Kirchhoff, elaboradas pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff, podem ser divididas em duas, sendo: a *Lei de Kirchhoff das correntes*, conhecida como **LKC**, ou lei dos nós; e a *Lei de Kirchhoff das tensões*, nomeada também de **LKT**, ou lei das malhas.

Essas leis complementam a Lei de Ohm, sendo, dessa forma, ferramentas de análise essenciais para o estudo de circuitos elétricos.

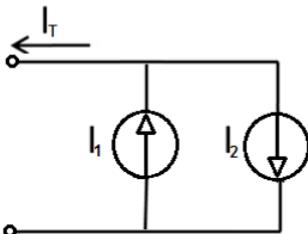
Lei de Kirchhoff das correntes

A Lei de Kirchhoff das correntes baseia-se na lei de conservação de carga, a qual define que a soma algébrica das cargas dentro de um sistema não muda (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014). Portanto, a LKC estabelece que a soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a zero (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014). Temos, então:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \dots + I_N = 0$$

É possível representar o conceito da LKC por meio da Figura 1.6.

Figura 1.6 | Circuito ilustrando a LKC (exemplo de circuito em paralelo)



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse caso, sabemos pela lei dos nós que:

$$I_T = I_1 - I_2$$

Lei de Kirchhoff das tensões

A Lei de Kirchhoff das tensões baseia-se no princípio da conservação de energia em um sistema elétrico. Partindo desse pressuposto, esse princípio indica que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de um circuito deve ser igual a zero (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014). Logo, a LKT estabelece que a soma algébrica de todas as tensões ao longo de um loop (laço ou caminho fechado) deve ser igual a zero. Temos, portanto, que:

$$\sum_{i=1}^N V_i = 0$$

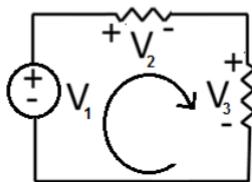
Em que:

N: número de tensões em um caminho fechado;

V_i : i-ésima tensão.

Podendo ser representada a LKT pela Figura 1.7.

Figura 1.7 | Circuito ilustrando a LKT (exemplo de circuito em série)



Fonte: elaborada pelo autor.

Nesse caso, pela lei das malhas, sabemos que:

$$-V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

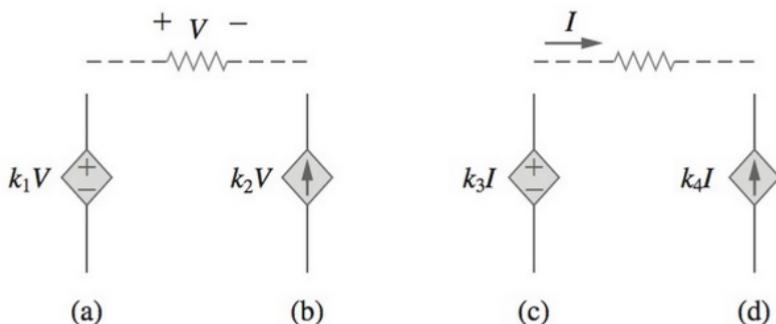
III – Análise de circuitos com fontes dependentes

Compreendendo as leis básicas apresentadas, é possível analisar tanto circuitos elétricos com fontes independentes (circuitos analisados até o momento) quanto circuitos elétricos com fontes dependentes.

Em relação à análise dessas fontes dependentes, podemos dispor de quatro tipos, a saber:

- Fonte de tensão controlada por tensão – Figura 1.8(a).
- Fonte de tensão controlada por corrente – Figura 1.8(b).
- Fonte de corrente controlada por tensão – Figura 1.8(c).
- Fonte de corrente controlada por corrente – Figura 1.8(d).

Figura 1.8 | Fontes dependentes: (a) tensão controlada por tensão; (b) corrente controlada por tensão; (c) tensão controlada por corrente; (d) corrente controlada por corrente



Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 118).

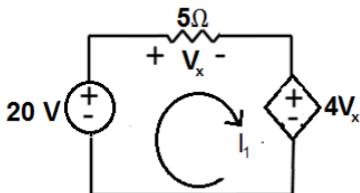
É importante destacar que o valor da fonte dependente (de tensão ou corrente) será proporcional à tensão ou corrente do circuito em estudo (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2014).



Exemplificando

Para exemplificarmos a análise de circuitos elétricos contendo fonte dependente, vamos verificar a Figura 1.9.

Figura 1.9 | Circuito elétrico com fonte dependente



Fonte: elaborada pela autora.

Sabemos, pela LKT que:

$$-20 + 5I_1 + 4V_x = 0$$

Sendo que: $5I_1 = V_x$.

Dessa forma, temos que:

$$-20 + V_x + 4V_x = 0$$

$$5V_x = 20$$

$$V_x = 4 \text{ volts}$$

Portanto, a fonte dependente possui valor de:

$$4V_x = 16 \text{ volts}$$

Sem medo de errar

Você precisa analisar os circuitos das Figuras 1.1 e 1.2. Observe que cada elemento dos circuitos irá influenciar diferentemente o funcionamento do circuito em função da forma com que é associado (ligado) a outro.

Portanto, conforme estudado ao longo desta seção, verificamos que a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff embasam as análises dos circuitos elétricos, sendo ambas ferramentas essenciais para o estudo dos sistemas dessa natureza (completando-se entre si).

A primeira lei citada, denominada Lei de Ohm, estabelece a relação entre tensão e corrente em um circuito elétrico resistivo. De acordo com os conceitos apresentados por ela, a tensão sobre um resistor é diretamente proporcional à corrente percorrida neste mesmo elemento.

Dessa forma, é possível definir a constante de proporcionalidade em um circuito resistivo, como:

$$V = I \times R$$

$$I = \frac{V}{R}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

Para utilização desses conceitos de forma correta, é importante analisar o sentido da corrente e polaridade da tensão no sistema elétrico, devendo seguir o sinal passivo (convenção).

Em relação às Leis de Kirchhoff, devemos estudá-las sob dois pontos de vista, a saber:

- Análise das correntes.
- Análise das tensões.

A Lei de Kirchhoff referente às correntes, denominada também de LKC, ou lei dos nós, parte do princípio que a soma algébrica das cargas em um sistema fechado não pode ser alterada. Dessa forma, essa lei estabelece que a soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a zero, podendo ser representada a definição por meio de uma equação, como:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \dots + I_N = 0$$

Já a Lei de Kirchhoff das tensões, nomeada também de LKT, ou lei das malhas, baseia-se no princípio de que a soma algébrica das diferenças de potencial ao longo de um circuito deve ser igual a zero. Sendo assim, a LKT estabelece que a soma algébrica de todas as tensões ao longo de um caminho fechado deve ser igual a zero, podendo ser representado o conceito por meio de uma equação, sendo:

$$\sum_{i=1}^N V_i = 0$$

Em relação à análise dos circuitos apresentados nas Figuras 1.1 e 1.2:

- Para o circuito apresentado na Figura 1.1, que representa um circuito elétrico em paralelo, sabemos que $I = I_1 + I_2$.
- Para o circuito apresentado na Figura 1.2, que representa um circuito elétrico em série, sabemos que soma das tensões em cada um dos elementos deve ser igual a 0.
- Para encontrar valores referentes à tensão, corrente e resistência em ambos os circuitos, é necessário considerar os fundamentos descritos na Lei de Ohm e observar as relações de proporcionalidade do circuito elétrico, sabendo que

$$V = I \times R ; I = \frac{V}{R} ; V = \frac{I}{R}$$

- Ambos os circuitos devem obedecer tanto à LKT quanto à LKC e à Lei de Ohm.

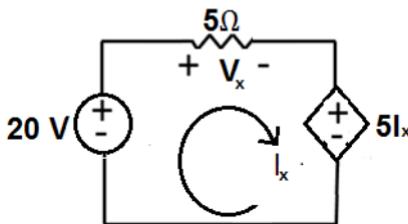
Avançando na prática

Analisando circuitos elétricos com fontes dependentes

Descrição da situação-problema

Para sintetizar os conteúdos aprendidos nesta seção, vamos supor a seguinte situação: você, como engenheiro eletricista, deve analisar um circuito elétrico que dispõe de uma fonte de tensão dependente, representado na Figura 1.10.

Figura 1.10 | Circuito em análise



Fonte: elaborada pela autora.

É necessário determinar qual é a tensão (V_x) e a corrente (I_x) nesse circuito, aplicando os conceitos das LKC, LKT e Lei de Ohm.

Resolução da situação-problema

Sabemos, pela Lei de Kirchhoff das correntes, que a soma algébrica em circuito fechado das correntes deve ser igual a zero, portanto temos que:

$$-20 + 5I_x + 5I_x = 0$$

Sendo que: $5I_x = V_x$ (pela Lei de Ohm).

Dessa forma, temos que:

$$10I_x = 20$$

$$I_x = 2 \text{ A}$$

Sendo assim, sabemos que a tensão V_x possuirá valor de:

$$V_x = 5I_x = 5 \times 2 = 10 \text{ volts}$$

Faça valer a pena

1. Para realizar a análise de circuitos elétricos, é importante conhecer as leis fundamentais dos circuitos elétricos, sendo elas a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff, das correntes e das tensões.

A respeito das leis básicas para análise dos circuitos elétricos, associe as leis dispostas na coluna A, com as suas características listadas na coluna B.

Coluna A	Coluna B
I – Lei de Ohm	1 - Define a constante de proporcionalidade para um resistor.
II – LKC	2 - Baseia-se na lei de conservação de energia em um circuito elétrico.
III – LKT	3 - Baseia-se na lei de conservação de carga em um circuito elétrico.

Assinale a alternativa que apresenta a associação correta.

- a) II – 1, III – 2, I – 3.
- b) II – 1, I – 2, III – 3.
- c) I – 1, III – 2, II – 3.
- d) I – 1, II – 2, III – 3.
- e) III – 1, II – 2, I – 3.

2. Na prática, tanto um curto-círcuito quanto um circuito aberto podem ser desejados ou evitados, dependendo da circunstância e da aplicação. Porém, para garantir uma ou outra situação, devemos contar com a combinação de vários componentes, cujas análises podem ser feitas pela Lei de Ohm, pela LKC e pela LKT.

Com base nos conceitos de curto-círcuito e circuito aberto, avalie as seguintes afirmativas:

I – Curto-círcuito representa um elemento do circuito com resistência próxima a infinito, e circuito aberto representa um elemento do circuito com resistência próxima a zero.

II – Em um curto-círcuito, a tensão e a resistência possuem valor igual a zero, e a corrente pode possuir qualquer valor.

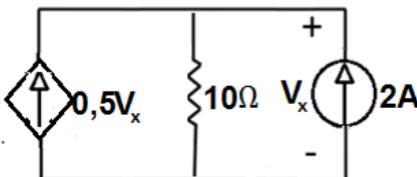
III – Em um circuito aberto, a corrente possui valor igual a zero, e a tensão pode possuir qualquer valor.

A seguir, assinale a alternativa que indica as afirmativas corretas:

- a) Apenas I e II.
- b) Apenas II e III.
- c) Apenas III.
- d) Apenas II.
- e) I, II e III.

3. Analise a Figura 1.11 e, com base na Lei de Ohm, na Lei de Kirchhoff para correntes e na Lei de Kirchhoff para tensões, resolva o circuito, encontrando o valor correspondente à tensão V_x .

Figura 1.11 | Circuito em análise



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando o circuito, qual é o valor de V_x ?

- a) -5 volts.
- b) 5 volts.
- c) 10 volts.
- d) -10 volts.
- e) -20 volts.

Seção 1.2

Teorema de circuitos elétricos

Diálogo aberto

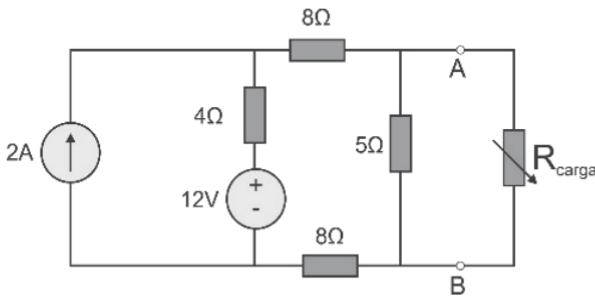
Olá, caro aluno! Nesta seção, estudaremos o Princípio de Linearidade e os principais teoremas aplicados na análise de circuitos elétricos.

As técnicas de análise nodal (usando a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC), ou método dos nós) e de malha (Lei de Kirchhoff de Tensões (LKT)), as quais estudamos na seção anterior, são métodos confiáveis e extremamente poderosos. No entanto, ambos exigem que desenvolvamos um conjunto completo de equações para descrever um circuito específico como uma regra geral, mesmo que apenas uma corrente ou tensão seja de nosso interesse. Portanto, é interessante conhecer técnicas diferentes para isolar partes específicas de um circuito e, assim, simplificar a análise.

Para colocarmos em prática o conhecimento que deverá ser adquirido ao longo desta seção, considere a seguinte situação: você, como responsável pela equipe de engenharia de uma empresa que produz placas de circuitos elétricos e eletrônicos usadas em rádios, precisa facilitar as análises dos circuitos complexos, otimizando o tempo gasto para essa tarefa.

Considere o circuito da Figura 1.12 como sendo comum a todos os circuitos a serem analisados.

Figura 1.12 | Circuito comum



Fonte: elaborada pelo autor.

Quais procedimentos você adotaria para simplificar a análise do circuito? Como você encontraria um circuito equivalente?

Para auxiliá-lo a responder a essas questões, você irá estudar, ao longo desta seção, alguns dos principais teoremas utilizados em análises de circuitos elétricos. Bons estudos!

Não pode faltar

Princípio da linearidade

A linearidade expressa a relação linear entre causa e efeito de um elemento, apresentando duas propriedades:

a) Homogeneidade: se a entrada de um sistema é multiplicada por uma constante k , a saída também é multiplicada pela constante k . Como exemplo, temos a Lei de Ohm, que relaciona a entrada (corrente) com a saída v (tensão) através do elemento passivo R (resistor ôhmico), ou seja, $v = R \cdot i$. Se multiplicarmos a corrente i por uma constante k , então a tensão de saída também aumentará correspondenteamente pela constante k , ou seja, $v \cdot k = R \cdot i \cdot k$.

b) Adição: a resposta a uma soma de entradas é a soma das respostas a cada entrada aplicada separadamente. Tomemos como exemplo as relações de tensão e corrente a seguir:

$$v_1 = R \cdot i_1$$

$$v_2 = R \cdot i_2$$

A adição das correntes ($i_1 + i_2$) resulta em:

$$v = R (i_1 + i_2) = R \cdot i_1 + R \cdot i_2$$

$$v = v_1 + v_2$$

Assim, podemos definir o princípio da linearidade como sendo: para qualquer circuito que contenha resistores e fontes de tensão e/ou corrente independentes, a tensão em cada nó e a corrente em cada ramo é uma função linear dos valores de origem. Também é verdade para um circuito que contém fontes dependentes, cujos valores são proporcionais a tensões ou correntes em outro lugar do circuito.

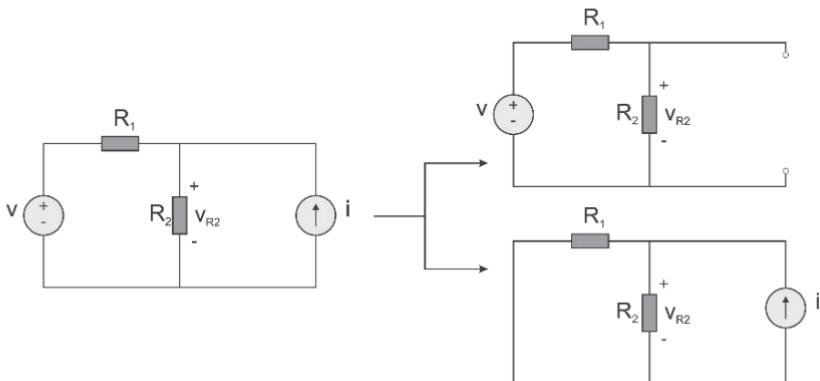
Teorema de Superposição

O Teorema de Superposição é uma consequência do princípio da linearidade. A partir dele, em um circuito linear contendo duas ou mais

fontes independentes, conseguimos calcular, em qualquer ponto do circuito, a corrente ou a tensão, bastando, para isso, realizar uma soma algébrica das contribuições individuais de cada fonte atuando sozinha.

Considerar os efeitos de cada fonte de forma independente exige que as demais fontes sejam removidas e substituídas sem afetar o resultado final. Para removermos uma fonte de tensão ao aplicar esse teorema, a diferença de potencial entre os terminais dessa fonte deve ser ajustada em zero (curto-circuito). Já para removermos uma fonte de corrente, a exigência é que seus terminais sejam abertos (circuito aberto), como ilustrado na Figura 1.13.

Figura 1.13 | Substituição das fontes no Teorema da Superposição



Fonte: elaborada pelo autor.

Resumindo: no Teorema de Superposição, para encontrar o efeito de uma determinada fonte no circuito, as demais fontes precisam ser substituídas da seguinte maneira:

- Se for uma fonte de tensão: substituir por um curto-circuito.
- Se for uma fonte de corrente: substituir por um circuito aberto.

Bastante simples e elegante, você não acha? Deve-se notar, porém, que o Teorema de Superposição funciona apenas para circuitos que são redutíveis em combinações série/paralela para cada uma das fontes de cada vez. Assim, esse teorema é inútil para analisar um circuito de ponte desequilibrado e só funcionará se as equações resultantes forem lineares (sem expoentes ou raízes).



Para ilustrar melhor o Teorema de Superposição, considere o mesmo circuito da Figura 1.13, com $v = 12\text{ V}$, $R_1 = 16\Omega$, $R_2 = 8\Omega$ e $i = 6\text{ A}$. Para encontrarmos o valor de V_{R_2} no circuito usando o teorema, precisamos descobrir a contribuição de cada uma das duas fontes sobre a tensão desejada.

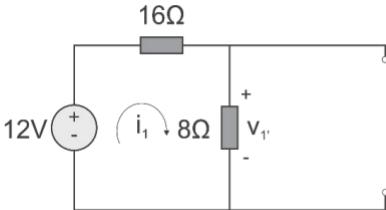
1. De acordo com a linearidade, podemos escrever:

$$V_{R_2} = V_1 + V_2$$

Onde: V_1 é a contribuição da fonte de tensão e V_2 é a contribuição da fonte de corrente.

2. Como vimos, encontramos apenas uma contribuição independente por vez. Para obter V_1 , substituímos a fonte de corrente por um circuito aberto, como mostra a Figura 1.14.

Figura 1.14 | Circuito sem a fonte de corrente



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a lei das tensões, obtemos:

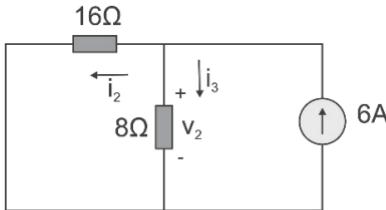
$$-12 + 16i_1 + 8i_1 = 0$$

$$i_1 = 0,5\text{ A}$$

$$\text{Então, } V_1 = i_1 \cdot 8 = 4\text{ V}$$

Para encontrarmos o valor de V_2 , estabelecemos o curto-círcuito da fonte de tensão, como mostrado na Figura 1.15.

Figura 1.15 | Circuito com a fonte de tensão em curto-círcuito



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora, usamos a regra do divisor de corrente para encontrar i_3 :

$$i_3 = \frac{16}{8+16} \cdot 6 = 4A$$

Portanto, $V_2 = 8i_1 = 32V$.

Finalmente, temos que: $V_{R_2} = 4 + 32 = 36V$.



Refletia

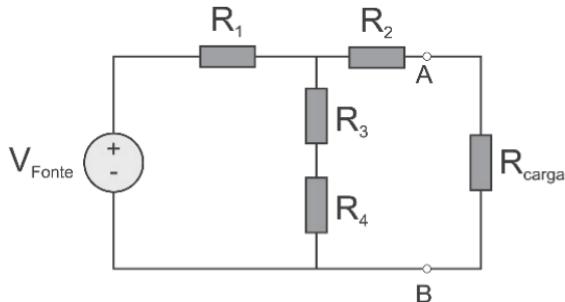
O princípio de superposição não é aplicável aos efeitos de potência elétrica. Como você explicaria isso?

Teorema de Thévenin

O Teorema de Thévenin afirma que é possível simplificar qualquer circuito linear, independente de quanto complexo, em um circuito equivalente com apenas uma única fonte de tensão em série com uma resistência, conectados em série a uma resistência denominada resistência de carga, geralmente variável. Mas o que isso significa realmente?

Para responder a essa pergunta, considere o circuito da Figura 1.16.

Figura 1.16 | Circuito com dois terminais

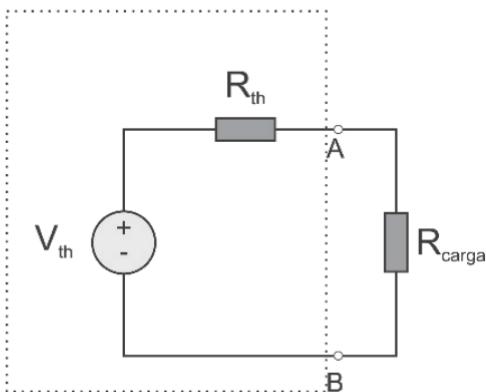


Fonte: elaborada pelo autor.

Usando o Teorema de Thévenin, o circuito pode, então, ser representado simplesmente como mostrado na Figura 1.17:

Figura 1.17 | Circuito equivalente de Thévenin

Equivalente de Thévenin



Fonte: elaborada pelo autor.

Um exemplo típico para o uso do Teorema de Thévenin é o circuito elétrico de nossas casas. Se considerarmos que em tomadas de uso doméstico podem ser ligados diferentes aparelhos que constituem uma carga variável, assim, cada vez que o elemento variável é alterado, todo o circuito deve ser analisado novamente. Para evitar esse problema, o teorema fornece uma técnica pela qual a parte fixa do circuito é substituída por um circuito equivalente.

Já sabemos, portanto, que o Teorema de Thévenin facilita toda a análise devido à simplificação do circuito, porém, para transformar um circuito complexo em seu equivalente Thévenin, precisamos seguir estes passos:

1. Substituímos a resistência de carga por um circuito aberto.
2. Calculamos a tensão entre os terminais desse circuito aberto.
Essa será a tensão equivalente Thévenin (V_{Th}).
3. Ainda sem o resistor de carga, substituímos todas as fontes de corrente por um circuito aberto e todas as fontes de tensão por um curto-círcuito (similar ao que vimos no Teorema de Superposição). Calculamos, então, a resistência equivalente desse circuito, que será a resistência de Thévenin (R_{Th}).

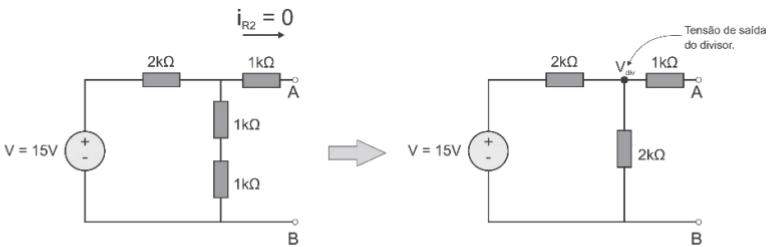


Considere o circuito da Figura 1.6, porém agora assuma $V_{\text{Fonte}} = 15 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$.

Como primeiro passo, substituímos a resistência de carga R_{carga} por um circuito aberto e então calculamos a tensão de Thévenin.

Note que a corrente sobre o resistor R_2 é igual a zero, pois o circuito está aberto entre os terminais A e B. Portanto, não há queda de tensão sobre esse resistor e, consequentemente, a tensão V_{AB} (que é a tensão de Thévenin V_{Th}) será igual à tensão sobre a associação série de R_3 com R_4 . Perceba também que o resistor R_1 forma com os resistores R_3 e R_4 um divisor de tensão, sendo a tensão de saída igual a V_{AB} . Assim, teremos o circuito representado na Figura 1.18:

Figura 1.18 | Circuito equivalente



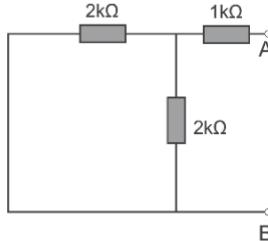
Fonte: elaborada pelo autor.

$$V_{\text{div}} = V_{AB} = V_{Th} = \frac{2}{2+2} \cdot 15$$

$$V_{Th} = 7,5 \text{ V}$$

Agora, vamos encontrar a resistência equivalente. Para isso, substituímos a fonte de tensão por um curto-circuito. Assim, teremos os dois resistores de $2 \text{ k}\Omega$ em paralelo, e o resultado dessa associação estará em série com o resistor de $1 \text{ k}\Omega$, mostrado na Figura 1.19.

Figura 1.19 | Circuito equivalente: fonte de tensão em curto-circuito



Fonte: elaborada pelo autor.

$$R_{Th} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} + 1$$

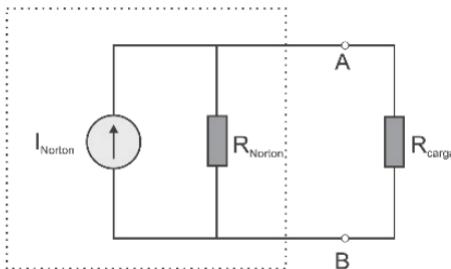
$$R_{Th} = 2 \text{ k}\Omega$$

Teorema de Norton

O Teorema de Norton afirma que qualquer circuito linear contendo várias fontes e resistências pode ser substituído por uma única fonte de corrente constante em paralelo com um único resistor e ambos em paralelo com uma resistência de carga. Ao considerarmos o mesmo circuito da Figura 1.13, mas agora aplicando o Teorema de Norton, obtemos o circuito da Figura 1.20:

Figura 1.20 | Circuito equivalente de Norton

Equivalente de Norton



Fonte: elaborada pelo autor.

Assim como no Teorema de Thévenin, precisamos seguir algumas etapas para encontrar o circuito equivalente, sendo elas:

1. Para encontrarmos a corrente da fonte de Norton (I_{Norton}), substituímos o resistor de carga do circuito original por um curto-círcuito (**atente-se**: esse passo é exatamente o oposto do que ocorre no Teorema de Thévenin, no qual substituímos o resistor de carga por um circuito aberto). Depois, calculamos a corrente que atravessa esse curto-círcuito, a qual é a de Norton.

2. Para calcular a resistência de Norton (R_{Norton}), realizamos o mesmo procedimento usado para calcular a resistência de Thévenin, isto é, substituímos todas as fontes de tensão por um curto-círcuito e fontes de corrente por um circuito aberto. Depois, calculamos a resistência equivalente entre os terminais de conexão em aberto, ou seja, entre "A" e "B" (terminais em que a resistência de carga está originalmente conectada).



Uma vez que os teoremas de Thévenin e Norton são dois métodos igualmente válidos para reduzir um circuito complexo para algo mais simples de ser analisado, deve haver alguma maneira de converter um circuito equivalente Thévenin para um circuito equivalente Norton, e vice-versa. De fato, existe e o procedimento é simples.

Recorde que o procedimento para calcular a resistência Thévenin é idêntico ao procedimento para calcular a resistência Norton: *substitua todas as fontes e determine a resistência entre os terminais da conexão de carga aberta*. Como tal, as resistências Thévenin e Norton para o mesmo circuito original devem ser iguais.

Considerando o fato de que ambos os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton se destinam a fornecer a mesma tensão e corrente ao mesmo resistor de carga e que esses dois circuitos equivalentes foram derivados do mesmo circuito, então devem se comportar de forma idêntica. Assim, podemos dizer que a tensão de Thévenin é igual à corrente de Norton multiplicada pela resistência de Norton, obedecendo à Lei de Ohm:

$$V_{Th} = I_{Norton} \cdot R_{Norton}$$

Por outro lado, se quisermos calcular a corrente de Norton através da tensão e resistência de Thévenin, também é possível:

$$I_{Norton} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

Analizando essas duas equações, concluímos, então, que $R_{Th} = R_{Norton}$.



Pesquise mais

Os teoremas de Thévenin, Norton e Superposição são amplamente utilizados na análise de circuitos elétricos. O vídeo a seguir mostra de maneira prática esses teoremas: M1A05 - Teorema de Thevenin, Norton e Superposição (AP). 14 mar. 2017. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=MwPT2UXcgT4>>. Acesso em: 27 nov. 2017. Para saber mais sobre esse assunto, leia o Capítulo 4 do livro:

ALEXANDER, C.; SADIKU, M. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2003.

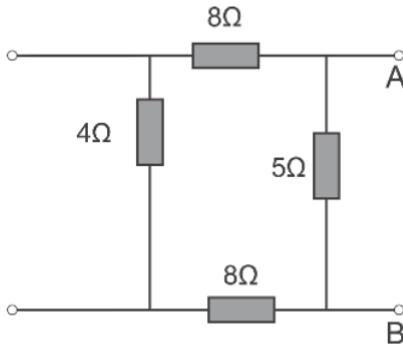
Sem medo de errar

Vamos lembrar que você é um engenheiro que trabalha em uma empresa que produz placas de circuitos elétricos e eletrônicos utilizadas em rádios. Agora, você precisa otimizar o tempo de sua equipe ao analisar circuitos complexos. Para isso, deve encontrar um circuito equivalente da parte comum a todos os circuitos. Dentre os métodos abordados nesta seção, você poderá optar pelo Teorema de Thévenin ou o Teorema de Norton. Ambos fornecem um circuito equivalente que simplifica o circuito original complexo.

Como vimos, podemos encontrar o equivalente de Norton e convertê-lo ao equivalente de Thévenin, ou vice-versa. Vamos optar pelo Teorema de Norton, em que todo o circuito pode ser resumido a uma fonte de corrente em paralelo com um resistor e aplicá-lo ao circuito da Figura 1.12.

Primeiramente substituímos todas as fontes de tensão por um curto-circuito e as fontes de corrente por um circuito aberto. Retiramos também o resistor de carga, obtendo o circuito da Figura 1.21.

Figura 1.21 | Circuito sem as fontes de tensão e corrente



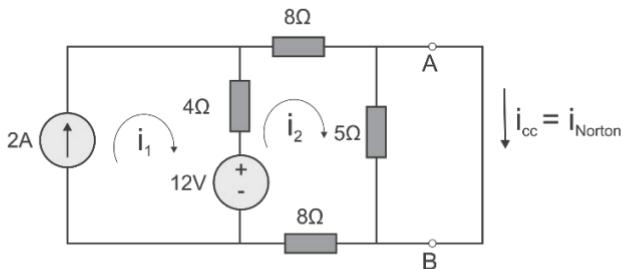
Fonte: elaborada pelo autor.

Note que os resistores de **4 Ω** e os dois resistores de **8 Ω** estão em série e sua resistência equivalente está em paralelo com o resistor de **5 Ω**. Assim, obtemos:

$$R_{\text{Norton}} = \frac{(8 + 4 + 8) \cdot 5}{8 + 4 + 8 + 5} = 4 \Omega$$

Podemos, agora, calcular a corrente de curto-círcuito, ou seja, a corrente que atravessaria o resistor de carga se ele estivesse em curto-círcuito, através da Figura 1.22.

Figura 1.22 | Circuito com a resistência de carga em curto-círcuito



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos constatar que o resistor de $5\ \Omega$ está em curto-círcuito. Aplicamos a análise de malha e obtemos:

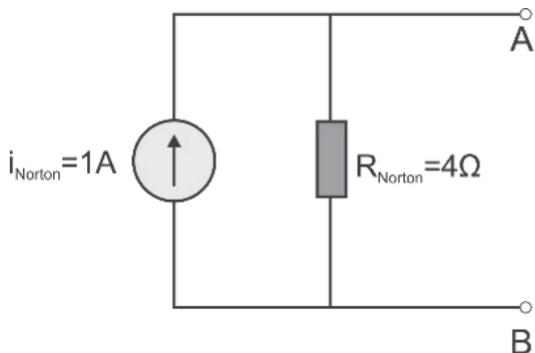
$$i_1 = 2\text{ A}$$

$$20i_2 - 4i_1 - 12 = 0$$

$$\text{Portanto, } i_2 = 1\text{ A} = i_{cc} = i_{Norton}$$

O circuito simplificado e que deve ser utilizado para facilitar toda a análise é o mostrado na Figura 1.23:

Figura 1.23 | Circuito equivalente de Norton



Fonte: elaborada pelo autor.

Avançando na prática

Circuitos equivalentes em aplicações práticas

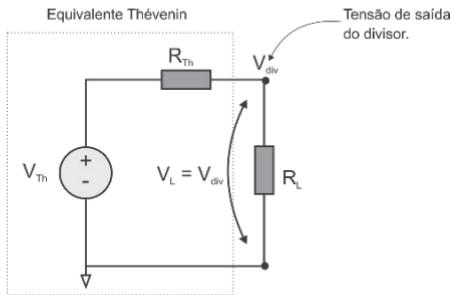
Descrição da situação-problema

Para sintetizar os conteúdos aprendidos nesta seção, vamos supor a seguinte situação: uma bateria será usada para alimentar um motor de uma bicicleta elétrica. Sabendo que a bateria possui carga completa e conhecendo a corrente de pico desse motor, precisamos decidir se essa bateria é adequada para ele.

Resolução da situação-problema

Para obter uma resposta conclusiva sem aplicar um curto-círcuito nos terminais da bateria (que pode causar um acidente) e medir a corrente máxima diretamente, utilizamos o Teorema de Thévenin. Primeiramente, medimos de forma direta a tensão V_{Th} entre os terminais da bateria (em aberto). Inserimos, então, um resistor R_L de valor conhecido e medimos a tensão sobre ele (V_L), Figura 1.24.

Figura 1.24 | Circuito equivalente de Thévenin para uma bateria



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando o circuito, temos que a equação do divisor de tensão é:

$$V_L = V_{Th} \frac{R_L}{R_L + R_{Th}}$$

Ao manipular algebraicamente essa equação, obtemos a resistência de Thévenin:

$$R_{Th} = R_L \frac{(V_{Th} - V_L)}{V_L}$$

Usando a Lei de Ohm, podemos concluir que quanto maior o valor de R_{Th} , menor será a corrente que a bateria poderá fornecer.

Faça valer a pena

1. A análise de circuitos elétricos envolve, frequentemente, a redução de um circuito complexo por um equivalente simplificado, como um equivalente de Thévenin.

Sobre o Teorema de Thévenin, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

I – A tensão de Thévenin é igual à tensão de circuito aberto nos terminais da carga que se deseja analisar.

PORQUE

II – Ao calcular a resistência de Thévenin, todas as fontes independentes são substituídas no circuito.

Assinale a alternativa CORRETA:

a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.

b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.

c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

e) As asserções I e II são proposições falsas.

2. O Teorema de Superposição afirma que a resposta a várias excitações simultâneas é igual à soma algébrica das respostas individuais a cada uma das excitações, ou seja, em um circuito que contenha duas ou mais fontes, a tensão ou corrente em um determinado elemento será a soma algébrica das tensões ou correntes produzidas por cada uma das fontes analisadas individualmente.

A respeito do Teorema de Superposição, analise as sentenças:

I - Pode ser aplicado em potência elétrica.

II - Sua aplicação se restringe a circuitos lineares.

III - As fontes do circuito são substituídas.

Assinale a alternativa CORRETA:

a) Apenas a afirmativa I está correta.

b) Apenas a afirmativa II está correta.

c) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.

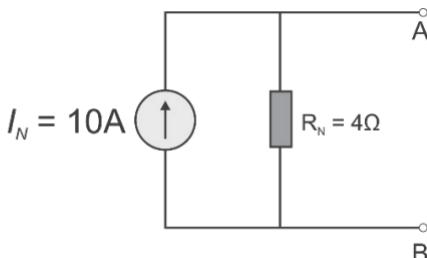
d) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.

e) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.

3. Um laboratório deseja testar a rigidez dielétrica de um material recebido para testes de forma a comprovar sua pureza. Para isso, pede à sua equipe que desenvolva um circuito que gere picos de tensão $V_p = 50\text{ V}$ (com tolerância de $\pm 3\text{ V}$), os quais, aplicados à amostra, resultarão em seu rompimento, caso esta não tenha impurezas acima de um limite aceitável. O circuito é

composto, basicamente, por um indutor, que irá receber uma determinada corrente $I_N = 10 \text{ A}$ em estado estacionário (contínuo) e, abruptamente, essa corrente será cessada, gerando uma tensão elevada nos terminais do indutor, que será aplicada à amostra realizando o teste e validando que a corrente de Norton também pode ser aplicada nesses casos. Veja a seguir, na Figura 1.25, o modelo do indutor no momento exato da interrupção da corrente.

Figura 1.25 | Modelo do indutor



Fonte: elaborada pelo autor.

Sobre a tensão de pico obtida com o circuito da Figura 1.25, assinale a alternativa CORRETA:

- a) A tensão será igual a 50 V, atendendo a exigência de $V_p = 50 \pm 3 \text{ V}$.
- b) A tensão será igual a 40 V, não atendendo a exigência de $V_p = 50 \pm 3 \text{ V}$.
- c) A tensão será igual a 60 V, não atendendo a exigência de $V_p = 50 \pm 3 \text{ V}$.
- d) A tensão será igual a 47 V, atendendo a exigência de $V_p = 50 \pm 3 \text{ V}$.
- e) A tensão será igual a 55 V, não atendendo a exigência de $V_p = 50 \pm 3 \text{ V}$.

Seção 1.3

Teorema de Máxima Transferência de Potência

Diálogo aberto

Olá, caro aluno! Vimos, na seção anterior, que qualquer circuito complexo pode ser substituído por um equivalente, por exemplo, uma única fonte de tensão em série com uma resistência interna – Teorema de Thévenin. Nesta seção, daremos continuidade às análises de circuitos elétricos, estudando os teoremas de Máxima Transferência de Potência, da Substituição e da Reciprocidade. Como veremos, esses teoremas são encontrados em diversas situações reais.

Para que o conhecimento adquirido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você, engenheiro de uma empresa que produz placas de circuitos elétricos e eletrônicos utilizadas em rádios e em sistemas de comunicação, recebeu a tarefa de auxiliar um gerente de certo estádio de futebol quanto ao uso de um alto-falante.

Um amplificador de sinal (áudio) e um alto-falante serão usados em um pequeno estádio de futebol para transmitir aos torcedores alguns avisos. O gerente do estádio informou que irá fornecer um amplificador de 100 V e resistência interna de $5\ \Omega$ e que, por motivos de economia, o alto-falante será aquele que possui o menor custo, ou seja, o de resistência igual a $10\ \Omega$. No entanto, ele exige que o resultado final apresente o desempenho máximo.

Sabendo que, em sistemas de comunicação, o desempenho máximo é necessário, mas a eficiência máxima não é desejada, precisamos informar ao gerente do estádio que com o alto-falante fornecido não será possível obter o máximo desempenho.

Como você convenceria o gerente de que o alto-falante fornecido não é o ideal?

Para auxiliá-lo a responder a essa questão, você irá estudar, ao longo desta seção, alguns dos principais teoremas utilizados em análises de circuitos elétricos. Bons estudos!

Não pode faltar

Teorema de Máxima Transferência de Potência

Muitas vezes, encontramos diversos circuitos no dia a dia que funcionam com base no Teorema de Máxima Transferência de Potência, porém não nos atentamos para esse fato. Por exemplo, para conectar de maneira eficiente uma fonte a uma carga, um transformador acoplador é usado. No caso de linhas de transmissão, a distorção e as reflexões são evitadas, fazendo com que as **impedâncias** de fonte e de carga sejam compatíveis com a impedância característica da linha. Além disso, os sistemas de energia elétrica são projetados para transportar a energia da fonte até a carga com a maior eficiência, reduzindo as perdas nas linhas. Todos esses exemplos fazem uso do teorema para eficientemente conectar uma fonte a uma carga, seja em um circuito Corrente Contínua (CC) ou Corrente Alternada (CA).

O Teorema de Máxima Transferência de Potência é outro método extremamente útil de análise de circuitos, definindo a condição sob a qual a potência máxima é transferida da fonte para a carga. A rigor, o teorema afirma que "A potência máxima será transferida da fonte para a carga quando a resistência de carga for igual à resistência interna da fonte" (ALEXANDER; SADIKU, 2013, p. 133.).



Vocabulário

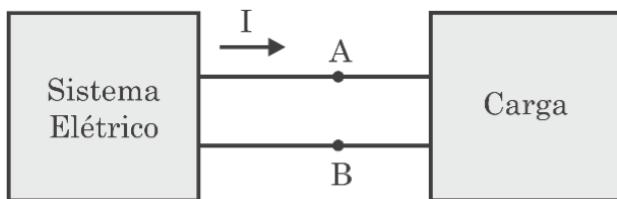
Impedância: representa uma oposição que um componente, circuito ou sistema eletrônico oferece à corrente elétrica alternada e/ou contínua. É uma quantidade vetorial (bidimensional), consistindo em dois fenômenos escalares independentes (unidimensionais): resistência e reatância (capacitiva ou indutiva, como veremos em futuras unidades).

Consideremos o sistema elétrico com carga mostrado na Figura 1.26. Vamos, agora, determinar o valor da resistência de carga de modo a fornecer a potência máxima à carga.

Basicamente, para encontrar essa condição, podemos utilizar técnicas de malha ou corrente nodal, obter uma expressão para a potência absorvida pela carga e, em seguida, utilizar o cálculo diferencial para encontrar a expressão de máxima potência, ou seja, derivar a equação em relação à resistência de carga e igualar a zero. No entanto, o sistema da Figura 1.26 pode ser extremamente complexo, composto por vários elementos e fontes, o que resultaria em um

sistema de equações também complexo. Nesse caso, a determinação da condição de máxima transferência de potência pode ser tediosa e muito trabalhosa.

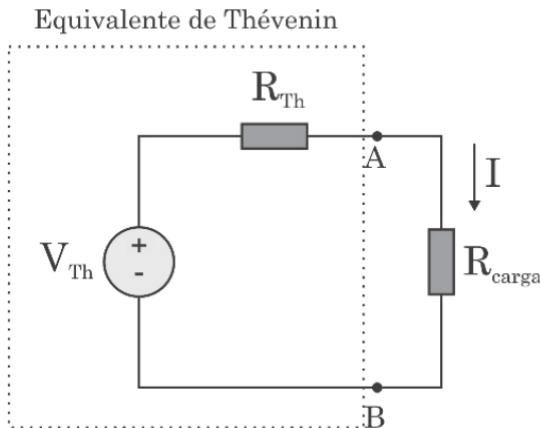
Figura 1.26 | Sistema elétrico



Fonte: elaborada pelo autor.

Para contornar esse tipo de problema, podemos encontrar a máxima transferência de potência com o uso do circuito equivalente de Thévenin (recorde a seção anterior). Agora, substituiremos a parte do sistema elétrico que consideramos complexa pelo circuito equivalente de Thévenin, como mostrado na Figura 1.27.

Figura 1.27 | Equivalente de Thévenin



Fonte: elaborada pelo autor.

No circuito da Figura 1.27, a corrente I que flui através da carga é dada por:

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{carga} + R_{Th}}$$

A potência exigida pela carga é dada por:

$$P_{\text{carga}} = I^2 \cdot R_{\text{carga}}$$

Ao substituirmos a equação da corrente I na equação da potência exigida pela carga, teremos:

$$P_{\text{carga}} = \left(\frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}}} \right)^2 \cdot R_{\text{carga}}$$

É importante notar na equação que R_{carga} é a única variável, portanto, a condição para a máxima potência entregue à carga é determinada pela diferenciação da potência de carga em relação à resistência de carga com o resultado igualado a zero.

$$\frac{\partial P_{\text{carga}}}{\partial R_{\text{carga}}} = V_{\text{Th}}^2 \cdot \left[\frac{(R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})^2 - 2 \cdot R_{\text{carga}} (R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})}{(R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})^4} \right] = 0$$

$$(R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})^2 - 2 \cdot R_{\text{carga}} (R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}}) = 0$$

$$(R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})^2 = 2 \cdot R_{\text{carga}} (R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})$$

$$\frac{(R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})^2}{(R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}})} = 2 \cdot R_{\text{carga}}$$

$$R_{\text{carga}} + R_{\text{Th}} = 2 \cdot R_{\text{carga}}$$

$$R_{\text{Th}} = R_{\text{carga}}$$

Esta é a condição para a máxima transferência de potência, ou seja, indica que a potência fornecida à carga será máxima quando a resistência de carga R_{carga} coincidir com a resistência de Thévenin R_{Th} do sistema.

Sob essa condição, a máxima transferência de potência para a carga é dada por:

$$P_{\text{carga}} = \left(\frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_{\text{Th}}} \right)^2 \cdot R_{\text{Th}}$$

$$P_{\text{carga}} = \frac{V_{\text{Th}}^2}{(2 \cdot R_{\text{Th}})^2} \cdot R_{\text{Th}}$$

$$P_{carga} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}} \cdot R_{Th}$$

$$P_{carga} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}}$$

Para calcular a Máxima Transferência de Potência, devemos seguir os seguintes passos:

1. Remova a resistência de carga do circuito.
2. Encontre a tensão de Thévenin V_{Th} do circuito de origem.
3. Encontre a resistência de Thévenin R_{Th} do circuito de origem.
4. De acordo com o teorema, o valor R_{Th} deverá ser igual à resistência de carga do circuito, ou seja, $R_{Th} = R_{carga}$.
5. A Máxima Transferência de Potência é dada por:

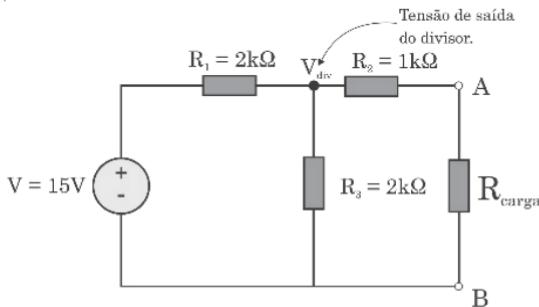
$$P_{carga} = P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}}$$



Exemplificando

Considere o seguinte circuito da Figura 1.28:

Figura 1.28 | Circuito resistivo



Fonte: elaborada pelo autor.

Como primeiro passo do teorema, devemos encontrar a tensão de Thévenin V_{Th} . Para isso, substituímos a resistência de carga R_{carga} entre os terminais AB por um circuito aberto e, então, calculamos a tensão de Thévenin.

Note que a corrente sobre o resistor $R_2 = 1\text{k}\Omega$ é igual a zero, pois o circuito está aberto entre os terminais A e B. Portanto, não há queda de

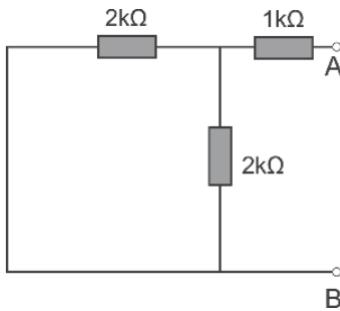
tensão sobre esse resistor e, consequentemente, a tensão V_{AB} (que é a tensão de Thévenin V_{Th}) será igual à tensão sobre a associação série de $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ com $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$. Perceba também que o resistor R_1 forma com o resistor R_3 um divisor de tensão, sendo a tensão de saída igual a V_{AB} . Assim, teremos:

$$V_{div} = V_{AB} = V_{Th} = \frac{2}{2+2} \cdot 15$$

$$V_{Th} = 7,5V$$

Agora, vamos encontrar a resistência equivalente. Para isso, substituímos a fonte de tensão por um curto-círcuito. Assim, teremos os dois resistores de $2 \text{ k}\Omega$ em paralelo e o resultado dessa associação estará em série com o resistor de $1 \text{ k}\Omega$, como mostrado na Figura 1.29.

Figura 1.29 | Circuito equivalente: fonte de tensão em curto circuito



Fonte: elaborada pelo autor.

$$R_{Th} = \frac{2 \cdot 2}{2+2} + 1$$

$$R_{Th} = 2 \text{ k}\Omega$$

Uma vez que encontramos a tensão e a resistência de Thévenin, basta aplicar a equação de potência máxima:

$$P_{carga} = P_{máx} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}}$$

$$P_{máx} = \frac{7,5^2}{4 \cdot 2k} = \frac{56,25}{8k} \approx 7,03 \text{ mW}$$



Devemos lembrar que esse teorema resulta em transferência de potência máxima, mas não necessariamente em uma eficiência máxima. Se a resistência de carga for menor que a resistência da fonte, a potência entregue à carga é reduzida, enquanto a maior parcela é dissipada na fonte, fazendo com que a eficiência seja baixa.

Vamos calcular a eficiência sob a condição de máxima transferência de potência. Considere a potência de entrada, ou potência da fonte como sendo:

$$P_{\text{entrada}} = V_{\text{Th}} \cdot I = V_{\text{Th}} \cdot \frac{V_{\text{Th}}}{(2 \cdot R_{\text{Th}})}$$

$$P_{\text{entrada}} = \frac{V_{\text{Th}}^2}{2 \cdot R_{\text{Th}}}$$

Sabendo que eficiência é a relação entre a potência de saída (carga) pela potência de entrada, temos que:

$$(\eta_{\%}) = \frac{P_{\text{carga}}}{P_{\text{entrada}}} \cdot 100$$

$$(\eta_{\%}) = \left(\frac{\frac{V_{\text{Th}}^2}{4 \cdot R_{\text{Th}}}}{\frac{V_{\text{Th}}^2}{2 \cdot R_{\text{Th}}}} \right) \cdot 100 = 50\%$$

Devido à eficiência de 50%, a máxima transferência de potência nem sempre é desejável. No sistema de transmissão de energia, por exemplo, a maior ênfase é dada para manter as quedas de tensão e as perdas da linha a um valor mínimo, e, portanto, o funcionamento do sistema de transmissão de energia, operando com capacidade de transmissão de potência em massa, torna-se não econômico se ele operar com apenas 50% de eficiência. Assim, no sistema de transmissão de energia elétrica, o critério de máxima transferência de potência raramente é usado.



Pesquise mais

Para saber mais sobre esse assunto, leia o Capítulo 4 do livro *Fundamentos de Circuitos Elétricos* (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Teorema da Substituição

Como o nome indica, o conceito principal desse teorema baseia-se na substituição de uma parte do circuito por outra equivalente. O Teorema de Substituição nos dá algumas ideias especiais sobre o comportamento do circuito, sendo muito empregado para provar vários outros teoremas. Ele afirma que a tensão em qualquer ramo ou a corrente através desse ramo de um circuito, sendo conhecida, o ramo pode ser substituído pela combinação de vários elementos que resultarão na mesma tensão e corrente através desse ramo. Em outras palavras, o Teorema de Substituição diz que, para equivalência de ramificação, a tensão e corrente do terminal devem ser iguais.

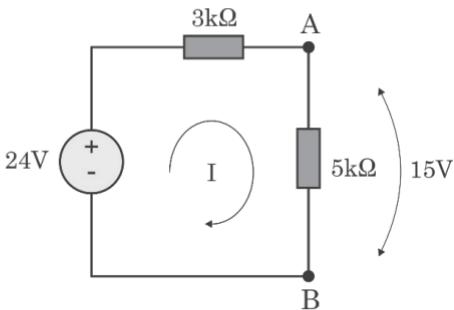


Refita

O Teorema da Substituição apresenta a limitação de não poder ser usado para resolver um circuito contendo duas ou mais fontes que não estejam em série ou em paralelo. Como você explicaria isso?

Vamos entender o teorema com a ajuda do diagrama a seguir (Figura 1.30).

Figura 1.30 | Circuito resistivo simples



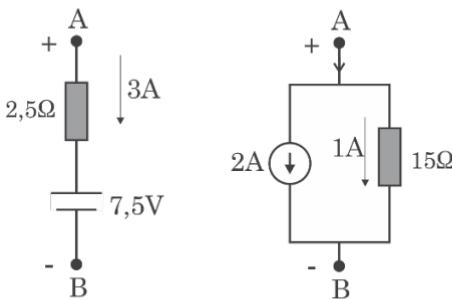
Fonte: elaborada pelo autor.

Obviamente, o valor da corrente do circuito é encontrado utilizando a Lei de Ohm:

$$I = \frac{24}{3 + 5} = 3A$$

Vamos, agora, utilizar o Teorema da Substituição e substituir o ramo AB por um equivalente, ou seja, a substituição deve manter os valores da tensão e corrente entre AB iguais ao que havia no ramo inicialmente, 15 V e 3 A, respectivamente. A Figura 1.31 mostra duas das possibilidades de substituição.

Figura 1.31 | Equivalentes do ramo AB da Figura 1.30



Fonte: elaborada pelo autor.

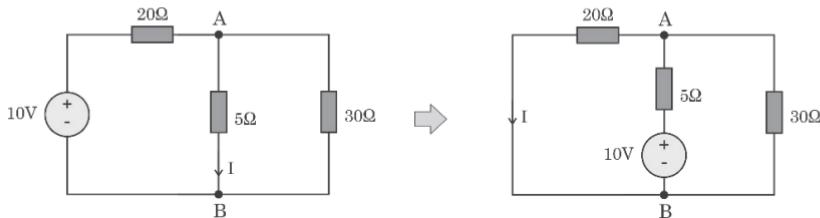
De maneira simples, podemos utilizar algumas etapas para resolver um circuito usando o Teorema da Substituição, sendo elas:

1. Obtenha a tensão e a corrente do ramo que se deseja substituir.
2. O ramo pode ser substituído por uma fonte de tensão independente.
3. Da mesma forma, o ramo pode ser substituído por uma fonte de corrente independente.

Teorema da Reciprocidade

Na sua forma mais simples, o Teorema da Reciprocidade afirma que, em um circuito com apenas uma fonte de tensão, se essa fonte estiver em um determinado ramo A e provocar uma corrente no ramo B, ao mover a fonte do ramo A para o ramo B, uma mesma corrente será provocada no ramo A, como mostrado na Figura 1.32.

Figura 1.32 | Ilustração do Teorema da Reciprocidade



Fonte: elaborada pelo autor.

A limitação desse teorema é que ele é aplicável somente em circuitos de fonte única, e não em circuitos com múltiplas fontes. Além disso, o Teorema de Reciprocidade somente pode ser aplicado se o circuito for linear, apresentando apenas resistências, indutores, capacitores e circuitos acoplados.



Pesquise mais

Para saber mais sobre esse assunto, leia o Capítulo 17 do livro *Análise de Circuitos em Engenharia* (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).



Refletia

O Teorema da Reciprocidade apresenta algumas limitações, como fonte única e circuito linear. No entanto, é comum seu uso em análise de transformadores.

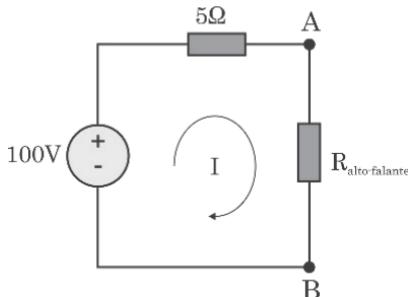
Como você explicaria esse uso se um transformador não for modelado como ideal?

Sem medo de errar

Vamos relembrar que, nesta seção, você é o engenheiro de uma empresa que produz placas de circuitos elétricos e eletrônicos utilizadas em rádios e em sistemas de comunicação e recebeu como importante tarefa auxiliar um gerente de um estádio de futebol a escolher o alto-falante a ser utilizado para dar avisos aos torcedores. No entanto, o aparelho fornecido não é o ideal para o objetivo desejado pelo gerente.

Primeiramente, vamos calcular a potência no alto-falante para o caso de a resistência ser igual a $20\ \Omega$ e, em seguida, para o caso ideal, ou seja, resistência igual a $5\ \Omega$, usando o circuito da Figura 1.33.

Figura 1.33 | Representação de um sistema de áudio



Fonte: elaborada pelo autor.

Resistência do alto-falante igual a $20\ \Omega$

A corrente do circuito é dada por:

$$I = \frac{100}{5 + 20} = 4\ A$$

Assim, a potência no alto-falante pode ser calculada:

$$P_{20\Omega} = R_{20\Omega} \cdot I_{20\Omega}^2$$

$$P_{20\Omega} = 20 \cdot 4^2 = 320\ W$$

Resistência do alto-falante igual a $5\ \Omega$

A corrente do circuito é dada por:

$$I = \frac{100}{5 + 5} = 10\ A$$

Assim, a potência no alto-falante pode ser calculada:

$$P_{5\Omega} = R_{5\Omega} \cdot I_{5\Omega}^2$$

$$P_{5\Omega} = 5 \cdot 10^2 = 500\ W$$

Se aplicarmos a equação de Máxima Transferência de Potência, iremos obter:

$$P_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4 \cdot R_{Th}} = \frac{100^2}{4 \cdot 5} = 500\ W$$

Valor esse exatamente igual ao valor obtido quando temos a resistência do alto-falante igual à resistência do amplificador (fonte). Dessa maneira, é possível mostrar ao gerente que, para atingir o objetivo desejado, o alto-falante não poderá ser o de $20\ \Omega$, mas sim o de $5\ \Omega$.

Avançando na prática

Teoremas de Circuitos Elétricos e situações reais

Descrição da situação-problema

Para que o conhecimento adquirido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você, engenheiro de uma grande empresa automobilística, é o responsável por validar e atestar se a bateria (completamente carregada) é capaz de fornecer a potência máxima ao motor de partida.

Para isso, você recebeu as seguintes informações sobre a bateria e o motor de partida:

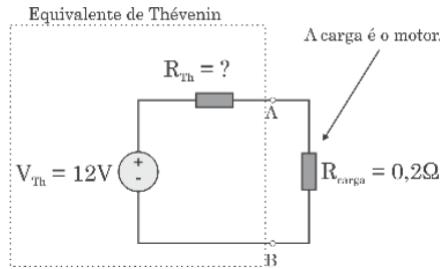
1. A bateria de 12 V, quando fornece 100 A, apresenta uma queda de tensão de 2 V.
2. O motor de partida apresenta resistência total igual a $0,2\Omega$.

Quais procedimentos você adotaria para chegar a uma conclusão?

Resolução da situação-problema

Primeiramente, precisamos determinar um circuito equivalente para a bateria. Como sabemos, a máxima transferência de potência utiliza de maneira direta a tensão e a resistência de Thévenin; logo, optaremos pelo circuito equivalente de Thévenin, conforme a Figura 1.34.

Figura 1.34 | Circuito equivalente da bateria



Fonte: elaborada pelo autor.

Sabemos que a máxima transferência de potência ocorre quando a resistência de Thévenin é igual à resistência da carga. Assim, somente poderemos confirmar se essa bateria é capaz de fornecer a máxima potência se soubermos o valor da resistência de Thévenin, único dado não informado.

Para encontrar o valor da resistência de Thévenin, vamos utilizar as informações da queda de tensão quando a bateria debita 100 A. Sabemos que essa queda de tensão está relacionada com a resistência interna, que é a resistência de Thévenin.

$$V = R_{Th} \cdot I$$

$$2 = R_{Th} \cdot 100$$

$$R_{Th} = 0,02 \Omega$$

Logo, como a resistência do motor é diferente da resistência de Thévenin, a bateria em teste não é capaz de entregar a potência máxima ao motor.

Faça valer a pena

1. Em uma determinada concessionária de energia elétrica, um engenheiro recebeu como tarefa apresentar imediatamente aos gestores uma forma de obter a maior eficiência possível entre a geração e a carga (consumidores). Sem tempo para realizar as devidas pesquisas e estudos, o engenheiro apresentou as seguintes asserções:

I – A máxima eficiência será obtida através da máxima transferência de potência.

PORQUE

II – Quanto menor a resistência de Thévenin desse circuito, comparado à resistência da carga, maior será a eficiência.

Agora, avalie as asserções e a relação proposta entre elas, assinalando a alternativa CORRETA:

a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.

b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.

c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

e) As asserções I e II são proposições falsas.

2. Uma empresa transmissora de TV identificou a necessidade de expandir seu sistema em uma determinada região do país. Para isso, instalou uma nova torre de transmissão. Após alguns testes, a equipe de engenharia constatou que esse novo sistema não estava atendendo ao critério de máxima transferência de potência, extremamente importante para sistemas de comunicação. A equipe, então, levantou as seguintes observações:

I - A máxima transferência de potência somente pode ocorrer se o circuito do gerador apresentar uma única fonte de tensão.

II - A resistência de Thévenin do circuito fonte é diferente da resistência da carga, no caso a antena.

III - A corrente de Norton, sendo uma corrente parasita, afeta negativamente a transferência de potência, por isso precisa ser zerada.

Analise as observações apresentadas e assinale a alternativa CORRETA:

- a) Apenas a afirmativa I está correta.
- b) Apenas a afirmativa II está correta.
- c) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.
- d) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.
- e) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.

3. A maioria dos circuitos elétricos é complexa e, para analisá-los, o uso de teoremas, técnicas e leis de circuitos é realmente importante e necessário. O Teorema da Substituição, o Teorema da Máxima Transferência de Potência e o Teorema da Reciprocidade são exemplos de teoremas de circuitos que ajudam a encontrar os parâmetros elétricos básicos de maneira mais simples. A Coluna 1 apresenta esses três teoremas, enquanto a Coluna 2 apresenta suas definições (em ordem aleatória).

Coluna 1	Coluna 2
1. Teorema da Substituição	I. Em um circuito linear e único, a relação entre excitação e resposta é constante quando as posições de excitação e resposta são trocadas.
2. Teorema da Máxima Transferência de Potência	II. Qualquer ramo em uma rede pode ser substituído por um ramo diferente sem perturbar as correntes e tensões em toda a rede, desde que o novo ramo tenha a mesma corrente e o mesmo conjunto de tensões do ramo original.
3. Teorema da Reciprocidade	III. A transferência de potência de uma fonte para uma carga é máxima em um circuito quando a resistência de carga é igual à resistência interna da fonte.

Assinale a alternativa que apresenta a associação correta entre o teorema da Coluna 1 com sua respectiva descrição da Coluna 2:

- a) 1-II; 2-III; 3-I.
- b) 1-II; 2-III; 3-I.
- c) 1-III; 2-I; 3-II.
- d) 1-I; 2-III; 3-II.
- e) 1-II; 2-I; 3-III.

Referências

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

HAYT, William; KEMMERLY, Jack; DURBIN, Steven. **Análise de Circuitos em Engenharia**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

SADIKU, Matthew N. O.; ALEXANDER, Charles K.; MUSA, Sarhan. **Análise de Circuitos Elétricos com Aplicações**. Porto Alegre: AMGH, 2014.

THOMAS, Roland E.; ROSA, Albert J.; TOUSSAINT, Gregory J. **Análise e Projeto de Circuitos Elétricos Lineares**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

Métodos de análise de circuitos elétricos

Convite ao estudo

Caro aluno, na unidade anterior, analisamos os circuitos resistivos aplicando as leis e os teoremas fundamentais para os circuitos elétricos. Vimos que podemos utilizá-las para as mais diversas configurações, contudo, à medida que suas estruturas se tornam mais complexas e envolvem mais elementos, tal método torna-se trabalhoso ou mesmo impossível de ser aplicado.

Na tentativa de tornar essa tarefa menos custosa, nesta unidade, vamos aprender duas poderosas técnicas de análise de circuitos que irão nos auxiliar na avaliação de circuitos elétricos complexos: método das tensões de nó, ou método de análise nodal; e método das correntes de malha, ou método de análise das malhas. Além desses métodos analíticos, veremos também outra técnica de simplificação de circuitos conhecida como a transformação Y- Δ , ou estrela-triângulo. Esta é uma técnica matemática empregada para simplificar a análise dos circuitos elétricos.

Assim, esperamos que, ao final desta unidade, você seja capaz de obter e solucionar os sistemas de equações que relacionam as correntes e as tensões dos componentes de um circuito elétrico de maneira simples e fácil.

Neste contexto, imagine que você trabalha na equipe técnica de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica. Dentre os serviços requisitados à sua equipe, estão a manutenção do sistema de detector de fumaça e o projeto do sensor de iluminação. Para que essas tarefas sejam executadas com qualidade, fique atento aos conceitos que serão apresentados nesta unidade, faça anotações e pergunte ao seu professor sempre que tiver dúvidas.

Bons estudos e ótimo trabalho!

Seção 2.1

Análise nodal

Diálogo aberto

Ao estudarmos circuitos elétricos, temos por objetivo encontrar as características desses circuitos, ou seja, estamos interessados em obter os valores de tensão e corrente de cada elemento que forma o circuito. Uma vez obtidos esses valores, podemos, então, calcular as outras propriedades do circuito, como potência (Watt), que é consumida pelos elementos ou fornecida aos elementos, e energia (Joule), que é a potência fornecida ou absorvida ao longo de um período de tempo.

Nas seções anteriores, você conheceu leis e teoremas fundamentais que lhe auxiliaram neste estudo. Nesta seção, você aprenderá a analisar os circuitos elétricos de forma mais fácil e com menos esforço matemático quando conhecidos os valores de tensão nos pontos, ou nós, desse circuito.

Logo, para pôr em prática este conhecimento, considere que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções elétricas, que foi contratada para fazer a manutenção do sistema de detector de fumaça de uma cozinha residencial. O cliente informou que o alarme do detector de fumaça não estava funcionando corretamente e, para auxiliar seu serviço, lhe entregou o manual técnico do sistema, que disponibiliza o diagrama esquemático do circuito que forma esse sistema. O que poderia estar acontecendo de errado com o sistema de detecção de fumaça? Como resolver esse problema?

Para lhe auxiliar nesta tarefa, será apresentado, nesta seção o método de análise nodal, ou método do nó-tensão, que fornece um procedimento genérico para o estudo dos circuitos elétricos usando tensões nodais como variáveis de circuitos.

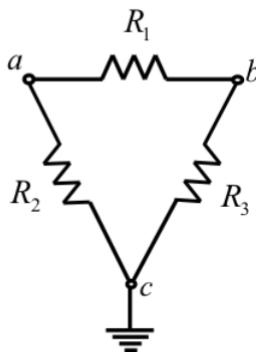
E então, pronto para mais esse conhecimento? Desejamos bons estudos e um ótimo trabalho!

Não pode faltar

Segundo Sadiku e Alexander (2013), a análise nodal, ou método do nó-tensão, fornece um procedimento genérico para análise de circuitos elétricos usando tensões nodais como variáveis de circuitos. A vantagem de escolher as tensões nodais em vez de tensões de elementos como as variáveis do sistema dar-se pela redução do número de equações que se deve resolver simultaneamente.

Conceitualmente, um *nó* é um ponto no qual dois ou mais elementos de circuitos se juntam, ou em outras palavras, os *nós* de um circuito são os lugares nos quais os elementos são ligados entre si. É habitual, nas representações dos circuitos elétricos, simbolizar os elementos na horizontal ou vertical e ligá-los por retas que representam os fios; já os nós são representados como pontos, como mostra a Figura 2.1, em que os nós do circuito são determinados pelos pontos a, b e c.

Figura 2.1 | Circuitos com três nós



Fonte: elaborada pela autora.

Para análise nodal de um circuito elétrico, devemos determinar qual será nosso nó de referência. Essa escolha é arbitrária, ou seja, qualquer nó do circuito pode ser escolhido como nó de referência. Normalmente, este é escolhido na parte inferior da representação do circuito. Na Figura 2.1, o nó **c** foi escolhido como nó de referência, mas quaisquer dos outros dois pontos também poderiam ter sido escolhidos como nó de referência.



Lembre-se

O nó de referência é comumente chamado de terra (GND) e possui um potencial nulo. Esse tipo de nó é representado pelos símbolos ilustrados na Figura 2.2.

Figura 2.2 | Símbolos para representar o nó de referência (a) terra comum (b) terra



(a)



(b)

Fonte: elaborada pela autora.

A tensão em qualquer nó do circuito em relação ao nó de referência é chamada de **tensão de nó**. Logo, assim que escolhemos um nó de referência, atribuímos designações de tensão aos nós que não são de referência, ou seja, denominamos as tensões de nó.

As tensões nos nós da Figura 2.1 podem ser representadas como V_{ac} e V_{bc} , porém, frequentemente, ignoramos o índice **c** e chamamos as tensões de V_a e V_b . Note que a tensão de nó no nó terra é $V_{cc} = V_c = 0 \text{ V}$.



Assimile

Tensão de nó, ou tensão nodal, é um termo especial para uma tensão medida a partir de um ponto em relação ao terra (ou GND).

Para análise completa de um circuito com n nós, são necessárias $n - 1$ equações. Uma forma de se obter essas equações é aplicar a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) a todos os nós, exceto ao nó de referência. Após aplicação dessa lei, devemos utilizar a Lei de Ohm para expressar as correntes desconhecidas em termos das tensões nodais.



Lembre-se

Em um resistor, a corrente convencional flui de um potencial **maior** para um potencial **menor**, logo a corrente que passa por esse elemento pode ser dada pela expressão:

$$i = \frac{V_{\text{maior}} - V_{\text{menor}}}{R}$$

Dessa forma, as variáveis desconhecidas das equações de nó são as tensões de nó do circuito. Para obtermos os valores dessas variáveis, podemos utilizar quaisquer das técnicas de solução de sistemas lineares, como a regra de Cramer, substituição, subtração, entre outras.



Pesquise mais

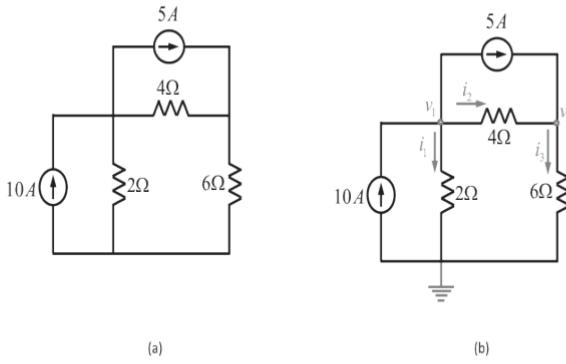
A regra de Cramer é um teorema em álgebra linear, muito utilizado em solução de circuitos elétricos, que soluciona sistema de equações lineares em termos de determinantes. Para saber um pouco mais sobre como utilizar essa regra, acesse o link disponível em: <<http://www.aulasniap.com.br/static/media/resumos/sistemalinearregracramer.pdf>>. Acesso em: 29 out. 2017.



Exemplificando

Calcule as tensões nodais no circuito da Figura 2.3(a).

Figura 2.3 | Esquemático elétrico para análise nodal com fonte de corrente independente (a) circuito original e (b) circuito para análise nodal



Fonte: elaborada pela autora.

Para realizarmos método do nó-tensão, devemos, inicialmente, escolher o nó de referência do circuito e, então, atribuir tensões aos nós que não são de referência, como os nós V_1 e V_2 , ilustrados na Figura 2.3(b).

Para obtermos e solucionarmos de forma simplificada os sistemas de equações que relacionam as correntes e a tensão dos componentes de um circuito elétrico, devemos aplicar a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) a cada um dos nós que não são de referência do circuito. Para isso, devemos determinar, de forma aleatória, o sentido das correntes dos elementos resistivos que formam o circuito, como as correntes i_1, i_2 e i_3 .

da Figura 2.3(b), exceto para os ramos com fontes de corrente.

Dessa forma, no nó v_1 , aplicando a LKC e a Lei de Ohm, obtemos:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + 5 &= 10 \\ i_1 + i_2 &= 5 \\ \frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{4} &= 5 \\ 3v_1 - v_2 &= 20 \end{aligned} \tag{2.1}$$

No nó v_2 , fazemos da mesma forma e obtemos:

$$\begin{aligned} i_2 + 5 &= i_3 \\ i_3 - i_2 &= 5 \\ \frac{v_2}{6} - \frac{v_1 - v_2}{4} &= 5 \\ -3v_1 + 5v_2 &= 60 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Resolvendo o sistema linear entre as equações 2.1 e 2.2, obtemos os seguintes valores para as tensões nodais:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{40}{3} = 13,33 \text{ V} \\ v_2 &= 20 \text{ V} \end{aligned}$$



Assimile

Para determinação das tensões nodais, devemos realizar as seguintes etapas:

1. Selecionar um nó como referência.
2. Atribua tensões (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) aos $n - 1$ nós restantes.
3. Aplique a LKC a cada um dos nós que não são de referência. Use a Lei de Ohm para expressar as correntes nos ramos em termos das tensões nodais.
4. Resolva o sistema linear.

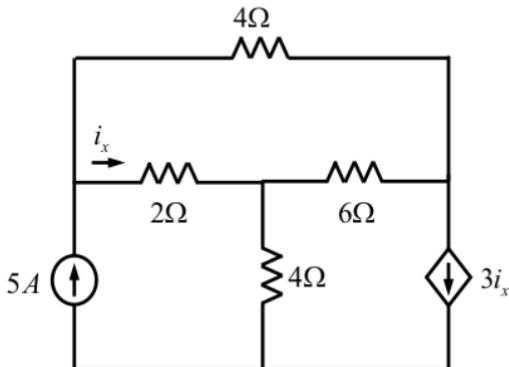
Vale ressaltar que as etapas para análise nodal com fonte independente de corrente podem ser aplicadas também a circuitos com fonte de corrente dependente. E a corrente da fonte dependente deve ser expressa em função das tensões de nó.



Faça você mesmo

Determine as tensões no circuito da Figura 2.4.

Figura 2.4 | Esquemático elétrico para análise nodal com fonte de corrente dependente



Fonte: elaborada pela autora.

Até este ponto desta seção, aprendemos a determinar as tensões dos nós em circuitos que possuem apenas fontes de corrente. Agora, vamos entender como as fontes de tensão influenciam a análise nodal.

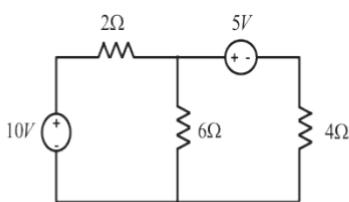
Inicialmente, vamos considerar um circuito com uma fonte de tensão conectada entre o nó de referência e outro nó que não seja o de referência, como o nó v_1 , da Figura 2.5(b). Podemos concluir que a tensão no nó que não é de referência é igual à fonte de tensão, neste caso, $v_1 = 10 \text{ V}$.

Agora, vamos considerar que a fonte de tensão (dependente ou independente) está conectada entre dois nós que não são de referência, como a fonte conectada aos nós v_2 e v_3 da Figura 2.5(b). Neste caso, teremos a formação de um nó genérico ou super nó, e deveremos aplicar tanto a LKC como a Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT) para determinar as tensões nodais.

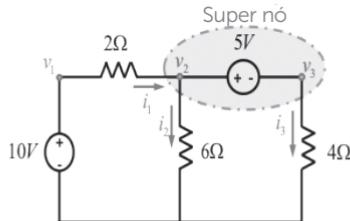


Determine as tensões nodais da Figura 2.5.

Figura 2.5 | Esquemático elétrico para análise nodal com fonte de tensão independente (a) circuito original e (b) circuito para análise nodal



(a)



(b)

Fonte: elaborada pela autora.

Para realizarmos método do nó-tensão, devemos realizar as mesmas etapas mencionadas anteriormente, exceto pelo fato de termos um super nó.

Para este caso, devemos considerar os nós V_2 e V_3 como parte de um nó maior, representado pelo super nó. E então, devemos aplicar a LKC ao super nó do mesmo modo como aplicamos a LKC a um nó comum.

Logo, ao aplicarmos a LKC ao super nó, obtemos:

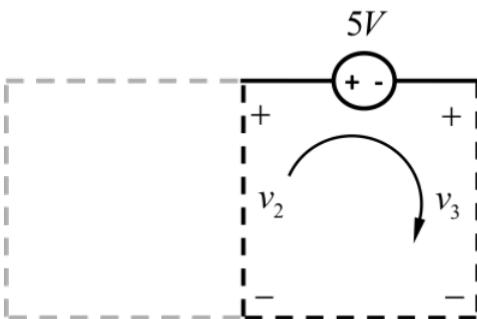
$$\begin{aligned}i_1 &= i_2 + i_3 \\ \frac{V_1 - V_2}{2} &= \frac{V_2}{6} + \frac{V_3}{4} \\ 6V_1 &= 8V_2 + 3V_3\end{aligned}$$

Sabendo que a tensão no nó V_1 é igual à fonte de tensão de 10V, ou seja $V_1 = 10\text{ V}$, então a equação (2.3) pode ser reescrita como:

$$8V_2 + 3V_3 = 60$$

Para obtermos a segunda equação do sistema linear, devemos aplicar a LKT ao super nó. Para isso, devemos redesenhar o circuito como mostra a Figura 2.6.

Figura 2.6 | Aplicação da LKT em um super nó



Fonte: elaborada pela autora.

Percorrendo o laço no sentido horário, temos:

$$-v_2 + 5 + v_3 = 0$$

$$-v_2 + v_3 = 5$$

Resolvendo o sistema linear entre as equações 2.4 e 2.5, obtemos os seguintes valores para as tensões nodais:

$$v_2 = 9,09 \text{ V}$$

$$v_3 = 14,09 \text{ V}$$



Refletia

Dadas as características do super nó, qual é a influência ou o impacto de um resistor paralelo ao super nó a um circuito elétrico?

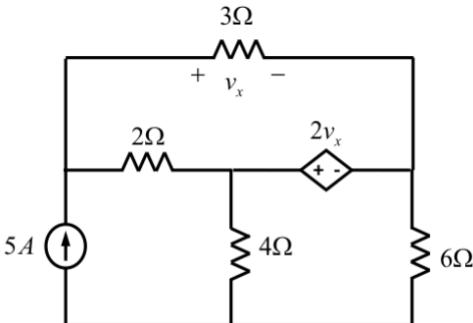
Assim como para as fontes de corrente, as etapas para análise nodal com fonte independente de tensão podem ser aplicadas também a circuitos com fonte de tensão dependente. E a tensão da fonte dependente deve ser expressa em função das tensões de nó.



Faça você mesmo

Determine as tensões no circuito da Figura 2.7.

Figura 2.7 | Esquemático elétrico para análise nodal com fonte de tensão dependente



Fonte: elaborada pela autora.

Dada as construções das equações da análise nodal apresentadas até aqui, quando um circuito possuir somente resistores lineares e fontes independentes de tensão ou corrente, podemos construir um procedimento genérico baseado na inspeção desse circuito.

Assim, quando todas as fontes de um circuito são fontes de corrente independentes, podemos escrever diretamente as equações dos nós de um circuito por mera inspeção dele, pela relação dada por:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & -G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ou simplesmente:

$$G \cdot v = i \quad (2.7)$$

Onde:

G_{kk} = a soma das condutâncias conectadas ao nó k

$G_{kj} = G_{jk}$ = a soma das condutâncias diretamente conectadas aos nós k e j , $k \neq j$

V_k = tensão não conhecida no nó k

i_k = a soma de todas as fontes de corrente independentes diretamente conectadas ao nó k .

Geralmente, as correntes que entram em um nó são consideradas positivas, e as que saem desse mesmo nó, negativas.

A matriz \mathbf{G} é conhecida como matriz de condutância, \mathbf{V} é o vetor de saída e \mathbf{i} é o vetor de entrada. Assim, a equação (2.7) pode ser resolvida para encontrarmos as tensões nodais desconhecidas.

Por exemplo, para o circuito da Figura 2.3(a), a matriz de condutância, o vetor de saída e o vetor de entrada podem ser relacionados como:

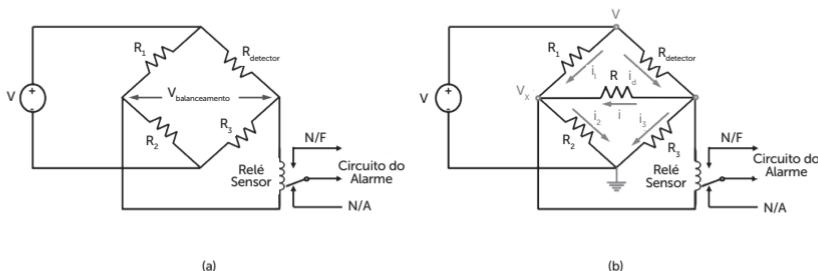
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Sem medo de errar

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada para a manutenção do sistema de detector de fumaça de uma cozinha residencial. O cliente informou que o alarme do detector de fumaça não estava funcionando corretamente e, para auxiliar seu serviço, lhe entregou o manual técnico desse sistema.

Neste manual, havia o esquemático elétrico do sistema, como mostra a Figura 2.8(a).

Figura 2.8 | Esquemático elétrico do detector de fumaça (a) circuito original (b) circuito para análise nodal



Fonte: adaptado de Boylestad (2012, p. 273).

O que poderia estar acontecendo de errado com o sistema de detecção de fumaça? Como resolver esse problema?

Com o auxílio de um multímetro, você, inicialmente, conferiu as tensões sobre os resistores e percebeu que a tensão sobre o resistor 1 (R_1) é praticamente a mesma tensão entregue pela fonte. Isso lhe levou a concluir que esse resistor poderia estar queimado. Observando o resistor, você não consegue identificar qual é o valor da sua resistência para poder substituí-lo. E agora, o que fazer? Qual é o valor da resistência desse elemento que deverá ser usado para que o detector de fumaça funcione corretamente?

Como bom aluno de circuitos elétricos, na tentativa de solucionar esse problema, você resolveu pôr todo o seu conhecimento em prática e analisar quais equações relacionam as correntes e a tensão dos componentes de um circuito elétrico para, então, encontrar o valor da resistência faltante.

Logo, para obter de forma simplificada os sistemas de equações, você pode realizar a análise nodal. Inicialmente, você escolheu o nó de referência e atribuiu os valores de tensão aos nós que não são de referência, como mostra a Figura 2.8(b). Em seguida, aplicou a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) a cada um dos nós que não são de referência do circuito. Para isso, foi determinado, de forma aleatória, o sentido das correntes dos elementos resistivos que formam o circuito, como as correntes i, i_1, i_2 e i_4 , a equação obtida para o nó v_x foi:

$$\frac{V - v_x}{R_1} + \frac{v_y - v_x}{R} = \frac{v_x}{R_2} \quad (2.8)$$

Já para o nó v_y , por meio da LKC, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{V - v_y}{R_{\text{detector}}} + \frac{v_y - v_x}{R} = \frac{v_y}{R_3} \quad (2.9)$$

Considere que a ausência de tensão ($V_{\text{balanceamento}} = 0$) deixa o relé sem energia, ou seja, o relé permanece na posição N/A (normalmente aberta) – alarme desligado. E que o desbalanceamento de tensão ($V_{\text{balanceamento}} \neq 0$) resulta em uma tensão nos terminais da bobina, com movimentação do contato do relé para a posição N/F (normalmente fechado), levando à ativação do alarme – alarme ligado.

Logo, para que o alarme esteja desligado, devemos considerar que a tensão V_x e V_y seja a mesma ($V_y - V_x = 0$). Assim, as equações (2.8) e (2.9) podem ser reescritas, respectivamente, como as equações (2.10) e (2.11).

$$\frac{V - V_x}{R_1} = \frac{V_x}{R_2} \quad (2.10)$$

$$\frac{V - V_y}{R_{\text{detector}}} = \frac{V_y}{R_3} \quad (2.11)$$

Então:

$$V_x = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (2.12)$$

$$V_y = \frac{R_3}{R_3 + R_{\text{detector}}} V \quad (2.13)$$

Como $V_x = V_y$, podemos igualar as equações (2.13) e (2.12) e, após algumas manipulações algébricas, concluir que:

$$R_1 = \frac{R_{\text{detector}} R_2}{R_3}$$

Sabendo o valor das resistências dos outros elementos, você pode substituir o valor do resistor 1 e solucionar o problema desse sistema.

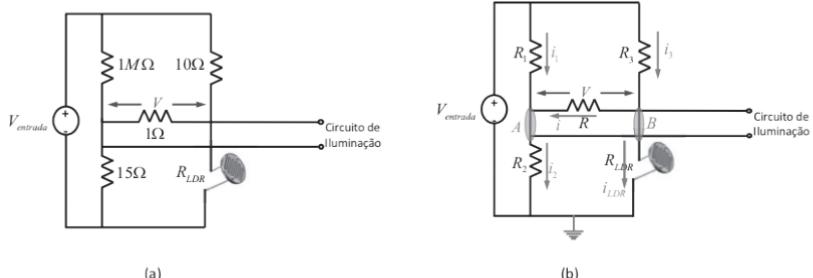
Avançando na prática

Sensor de iluminação

Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada para o desenvolvimento de um sistema automático de iluminação. A equipe de pesquisa e desenvolvimento implementou o sistema, como ilustra a Figura 2.9, mas este não está funcionando corretamente. Seu chefe, então, pediu que você revisasse o projeto e o fizesse funcionar.

Figura 2.9 | Esquemático elétrico do sensor de luz (a) circuito original (b) circuito para análise nodal



Fonte: elaborada pela autora.

E então, o que estaria de errado? Como fazer que o sensor de iluminação funcione corretamente? Vale lembrar que o esquemático elétrico apresentado a você é composto por um LDR, e este nada mais é do que um resistor que varia com a presença de luz.

Resolução da situação-problema

Ao analisar o circuito, você percebe que o sistema de acionamento das luzes está ligado aos terminais A e B, que só será acionado se tiver variação de tensão em seus terminais. Contudo, você notou que o valor da resistência 1 é muito alta em relação às outras e imagina que isso pode estar interferindo no correto funcionamento do circuito.

Para ter certeza do que está acontecendo, você resolve analisar quais equações relacionam as correntes e a tensão dos componentes do circuito elétrico, para, então, propor melhorias no projeto.

Logo, para obter de forma simplificada os sistemas de equações, você pode realizar a análise nodal. Inicialmente, você escolheu o nó de referência e atribuiu os valores de tensão aos nós que não são de referência, como mostra a Figura 2.8(b). Em seguida, aplicou a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) a cada um dos nós que não são de referência do circuito. Para isso, foi determinado, de forma aleatória, o sentido das correntes dos elementos resistivos que formam o circuito, como as correntes i, i_1, i_2, i_3 e i_{LDR} , a equação obtida para o nó A foi:

$$\frac{V_{\text{entrada}} - A}{R_1} + \frac{B - A}{R} = \frac{A}{R_2} \quad (2.14)$$

Já para o nó **B**, por meio da LKC, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{V_{\text{entrada}} - B}{R_3} = \frac{B - A}{R} + \frac{B}{R_{LDR}} \quad (2.15)$$

Considerando que as tensões A e B devem ser iguais para que não haja o acionamento do sistema de iluminação, ou seja, assumindo $B - A = 0$ nas equações (2.14) e (2.15), então:

$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{entrada}} \quad (2.16)$$

$$B = \frac{R_3}{R_3 + R_{LDR}} V_{\text{entrada}} \quad (2.17)$$

Igualando as equações (2.16) e (2.17), após algumas manipulações algébricas, podemos concluir que:

$$R_{LDR} R_1 = R_2 R_3$$

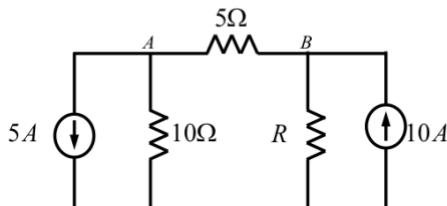
E você comprova sua hipótese de que se R_1 for muito alto, por mais que o R_{LDR} varie, esse valor não é perceptível pelo circuito. Sendo assim, para resolver esse problema, basta alterar o valor de R_1 de acordo com a equação (2.17).

Faça valer a pena

1. A análise nodal, ou método do nó-tensão, fornece um procedimento genérico para análise de circuitos elétricos usando tensões nodais como variáveis de circuitos.

Determine o valor de resistência R no circuito 1, sabendo que a tensão do nó b é igual a 15 V.

Figura 2.10 | Circuito 1 com fontes de corrente independentes questão 1



Fonte: adaptado de Dorf (2012).

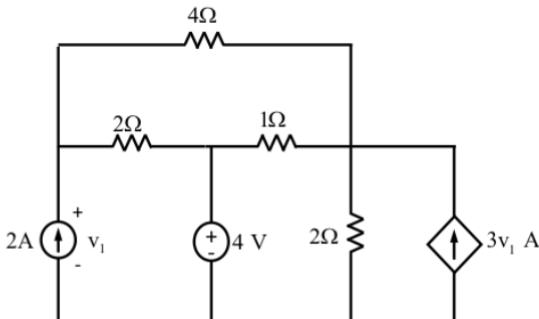
A seguir, assinale a alternativa correta:

- a) $R = -5\Omega$
- b) $R = 0,65\Omega$
- c) $R = 1,36\Omega$
- d) $R = 5\Omega$
- e) $R = 0,88\Omega$

2. A análise nodal com fontes de tensão pode ocorrer com duas possibilidades: se a fonte de tensão estiver conectada entre o nó de referência e um de não referência, ou se estiver conectada entre dois nós que não são de referência. Podendo estas fontes de tensão serem dependentes ou independentes de tensão.

Calcule a potência entregue ao resistor de 4Ω na figura do Circuito 2:

Figura 2.11 | Circuito 2 formado por duas fontes de corrente e uma de tensão



Fonte: adaptada de Johnson, Hilburn e Johnson (1990).

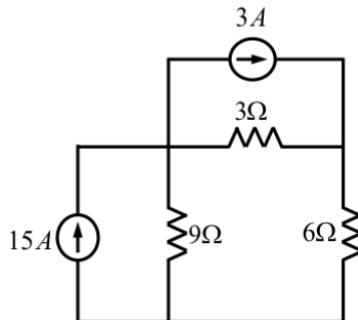
A seguir, assinale a alternativa correta:

- a) $24W$.
- b) $64W$.
- c) $529W$.
- d) $59W$.
- e) $13,21W$.

3. Quando o circuito contém somente resistores lineares e fontes independentes de corrente, pode-se escrever diretamente as equações de nós do circuito por meio da análise por inspeção.

Por inspeção, obtenha a matriz de condutância, o vetor de saída e o vetor de entrada para o Circuito 3:

Figura 2.12 | Circuito 3 com duas fontes de corrente para análise por inspeção



Fonte: elaborada pela autora.

A seguir, assinale a alternativa correta:

a)
$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Seção 2.2

Análise de malhas

Diálogo aberto

Em um circuito elétrico complexo, estamos interessados em determinar os valores de tensão e corrente, pois a partir deles podemos definir as demais características, como potência e energia.

Na seção anterior, vimos que esses valores podem ser determinados por meio do método dos nós, em que as tensões dos nós que formam os circuitos são as variáveis desconhecidas a serem determinadas pela análise do circuito.

Nesta seção, conheceremos e aprenderemos sobre o método das malhas. Assim como o método dos nós, esse método proporciona um procedimento para o estudo dos circuitos elétricos de forma mais fácil e com menos esforço matemático quando conhecidos os valores de tensão dos elementos que compõem esses circuitos.

Assim, para pôr em prática este conhecimento, considere que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada, desta vez, para manutenção de um sistema de alarme residencial com corrente constante. Ao contratar a empresa que você trabalha, o cliente informou que a residência é antiga e houve um pequeno problema de instalação, que resultou na queima da fonte de alimentação do sistema de alarme da residência. Ele também entregou à sua equipe um antigo manual, no qual constava sobre o referido sistema. Neste manual, havia o esquemático elétrico do sistema, mas não possuía o valor da fonte de tensão contínua que deveria alimentá-lo. E agora, como resolver o problema? Qual é o valor da nova fonte de tensão que deve alimentar o sistema?

Vamos descobrir?

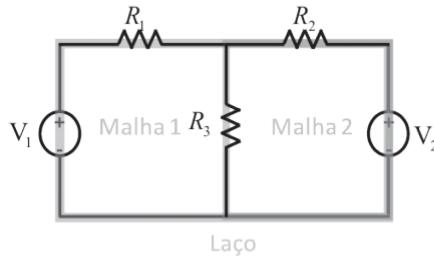
Desejamos bons estudos e um ótimo trabalho!

Não pode faltar

A análise de malhas, ou análise de laço, ou método malha corrente, fornece um procedimento genérico para a análise de circuitos elétricos usando *correntes de malha* como variáveis de circuitos. A vantagem de escolher as correntes de malha para analisar um circuito é devido à redução do número de equações que se deve resolver matematicamente.

Conceitualmente, um *laço* é um caminho fechado, que não passa mais de uma vez pelo mesmo nó. Já uma malha é um laço que não contém qualquer outro laço dentro de si, como mostra a Figura 2.13.

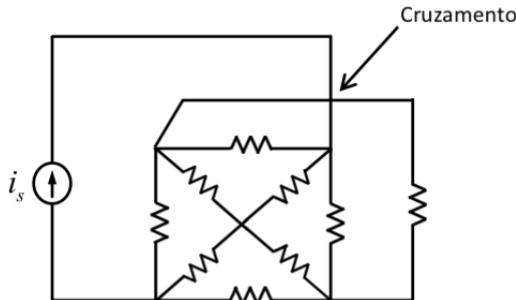
Figura 2.13 | Circuito com um laço e duas malhas



Fonte: elaborada pela autora.

O método das correntes só é aplicado aos circuitos planares. Circuito planar é um circuito que pode ser desenhado em um plano sem que haja cruzamento entre os fios de ligação, ou seja, sem que haja cruzamento entre os ramos. A Figura 2.14 mostra um circuito não planar, cujo cruzamento, sem interligação, não pode ser removido ao redesenhar o circuito de outra forma.

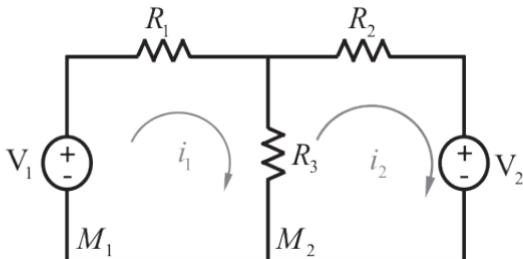
Figura 2.14 | Circuito não planar



Fonte: Dorf e Svoboda (2012).

Para análise de malhas de um circuito elétrico planar, devemos determinar as *correntes de malha* por meio da aplicação da Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT). Definimos corrente de malha como a corrente que circula nos componentes que pertencem à malha, como as correntes i_1 e i_2 , pertencentes, respectivamente, às malhas 1 e 2, conforme a Figura 2.15.

Figura 2.15 | Circuito com duas malhas



Fonte: elaborada pela autora.

Para determinarmos os valores das correntes de cada malha, inicialmente, devemos atribuir correntes a todas as malhas do circuito sob análise. Embora uma corrente de malha possa ser atribuída com um sentido arbitrário, utilizaremos a convenção que as correntes de malha circulam no sentido horário.

Em seguida, aplicamos a LKT para encontrarmos a equação de cada malha do circuito. Para aplicarmos esta lei, é fundamental utilizarmos a Lei de Ohm para expressarmos as tensões dos elementos passivos em termos das correntes de malha. Sendo assim, para obtermos a soma algébrica das tensões ao longo de uma malha, percorremos esta malha no sentido horário, quando encontramos o sinal positivo (+) antes do sinal negativo para uma fonte de tensão, somamos a tensão; contudo, quando encontramos o sinal negativo (-) antes do positivo para as fontes de tensão, subtraímos a tensão. Já para os elementos passivos, como os resistores, os valores de tensão serão sempre positivos, e a corrente desse elemento será sempre a corrente da malha que estamos percorrendo menos a corrente da outra malha, que passe pelo mesmo elemento passivo, caso exista.

Dessa forma, aplicando a LKT à malha 1 (M1), cuja corrente de malha é i_1 , obtemos:

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) = 0$$

Ou:

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1 \quad (2.18)$$

Para malha 2 (M2), cuja corrente de malha é i_2 , ao aplicarmos a LKT, obtemos:

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0$$

Ou:

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = -V_2 \quad (2.19)$$

Podemos notar que as variáveis desconhecidas das equações de malhas, equações (2.18) e (2.19), são as correntes de malha (i_1 e i_2). Para determinarmos os valores dessas variáveis, podemos utilizar quaisquer das técnicas de solução de sistemas lineares, como a regra de Cramer, substituição, adição, entre outras.



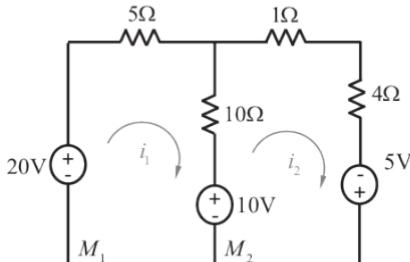
A regra de Cramer é um teorema em álgebra linear muito utilizado em solução de circuitos elétricos, o qual soluciona sistemas de equações lineares em termos de determinantes. Para saber um pouco mais sobre como utilizar essa regra, acesse o link disponível em: <<http://www.aulasniap.com.br/static/media/resumos/sistematiclinearregracramer.pdf>>. Acesso em: 29 out. 2017.



Exemplificando

Para o circuito da Figura 2.16, determine as correntes de cada elemento resistivo.

Figura 2.16 | Circuito com duas malhas e três fontes de tensão independentes



Fonte: elaborada pela autora.

Inicialmente, atribuímos os sentidos das correntes de malha, i_1 e i_2 , como mostra a Figura 2.16. Em seguida, aplicamos a LKT para encontrarmos a equação de cada malha do circuito.

Logo, para malha 1 (onde circula i_1), obtemos:

$$-20 + 5i_1 + 10(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

Ou:

$$15i_1 - 10i_2 = 10 \quad (2.20)$$

Já para malha 2 (onde circula i_2), temos:

$$1i_2 + 4i_2 - 5 - 10 + 10(i_2 - i_1) = 0$$

Ou:

$$-10i_1 + 15i_2 = 15 \quad (2.21)$$

Resolvendo o sistema linear entre as equações (2.20) e (2.21), obtemos os seguintes valores para as correntes de malha:

$$i_1 = 2,4 \text{ A}$$

$$i_2 = 2,6 \text{ A}$$



Assimile

Para determinação das correntes de malha, devemos realizar as seguintes etapas:

1. Atribua correntes de malha (i_1, i_2, \dots, i_n) às n malhas do circuito.
2. Aplique a LKT a cada uma das n malhas. Use a Lei de Ohm para expressar as tensões em termos das correntes de malhas.
3. Resolva o sistema linear para obter as correntes de malha.

Até este ponto desta seção, aprendemos a determinar as correntes de malhas em circuitos que possuem apenas fontes de tensão. Agora, vamos entender como as fontes de corrente influenciam a análise de malhas.

Inicialmente, vamos considerar uma fonte de corrente apenas em uma malha, como a fonte de corrente de **4 A** na Figura 2.17. Podemos, então, considerar que a corrente da malha 1 é a própria corrente da fonte, $i_1 = 4 \text{ A}$.

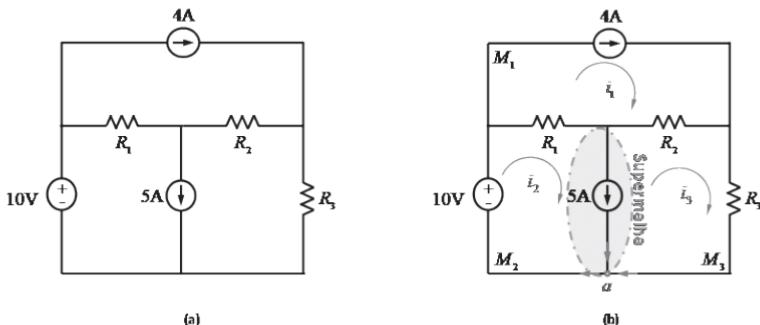
Agora, vamos considerar que exista uma fonte de corrente entre duas malhas, como a fonte de corrente de 5 A, ilustrada na Figura 2.17(a). Neste caso, teremos a formação de uma *supermalha* e devemos aplicar tanto a LKT como a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) para determinar as correntes de malha.



Exemplificando

Dado $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ e $R_3 = 2 \Omega$, determine as correntes de malha do circuito apresentado na Figura 2.17(a).

Figura 2.17 | Esquemático elétrico para análise de malhas com duas fontes de corrente independentes: (a) circuito original e (b) circuito para análise das malhas



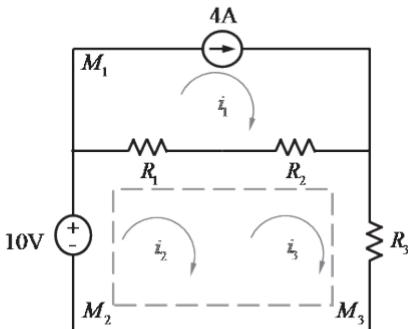
Fonte: Dorf e Svoboda (2012).

Para realizarmos a análise de malha, devemos seguir as mesmas etapas do Exemplificando anterior, exceto pela presença de uma fonte de corrente pertencente a duas malhas, ou seja, uma *supermalha*.

Sendo assim, atribuímos as correntes de malha i_1, i_2 e i_3 às malhas M_1, M_2 e M_3 , respectivamente, como mostra a 2.17b. Na M_1 , temos uma fonte de corrente apenas para uma malha, logo a corrente desta malha é igual à fonte de corrente, ou seja, $i_1 = 4A$, visto que o sentido da corrente de malha e o sentido da fonte de corrente são os mesmos.

Já para as malhas M_2 e M_3 , temos uma *supermalha*. Neste caso, excluímos a fonte de corrente e quaisquer elementos a ela associados em série, como mostra a Figura 2.18. E criamos uma supermalha com a periferia das malhas M_2 e M_3 , isto é, combinamos estas duas malhas para formar uma supermalha maior.

Figura 2.18 | Supermalha criada pela exclusão da fonte de corrente pertencentes às malhas 2 e 3



Fonte: elaborada pela autora.

Logo, aplicando a LKT à supermalha, obtemos:

$$-10 + 1(i_2 - 4) + 1(i_3 - 4) + 2i_3 = 0$$

Ou:

$$i_2 + 3i_3 = 18 \quad (2.22)$$

Agora, precisaremos de uma segunda equação para obtermos os valores de i_2 e i_3 . Aplicando a LKC ao nó **a** – Figura 2.17(b) –, temos que:

$$i_3 + 5 = i_2$$

Ou:

$$i_2 - i_3 = 5 \quad (2.23)$$

Assim, resolvendo o sistema linear entre as equações (2.22) e (2.23), obtemos os seguintes valores para as correntes de malha:

$$i_2 = 8,25 \text{ A}$$

$$i_3 = 3,25 \text{ A}$$

Observe que uma supermalha tem a propriedade de:

1. A fonte de corrente da supermalha fornece a equação de restrição necessária para encontrar as correntes de malha.
2. Não possuir sua própria corrente.
3. Para análise de circuitos com uma supermalha, devemos aplicar as Leis de Kirchhoff de tensão e corrente.

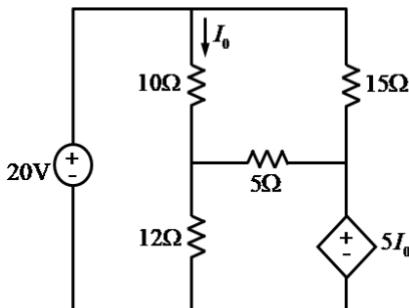
Assim como para as fontes independentes de tensão e corrente, as etapas para análise de malha com fonte dependente de tensão e corrente devem ser as mesmas das fontes independentes. E a corrente ou tensão de controle da fonte dependente deve ser expressa em função das correntes de malha.



Faça você mesmo

Determine as correntes de malha para o circuito da Figura 2.19.

Figura 2.19 | Esquemático elétrico para análise de malha com fonte de tensão dependente



Fonte: adaptada de Sadiku e Alexander (2013).

Dadas as construções das equações da análise de malha apresentadas até aqui, quando um circuito possuir somente resistores lineares e fontes independentes de tensão ou corrente, podemos construir um procedimento genérico baseado na inspeção desse circuito.

Assim, quando todas as fontes de um circuito são fontes de tensão independentes, podemos escrever diretamente as equações de malha de um circuito por mera inspeção desse circuito, pela relação dada por:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & \cdots & -R_{1N} \\ -R_{21} & R_{22} & \cdots & -R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{N1} & -R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Ou simplesmente:

$$R \cdot i = v \quad (2.25)$$

Em que:

R_{kk} = a soma das resistências conectadas na malha k .

$R_{kj} = R_{jk}$ = a soma das resistências diretamente conectadas às malhas k e j , $k \neq j$.

i_k = corrente de malha não conhecida para malha k no sentido horário.

v_k = a soma de todas as fontes de tensão independentes na malha k , com elevação de tensão sendo tratada como positiva e abaixamento de tensão como negativa.

A matriz R é conhecida como matriz de resistências, i é o vetor de saída e v é o vetor de entrada. Assim, a equação (2.25) pode ser resolvida para encontrarmos as correntes de malha desconhecidas.

Por exemplo, para o circuito da Figura 2.16, a matriz de resistência, o vetor de saída e o vetor de entrada podem ser definidos como:

$$\begin{bmatrix} 5+10 & -10 \\ -10 & 10+1+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20-10 \\ 5+10 \end{bmatrix}$$



Refletia

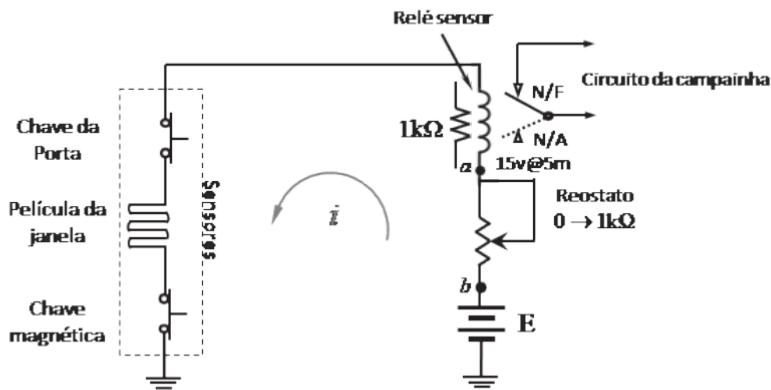
Agora que já aprendemos sobre o método de malhas e dos nós para análise de um circuito complexo, quando devemos utilizar o método de malhas e quando devemos utilizar o método dos nós?

Sem medo de errar

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada para manutenção de um sistema de alarme residencial com corrente constante.

Ao contratar a empresa que você trabalha, o cliente informou que a residência é antiga e houve um pequeno problema de instalação, que resultou na queima da fonte que alimenta o sistema de alarme da residência. Ele entregou à sua equipe um antigo manual, no qual constava sobre o referido sistema. Neste manual, havia o esquemático elétrico do sistema, como mostra a Figura 2.20, mas não possuía o valor da fonte de tensão contínua que deveria alimentá-lo. E agora, como resolver o problema? Qual é o valor da nova fonte de tensão que deve alimentar o sistema?

Figura 2.20 | Esquemático elétrico do sistema de alarme com corrente constante



Fonte: adaptado de Boylestad (2012, p. 271).

Ao analisar o esquemático elétrico (Figura 2.20), você percebe que o relé sensor é acionado por uma corrente de 5 mA. Logo, o reostato deve ser ajustado para garantir uma corrente de 5mA. Por meio de testes empíricos, você nota que o circuito da campainha não é acionado quando o reostato possui seu valor máximo, **1 kΩ**.

Considerando nulas as resistências dos sensores, para obter o valor de tensão que a nova fonte deve entregar ao circuito, basta fechar a malha entre os potenciais terra, ou de referência, e aplicar a LKT. Ao adotar a corrente no sentido anti-horário, obtemos:

$$\begin{aligned} -E + R_{\text{reostato}}i + R_{\text{relésensor}}i &= 0 \\ -E + 1 \cdot 10^3 (5 \cdot 10^{-3}) + 1 \cdot 10^3 (5 \cdot 10^{-3}) &= 0 \\ E &= 10V \end{aligned}$$

Logo, o valor da nova fonte de tensão que deve alimentar o sistema é de 10V.

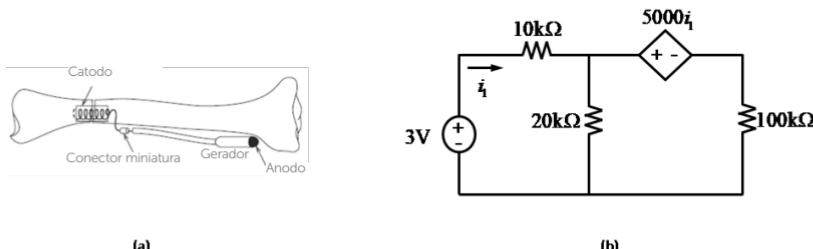
Avançando na prática

Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, contratada para projetar um sistema que utiliza a eletricidade para ajudar na regeneração e no crescimento de ossos. Esse sistema tem sido utilizado, principalmente, no caso de fraturas, porém também pode ser aplicado a outras enfermidades, como osteoporose, artrite e úlceras de pele.

Com o auxílio de uma equipe de médicos e fisioterapeutas, vocês desenvolveram o circuito mostrado na Figura 2.21.

Figura 2.21 | Regenerador elétrico de ossos: (a) sistema físico a ser implantado e (b) modelo do circuito



Fonte: adaptado de Dorf e Svoboda (2012).

Esse circuito tem a função de aplicar uma corrente elétrica a fraturas que não se consolidaram dentro do prazo esperado, simulando as forças elétricas que existem naturalmente no interior do corpo. Sendo assim, para seu correto funcionamento, é necessária apenas uma pequena quantidade de estímulos elétricos para acelerar a regeneração dos ossos. Logo, é utilizado o método da corrente contínua, que usa um eletrodo implantado no osso. O implante é mostrado na Figura 2.21(a) e o modelo do circuito projetado pela sua equipe é mostrado na Figura 2.21(b).

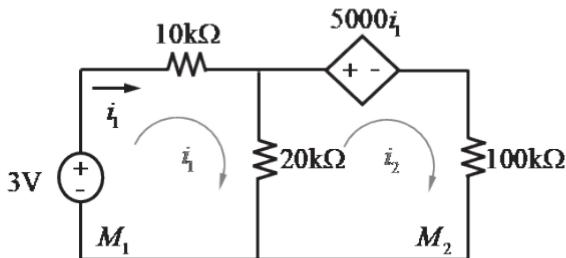
Para o término e a validação desse projeto, foi designada a você a análise da energia fornecida pelo cátodo durante um período de 24 horas. O cátodo é representado pela fonte de tensão contínua e o resistor de **100kΩ**.

Então, como obter a energia desses elementos que formam o cátodo? Esse projeto é viável?

Resolução da situação-problema

Para o cálculo da energia no cátodo, representado pela fonte de tensão contínua e o resistor de **100kΩ**, é necessário encontrarmos as correntes dos elementos. Uma forma fácil e direta é por meio da análise de malha, como mostra a Figura 2.22.

Figura 2.22 | Esquemático elétrico para análise de malha do modelo do circuito do regenerador de ossos



Fonte: elaborada pela autora.

Assim, após atribuirmos as correntes de malha (Figura 2.22), devemos aplicar a LKT a cada malha do circuito.

Logo, para malha 1 (M1), obtemos:

$$-3 + 10 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3(i_1 - i_2) = 0$$

Ou:

$$30 \cdot 10^3 i_1 - 20 \cdot 10^3 i_2 = 3 \quad (2.26)$$

Já ao aplicarmos a LKT para malha 2 (M2), temos que:

$$5 \cdot 10^3 i_1 + 100 \cdot 10^3 i_2 + 20 \cdot 10^3(i_2 - i_1) = 0$$

Ou:

$$i_1 - 8i_2 = 0 \quad (2.27)$$

Resolvendo o sistema linear dado pelas equações (2.26) e (2.27), determinamos a corrente das malhas como:

$$i_1 = 0,109 \text{ mA}$$

$$i_2 = 0,0136 \text{ mA}$$

Notamos que a corrente dos elementos que compõem o cátodo é a mesma que a da malha 2, isto é, i_2 .

Assim, para o cálculo da energia fornecida pelo cátodo durante um período de 24 horas, é necessário encontrarmos a potência entregue por esse sistema. Sendo assim:

$$P_{\text{cátodo}} = Vi_2 + R(i_2)^2$$

$$P_{\text{cátodo}} = (5000i_1)(i_2) + 100(i_2)^2$$

$$P_{\text{cátodo}} = (5000 \cdot 0,109 \cdot 10^{-3})(0,0136 \cdot 10^{-3}) + 100 \cdot 10^3(0,0136 \cdot 10^{-3})^2$$

Logo:

$$P_{catodo} = 0,026 \text{ mW} \quad (2.28)$$

Assim, podemos calcular a energia fornecida pelo cátodo em 24 horas, ou um dia, como:

$$Energia = (0,026 \cdot 10^{-3})(24\text{h})(3600 \frac{\text{s}}{\text{h}})$$

$$Energia = 2,25 \text{ J}$$

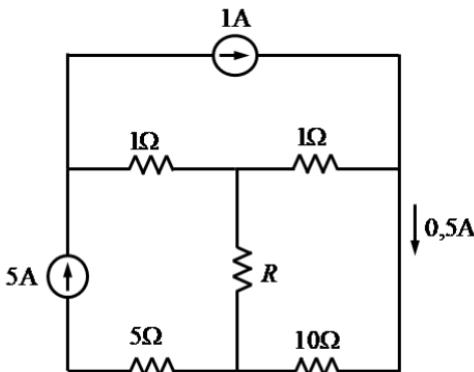
Ao determinar o valor da energia fornecida pelo sistema regenerador elétrico de ossos em 24 horas, você percebe que é uma quantidade pequena para um dia e conclui que é viável a implementação desse sistema.

Faça valer a pena

1. A análise de malhas, ou análise de laço, ou método malha corrente, fornece um procedimento genérico para análise de circuitos elétricos usando *correntes de malha* como variáveis de circuitos. A vantagem de escolher as correntes de malha para analisar um circuito é devido à redução do número de equações que se deve resolver matematicamente.

Determine o valor da resistência R para o circuito da Figura 2.23.

Figura 2.23 | Circuito com duas fontes de corrente



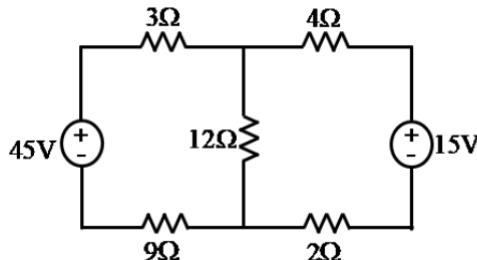
Fonte: elaborada pela autora.

- a) $R = 2 \Omega$
- b) $R = 1 \Omega$
- c) $R = 4 \Omega$
- d) $R = 1,5 \Omega$
- e) $R = 0,5 \Omega$

2. Conceitualmente, um laço é um caminho fechado que não passa mais de uma vez pelo mesmo nó. Já uma malha é um laço que não contém qualquer outro laço dentro de si. Um circuito elétrico complexo pode ser analisado por meio dos métodos de malhas que se caracterizam por terem as correntes de malha como variável desconhecida.

Determine as correntes de malha para o circuito:

Figura 2.24 | Circuito com duas fontes de tensão



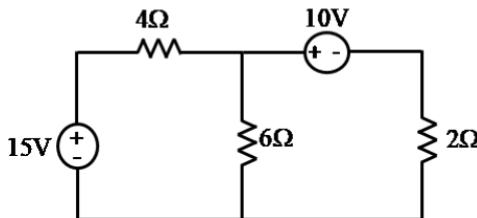
Fonte: elaborada pela autora.

- a) $i_1 = 0\text{A}$, $i_2 = 2,19\text{A}$
- b) $i_1 = 0,625\text{A}$, $i_2 = 2,19\text{A}$
- c) $i_1 = 2,19\text{A}$, $i_2 = 0\text{A}$
- d) $i_1 = 2,19\text{A}$, $i_2 = 0,625\text{A}$
- e) $i_1 = 3,44\text{A}$, $i_2 = 3,125\text{A}$

3. A análise de malhas, ou análise de laço, ou método malha corrente, fornece um procedimento genérico para análise de circuitos elétricos usando correntes de malha como variáveis de circuitos.

Por meio da análise por inspeção, determine as equações das malhas, em formato de matrizes, para o circuito da figura a seguir.

Figura 2.25 | Circuito para análise de malha por inspeção



Fonte: elaborada pela autora.

a)
$$\begin{bmatrix} 4+6 & -6 \\ -6 & 6+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 4+6 & 6 \\ 6 & 6+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 4+6 & -6 \\ -6 & 6+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ +10 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 4+6 & 6 \\ 6 & 6+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ +10 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} 4+6 & -6 \\ -6 & 6+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Seção 2.3

Transformação de tipos de circuitos elétricos

Diálogo aberto

Os circuitos elétricos são formados por elementos ativos, como fonte de tensão e corrente, e por elementos passivos, como os resistores. Esses elementos podem ser associados de diversas maneiras, como em associações em série e paralelo. Contudo, diversos circuitos possuem configurações que não permitem serem simplificados utilizando apenas essas associações, sendo necessário, para tanto, utilizar o conceito de circuitos de três terminais.

Esse tipo de rede de circuito elétrico pode ser classificado em estrela ípsilon (Y), tê (T) ou estrela, ou em circuitos do tipo delta (Δ), pi (π) ou triângulo, e podem ser transformados um em outro para simplificação da análise da avaliação desses sistemas elétricos.

Sendo assim, nesta seção, conheceremos as redes em estrela (Y ou T) e as redes em triângulo (Δ ou π) e as transformações de redes, que podem ser estrela-triângulo ($\text{Y} - \Delta$) ou triângulo-estrela ($\Delta - \text{Y}$), amplamente utilizadas em circuitos elétricos.

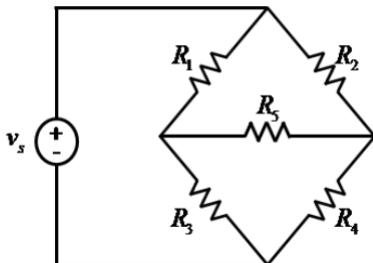
Neste contexto, para pôr em prática este conhecimento, considere que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada para realizar manutenção de uma máquina secadora de roupa. Ao contratar a empresa que você trabalha, o cliente informou que esse eletrodoméstico está constantemente entrando em modo de proteção, e este, normalmente, é acionado quando o sistema eletrônico atinge altos valores de temperatura, ocasionados pelo alto valor de corrente elétrica. E, então, qual será a real causa deste problema? Como analisar o problema desta máquina de secar roupas? Vamos descobrir?

Desejamos bons estudos e um ótimo trabalho!

Não pode faltar

Frequentemente, surgem situações em análise de circuitos em que os resistores não estão configurados nem série nem em paralelo, como ilustra a Figura 2.26. Como poderíamos associar os resistores R_1 , R_2 e R_5 ? Série ou paralelo?

Figura 2.26 | Circuito em ponte

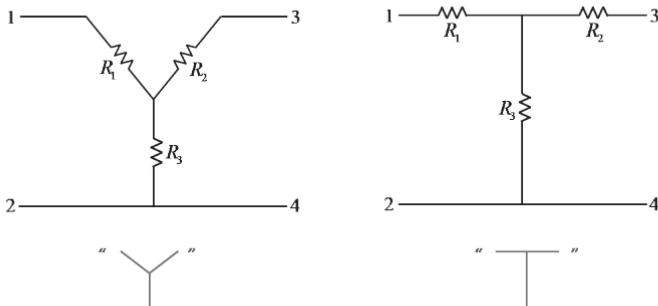


Fonte: Sadiku e Alexander (2013).

A resposta correta não seria nem um nem outro, ou seja, não podemos reduzir a configuração mostrada na Figura 2.26 a um resistor único equivalente nos terminais da fonte se nos restringirmos ao simples circuito equivalente série ou paralelo.

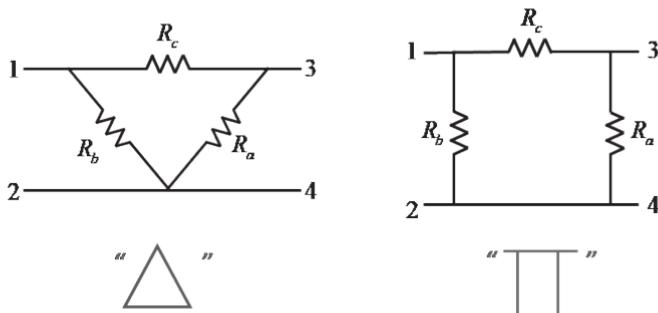
Muitos circuitos, como o circuito em ponte, podem ser simplificados usando-se equivalentes de três terminais. Estes podem ser correspondentes à rede ípsilon (Υ), tê (T) ou estrela, ilustrada na Figura 2.27, e referentes à conexão dos resistores R_1 , R_3 e R_5 na Figura 2.26, ou à rede delta (Δ), pi (π) ou triângulo, como mostra a Figura 2.28, e referentes aos resistores R_1 , R_2 e R_5 da Figura 2.26.

Figura 2.27 | Duas configurações de circuitos com três terminais de mesma rede: (a) Υ e (b)



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 2.28 | Duas configurações de circuitos com três terminais de mesma rede: (a) Δ e (b) π



Fonte: elaborada pela autora.

As associações de resistores em três terminais, formando os circuitos estrela (Y) ou delta (Δ), podem ocorrer por si só ou como parte de uma rede maior e são, normalmente, utilizadas em redes trifásicas e filtros elétricos. Além disso, podemos converter o circuito triângulo em estrela, e vice-versa. Esse tipo de conversão, geralmente, leva a um circuito que pode ser resolvido utilizando técnicas de circuitos série e paralelo.

Sendo assim, suponha que seja mais conveniente analisar o circuito com uma rede em "Y" do que com uma que possua configuração em " Δ ", ou seja, desejamos converter um circuito triângulo em estrela (ou delta-Y). Para isto, basta sobrepor a rede Y (ou T) à rede Δ (ou π) e obter as resistências equivalentes entre os mesmos nós da rede em Y e comparar com a rede Δ . Por exemplo, para os terminais 1 e 2 das Figuras 2.27 e 2.28, temos:

$$R_{12}(Y) = R_1 + R_3 \quad (2.29)$$

$$R_{12}(\Delta) = R_b \parallel (R_a + R_c) \quad (2.30)$$

Igualando as equações (2.29) e (2.30), temos que:

$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.31)$$

De forma similar, fazendo para os outros dois terminais:

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.32)$$

$$R_{34} = R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.33)$$

Subtraindo as equações (2.33) e (2.31), chegamos a:

$$R_1 - R_2 = \frac{R_c(R_b - R_a)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.34)$$

Logo, ao somarmos as equações (2.32) e (2.34), obtemos:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.35)$$

De maneira análoga, se subtrairmos a equação (2.34) da equação (2.32), temos que:

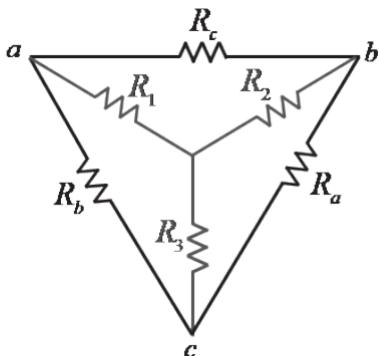
$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.36)$$

E subtraindo a equação (2.35) da equação (2.31), obtemos:

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.37)$$

Note que, se considerarmos os circuitos superpostos, como mostra a Figura 2.29, podemos considerar que cada resistor na rede Y é o produto dos resistores nos dois ramos adjacentes de Δ , dividido pela soma dos três resistores Δ .

Figura 2.29 | Superposição das configurações de rede Y e Δ como ferramenta de transformação de uma em outra



Fonte: elaborada pela autora.



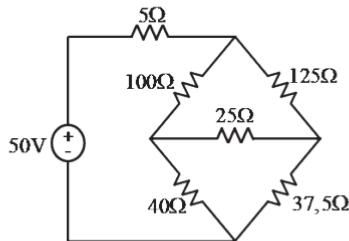
Se quisermos transformar a configuração da rede triângulo em estrela, ou seja, delta-Y, basta igualar o resistor de Y ao produto dos resistores nos dois ramos mais próximos, ou adjacentes, do Δ dividido pela soma dos resistores do Δ .



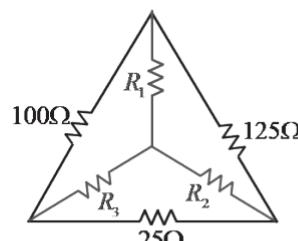
Exemplificando

Determine a corrente e a potência fornecida pela fonte de 50V no circuito da Figura 2.30.

Figura 2.30 | Circuito 1 para o exemplificando: (a) original e (b) superposição das configurações de rede Δ em Y



(a)



(b)

Fonte: Nilsson e Reidel (2009).

Para calcularmos a corrente e a potência do circuito 1, devemos, inicialmente, encontrar a resistência equivalente nos terminais da fonte, a qual pode ser facilmente determinada ao substituirmos a configuração em Δ superior (**100, 25 e 125Ω**) ou inferior (**40, 25 e 37,5Ω**) pelo seu equivalente em "Y".

Sendo assim, para substituirmos a configuração delta superior por uma configuração estrela, é necessário calcular as três resistências equivalentes, definidas pela Figura 2.30(b), como:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 125}{250} = 50 \Omega$$

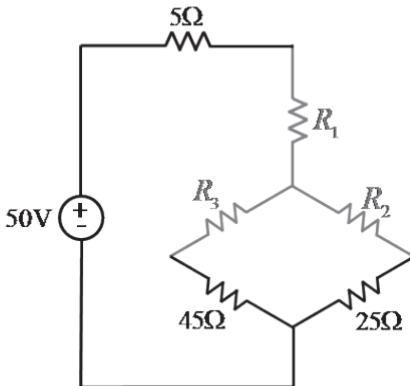
$$R_2 = \frac{125 \cdot 25}{250} = 12,5 \Omega$$

$$R_3 = \frac{100 \cdot 25}{250} = 10 \Omega$$

Logo, ao substituirmos os resistores em Δ da Figura 2.30(a) pelo equivalente em "Y", temos o circuito ilustrado na Figura 2.31. Dessa forma, fica fácil calcular a resistência nos terminais da fonte de 50V por meio de simplificações série-paralelo:

$$R_{eq} = 55 + \frac{50 \cdot 50}{100} = 80 \Omega$$

Figura 2.31 | Circuito 1 equivalente em "Y"



Fonte: Nilsson e Reidel (2009).

Assim, para um resistor de **80Ω** e uma fonte de 50V, a corrente e a potência são obtidas como:

$$i = \frac{50}{80} = 0,625 \text{ A}$$

$$P = vi = 50 \cdot 0,625 = 31,25 \text{ W}$$

Agora, se tivermos interessados na transformação de uma rede em "Y", ou estrela, em uma rede equivalente em delta, ou triângulo, basta, a partir das equações (2.35), (2.36) e (2.37), obter:

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = \frac{R_a R_b R_c (R_a + R_b + R_c)}{(R_a + R_b + R_c)^2} \quad (2.38)$$

Em seguida, dividir a equação (2.38) pelas equações (2.35), (2.36) e (2.37), que teremos:

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \quad (2.39)$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \quad (2.40)$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \quad (2.41)$$

Note que, se considerarmos os circuitos superpostos, como mostra a Figura 2.29, podemos considerar que cada resistor na rede Δ é a soma de todos os produtos possíveis dos resistores em configuração em "Y", extraídos dois a dois, dividido pelo resistor Y oposto.



Assimile

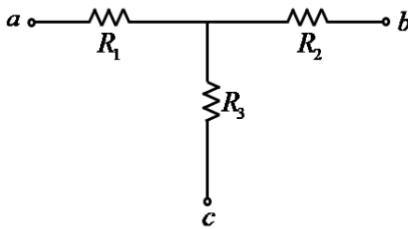
Se quisermos transformar a configuração da rede estrela em triângulo, ou seja, Y-delta, basta igualar cada resistor do Δ à soma das possíveis combinações dos produtos das resistências do Y dividida pela resistência do Y mais distante do resistor a ser determinado.



Exemplificando

Dada a configuração do circuito de três terminais em "Y", como ilustra a Figura 2.32, obtenha seu equivalente em Δ . Para isso, considere $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ e $R_3 = 300 \Omega$.

Figura 2.32 | Circuito 2, configuração de três terminais em estrela



Fonte: elaborada pela autora.

Para obtermos o equivalente em triângulo ou delta, basta aplicarmos as equações (2.39), (2.40) e (2.41), como:

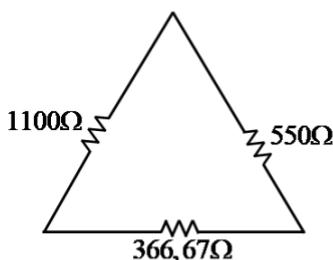
$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{100 \cdot 200 + 200 \cdot 300 + 300 \cdot 100}{100} = 1100 \Omega$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{100 \cdot 200 + 200 \cdot 300 + 300 \cdot 100}{200} = 550 \Omega$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{100 \cdot 200 + 200 \cdot 300 + 300 \cdot 100}{300} = 366,67 \Omega$$

O circuito delta equivalente é ilustrado a seguir:

Figura 2.33 | Equivalente em triângulo (ou delta) do circuito 2



Fonte: elaborada pela autora.

Vale ressaltar que as redes Y e Δ são ditas equilibradas quando:

$$R_Y = R_1 = R_2 = R_3 \quad (2.42)$$

E:

$$R_\Delta = R_a = R_b = R_c \quad (2.43)$$

Dada as condições das equações (2.42) e (2.43), as equações, ou fórmulas, para conversão ficam:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \text{ou} \quad R_\Delta = 3R_Y \quad (2.44)$$

Logo, podemos notar que, para uma configuração em "Y" de três resistores iguais, o valor de cada resistor na configuração em Δ é igual a três vezes o valor de um dos resistores do Y.



Reflita

Dadas as relações da equação (2.44) ao iniciar o acionamento, ou funcionamento, de um sistema elétrico, é preferível ter um circuito em estrela ou triângulo? Por qual motivo?



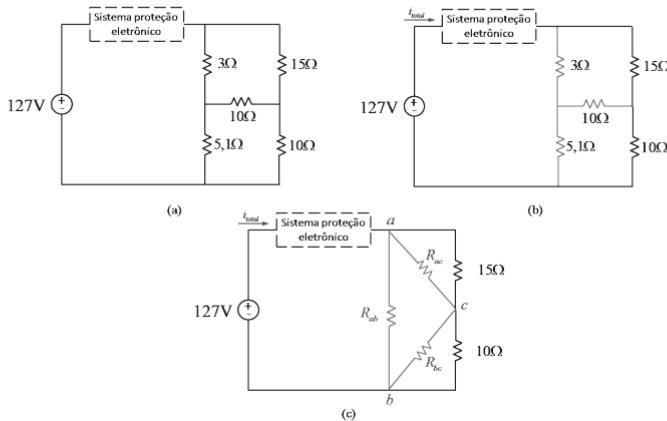
Pesquise mais

As configurações estrela e triângulo são amplamente utilizadas em partidas de motores elétricos. Para saber um pouco mais, acesse o link: <http://gerson.luqueta.com.br/index_arquivos/motoresWEG.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2017.

Sem medo de errar

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada para realizar a manutenção de uma secadora de roupa. Ao contratar a empresa que você trabalha, o cliente informou que esse eletrodoméstico está constantemente entrando em modo de proteção, que é acionado, normalmente, quando o sistema eletrônico atinge altos valores de temperatura, ocasionados pelo alto valor de corrente elétrica (15 A). Então, qual será a real causa deste problema? Como analisar o problema da máquina de secar roupas?

Figura 2.34 | Circuito elétrico máquina de secar roupas (a) original, (b) em destaque o circuito "Y" e (c) circuito Δ equivalente



Fonte: elaborada pela autora.

Para analisarmos este problema, será necessário obter a corrente total do circuito. Então, inicialmente, você obteve, no site do fabricante, o manual técnico deste eletrodoméstico, que contém o circuito elétrico da secadora de roupas, como mostra a Figura 2.34(a).

Ao avaliar o circuito elétrico presente no manual do fabricante, você percebe que este é formado por uma associação de resistores, que formam um circuito de três terminais do tipo estrela ("Y") – Figura 2.34(b). Contudo, como bom técnico, você sabe que é mais fácil, neste caso, obter a corrente elétrica se transformar o circuito da secadora de roupas elétricas para um circuito do tipo triângulo (ou delta). Sendo assim, para obter o circuito equivalente em triângulo – Figura 2.34(c) –, é necessário determinar o equivalente das resistências, por meio das equações (2.39), (2.40) e (2.41), como:

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{96,3}{10} = 9,63 \Omega$$

$$R_{ac} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{96,3}{5,1} = 18,88 \Omega$$

$$R_{bc} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{96,3}{3} = 32,1 \Omega$$

Após a obtenção dos valores das resistências, ao analisar o circuito da Figura 2.34(c), nota-se que os resistores de 15Ω e R_{ab} estão associados em paralelo, bem como os resistores de 10Ω e R_{bc} . Estes dois equivalentes estão em série, e o resistor equivalente resultante está em paralelo com o resistor R_{ab} , como mostra a relação:

$$R_{total} = \frac{\left(\left(\frac{15 \cdot R_{ac}}{15 + R_{ac}} \right) + \left(\frac{10 \cdot R_{bc}}{10 + R_{bc}} \right) \right) \cdot R_{ab}}{\left(\left(\frac{15 \cdot R_{ac}}{15 + R_{ac}} \right) + \left(\frac{10 \cdot R_{bc}}{10 + R_{bc}} \right) \right) + R_{ab}} = \frac{\left((8,36) + (7,63) \right) \cdot 9,63}{(8,36) + (7,63) + (9,63)} = \frac{153,98}{25,62} = 6,01 \Omega$$

Assim, sabendo que a tensão de entrada deste circuito é de 127 V, para obtermos o valor da corrente elétrica, basta aplicar a Lei de Ohm, como:

$$i_{total} = \frac{127}{R_{total}} = \frac{127}{6,01} = 21,13 \text{ A}$$

Logo, será necessário realizar reparo, pois a corrente fornecida à secadora de roupa é maior que o sistema de proteção eletrônico pode suportar.

Avançando na prática

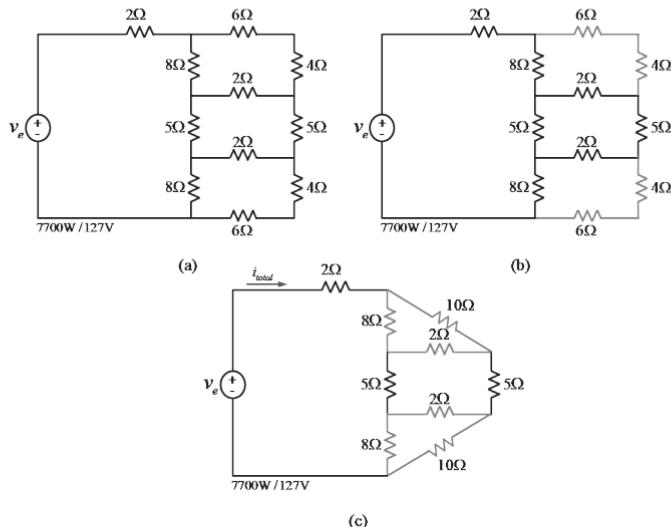
Manutenção de uma torneira elétrica

Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, a qual foi contratada para realizar a manutenção de uma instalação elétrica residencial.

Ao contratar a empresa que você trabalha, o cliente informou que, após instalar uma nova torneira elétrica em sua residência, o sistema de proteção referente à instalação elétrica da cozinha, que suporta até 25A, desconectava, desligando todos os equipamentos eletrônicos desse cômodo. No manual técnico do equipamento, obtido no site do fabricante, consta o circuito elétrico da torneira, como mostra a Figura 2.35(a).

Figura 2.35 | Circuito elétrico da torneira: (a) original, (b) com resistores associados em série e (c) circuito Δ



Fonte: elaborada pela autora.

Dado o esquemático elétrico da torneira, como ter certeza que ela é o problema do sistema de proteção da instalação elétrica? Como analisar este circuito elétrico?

Resolução da situação-problema

Ao analisar o circuito elétrico da torneira, você percebe que este é composto por dois resistores em série (**6Ω** e **4Ω**), como mostra a Figura 2.35(b), equivalente a um resistor de **10Ω**. Ao substituirmos os dois resistores pelo seu equivalente, obtemos o circuito ilustrado pela Figura 2.35(c). Esta é composta por dois circuitos em delta conectados por meio dos resistores de **5Ω**.

Logo, para avaliar se a torneira é a principal razão para o desligamento do sistema de proteção, é necessário calcular a corrente total do circuito (i_{total}).

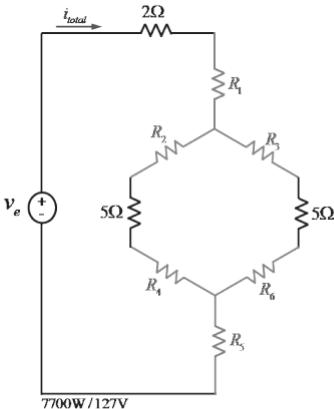
Essa tarefa fica muito mais fácil se convertermos a configuração do circuito de triângulo para estrela, como ilustra a Figura 2.36. Assim:

$$R_1 = R_5 = \frac{(8)(10)}{8 + 2 + 10} = 4 \Omega$$

$$R_2 = R_4 = \frac{(8)(2)}{8 + 2 + 10} = 0,8 \Omega$$

$$R_3 = R_6 = \frac{(2)(10)}{8 + 2 + 10} = 1 \Omega$$

Figura 2.36 | Circuito equivalente da torneira elétrica em configuração "Y"



Fonte: elaborada pela autora.

Dessa forma, podemos afirmar que a resistência equivalente total do circuito (R_{total}) é dada por:

$$R_{total} = 2 + \frac{(R_2 + R_4 + 5) \cdot (R_3 + R_6 + 5)}{(R_2 + R_4 + 5) + (R_3 + R_6 + 5)} + R_4$$

$$R_{total} = 2 + \frac{(0,8 + 0,8 + 5) \cdot (1 + 1 + 5)}{(0,8 + 0,8 + 5) + (1 + 1 + 5)} + 0,8$$

$$R_{total} = 2 + \frac{(6,6) \cdot (7)}{(6,6) + (7)} + 0,8$$

$$R_{total} = 10,1 \Omega$$

Sabendo que a potência da torneira é de 7700W, então podemos afirmar que a corrente total do circuito é dada por:

$$P = R_{total} i^2$$

$$i = \sqrt{\frac{7700}{10,1}} = 27,6 \text{ A}$$

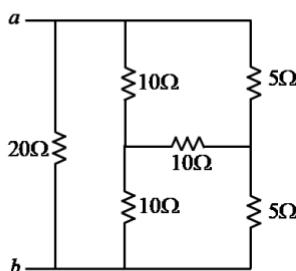
Como a corrente é maior do que a corrente suportada pelo sistema de proteção, a torneira realmente é o causador do desligamento deste sistema de segurança.

Faça valer a pena

1. A transformação Y-Δ, também conhecida como estrela-delta, ou delta-Y, ou ainda estrela-triângulo, é uma técnica matemática amplamente utilizada para simplificar a análise de circuitos elétricos, uma vez que este tipo de conversão, normalmente, leva a um circuito que pode ser resolvido utilizando técnicas de circuitos série e paralelo.

Considerando o circuito da Figura 2.37, determine a resistência equivalente nos terminais a e b:

Figura 2.37 | Circuito – questão 1



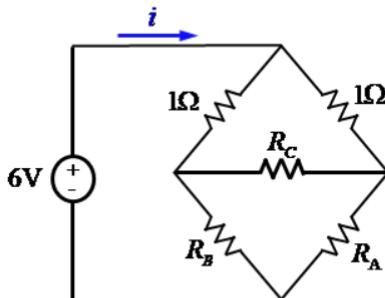
Fonte: elaborada pela autora.

- a) 5Ω
- b) 4Ω
- c) 10Ω
- d) 8Ω
- e) 1Ω

2. A transformação Δ-Y, também conhecida como delta-estrela, ou delta-Y, ou ainda triângulo-estrela, é uma técnica matemática amplamente utilizada para simplificar a análise de circuitos elétricos, uma vez que este tipo de conversão, normalmente, permite que os circuitos equivalentes resultantes sejam simplificados por meio de técnicas de circuitos série e paralelo.

Determine a corrente total (i) do circuito da figura a seguir:

Figura 2.38 | Circuito – questão 2



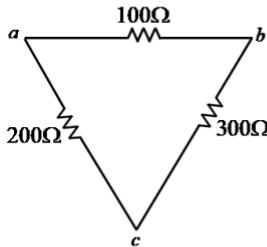
Fonte: adaptado de Boylestad (2012).

- a) 2 A.
- b) 4 A.
- c) 3, 33 A.
- d) 1 A.
- e) 5 A.

3. Muitos circuitos são compostos por associações que não são nem em série nem em paralelo. Estes são formados por configuração em três terminais, podendo ser configurados em circuitos estrela, ou "Y", ou ainda conhecidos como circuitos em "tê"; ou circuitos em triângulo, ou delta (" Δ "), ou mesmo circuitos em configuração em "pi".

Converta o circuito Δ em um circuito "Y".

Figura 2.39 | Circuito – questão 3



Fonte: adaptado de Boylestad (2012).

- a) $R_1 = 0,3\ \Omega$, $R_2 = 0,2\ \Omega$ e $R_3 = 10\ \Omega$.
- b) $R_1 = 0,33\ \Omega$, $R_2 = 0,5\ \Omega$ e $R_3 = 10\ \Omega$.
- c) $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ e $R_3 = 100\ \Omega$.
- d) $R_1 = 33,33\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$ e $R_3 = 100\ \Omega$.
- e) $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$ e $R_3 = 1\ \Omega$.

Referências

- BOYLESTAD, Robert L. **Introdução à análise de circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.
- DORF, Richard C.; SVOBODA, James A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- JOHNSON, David E.; HILBURN, John; JOHNSON, Johnny R. **Fundamentos de análise de circuitos elétricos**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1990.
- NILSSON, James W.; REIDEL, Susan A. **Circuitos elétricos**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.
- SADIKU, Matthew N. O.; ALEXANDER, Charles K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda., 2013. 896p.

Elementos armazenadores de energia

Convite ao estudo

Os circuitos eletrônicos são partes integrantes da quase totalidade do avanço tecnológico em nossas vidas hoje. Televisão, rádio, telefones e computadores imediatamente vêm à mente, mas a eletrônica também é usada em automóveis, aparelhos de cozinha, equipamentos médicos e controles industriais. No coração desses dispositivos estão os semicondutores – transistores, diodos e triodos. No entanto, esses dispositivos não poderiam funcionar sem componentes muito mais simples e que antecedem os semicondutores, os resistores, os capacitores e os indutores. Assim, na unidade anterior, com o resistor demos início aos estudos desses três elementos passivos. Após abordar as características e métodos de análise de circuitos resistivos, continuamos com nossa análise de circuitos lineares por meio da abordagem dos outros dois elementos passivos: o capacitor e o indutor. Todos os métodos desenvolvidos até agora para a análise de circuitos resistivos lineares são aplicáveis a circuitos que contenham capacitores e indutores. Ao contrário dos resistores, que dissipam energia, os capacitores e os indutores armazenam energia, assim, são chamados de elementos armazenadores. Capacitores e indutores possuem as seguintes três propriedades especiais que os tornam muito úteis nos circuitos elétricos:

1. A capacidade de armazenar energia torna-os úteis como fontes temporárias de tensão ou corrente. Assim, eles podem ser usados para gerar uma grande quantidade de corrente ou tensão por um curto período de tempo.

2. Os capacitores se opõem a qualquer mudança abrupta na tensão, enquanto os indutores se opõem a qualquer alteração abrupta na corrente. Esta propriedade torna os indutores úteis para a supressão de centelhas ou de arco voltaicos.
3. Os capacitores e os indutores são sensíveis à frequência. Esta propriedade os tornam úteis para discriminação de frequência.

Assim, para que todo o conhecimento adquirido nesta unidade seja colocado em prática, considere que você é um engenheiro em uma empresa que desenvolve soluções em circuitos elétricos e eletrônicos e recebeu três grandes desafios de clientes da empresa. O primeiro deles, uma empresa petrolífera, deseja um sensor para saber qualitativamente o que está sendo bombeado em seus dutos. O segundo desafio é identificar as causas do problema das portas magnéticas de um banco, que abrem sem muito esforço e aquecem o dispositivo magnético. Por fim, deverá ser capaz de solucionar o problema do rápido disparo dos flashes de um lote de máquinas fotográficas, que prejudicam o resultado final da fotografia.

Seção 3.1

Capacitores

Diálogo aberto

Olá, caro aluno, vimos no capítulo anterior algumas técnicas de análise de circuitos, além de teoremas que nos ajudam a simplificar um circuito elétrico complexo. No entanto, nossa atenção se concentrou apenas em um tipo de elemento, o resistor. Nesta unidade daremos continuidade às análises de circuitos elétricos, porém, ampliaremos nossa abordagem e incluiremos outros dois elementos passivos, o capacitor e o indutor. Como veremos, capacitores e indutores são indispensáveis em projetos de engenharia. Para iniciar nossos estudos então, nesta primeira seção estudaremos o capacitor.

Para que o conhecimento adquirido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você, engenheiro em uma empresa que desenvolve soluções em circuitos elétricos e eletrônicos recebeu a importante tarefa: desenvolver um sensor para uma empresa petrolífera. O sensor será acoplado a uma tubulação de petróleo com o objetivo de identificar de maneira qualitativa se outros elementos além do petróleo estão sendo bombeados através dos dutos.

Qual princípio você usaria para desenvolver um sensor eficiente, capaz de atender ao objetivo do cliente?

Para auxiliá-lo a responder a essa questão, você irá estudar ao longo desta seção o capacitor, amplamente utilizado na construção de sensores. Bons estudos!

Não pode faltar

Capacitor

Um dos componentes passivos mais utilizados é o capacitor, encontrado em quase todos os dispositivos eletrônicos já fabricados. Os capacitores têm uma série de aplicações essenciais em eletrônicos, comunicações, computadores e sistemas de energia.

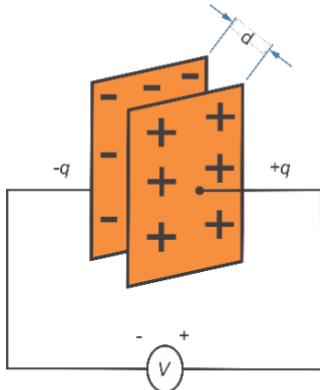
Por exemplo, são usados nos circuitos de sintonia de receptores de rádio (filtros e redução de ruídos) e como elementos dinâmicos de memória em sistemas informáticos.

Nos circuitos eletrônicos digitais e analógicos, o capacitor é um elemento fundamental. Permite a filtragem de sinais e fornece o elemento de memória fundamental. Também é um elemento que armazena energia em um campo elétrico.

Um capacitor consiste, basicamente, em duas placas condutoras separadas por um isolador (ou dielétrico). Em muitas aplicações práticas, as placas podem ser folhas de alumínio enquanto o dielétrico pode ser ar cerâmica, papel ou mica.

Quando uma tensão V é aplicada através das placas do capacitor, uma carga positiva $+q$ se acumula em uma placa e uma carga negativa $-q$ na outra, como mostrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 | Capacitor de placas paralelas



Fonte: elaborada pelo autor.

A quantidade de carga armazenada no capacitor então, representada por q , é diretamente proporcional à tensão aplicada V , dada pela Equação 3.1.

$$q = C \cdot V \quad (3.1)$$

Onde C é a constante de proporcionalidade, conhecida como capacitância do capacitor. A unidade de capacitância é o farad (F) em homenagem ao físico inglês Michael Faraday (1791-1867). Podemos ainda estender o conceito de capacitância como sendo a proporção entre a quantidade de carga em uma placa de um capacitor, dado uma certa diferença de potencial entre as duas placas, medida em farads (F).

Note que 1 farad = 1 Coulomb / Volt.

Embora a capacidade C do capacitor seja a relação da carga q por placa com a tensão aplicada V , ela não depende de q ou V . Depende das dimensões físicas do capacitor. Por exemplo, para o capacitor de placas paralelas mostrado na Figura 3.1, a capacidade é dada pela Equação 3.2:

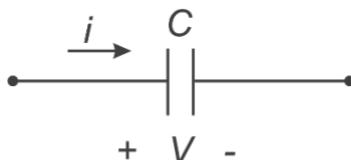
$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \quad (3.2)$$

Onde A é a área de superfície de cada placa, d é a distância entre as placas e ϵ é a permissividade do material dielétrico entre as placas. Embora a Equação 3.2 se aplique somente a capacitores de placa paralela, podemos inferir que, em geral, três fatores determinam o valor da capacidade:

1. A superfície da placa – quanto maior a área, maior a capacidade.
2. O espaçamento entre as placas – quanto menor o espaçamento, maior a capacidade.
3. A permissividade do material – quanto maior a permissividade, maior a capacidade.

O símbolo do circuito e as variáveis elétricas associadas para o capacitor são mostrados na Figura 3.2:

Figura 3.2 | Símbolo do capacitor



Fonte: elaborada pelo autor.

Se recordarmos que a corrente elétrica é a variação de carga em uma determinada variação de tempo, dada por $i = \frac{dq}{dt}$, então se derivarmos a Equação 3.1 em relação ao tempo, obteremos a relação corrente-tensão do capacitor, Equação 3.3:

$$\frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt}$$
$$i = C \cdot \frac{dV}{dt} \quad (3.3)$$

Energia armazenada

A potência instantânea fornecida ao capacitor é dada pela Equação 3.4:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = V(t) \cdot C \cdot \left(\frac{dV}{dt} \right) \quad (3.4)$$

À energia armazenada em um capacitor é então a integral da potência instantânea. Assumindo que o capacitor não possui carga entre suas placas no instante $t = -\infty$ [$V(-\infty) = 0$] então a energia armazenada em um capacitor em um tempo t será dado pela Equação 3.5:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P(t) \cdot dt \quad (3.5)$$

Substituindo a Equação 3.4 na Equação 3.5, teremos a Equação 3.6:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t V(t) \cdot C \cdot \left(\frac{dV}{dt} \right) dt \quad (3.6)$$

Assim, obtemos com a Equação 3.7 a energia armazenada em um capacitor:

$$W(t) = \frac{1}{2} \cdot V^2(t) \quad (3.7)$$



Assimile

A energia pode ser recuperada, já que um capacitor **ideal** não pode dissipar energia. Ele “retira” energia do circuito e armazena em seu campo elétrico, posteriormente o capacitor “devolve” essa energia ao circuito. Na verdade, a palavra capacitor é derivada da capacidade desse elemento para armazenar energia no campo elétrico.

No entanto, um capacitor **real**, ou seja, não ideal, tem uma resistência intrínseca, o que faz com que o capacitor acabe dissipando uma pequena quantidade de energia. Essa resistência, apresenta valores elevados, podendo assim ser negligenciada para a maioria das aplicações práticas. Por esse motivo, assumiremos capacitores ideais nesse material.

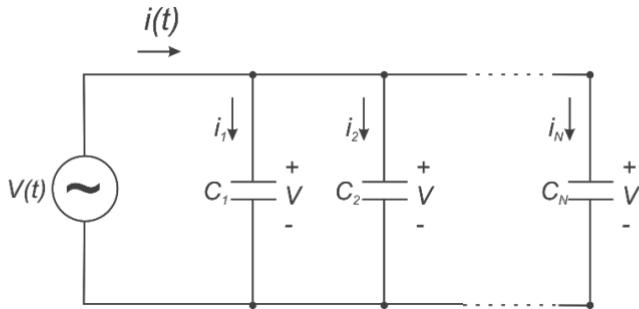
Capacitores em paralelo

Sabemos por circuito resistivo que a combinação série paralela é uma poderosa ferramenta para reduzir circuitos. Esta técnica pode ser estendida a conexões série paralelas de capacitores, que às

vezes são encontradas. Desejamos substituir esses capacitores por um único capacitor equivalente C_{eq} .

Para obter o capacitor equivalente C_{eq} de N capacitores em paralelo, considere o circuito da Figura 3.3. Observe que os capacitores possuem a mesma tensão V entre seus terminais.

Figura 3.3 | Capacitores em paralelo



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes temos que $i = i_1 + i_2 + \dots + i_N$. Podemos agora reescrever a equação de corrente utilizando a Equação 3.3, então teremos:

$$i = C_1 \cdot \frac{dV}{dt} + C_2 \cdot \frac{dV}{dt} + \dots + C_N \cdot \frac{dV}{dt}$$

O que resulta na Equação 3.8:

$$i = \left(\underbrace{C_1 + C_2 + \dots + C_N}_{C_{eq}} \right) \cdot \frac{dV}{dt} \quad (3.8)$$

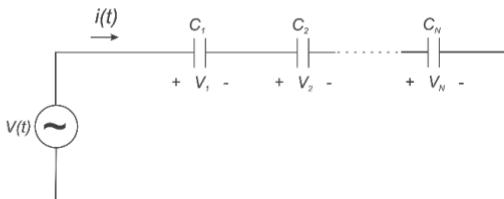
$$i = C_{eq} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Concluímos então que os capacitores em paralelo se combinam da mesma forma que os resistores em série, basta somar as capacitâncias.

Capacitores em série

Vejamos agora, a combinação série de capacitores, como mostrado na Figura 3.4.

Figura 3.4 | Capacitores em série



Fonte: elaborada pelo autor.

Integrando a Equação 3.3, obteremos a Equação 3.9:

$$V = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i \cdot dt \quad (3.9)$$

Agora, aplicando a lei de Kirchhoff para as tensões no circuito da Figura 3.4 temos que $V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$.

Assim, ao substituirmos a Equação 3.9 no resultado do LKT, teremos a Equação 3.10:

$$V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \cdot \int_{-\infty}^t i \cdot dt \quad (3.10)$$

$$V = \frac{1}{C_{eq}} \cdot \int_{-\infty}^t i \cdot dt$$

Dessa maneira, os capacitores em série se combinam da mesma maneira que os resistores em paralelo.



Reflita

Como vimos, capacitores são acumuladores de energia. Assim, eles podem ser vistos como baterias recarregáveis?



Exemplificando

Considere três capacitores ligados em série, com as seguintes capacitâncias: $C_1 = 5 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$ e $C_3 = 7 \mu\text{F}$. Essa associação está sob uma tensão de 12 V. Nessas condições é possível encontrar a capacitância equivalente, a carga em cada capacitor e a tensão sobre cada um.

Para a capacidade equivalente C_{eq} temos então:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{5\mu} + \frac{1}{3\mu} + \frac{1}{7\mu}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{21 + 35 + 15}{105\mu} = \frac{71}{105\mu}$$

$$C_{eq} = \frac{105\mu}{71} \simeq 1,48 \mu F$$

Como os capacitores estão em paralelo, a carga é constante, ou seja, $Q_1 = Q_2 = Q_3$. Utilizando a Equação 3.1 obteremos a carga nos capacitores:

$$Q = C \cdot V$$

$$Q = 1,48 \cdot 12 \simeq 17,7 \mu C$$

Por fim, para encontrar a tensão em cada capacitor, basta utilizar a Equação 3.1 novamente:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{17,7\mu}{5\mu} \simeq 3,6 V$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{17,7\mu}{3\mu} = 5,9 V$$

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{17,7\mu}{7\mu} \simeq 2,5 V$$



Pesquise mais

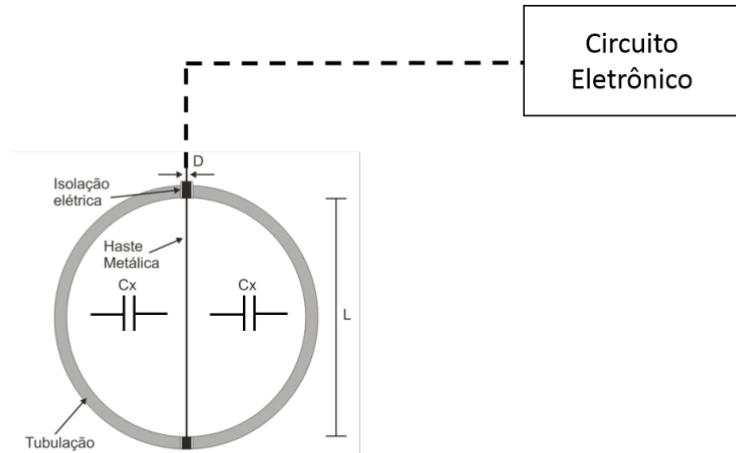
Para saber mais sobre este assunto, leia o Capítulo 7 do livro *Fundamentos de análise de circuitos elétricos* (JOHNSON, 1994).

Sem medo de errar

Relembrando que você, engenheiro em uma empresa que desenvolve soluções em circuitos elétricos e eletrônicos, precisa desenvolver um sensor para uma empresa petrolífera. O sensor terá por objetivo identificar de maneira qualitativa se há a presença de gás dentro dos dutos, o que prejudicaria o funcionamento da bomba responsável por retirar o petróleo do poço.

Sabendo que o petróleo apresenta uma permissividade dielétrica significativamente diferente do gás, para determinar se há presença de gás devemos medir a capacitância da mistura do fluido que passa pelo duto, como mostrado na Figura 3.5.

Figura 3.5 | Diagrama do sensor capacitivo



Fonte: elaborada pelo autor.

A haste metálica atravessa a seção transversal da tubulação, assim o circuito eletrônico é capaz de medir o valor de C_x , que representa o comportamento capacitivo da mistura do fluido que escoa na tubulação.

O valor encontrado refletirá o conteúdo do duto, ou seja, se há uma mistura de petróleo e gás ou não. Sabe-se que o petróleo apresenta uma capacitância alta, enquanto o gás possui um valor baixo. Deste modo, caso o sensor meça um valor baixo de capacitância, isso indicará a presença de gás.

Telas sensíveis ao toque (touchscreen)

Descrição da situação-problema

Para ampliarmos a aplicação do conhecimento adquirido nesta seção, considere a seguinte situação: você, um engenheiro recém-contratado por uma empresa que iniciou a fabricação de telas sensíveis ao toque, recebeu a tarefa de resolver um problema reportado por um cliente. Esse cliente alega que as telas fornecidas não possuem alta sensibilidade ao toque, sendo necessário pressionar com maior força. Além disso, a imagem apresenta baixo contraste e não suporta multitoques.

Sabendo que a empresa quer oferecer o melhor produto, mesmo aumentando os custos, como você resolveria esses problemas informados pelo cliente?

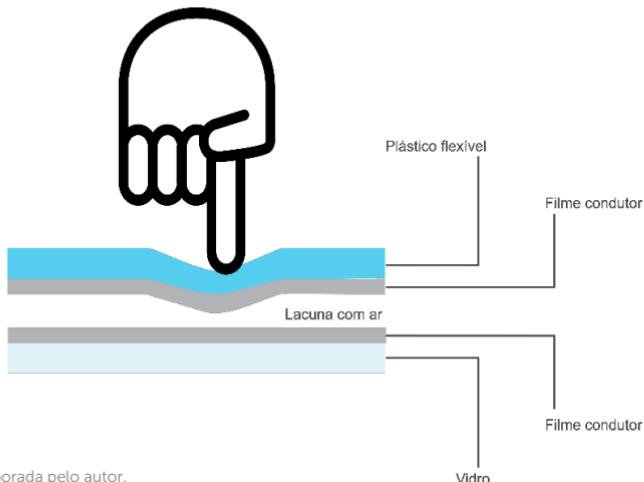
Resolução da situação-problema

Lembre-se de que você como engenheiro precisa solucionar o problema reportado pelo cliente de modo a oferecer o melhor produto possível. Para isso, vamos listar os pontos negativos informados:

1. Baixa sensibilidade ao toque.
2. Baixa nitidez da imagem.
3. Monotoque.

Essas três características indicam que o sensor utilizado é resistivo. Uma tela sensível resistiva consiste em duas placas transparentes (um plástico flexível e um vidro) com um pequeno espaço entre elas, essas placas embora transparentes reduzem a nitidez. Cada placa é revestida com um material condutor transparente e um valor de resistência elétrica uniforme é aplicado na superfície de cada folha. À medida que a folha superior é pressionada, entrando em contato com a folha atrás dela, a eletricidade é conduzida e a localização do ponto de condução é detectada e enviada para o controlador da tela. A Figura 3.6 ilustra essa situação.

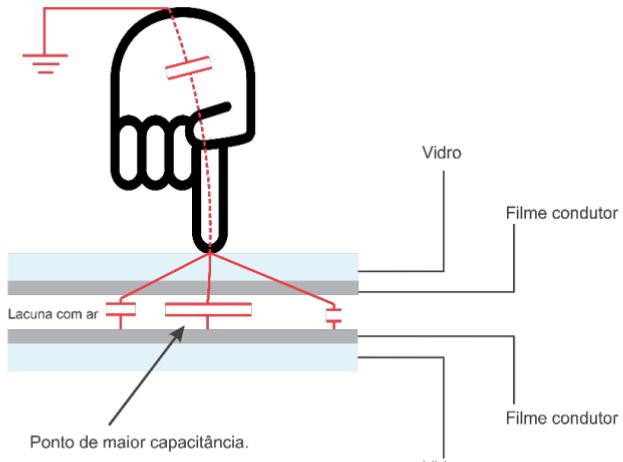
Figura 3.6 | Tela resistiva



Fonte: elaborada pelo autor.

Precisamos então, alterar o tipo de sensor de toque, de modo que a imagem fique mais nítida, a tela mais sensível ao toque e que suporte multitoques. Essas características são obtidas por meio de uma tela capacitiva. As telas capacitivas consistem em um isolador, como o vidro, revestido com um condutor transparente. Uma vez que o corpo humano também é um condutor elétrico, tocar a superfície da tela resulta em uma distorção do campo eletrostático da tela, mensurável como uma mudança na capacidade. A localização dessa interrupção é identificada e enviada ao controlador da tela. A Figura 3.7 mostra a tela capacitiva.

Figura 3.7 | Tela capacitiva



Fonte: elaborada pelo autor.

Faça valer a pena

1. Os capacitores são componentes padrão dos circuitos eletrônicos, sendo encontrados em associações complicadas. Por isso, é útil ter um conjunto de regras para encontrar a capacidade equivalente de algum arranjo geral de capacitores. Acontece que sempre podemos encontrar a capacidade equivalente por aplicação de duas regras simples, que se relacionam aos capacitores conectados em série e em paralelo.

Sobre a associação série dos capacitores analise as assertões a seguir e a relação proposta entre elas:

I. Quando os capacitores são conectados em série, a capacidade total é menor do que qualquer uma das capacidades individuais dos capacitores da série.

PORQUE

II. O espaçamento entre as placas do capacitor equivalente é visto como a soma total dos espaçamentos das placas dos capacitores individuais.

Assinale a alternativa correta:

- a) As assertões I e II são proposições verdadeiras, e a II justifica a I.
- b) As assertões I e II são proposições verdadeiras, mas a II justifica a I.
- c) A assertão I é uma proposição falsa e a II é verdadeira.
- d) A assertão I é uma proposição verdadeira e a II é falsa.
- e) As assertões I e II são proposições falsas.

2. Um capacitor é um pouco como uma bateria, mas tem um trabalho diferente a ser feito. Enquanto uma bateria usa produtos químicos para armazenar energia elétrica e liberá-la muito lentamente por meio de um circuito, um capacitor geralmente libera sua energia muito mais rapidamente. Sobre capacitores e suas características, analise as afirmativas a seguir:

I. A quantidade de energia elétrica que um capacitor pode armazenar é chamada de capacidade.

II. Quanto maior o valor da capacidade, mais energia um capacitor pode armazenar.

III. O valor da capacidade é diretamente proporcional à distância entre as placas.

Assinale a alternativa que apresenta apenas as afirmações corretas:

- a) Somente I é verdadeira.
- b) Somente III é verdadeira.
- c) Somente I e II são verdadeiras.
- d) Somente I e III são verdadeiras.
- e) Somente II e III são verdadeiras.

3. Embora os capacitores sejam largamente utilizados como dispositivos de temporização, filtros para determinados sinais, para suavizar a tensão nos circuitos, para sintonização (em rádios e TVs) e para uma variedade de outros fins, efetivamente apresentam como tarefa principal o armazenamento de energia.

Essa energia é armazenada sob a forma de:

- a) Potência elétrica.
- b) Corrente elétrica.
- c) Campo elétrico.
- d) Efeito Joule.
- e) Efeito corona.

Seção 3.2

Indutores, indutores em série, indutores em paralelo, associação de indutores

Diálogo aberto

Olá, caro aluno, vamos continuar nossos estudos sobre elementos armazenadores de energia. Vimos na seção anterior as características do elemento Capacitor, agora, nossa atenção se voltará para outro elemento, o Indutor.

Para que todo o conhecimento adquirido sobre indutores seja colocado em prática, considere a seguinte situação: recorde que você é um engenheiro de uma empresa que desenvolve projetos relacionados a circuitos elétricos e eletrônicos. Um banco procurou sua empresa, pois algumas portas com fechamento magnético passaram a funcionar de maneira não satisfatória, ou seja, permitiam que fossem abertas sem muito esforço, além de apresentar temperatura elevada no dispositivo magnético. Qual a possível causa do problema e como você o resolveria?

Para ajudá-lo a responder a essa questão, você estudará ao longo desta seção o indutor, utilizado em filtros de frequência, sensores e dispositivos eletromagnéticos, por exemplo.

Bons estudos!

Não pode faltar

Indutor

Os indutores são partes essenciais de circuitos elétricos, sendo utilizados em uma variedade de aplicações essenciais do dia a dia.

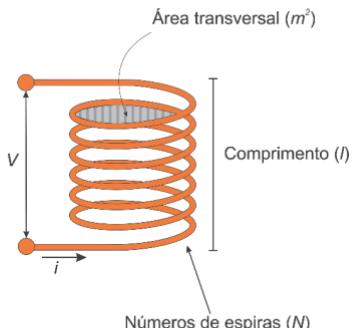
Um indutor, elemento passivo, é uma bobina de fio, na maioria das vezes, em torno de um núcleo central que pode consistir em uma variedade de materiais. Assim, os indutores também são conhecidos como bobina ou reator. Se uma corrente elétrica flui através dessa bobina de fio, produz um campo magnético em torno

dela. A força do campo magnético induzido pela corrente elétrica que flui em torno do núcleo central depende de quatro fatores: do tipo de material do núcleo, do número de bobinas do fio, da área da seção transversal e do comprimento da bobina. Por exemplo, se o núcleo central também for magnético, o campo magnético em torno do indutor apresentará uma força elevada. Os indutores são componentes importantes nos circuitos eletrônicos porque eles são capazes de resistir ou opor-se às mudanças de corrente no circuito.

Funcionamento de um indutor

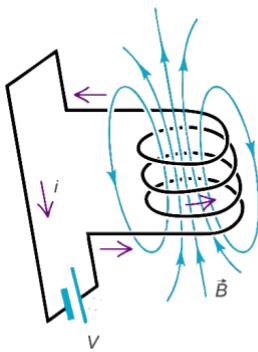
Um indutor, mostrado nas Figura 3.8, funciona induzindo um campo magnético, ilustrado na Figura 3.9, à medida que uma corrente elétrica flui através de sua bobina. Esse campo magnético armazena temporariamente energia elétrica como energia magnética, criando uma tensão em todo o indutor.

Figura 3.8 | Indutor com núcleo de ar



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3.9 | Campo magnético no indutor



Fonte: adaptado de <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Inductor.png>>. Acesso em: 5 fev. 2018.

Assim, de uma forma mais simples, uma mudança na corrente faz com que o campo magnético mude. Isso, por sua vez, induz uma tensão através do indutor que se opõe à mudança original na corrente. De acordo com a Lei de Faraday, essa tensão pode ser obtida através da Equação 3.11:

$$V_L = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{di}{dt} \quad (3.11)$$

Em que:

- N é o número de espiras ou voltas
- A é a área transversal em m^2
- Φ é o fluxo magnético em *Webers*
- μ é a permeabilidade do material do núcleo
- l é o comprimento da bobina em m
- $\frac{di}{dt}$ é a taxa de variação da corrente (A/s)

Portanto, um campo magnético variável no tempo induz uma tensão que é proporcional à taxa de mudança da corrente que o produz, com um valor positivo indicando um aumento na Força Eletromotriz (fem) e um valor negativo indicando uma diminuição na fem. A equação que relaciona esta tensão induzida, a corrente e

a indutância pode ser encontrada substituindo $\frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l}$ por L , que

indica a constante de proporcionalidade chamada indutância da bobina (sendo sua unidade o Henry [H]), obtendo a Equação 3.12.

$$V_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (3.12)$$

A relação entre o fluxo no indutor e a corrente que flui através do indutor é dada pela Equação 3.13:

$$\Phi = L \cdot i \quad (3.13)$$

Potência no indutor

Sabemos que a potência em um resistor relaciona a tensão e a corrente elétrica. Para o indutor a relação “tensão-corrente” também é válida, assim, a potência em um indutor é dada pela Equação 3.14:

$$P_L = V_L \cdot i = \left(L \cdot \frac{di}{dt} \right) \cdot i \quad (3.14)$$

Energia armazenada em um indutor

A energia armazenada no campo magnético criado ao redor do indutor é dada pela integral da potência (Equação 3.14) ao longo do tempo, resultando na Equação 3.15:

$$W_L(t) = \int P_L = \int L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2 \quad (3.15)$$



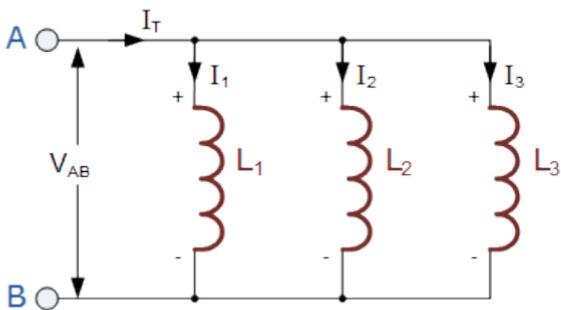
Assimile

Os indutores são componentes passivos que podem armazenar e fornecer essa energia armazenada ao circuito, mas não podem gerar energia. Um indutor ideal não apresenta perdas, o que significa que ele pode armazenar energia indefinidamente, pois nenhuma energia é perdida. No entanto, os indutores reais sempre apresentam alguma resistência associada aos enrolamentos da bobina e sempre que a corrente flui, há perda de energia relacionada com essa resistência, perda sob a forma de calor devido à Lei de Ohm.

Indutores em paralelo

Assim como ocorre com resistores e capacitores, os indutores também podem ser associados em paralelo ou série em um circuito. Indica-se que os indutores estão ligados em paralelo quando ambos os seus terminais estão conectados respectivamente a cada terminal do outro indutor, conforme ilustrado na Figura 3.10.

Figura 3.10 | Indutores em paralelo



Fonte: elaborada pelo autor.

A tensão em todos os indutores em paralelo é a mesma, ou seja, para o caso da Figura 3.10: $V_{AB} = V_{L_1} = V_{L_2} = V_{L_3}$.

A corrente total do circuito é soma das correntes individuais em cada indutor, isto é, pela Lei de Kirchhoff para correntes temos que:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3. \text{ Sabemos através da Equação 3.12 que } V_L = L \cdot \frac{di}{dt},$$

assim relacionando a corrente total do circuito com a tensão nos indutores em paralelo temos a Equação 3.16:

$$V_L = V_{AB} = L_T \cdot \frac{d}{dt}(I_1 + I_2 + I_3) = L_T \cdot \left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt} \right) \quad (3.16)$$

Substituindo todos os $\frac{dI_i}{dt}$ da Equação 3.16 por $\frac{V}{L_i}$, obtemos então a Equação 3.17:

$$V_{AB} = L_T \cdot \left(\frac{V_{L_1}}{L_1} + \frac{V_{L_2}}{L_2} + \frac{V_{L_3}}{L_2} \right) \quad (3.17)$$

Como $V_{AB} = V_{L_1} = V_{L_2} = V_{L_3}$, então a Equação 3.18 é obtida:

$$\cancel{V_{AB}} = L_T \cdot \left(\frac{\cancel{V_{AB}}}{L_1} + \frac{\cancel{V_{AB}}}{L_2} + \frac{\cancel{V_{AB}}}{L_2} \right) \quad (3.18)$$

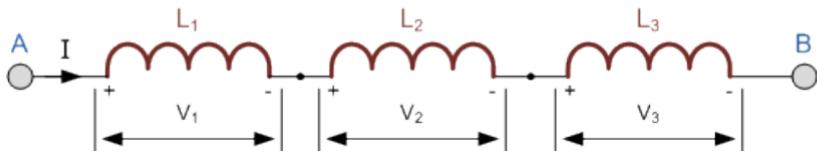
$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_2}$$

Desta forma, concluímos que a indutância equivalente L_T de uma associação de indutores em paralelo é obtida de maneira equivalente ao cálculo da resistência equivalente para resistores em paralelo.

Indutores em série

Os indutores são ditos conectados em "Série" quando são encadeados em uma linha direta, de ponta a ponta, como mostrado na Figura 3.11. Perceba que conectar em série dois ou mais significa de maneira simples aumentar o número de espiras de uma bobina, assim, a indutância total L_T é igual à soma de todas as indutâncias individuais.

Figura 3.11 | Indutores associados em série



Fonte: elaborada pelo autor.

A corrente I que atravessa o primeiro indutor, também atravessa os demais indutores. Assim, todos os indutores apresentam a mesma corrente: $I_{AB} = I_{L_1} = I_{L_2} = I_{L_3}$. No entanto, a tensão total do circuito é a soma das quedas de tensão em cada indutor, dada pela Equação 3.19:

$$L_T \cdot \frac{dI}{dt} = L_1 \cdot \frac{dI}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI}{dt} + L_3 \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 \quad (3.19)$$

Note que o cálculo da indutância total ou equivalente em uma associação série de indutores equivale ao cálculo da resistência equivalente em uma associação série de resistores.

Associação mista de indutores

Na associação mista de indutores teremos um circuito que contém indutores em série e também indutores associados em paralelo. Para encontrar a indutância equivalente do circuito, basta então aplicar a regra para associação em série e a regra para associação em paralelo.



Reflita

Como vimos, os indutores são acumuladores de energia. Assim, eles podem substituir uma fonte de alimentação após armazenarem energia em seu campo magnético?



Exemplificando

Considere um circuito formado por dois indutores ligados em paralelo ($L_1 = 5\text{ mH}$ e $L_2 = 10\text{ mH}$) e esse conjunto conectado em série a um outro indutor ($L_3 = 5\text{ mH}$). Nessas condições é possível determinar a indutância equivalente L_{eq} do circuito.

Primeiro devemos calcular a indutância equivalente dos dois indutores em paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq1}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{L_{eq1}} = \frac{3}{10}$$

$$L_{eq1} = \frac{10}{3} \simeq 3,33 \text{ mH}$$

Essa indutância equivalente entre os indutores em paralelo deve ser somada com o outro indutor, uma vez que está em série. Assim, temos que:

$$L_{eq_{Total}} = 3,33 + 5 = 8,33 \text{ mH}$$



Pesquise mais

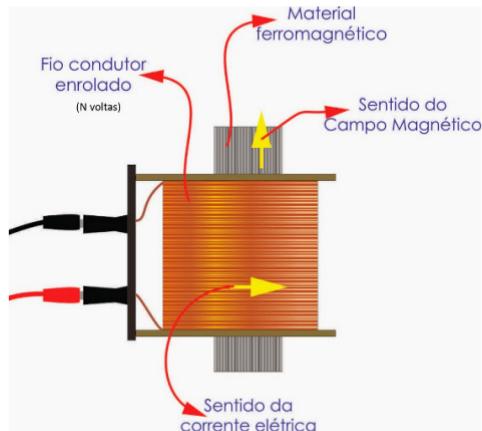
Para saber mais sobre este assunto, leia o Capítulo 7 do livro *Fundamentos de análise de circuitos elétricos* (JOHNSON, 1994).

Sem medo de errar

Relembrando que você, engenheiro em uma empresa que desenvolve soluções em circuitos elétricos e eletrônicos, precisa solucionar o problema reportado por um banco. O banco procurou sua empresa, pois algumas das suas portas com fechamento magnético passaram a funcionar de maneira não satisfatória, ou seja, permitiam que fossem abertas sem muito esforço, além de apresentar temperatura elevada no dispositivo magnético.

Sabendo que as fechaduras magnéticas utilizam eletroímãs, ou seja, um dispositivo formado por um núcleo de ferro envolto por um solenoide (bobina), como ilustra a Figura 3.12, o defeito apontado pelo banco deve estar associado a esse dispositivo. Se a porta passou a abrir com mais facilidade, significa que o eletroímã está “mais fraco”, ou seja, a intensidade do campo magnético gerado diminuiu.

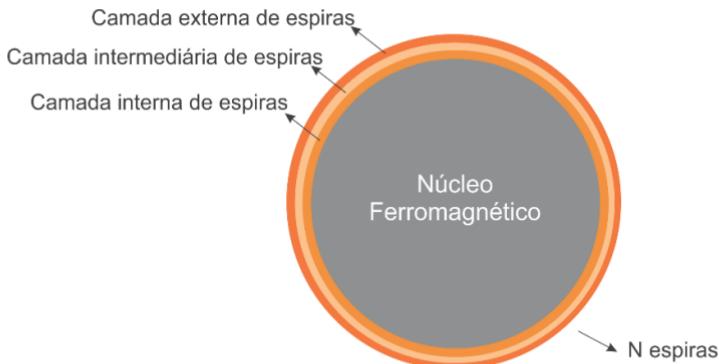
Figura 3.12 | Ilustração de um eletroímã



Fonte: adaptada de Pscheidt (2014). Disponível em: <<http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2014/03/a-descoberta-de-hans-christian-oersted.html>>. Acesso em: 12 jan. 2018.

Como o cliente alegou também que no dispositivo magnético a temperatura passou a ser elevada, isso indica que ocorreu um curto circuito na bobina, o que justificaria assim a redução da intensidade do campo magnético. Com o curto-círcuito, o número de espiras efetivas reduziu e consequentemente o campo também, uma vez que é diretamente proporcional ao número de espiras. Para ilustrar a situação, considere a Figura 3.13, que mostra uma vista frontal do eletroímã.

Figura 3.13 | Vista frontal do eletroímã



Fonte: elaborada pelo autor.

Se um curto-circuito ocorrer entre a camada externa de espiras e a intermediária, esse ponto aquecerá e o número de espiras não mais obedecerá à soma das espiras de cada camada. Isso porque a corrente elétrica encontrará um caminho de menor resistência elétrica, deixando de fluir em um conjunto de espiras e consequentemente reduzindo o campo magnético.

Portanto, para solucionar o problema do cliente, basta trocar a bobina em curto-circuito.

Avançando na prática

Sensores indutivos

Descrição da situação-problema

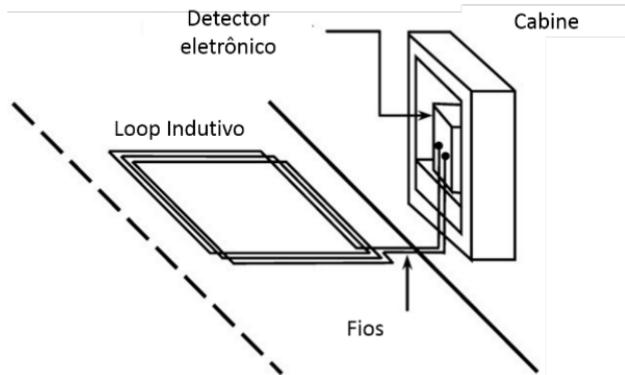
Para ampliarmos a aplicação do conhecimento adquirido nesta seção, considere a seguinte situação: você, um engenheiro de uma empresa de circuitos elétricos, recebeu a tarefa de indicar e desenvolver para um cliente uma solução para o sistema de *drive-thru* (serviço de vendas de produtos que permite ao cliente comprar o produto sem sair do carro) de sua rede de lanchonetes. O cliente alega que já existe um sistema que utiliza tecnologia ultrassônica, mas que por um erro de projeto o sistema implementado não opera corretamente. Para substituir todos os sensores já instalados, o cliente deseja um outro tipo de tecnologia e que atenda aos requisitos: menor custo e maior confiabilidade.

Diante das exigências do cliente, como você desenvolveria o sensor desejado?

Resolução da situação-problema

Embora existam muitas maneiras de se detectar um veículo, a mais simples, barata e confiável é conhecida como *loop* indutivo. Para compreender o seu funcionamento considere a Figura 3.14 e a Figura 3.15.

Figura 3.14 | Esquema constitutivo do loop indutivo

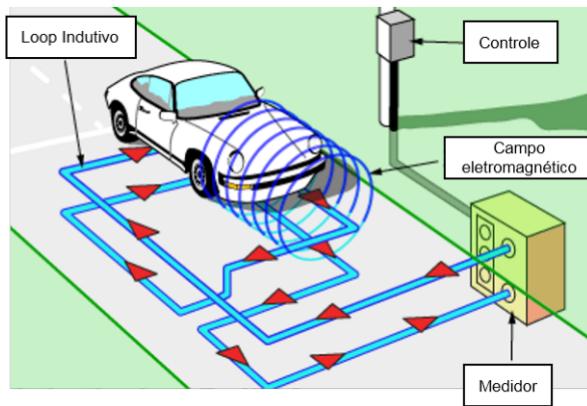


Fonte: elaborada pelo autor.

O *loop* indutivo nada mais é do que um conjunto de espiras colocado no chão (previamente preparado) e um detector que verificará o valor da indutância desse indutor.

Quando um carro passa por esse *loop*, sua grande massa metálica provoca alterações no campo magnético e consequentemente no valor da indutância. Nesse caso, o carro faz o papel do núcleo da bobina.

Figura 3.15 | Esquema de funcionamento do *loop* indutivo



Fonte: adaptado de <goo.gl/5GiK8y>. Acesso em: 12 jan. 2018.

A indutância será muito maior devido ao grande objeto de aço posicionado no campo magnético do *loop*.

Faça valer a pena

1. Todo indutor apresenta capacidade de armazenar energia em um campo magnético gerado por uma corrente elétrica que o circula. Essa capacidade é denominada indutância e sua unidade de medida é o Henry (H).

Sobre a força do campo magnético induzido em um indutor, analise as sentenças a seguir:

- I. Depende do tipo de material do núcleo.
- II. Depende do número de bobinas.
- III. Depende da área da seção transversal do fio.

É correto o que se afirma apenas em:

- a) I.
- b) II.
- c) I e II.
- d) I e III.
- e) II e III.

2. Um indutor, também chamado de bobina ou reator, é um componente elétrico passivo de dois terminais que resiste às mudanças na corrente elétrica passando por ele.

Sobre o elemento indutor complete as lacunas a seguir:

Em um indutor a _____ é armazenada em um campo _____ na bobina. Quando a corrente que flui através do indutor varia, há a indução de uma _____ no condutor, de acordo com a Lei de Faraday.

Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas:

- a) Energia, magnético, tensão.
- b) Corrente, elétrico, tensão.
- c) Tensão, magnético, corrente.
- d) Potência, elétrico, corrente.
- e) Indutância, magnético, tensão.

3. O indutor nada mais é do que um fio enrolado que tem a capacidade de concentrar o campo magnético produzido quando o condutor é percorrido por uma certa corrente elétrica. Ao concentrar esse campo magnético, diz-se que o indutor armazena energia nesse campo.

Com relação aos indutores analise as asserções a seguir e a relação proposta entre elas:

I. Os indutores se opõem à corrente alternada.

PORQUE

II. A tensão será maior nos terminais do indutor, quanto mais rápida for a variação da corrente elétrica no tempo.

Assinale a alternativa correta:

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a proposição II é uma justificativa da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a proposição II não é uma justificativa da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a proposição II é falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa, e a proposição II é verdadeira.
- e) As asserções I e II são proposições falsas.

Seção 3.3

Circuitos de primeira ordem sem fonte

Diálogo aberto

Olá, caro aluno. Vimos nas seções anteriores os elementos armazenadores de energia capacitor e indutor. Nesta seção, daremos prosseguimento às análises de circuitos elétricos com esses elementos, mas agora eles serão ligados ao elemento resistor. Como veremos, a combinação desses elementos (resistor-capacitor e resistor-indutor) apresentam diversas aplicações em situações reais.

Para que o conhecimento obtido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você é engenheiro de uma empresa que desenvolve projetos relacionados a circuitos elétricos e eletrônicos. Uma metalúrgica procurou sua empresa para desenvolver um dispositivo de segurança para prensas manuais, isto é, funcionam quando o operador aciona uma botoeira. A necessidade do cliente é que a prensa apresente um retardo de 2s em seu funcionamento após pressionada a botoeira e que um sinal sonoro seja emitido alertando do funcionamento da máquina, evitando assim acidentes. O cliente além de fornecer total liberdade para manipular o circuito que aciona a prensa, informou que ao apertar a botoeira, um sinal de 3,7 V é gerado. Esse sinal ao ser lido por um circuito eletrônico envia um comando para o atuador de destravamento que libera o funcionamento da máquina.

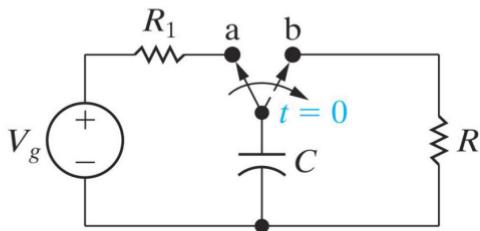
Como você resolveria esse problema?

Não pode faltar

Circuitos RC sem fonte

Um circuito RC é dito sem fonte quando a fonte de tensão que estava conectada ao capacitor C é desligada do circuito em um tempo $t = 0$, conforme a Figura 3.16.

Figura 3.16 | Circuito RC sem fonte



Fonte: elaborada pelo autor.

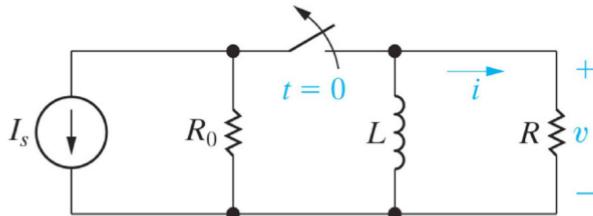
Assim:

- Para $t < 0$, o capacitor é um circuito aberto e não há circulação de corrente através do resistor R_1 .
- Para $t > 0$, a tensão no capacitor decresce e a energia é dissipada via resistor R .

Circuitos RL sem fonte

Similarmente ao circuito RC sem fonte, um circuito RL é dito sem fonte quando a fonte de corrente que estava conectada ao indutor L é desligada do circuito em um tempo $t = 0$, como ilustrado na Figura 3.17.

Figura 3.17 | Circuito RL sem fonte



Fonte: elaborada pelo autor.

Portanto:

- Para $t < 0$, o indutor L é um curto-círculo, sendo atravessado pela corrente I_s , enquanto não há corrente nos resistores.
- Para $t > 0$, a corrente no indutor decresce e a energia é dissipada via resistor R .



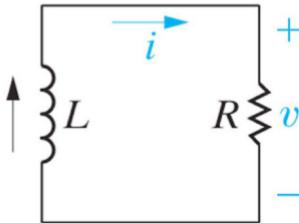
Tanto para circuitos RC sem fonte quanto para RL sem fonte, o tempo em que as fontes de tensão e corrente inicialmente ficaram ligadas aos circuitos é suficientemente grande de modo a fazer com que no instante da abertura das chaves o capacitor se comportasse como um circuito aberto, enquanto o indutor como um curto-círcito.

Resposta natural em circuitos RL e RC

Queremos encontrar a tensão e a corrente que surgem nos elementos armazenadores de energia. Uma vez que as tensões e correntes dos circuitos básicos RC e RL são descritas por equações diferenciais de primeira ordem, os circuitos RC e RL básicos são denominados circuitos de primeira ordem.

Para o $t > 0$, temos então o circuito RL reduzido, mostrado na Figura 3.18.

Figura 3.18 | Circuito RL reduzido



Fonte: elaborada pelo autor.

As condições iniciais (CI) dependem da energia inicial do capacitor, que se relaciona com a corrente: $i(0^+) = i(0^-) \equiv I_0 = I_g$.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das tensões, obtemos a Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem para $i(t)$, Equação 1.19.

$$L \cdot \frac{d}{dt}i(t) + R \cdot i(t) = 0 \quad (1.19)$$

Onde L e R são ambas independentes de i e t . Através das condições iniciais para o indutor, podemos resolver a Equação 1.19, obtendo a Equação 1.20, que é a resposta natural do circuito em termos da corrente $i(t)$.

$$L \cdot (di) + R \cdot i \cdot (dt) = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = -\frac{R}{L} \cdot \int_0^t dt'$$

$$\ln i' \Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L} \cdot t \Big|_0^t$$

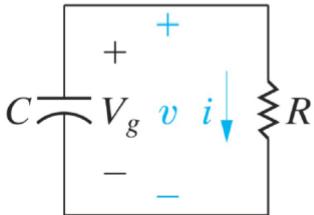
$$\ln i(t) - \ln i(0) = \ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L} \cdot t$$

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-(t/\tau)} \quad (1.20)$$

Onde $\tau = \frac{L}{R}$ é chamado de constante de tempo.

De maneira similar podemos encontrar a resposta natural para um circuito RC sem fonte. Considere agora o circuito reduzido da Figura 3.19.

Figura 3.19 | Circuito RC reduzido



Fonte: elaborada pelo autor.

As condições iniciais (CI) dependem da energia inicial do capacitor, que se relaciona com a tensão: $v(0^+) = v(0^-) \equiv V_0 = V_g$.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das correntes, obtemos a Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem para $v(t)$, Equação 1.21.

$$C \cdot \frac{d}{dt} v(t) + \frac{v(t)}{R} = 0 \quad (1.21)$$

Onde C e R são ambas independentes de v e t.

Comparando a Equação 1.22 com a Equação 1.19, podemos concluir que se trata da equação dual pela substituição de i por v e de R/L por $1/RC$. Logo, a solução para a Equação 1.22 deve ser o dual da solução para o circuito RL. Assim, a Equação 1.22 é a resposta natural do circuito RC em termos de $v(t)$.

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-(t/\tau)} \quad (1.21)$$

Onde $\tau = R \cdot C$ é chamado de constante de tempo.

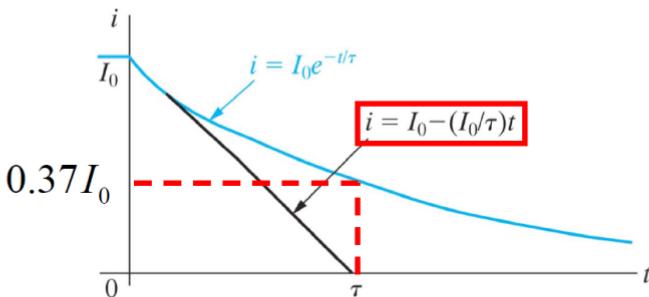
Constante de tempo em circuitos RC e RL

As constantes de tempo para circuito RC e RL sem fonte, descrevem a velocidade com que os elementos armazenadores de energia se descarregam.

Para o circuito RL sem fonte, o valor da corrente $i(t)$ irá cair e^{-1} (aproximadamente 37%) do seu valor inicial I_0 dentro de uma constante de tempo τ . Após $5 \cdot \tau$ (5 constantes de tempo), o valor da corrente será menor que 1% do seu valor inicial.

Se $i(t)$ é aproximado por uma função linear, ele desaparecerá em uma constante de tempo, conforme mostrado na Figura 3.20.

Figura 3.20 | Descarregamento do indutor

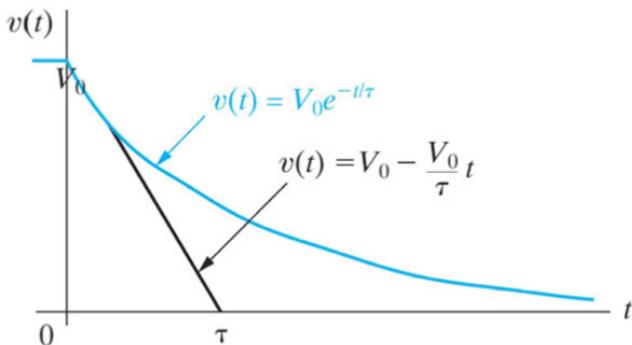


Fonte: elaborada pelo autor.

Como vimos, o circuito RC é o circuito dual do RL, assim, o valor da tensão $v(t)$ irá cair e^{-1} (aproximadamente 37%) do seu valor inicial V_0 dentro de uma constante de tempo τ . Após $5 \cdot \tau$, considera-se que o capacitor foi completamente descarregado.

Se $v(t)$ é aproximado por uma função linear, ele desaparecerá em uma constante de tempo, conforme mostrado na Figura 3.21.

Figura 3.21 | Descarregamento do capacitor



Fonte: elaborada pelo autor.



Refita

As constantes de tempo mostradas para os circuitos sem fonte indicam o processo de descarregamento dos elementos armazenadores de energia. Assim, em uma constante de tempo τ a tensão no capacitor estará com 37% do seu valor inicial. Considere agora, o caso em que o capacitor do circuito RC está completamente descarregado e então uma fonte de tensão é conectada a ele em um tempo $t = 0$. Se nesse momento a fonte está conectada, significa que o capacitor está carregando e dentro de um tempo τ o valor da tensão $v(t)$ será 63% do valor da tensão da fonte.

Se em vez de um circuito RC for usado um circuito RL com uma fonte de corrente, após um tempo τ , qual o valor da corrente $i(t)$ no indutor?



Exemplificando

Considere que no circuito da Figura 3.21, a fonte de tensão ficou conectada tempo suficiente para carregar o capacitor C e então em um tempo definido como $t = 0$ a fonte foi desconectada.

Nesse exato instante, a tensão no capacitor era de 10 V. Sabendo que a resistência R é igual a 2Ω e constante de tempo do circuito é de 5 s é possível então determinar a tensão no capacitor para, $t = 2$ s bem como o valor da capacidade necessária para conseguir essa constante de tempo.

Para calcular a tensão no capacitor no instante $t = 2\text{ s}$, basta aplicar a relação:

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-(t/\tau)}$$

$$v(2) = 10 \cdot e^{-(2/5)}$$

$$v(t) = 10 \cdot 0.67$$

$$v(t) = 6,70\text{ V}$$

A capacidade pode ser calculada utilizando a definição da constante de tempo para um circuito RC:

$$\tau = R \cdot C$$

$$C = \frac{\tau}{R}$$

$$C = \frac{5}{10} = 0,5\text{ F}$$



Pesquise mais

Para saber mais sobre este assunto, leia Capítulo 7 do livro *Fundamentos de circuitos elétricos* (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Sem medo de errar

Relembrando que você é engenheiro de uma empresa que desenvolve projetos relacionados a circuitos elétricos e eletrônicos. Uma metalúrgica procurou sua empresa para desenvolver um dispositivo de segurança para prensas manuais. A necessidade do cliente é que a prensa apresente um retardo de 2 s para começar a funcionar após pressionado um botão de acionamento, evitando assim acidentes. Necessita também que no instante em que a prensa venha a ser acionada um sinal sonoro seja emitido. O cliente além de fornecer total liberdade para manipular o circuito que aciona a prensa, informou que ao apertar a botoeira, um sinal de 3,7 V é gerado. Esse sinal ao ser lido por um circuito eletrônico

envia um comando para o atuador de destravamento que libera o funcionamento da máquina.

Primeiramente vamos esboçar o circuito, em forma de blocos, da necessidade do cliente, conforme Figura 3.22.

Figura 3.22 | Diagrama de blocos para a prensa

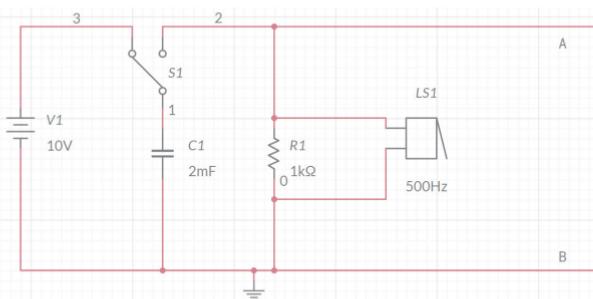


Fonte: elaborada pelo autor.

O circuito pré-prensa tem por finalidade disponibilizar um valor de tensão para o circuito prensa. O circuito prensa monitora essa tensão, que ao atingir um determinado valor (3,7 V) destrava a máquina para o funcionamento.

Para o circuito pré-prensa, podemos utilizar um circuito RC para retardar o funcionamento e ainda emitir um sinal sonoro. A Figura 3.23, ilustra o esquema elétrico desse circuito.

Figura 3.23 | Esquema elétrico da pré-prensa.



Fonte: elaborada pelo autor.

O circuito mostra que a chave S1 (botoeira) é normalmente fechada para carregar o capacitor C1. Quando a chave S1 é acionada, a fonte V1 é desconectada e o capacitor começa a descarregar. Nesse instante a sirene LS1 (com resistência desprezível) que opera na faixa entre 10 e 3,7 V começa a emitir um sinal sonoro indicando que a prensa entrará em funcionamento. Após 2 s, que é exatamente a constante de tempo do circuito ($\tau = 1k \cdot 2m = 2\text{ s}$) o valor da tensão entre os terminais AB (tensão sobre o capacitor) decai para 37% do seu valor de pico, ou seja, 3,7 V. Nesse momento, o sinal sonoro é interrompido e o circuito prensa ao identificar esse valor de tensão reconhece que a máquina pode operar.

Avançando na prática

Acionamento de circuito de iluminação automática

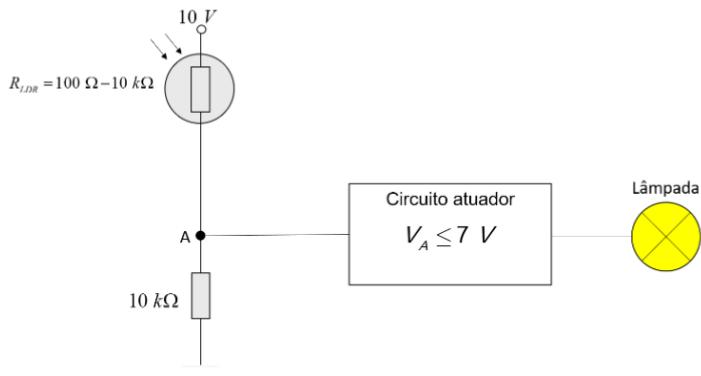
Descrição da situação-problema

Para que o conhecimento adquirido nesta seção seja colocado em prática, considere a seguinte situação: você, engenheiro em uma indústria, foi chamado pela equipe de manutenção, pois foi identificado que durante o dia as luzes automáticas (claro-escuro), recém-instaladas, das áreas externas passaram a piscar sempre que alguma sombra as atingem. Ao inspecionar uma dessas lâmpadas, você identificou que o circuito sensor é composto basicamente por um resistor LDR (Resistor Dependente de Luz) em série com um resistor de $10\text{ k}\Omega$. O LDR quando recebe luz apresenta uma resistência de 100Ω , $10\text{ k}\Omega$ caso contrário. Além disso, o circuito atuador somente liga a lâmpada se a tensão no ponto A for igual ou menor que 7 V. Como resolver o problema sem que o circuito sensor seja totalmente trocado?

Resolução da situação-problema

Primeiramente, vamos esquematizar o circuito elétrico que liga ou desliga as lâmpadas de acordo com a luminosidade. A Figura 3.24 ilustra simplificadamente o circuito que aciona as lâmpadas.

Figura 3.24 | Circuito sensor para acionamento das lâmpadas



Fonte: elaborada pelo autor.

Em seguida precisamos calcular qual a tensão no ponto A, nas situações com e sem luz:

- **Com luz**

A resistência do LDR é de **100 Ω** , assim, usando um divisor de tensão, podemos calcular a tensão no ponto A:

$$V_A = \frac{10\text{ k}}{10\text{ k} + 100} \cdot 10 = 9,91\text{ V}$$

Assim, podemos concluir que quando há luz, o LDR é praticamente um curto-círcuito, logo assumiremos que $V_A = 10\text{ V}$.

- **Sem luz**

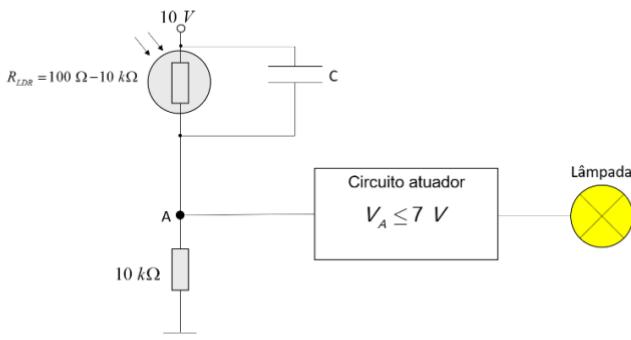
A resistência do LDR é de **10 k Ω** , portanto, usando um divisor de tensão, podemos calcular a tensão no ponto A:

$$V_A = \frac{10\text{ k}}{10\text{ k} + 10\text{ k}} \cdot 10 = 5\text{ V}$$

Concluímos que, quando uma sombra está sobre o LDR, rapidamente a tensão do ponto A passa de 10 V para 5 V, fazendo com que o circuito atuador acenda a lâmpada. Da mesma forma, quando a sombra cessa, quase que instantaneamente a tensão volta para 10 V, fazendo com que o atuador desligue a lâmpada.

Sabendo que a sombra é um evento de curta duração para o caso em análise, precisamos inserir um componente que retarde a mudança de tensão no ponto A, de modo a tentar evitar que a lâmpada seja acionada. Vamos considerar, por exemplo, que a lâmpada somente seja acionada 5 segundos após o início da sombra. Para isso, podemos utilizar um capacitor em paralelo com o LDR, como mostrado na Figura 3.25.

Figura 3.25 | Esquemático: Circuito RC



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos agora calcular a tensão no ponto A, após a inclusão do capacitor.

- **Com luz**

Assim como no caso anterior, o LDR atua como um curto-círcuito, então a tensão no ponto A continua aproximadamente 10 V.

- **Sem luz**

Nesse momento a resistência do LDR se altera, mas diferentemente do caso sem capacitor a tensão no ponto A somente atingirá 5 V em regime permanente. Nesse mesmo instante, a tensão no capacitor também será 5 V. Entretanto, devemos lembrar que em uma constante de tempo $\tau = 5 \text{ s}$, o capacitor terá atingido 63% do valor da sua tensão em regime, ou seja, 3,15 V. Isso significa que em $\tau = 5 \text{ s}$, a tensão no ponto A é $V_A = 10 - 3,15 = 6,85 \text{ V}$. Assim, podemos concluir que somente muito próximo aos 5 segundos decorridos do início da sombra a tensão no ponto A atingiu um valor que fizesse o circuito atuar ligar a lâmpada.

Faça valer a pena

1. Considere que um capacitor está completamente carregado e apresenta tensão de 18 V, quando então é conectado através de um resistor. Após 10 segundos, a tensão do capacitor caiu para 12 V.

Assinale a alternativa que apresenta o valor da tensão após decorridos mais 10 segundos (totalizando 20 segundos).

- a) 0 V.
- b) 6 V.
- c) 8 V.
- d) 9 V.
- e) 10 V.

2. Um circuito RC é um circuito com um resistor (R) e um capacitor (C). Os circuitos RC são elementos frequentes em dispositivos eletrônicos. Um capacitor pode armazenar energia e um resistor colocado em série controlará a taxa em que o capacitor carrega ou descarrega. Sobre essa taxa de carregamento ou descarregamento, denominada de constante de tempo, analise as assertões a seguir e a relação proposta entre elas:

I. Na teoria, para se descarregar um capacitor completamente, o tempo necessário tende a um valor infinito.

PORQUE

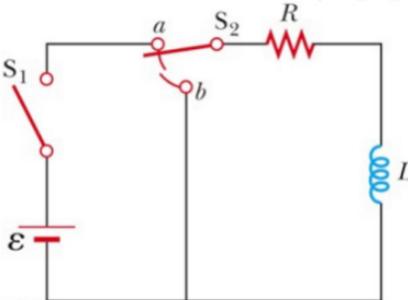
II. O processo de carregar ou descarregar apresenta característica exponencial.

Assinale a alternativa correta:

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II verdadeira.
- e) As duas asserções são falsas.

3. Um circuito da série RL consiste basicamente de um indutor de indutância L conectado em série com um resistor de resistência R. Considere o circuito RL da figura a seguir.

Figura | Circuito RL



Fonte: elaborada pelo autor.

Sobre esse circuito analise as afirmações a seguir:

- I. Diferentemente do que ocorre em um circuito RC, o carregamento do elemento armazenador (nesse caso o indutor) ocorre com corrente.
- II. Quando a chave S_2 está conectada na posição "b" e quando a chave S_1 está fechada a corrente começa a crescer.
- III. Quando S_2 está conectado na posição "a", a corrente original desaparece. A fem auto induzida tentará evitar essa mudança, e isso determinará a direção da fem (Lei de Lenz).

É correto o que se afirma apenas em:

- a) I.
- b) II.
- c) I e II.
- d) I e III.
- e) II e III.

Referências

ALEXANDER, Charles K; SADIKU, Matthew O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. AMGH, 03/2013.

JOHNSON, David E. **Fundamentos de análise de circuitos elétricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1994.

Circuitos de primeira e segunda ordem

Convite ao estudo

Caro aluno, na unidade anterior aprendemos sobre dois novos e importantes elementos de circuitos lineares passivos: o capacitor e o indutor. Diferentemente dos resistores, que dissipam energia, vimos que os capacitores e indutores armazenam energia que posteriormente poderá ser recuperada e utilizada nos sistemas dos quais esses elementos fazem parte. Por essa razão, vimos que tais elementos são conhecidos como armazenadores de energia. Além disso, aprendemos que eles podem ser associados, separadamente, com resistores, formando os circuitos de primeira ordem, que podem ser do tipo resistor-indutor, circuitos RL, e resistor-capacitor, circuitos RC. Apesar de serem simples, vimos que esses circuitos têm inúmeras aplicações em eletrônica, comunicações e sistemas de controle.

Dando continuidade ao nosso estudo dos circuitos formados pelos três elementos passivos, nesta unidade, aprenderemos sobre os circuitos de primeira ordem excitados por fontes independentes do tipo corrente contínua (CC). Também seremos apresentados aos circuitos formados por resistores, capacitores e indutores, ou seja, aos sistemas de segunda ordem que, assim como os circuitos de primeira ordem, podem estar ou não na presença de fontes independentes. Portanto, analisaremos os circuitos RLC com e sem fontes.

A partir desse contexto, imagine que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica. Entre os serviços requisitados à sua equipe estão a implementação do projeto de sinalizador intermitente de um canteiro de obra e a manutenção de um sistema de motor alimentado por gerador CC.

Para que essas tarefas sejam executadas com qualidade, fique atento aos conceitos que serão apresentados nesta unidade, faça anotações e esclareça as dúvidas que surgirem com o seu professor, sempre que necessário.

Bons estudos!

Seção 4.1

Circuitos de primeira ordem com fonte

Diálogo aberto

Na unidade anterior conhecemos os elementos passivos armazenadores de energia: os capacitores e os indutores. Além disso, pudemos analisar os circuitos elétricos formados por resistores e indutores (circuitos RL) e os formados por resistores e capacitores (circuitos RC), também conhecidos como circuitos de ordem um, sem a presença de fonte de tensão ou corrente.

Vimos que a razão pela qual estudamos os circuitos sem as fontes vem da presença de energia inicial armazenada nos capacitores e indutores por meio do campo elétrico e magnético, respectivamente. Essa energia armazenada faz a corrente fluir no circuito e ser gradativamente dissipada nos resistores que o compõe.

A partir desta seção, aprenderemos como analisar os circuitos de primeira ordem excitados por fontes independentes de energia do tipo CC (corrente contínua) aplicadas de forma súbita ou instantânea. Os circuitos de primeira ordem alimentados por essas fontes correspondem à operação de muitos dispositivos reais, como a geração e o uso de pulsos retangulares de tensão necessários para representar um número ou comando em um microprocessador, comuns no campo da eletrônica e dos circuitos transistorizados. Circuitos similares são utilizados nos circuitos de sincronismo e varredura de televisores ou nos sistemas de comunicação que usam modulação por pulso em sistemas de radar, dentre outros exemplos.

Para colocar esse conhecimento em prática, imagine que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, contratada para a implementação de um sistema sinalizador intermitente de um canteiro de obra.

Ao fazer a contratação, o cliente informou que, por medida de segurança no local da obra, o sistema sinalizador deve piscar em intervalos máximo de 0,5 s, caso contrário, ele seria multado pelo órgão de segurança local. A partir da situação apresentada, qual seria uma possível solução para o desenvolvimento desse projeto de sinalização intermitente? Quais elementos de um circuito elétrico podem ser utilizados para a implementação desse sistema?

Atente-se ao conteúdo desta seção para ser capaz de responder às questões propostas.

Não pode faltar

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre os sistemas de primeira ordem com fonte independentes CC, é fundamental uma compreensão dos conceitos matemáticos que nos ajudarão a entender a análise de transientes, isto é, quando são aplicadas fontes de tensão ou corrente independentes de forma repentina, ou súbita, ao circuito.

Uma “aplicação súbita” de fonte de energia significa que essa aplicação ocorreu em tempo zero, como a operação de uma chave em série com uma bateria. Isso equivale a uma função forçante que é nula até o instante em que a chave for fechada e igual à tensão da bateria desse momento em diante. Logo, a função forçante, ou função de comutação, tem uma quebra ou uma descontinuidade, no instante em que o interruptor é fechado, e é conhecida como função de singularidade. Entre as funções de singularidade, a mais usada na análise de circuitos elétricos é a degrau unitário.

Naturalmente, a aplicação da fonte em tempo zero não é fisicamente possível, porém, se a escala de tempo na qual esse evento ocorrer for muito curta em comparação com as demais escalas de tempo que escrevem a operação de um circuito, podemos considerar, então, que é aproximadamente verdade e matematicamente conveniente a utilização das fontes no tempo nulo.

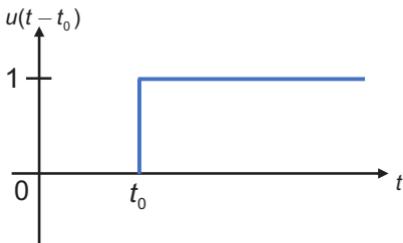


Assimile

As funções de singularidade são funções descontínuas ou que apresentam derivadas descontínuas.

Segundo Hayt Jr., Kemmerly e Durbin (2014), definimos a função degrau unitário como uma função temporal que é zero para todos os valores de seu argumento menores do que zero e unitária para todos os valores positivos de seu argumento. Isto é, se assumirmos um argumento como $(t - t_0)$ e representarmos a função degrau unitária como u , então $u(t - t_0)$ será zero para todos os valores de t menores do que t_0 e unitária para todos os valores de t maiores do que t_0 , como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1 | Função degrau unitário



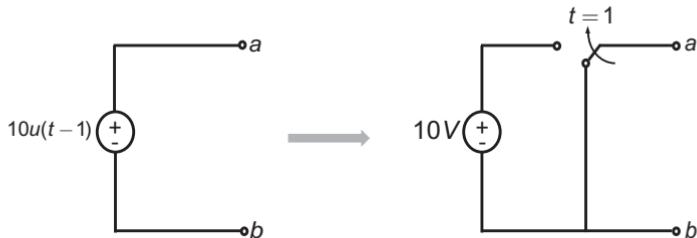
Fonte: elaborada pela autora.

Observe que em $t = t_0$, a função degrau unitário muda abruptamente de 0 para 1 e seu valor nesse instante de tempo é indefinido. Todavia, seu valor é conhecido nos instantes de tempo próximos a $t = t_0$. Frequentemente, indicamos isso por meio das notações: $u(t_0^-) = 0$ e $u(t_0^+) = 1$. A definição matemática para função degrau é:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

Vale salientar que a função degrau unitário é adimensional. Se quisermos que ela represente uma tensão, é necessário multiplicar $u(t - t_0)$ por algum valor de tensão constante, como **10 V**. Então, $v(t) = 10u(t - 1)V$ é uma fonte de tensão ideal que é zero antes de $t = 1\text{s}$ e igual a **10 V** após $t = 1\text{s}$, tendo seu equivalente ilustrado na Figura 4.2 (b).

Figura 4.2 | Função de tensão (a) degrau (b) seu equivalente

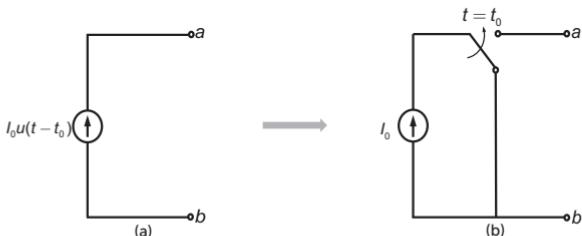


Fonte: elaborada pela autora.

Similarmente, uma fonte de corrente pode ser representada por uma função degrau, como mostra a Figura 4.3 (a), e seu equivalente é apresentado na Figura 4.3 (b). Note que para $t < t_0$ a corrente

flui toda pelo curto-circuito e a corrente fornecida ao circuito nos terminais ab é nula ($i = 0$), ou seja, o circuito está em aberto; e para $t > t_0$ a corrente flui para o circuito no terminais ab e equivale $i = I_0$.

Figura 4.3 | Fonte de corrente (a) degrau (b) seu equivalente



Fonte: elaborada pela autora.



Pesquise mais

Outras funções de singularidade são tão importantes quanto a degrau, como a função impulso e a função rampa. Para saber um pouco mais sobre essas funções, consulte:

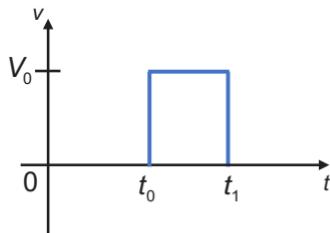
SADIKU, Matthew N. O.; ALEXANDER, Charles K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013. cap. 7, p. 235-238.



Refletia

Vimos até aqui como representar uma tensão e corrente constante ao longo do tempo por meio da função degrau. Mas, e se quiséssemos representar um pulso por meio dessa mesma função de singularidade? Como seria a função degrau equivalente a esse pulso, como ilustrado pela Figura 4.4?

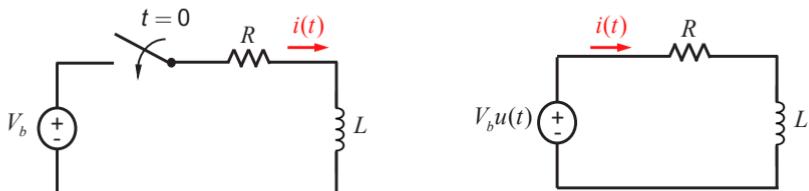
Figura 4.4 | Pulso de tensão retangular



Fonte: elaborada pela autora.

Agora que conhecemos as funções de singularidade, estamos prontos para submeter os circuitos de primeira ordem à aplicação instantânea de uma fonte CC. Como um circuito que consiste em uma bateria cuja tensão é V_b em série com uma chave, um resistor R e um indutor L. A chave é fechada em $t = 0$, como mostra a Figura 4.5 (a). Como a chave está aberta, podemos notar que a corrente é nula antes de $t = 0$, e, portanto, podemos substituir a bateria e a chave por uma função de singularidade do tipo degrau de tensão de valor $V_b u(t)$, conforme Figura 4.5 (b). Dessa forma, podemos calcular a corrente $i(t)$ tanto no circuito original quanto no circuito equivalente.

Figura 4.5 | Circuito RL (a) chave aberta (b) degrau equivalente



Resposta completa = resposta natural + resposta forçada

Fonte: elaborada pela autora.

Para obtermos $i(t)$, devemos aplicar a lei de Kirchhoff das tensões ao circuito equivalente. Assim, teremos:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_b u(t) \quad (4.1)$$

Como a função degrau é uma função descontínua, nesse caso em $t = 0$, devemos, então, considerar a solução da equação 4.1 inicialmente para $t < 0$ e, em seguida, para $t > 0$. Sendo assim, para $-\infty < t < 0$, temos uma tensão forçada nula, logo, $i(t) = 0$ para $t < 0$. Contudo, para $t > 0$ o valor de $u(t)$ é unitário e a equação 4.1 pode ser rescrita como:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_b \quad (4.2)$$

A equação anterior pode ser reestruturada como:

$$\frac{L di}{V_b - Ri} = dt \quad (4.3)$$

Integrando ambos os lados da equação 4.3, obtemos:

$$-\frac{L}{R} \ln(V_b - Ri) = t + k \quad (4.4)$$

Para determinarmos k , devemos utilizar a condição inicial. Sabemos, antes de $t = 0$, $i(t) = 0$, que pode ser representada como $i(0^-) = 0$. Como a corrente no indutor não pode alterar instantaneamente, então podemos afirmar que $i(0^+) = 0$. Logo, assumindo que $i = 0$ em $t = 0$ e temos que:

$$k = -\frac{L}{R} \ln V_b \quad (4.5)$$

Substituindo a equação 4.5 em 4.4, temos que:

$$-\frac{L}{R} [\ln(V_b - Ri) - \ln V_b] = t \quad (4.6)$$

Após algumas simplificações algébricas, podemos reorganizar a equação 4.6 como:

$$\frac{V_b - Ri}{V_b} = e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (4.7)$$

Como desejamos saber a corrente do circuito em $t > 0$, então podemos isolar $i(t)$ na equação 4.7 e obtermos:

$$i(t) = \frac{V_b}{R} - \frac{V_b}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (4.8)$$

A equação 4.8 pode ser reescrita em termos da função degrau como:

$$i(t) = \left(\frac{V_b}{R} - \frac{V_b}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \right) u(t) \quad (4.9)$$

Ao analisarmos a resposta obtida na equação 4.9, notamos que esta é formada por dois termos: $\frac{V_b}{R}$ e $\frac{V_b}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$. O segundo termo da subtração, o termo da exponencial, tem a forma funcional da **resposta natural** do sistema, ou seja, esse valor é idêntico ao que obtemos com a resposta sem fonte. Sabemos que essa parcela trata de uma exponencial negativa que se aproxima do zero à medida que o tempo aumenta e é caracterizada pela constante de tempo L/R . Já o primeiro termo da subtração, $\frac{V_b}{R}$, equivale à corrente do

círcuito em regime permanente. Isso pois, uma vez que o indutor funciona como um curto-círcito para fontes CC, a partir de um circuito com resistor e um indutor (em curto-círcito) em série com

a bateria, a única corrente que irá fluir é $\frac{V_b}{R}$. Essa corrente é a parte

da resposta que pode ser atribuída à função forçante, logo, ela é conhecida como **resposta forçada**. Dessa forma, dado que a resposta da equação 4.9 é formada por duas partes, resposta natural e resposta forçada, ela é, portanto, conhecida como **resposta completa**.

Resposta completa - resposta natural + resposta forçada

A resposta natural é característica do circuito e não das fontes. Assim, seu valor pode ser obtido considerando-se o circuito sem fontes e ela tem uma amplitude que depende da amplitude inicial da fonte e da energia inicial armazenada no elemento passivo. Já a resposta forçada tem a característica da função forçante e seu valor é obtido considerando-se que as chaves foram acionadas muito tempo atrás e será observada no circuito por um longo tempo, logo, é considerada como valor final ou **resposta em regime permanente**, isto é, que permanece no circuito.

Sendo assim, deve haver um período transitório durante o qual as correntes e tensões mudam seus valores iniciais para seus valores finais. A parte da resposta que fornece a transição entre os valores iniciais e finais é a resposta natural, frequentemente chamada de **resposta transitória**. Por exemplo, se considerarmos um circuito RL sem fonte, diremos que a resposta forçada será nula e que a resposta natural irá conectar a resposta inicial, armazenada no indutor, com valor da resposta final ou forçada.

Resposta completa = resposta transitória + resposta em regime permanente



Faça você mesmo

Consideramos, até o momento, que o indutor está inicialmente descarregado e realizamos a dedução para resposta completa do sistema como demonstrado na equação 4.9.

Caso o indutor tenha um valor de corrente inicial diferente de zero, a resposta completa para corrente do circuito formado por um resistor e

um indutor em série com uma bateria é dado pela equação 4.10.

$$i(t) = \underbrace{\left(I_0 - \frac{V_b}{R} \right)}_{\text{resposta transitória}} e^{-\frac{R}{L}t} + \underbrace{\frac{V_b}{R}}_{\text{resposta permanente}} \quad (4.11)$$

resposta transitória resposta permanente

Em que I_0 é o valor da corrente inicial do indutor, V_b o valor da tensão da bateria, R o resistor em série e L o indutor em série do circuito.
Deixamos como exercício a dedução dessa resposta completa.

A partir da equação 4.10, considerando-se que I_0 é a corrente inicial no indutor e que $\frac{V_b}{R}$ é a corrente final no indutor, podemos escrever a equação 4.10 como:

$$i(t) = \left(i_{\text{inicial}} - i_{\text{final}} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + i_{\text{final}} \quad (4.11)$$



Assimile

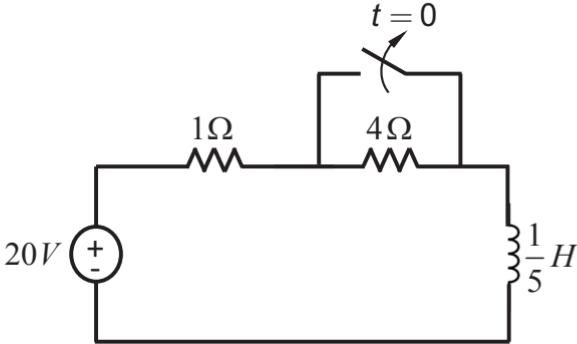
Portanto, para determinar a resposta a um degrau de um circuito RL, precisamos de três informações:

1. A tensão inicial, i_{inicial} , no indutor em $t=0$.
2. A tensão final, i_{final} , no indutor.
3. A constante de tempo τ .



Determine $i(t)$ no circuito da Figura 4.6 para $t > 0$. Considere que a chave foi fechada há um bom tempo.

Figura 4.6 | Circuito RL chaveado com fonte de tensão constante



Fonte: elaborada pela autora.

Quando $t < 0$, o resistor de 4Ω está curto-circuitado e o indutor atua como um curto-circuito. A corrente através do indutor em $t(0^-)$, ou seja, logo antes de $t = 0$, é:

$$i(0^-) = \frac{20}{1} = 20 \text{ A}$$

Uma vez que o indutor não pode mudar instantaneamente, então:

$$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 20 \text{ A}$$

Quando a chave é aberta, $t > 0$, os resistores estão em série. Logo:

$$i_{final} = \frac{20}{1+4} = 4 \text{ A}$$

A resistência equivalente entre os terminais do indutor é:

$$R = 1 + 4 = 5 \Omega$$

A constante de tempo é:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\frac{1}{5}}{5} = \frac{1}{25} \text{ s}$$

Portanto,

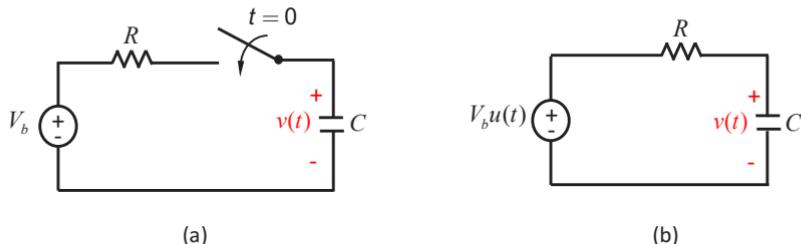
$$i(t) = (i_{\text{inicial}} - i_{\text{final}}) e^{-\frac{R}{L}t} + i_{\text{final}}$$

$$i(t) = (20 - 4) e^{-25t} + 4$$

$$i(t) = 16e^{-25t} + 4 \text{ A}, t > 0$$

A resposta completa de um circuito RC qualquer também pode ser obtida com a soma das respostas natural e forçada, considerando o circuito formado por uma bateria cuja tensão é V_b em série com uma chave, um resistor R e um capacitor C, como mostra a Figura 4.7 (a). Esse circuito pode ser substituído pelo circuito da Figura 4.7 (b) e nosso objetivo será determinar a tensão do capacitor como resposta do circuito. Em vez de aplicar a Lei de Kirchhoff, usaremos a representação da resposta completa ser a soma da resposta transitória (v_t) e da resposta em regime permanente, ou estacionário (v_{ss}).

Figura 4.7 | Circuito RC (a) chave aberta (b) degrau equivalente



Fonte: elaborada pela autora.

Sabemos que a resposta transitória sempre é uma exponencial, podendo, portanto, ser representada pela equação a seguir, em que A é uma constante a ser determinada.

$$v_t = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = RC \quad (4.12)$$

Já o valor em regime permanente, ou estacionário, é o valor da tensão bastante tempo depois de a chave ser fechada. Sabemos que a tensão transitória irá se extinguir após um intervalo de tempo

e, nesse momento, o capacitor se tornará um circuito aberto e a tensão nele será a própria tensão da fonte. Nesse caso:

$$v_{ss} = V_b \quad (4.13)$$

Logo, a resposta completa pode ser dada como:

$$v(t) = v_t + v_{ss} = A e^{-t/\tau} + V_b \quad (4.14)$$

Agora, determinaremos a constante A do valor inicial de V, supondo que V_0 seja a tensão inicial do capacitor, que pode provir de uma fonte que não seja V_b . Uma vez que a tensão no capacitor não pode mudar instantaneamente, então:

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

Assim, em $t = 0$, a equação 4.14 resulta em:

$$V_0 = A + V_b$$

Logo:

$$A = V_0 - V_b \quad (4.15)$$

Substituindo a equação 4.15 em 4.13, obtemos a resposta completa do circuito RC como:

$$v(t) = (V_0 - V_b) e^{-t/\tau} + V_b \quad (4.16)$$

Considerando que V_0 é a tensão inicial e que V_b é a tensão final do capacitor, podemos escrever equação 4.16 como:

$$v(t) = (v_{inicial} - v_{final}) e^{-t/\tau} + v_{final} \quad (4.17)$$



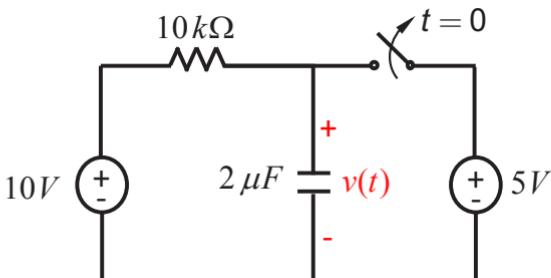
Portanto, para determinar a resposta a um degrau de um circuito RC, precisamos de três informações:

4. A tensão inicial, $v_{inicial}$, no capacitor em $t=0$.
5. A tensão final, v_{final} , no capacitor.
6. A constante de tempo τ .



Determine a tensão do capacitor depois que a chave da Figura 4.8 é aberta. Qual o valor da tensão do capacitor 10 ms após a chave ser aberta?

Figura 4.8 | Circuito RC alimentado por uma função forçante



Fonte: elaborada pela autora.

A fonte de **5V** faz com que a tensão do capacitor seja **5V** até a chave ser aberta. Como a tensão do capacitor não pode variar instantaneamente, a tensão do capacitor é **5V**, imediatamente após a chave ser aberta. Assim:

$$v(0) = v(0^-) = v(0^+) = 5V$$

Para $t > 0$, a chave é aberta e:

$$R = 10k\Omega \text{ e } v_{final} = 10V$$

Assim, a constante de tempo fica:

$$\tau = RC = (10 \cdot 10^3)(2 \cdot 10^{-6}) = 20 \cdot 10^{-3} = 20ms$$

Sabendo que:

$$v(t) = (v_{initial} - v_{final})e^{-t/\tau} + v_{final}$$

Então:

$$v(t) = (5 - 10)e^{-t/20 \cdot 10^{-3}} + 10$$

$$v(t) = -5e^{-t/20 \cdot 10^{-3}} + 10$$

Para $t = 10ms$:

$$v(10 \cdot 10^{-3}) = -5e^{-10 \cdot 10^{-3}/20 \cdot 10^{-3}} + 10 = 6,97V$$

Até o momento, usamos o fato de que a resposta forçada a uma entrada constante é uma resposta constante. Vamos agora considerar o caso em que a entrada não é constante.

A equação diferencial que descreve um circuito RL ou RC tem a forma geral, conforme segue:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (4.18)$$

Considere a derivada de um produto de dois termos da forma:

$$\frac{d}{dt}(ye^{at}) = \frac{dy}{dt}e^{at} + aye^{at} = \left(\frac{dy}{dt} + ay \right) e^{at} \quad (4.19)$$

Observe que o termo entre parênteses do lado direito da equação 4.19 tem a mesma forma que o lado esquerdo da equação 4.18. Assim, se multiplicarmos ambos os lados da equação 4.18 por e^{at} , o lado esquerdo dessa equação pode ser substituído pela equação 4.19 e o resultado é:

$$\left(\frac{dy}{dt} + ay \right) e^{at} = xe^{at}$$

Ou

$$\frac{d}{dt}(ye^{at}) = xe^{at} \quad (4.20)$$

Integrando ambos os lados da equação 4.20, temos a equação 4.21, em que K é uma constante de integração:

$$ye^{at} = \int xe^{at} dt + K \quad (4.21)$$

Isolando y na equação 4.21, obtemos que:

$$y = e^{-at} \left(\int xe^{at} dt + K \right)$$

$$y = e^{-at} \int xe^{at} dt + Ke^{-at} \quad (4.22)$$

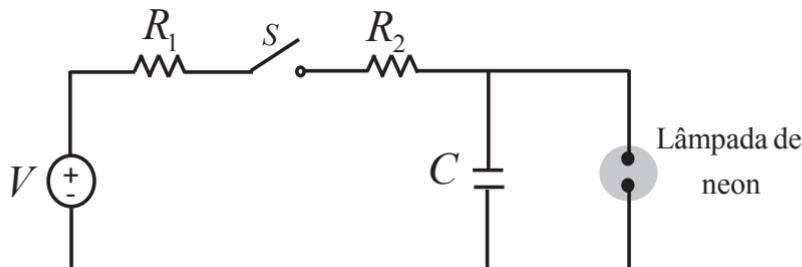
Nela, Ke^{-at} é a resposta natural, ou transitória, e $e^{-at} \int xe^{at} dt$ é a resposta forçada do circuito. Assim, a resposta forçada depende da forma de $x(t)$.

Sem medo de errar

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, contratada para implementação de um sistema sinalizador intermitente de um canteiro de obra.

Ao contratar a empresa em que você trabalha, o cliente informou que, por medida de segurança no local da obra, o sistema sinalizador deve piscar em intervalos de tempo de no máximo 0,5 s, caso contrário, ele seria multado pelo órgão de segurança local. A partir da situação apresentada, qual seria uma possível solução para o desenvolvimento desse projeto de sinalização intermitente? Quais elementos de um circuito elétrico podem ser utilizados para implementação desse sistema?

Figura 4.9 | Sistema sinalizador intermitente de um canteiro de obra



Fonte: adaptada de Sadiku e Alexander (2013).

Para o desenvolvimento desse projeto de forma mais econômica, uma possível solução é a utilização de circuitos de primeira ordem formados por resistores e capacitores, isto é, circuitos RC, com capacitor conectado em paralelo com uma lâmpada de neon, como mostra a Figura 4.9.

Nesse sistema, a fonte de tensão deve fornecer tensão suficiente para acender a lâmpada. Então, quando a chave é fechada, a tensão no capacitor aumenta gradativamente até seu valor máximo (valor da fonte de tensão), em uma taxa determinada pela constante de tempo (τ).

A lâmpada de neon atuará como um circuito aberto e ficará apagada até que a tensão nela exceda o determinado nível de tensão para seu funcionamento, ou $V_{lampneon}$. Quando esse valor for atin-

gido, a lâmpada se acenderá e o capacitor será descarregado por alimentar a lâmpada de neon.

Por se tratar de uma lâmpada de neon, que possui baixa resistência, quando a lâmpada está ligada, a tensão no capacitor cai rapidamente e a lâmpada volta a ficar apagada. A lâmpada atua novamente como um circuito aberto e o capacitor recarrega, formando assim o sistema intermitente de sinalização.

Para não ser multado, o projeto estabelece que o período máximo de intermitência da lâmpada seja de 0,5 s. Assim, para o circuito da Figura 4.9, podemos estabelecer esse intervalo de tempo ao ajustarmos o valor das resistências em série, ou seja, podemos introduzir retardos longos ou curtos no circuito e fazer a lâmpada acender, recarregar e acender repetidamente, a cada constante de tempo. Isso pois, a cada período de tempo, a tensão no capacitor fica suficientemente alta para acender a lâmpada e suficientemente baixa para desligá-la.

Sendo assim, para determinarmos os valores dos elementos que formarão esse projeto, podemos considerar que:

$$\tau = (R_1 + R_2)C$$

Então, uma possível combinação dos elementos passivos seria:

$$R_1 = 3\Omega, R_2 = 2\Omega \text{ e } C = 0,1\mu F$$

Já para determinarmos a lâmpada que irá compor esse sistema, considerando que a fonte seja de 110 V e o capacitor esteja inicialmente descarregado, temos:

$$v_c(t) = (v_{inicial} - v_{final}) e^{-t/\tau} + v_{final}$$

$$v_c(t) = (0 - 110) e^{-t/0,5} + 110 = 110 \left(1 - e^{-t/0,5}\right)$$

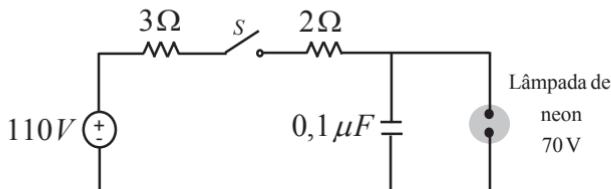
Sabendo que a lâmpada deverá acender em 0,5 s, então, em $t = 0,5s$:

$$v_c(t) = 110 \left(1 - e^{-0,5/0,5}\right) = 69,5V$$

A tensão no capacitor e da lâmpada deverá ser de 69,5 V.

Sendo assim, uma lâmpada de 70 V atende às especificações do projeto e o circuito final a ser implementado é ilustrado na Figura 4.10.

Figura 4.10 | Sistema sinalizador intermitente de um canteiro de obra, com valores determinados



Fonte: adaptado de Sadiku e Alexander (2013).

Avançando na prática

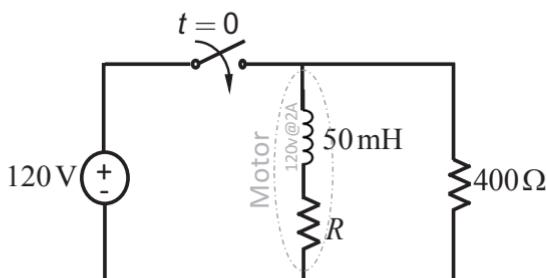
Manutenção motor alimentado por gerador CC

Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica que foi contratada para manutenção de um sistema formado por um motor alimentado por um gerador CC.

Ao contratar a empresa que você trabalha, o cliente informou que houve uma descarga elétrica nas instalações em que esse sistema está localizado, fazendo com que o motor não mais funcionasse, e entregou a sua equipe um antigo manual sobre o referido sistema. Nesse manual, havia o esquemático elétrico do sistema, como mostra a Figura 4.11, o valor do tempo para que o motor inicie a rotação, 0,1 ms, ou seja, o tempo que o motor leva para alcançar 67% do valor final de sua velocidade, mas não informava o valor do resistor em série com a bobina do motor. Como você poderia resolver esse problema? Qual o valor do novo resistor desse sistema?

Figura 4.11 | Sistema do motor alimentado por um gerador CC



Fonte: elaborada pela autora.

Resolução da situação-problema

Com auxílio de um multímetro, você, inicialmente, conferiu as tensões sobre os resistores e sobre a bobina e percebeu que a corrente sobre o resistor série e a bobina é praticamente nula. Isso o levou a concluir que esse resistor poderia estar queimado. Observando o resistor, você não consegue identificar qual valor da sua resistência para poder substituí-lo.

Como bom aluno de circuito elétricos, na tentativa de solucionar esse problema, você resolveu pôr todo o seu conhecimento em prática e, por análise da parte RL do circuito, você tentará descobrir o valor do elemento que falta.

Sendo assim, sabendo que a constante de tempo para um circuito RL é dado por $\tau = \frac{L}{R}$, e o tempo que o motor leva para alcançar 67% do valor final de sua velocidade é de 0,1 s, então:

$$0,1 \cdot 10^{-3} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{R + 400}$$

Logo:

$$R = 100\Omega$$

Todavia, antes de finalizar seu serviço, você deve certificar-se de que a bobina do sistema não irá queimar ao adotar esse valor para o resistor em série. Para isso, você obteve o valor da corrente do resistor, que pode ser calculada como:

$$i(t) = (i_{\text{inicial}} - i_{\text{final}}) e^{-\frac{R}{L}t} + i_{\text{final}}$$

Inicialmente com a chave aberta, ou seja, sistema desligado, a corrente do indutor é nula ($i_{\text{inicial}} = 0$). Como indutor, funcionará como um curto-circuito em regime permanente, então o valor de corrente final sobre o indutor será o mesmo valor de corrente do resistor sem série. Assim, para $t > 0$:

$$i_{\text{final}} = \frac{120}{100} = 1,2 \text{ A}$$

Ou pela equação da corrente do indutor:

$$i(t) = (0 - 1,2) e^{-10 \cdot 10^3 t} + 1,2 = 1,2(1 - e^{-10 \cdot 10^3 t})$$

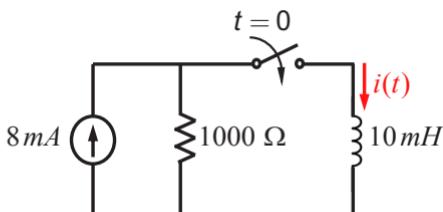
Como o valor de corrente do indutor em regime estacionário é suportada pela bobina do sistema, você pode substituir o resistor série danificado pelo resistor de **100Ω** e o sistema voltará a funcionar corretamente.

Faça valer a pena!

- 1.** Os circuitos de primeira ordem alimentados com fontes independentes correspondem à operação de muitos dispositivos reais, como a geração e o uso de pulsos retangulares de tensão necessários para representar um número ou comando em um microprocessador, comuns no campo da eletrônica e dos circuitos transistorizados.

Determine a tensão do indutor depois que a chave do circuito da figura é fechada.

Figura | Circuito RL com fonte CC – Questão 1



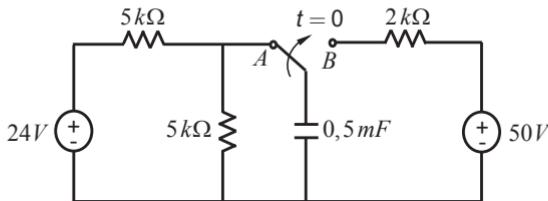
Fonte: elaborada pela autora.

- a) $i(t) = 8e^{100000t} + 8\text{mA}$ d) $i(t) = 8e^{10 \cdot 10^{-6}t} + 8\text{mA}$
b) $i(t) = -8e^{10 \cdot 10^{-6}t} + 8\text{mA}$ e) $i(t) = 8e^{10 \cdot 10^{-6}t} + 8\text{A}$
c) $i(t) = -8e^{100000t} + 8\text{mA}$

- 2.** Os capacitores e indutores podem ser associados, separadamente, com resistores, formando os circuitos de primeira ordem, que pode ser do tipo resistor-indutor (circuitos RL) e resistor-capacitor (circuitos RC). Apesar de serem simples, vimos que esses circuitos têm inúmeras aplicações em eletrônica, comunicações e sistemas de controle.

A chave da figura a seguir encontra-se na posição A, por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave é comutada para a posição B. Determine a tensão no capacitor para $t > 0$.

Figura | Circuito RC – Questão 2



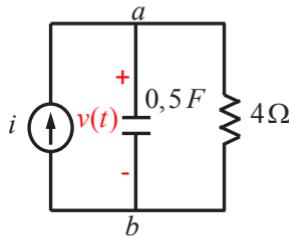
Fonte: elaborada pela autora.

- a) $v(t) = 38e^{-t} + 50$ d) $v(t) = 38e^{-t} + 38$
 b) $v(t) = -38e^{-t} + 50$ e) $v(t) = 50e^{-t} - 38$
 c) $v(t) = 50e^{-t} + 50$

3. Os circuitos de primeira ordem formados pela associação dos capacitores, indutores e resistores podem ser excitados por fontes independentes contínuas ou variáveis. Apesar de serem simples, esses circuitos caracterizam-se por serem muito utilizados nas áreas da eletrônica, comunicação e controle.

Determine a resposta $v(t)$ para $t > 0$ no circuito da figura a seguir. Suponha que $v(0) = 0$ e que a corrente da fonte seja $i = (10\operatorname{sen}2t)u(t)A$.

Figura | Circuito de primeira ordem com fonte variável



Fonte: Dorf e Svoboda (2012, p. 337).

- a) $v = -\frac{160}{17}e^{\frac{-t}{2}} + \frac{40}{17}\operatorname{sen}2t - \frac{-160}{17}\cos2tV$
 b) $v = \frac{40}{17}\operatorname{sen}2t - \frac{-160}{17}\cos2tV$
 c) $v = \frac{160}{17}e^{\frac{-t}{2}} + \frac{40}{17}\operatorname{sen}2t - \frac{-160}{17}\cos2tV$
 d) $v = \frac{160}{17}e^{\frac{-t}{2}} - \frac{40}{17}\operatorname{sen}2t - \frac{160}{17}\cos2tV$
 e) $v = \frac{160}{17}e^{\frac{-t}{2}} + \frac{40}{17}\cos2t - \frac{-160}{17}\operatorname{sen}2tV$

Seção 4.2

Circuitos de segunda ordem sem fonte

Diálogo aberto

Caro aluno, na seção anterior você aprendeu a analisar os circuitos de primeira ordem alimentados por fontes independentes de energia do tipo CC (corrente contínua) aplicadas de forma súbita ou instantânea. Vimos que os circuitos de primeira ordem alimentados por esse tipo de fonte correspondem à operação de muitos dispositivos reais, como quando aplicados aos sistemas de comunicação, que usam modulação por pulso em sistemas de radar, ou no campo da eletrônica, quando pulsos retangulares de tensão são necessários para representar um número ou comando em um microprocessador.

Nesta seção, seremos apresentados aos circuitos de segunda ordem, ou seja, circuitos que são representados por equações diferenciais de segunda ordem e que são formados por um resistor equivalente e dois elementos armazenadores de energia, podendo ser dois indutores, dois capacitores ou um capacitor e um indutor. Além disso, veremos como analisar esse tipo de circuito em diferentes configurações, como circuitos série e paralelo sem a presença da fonte alimentadora de tensão ou corrente.

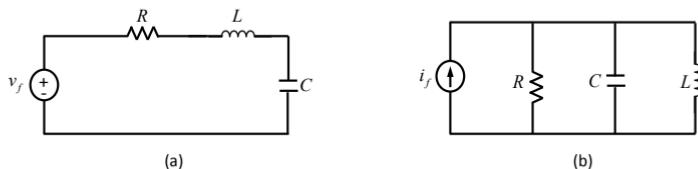
Logo, para colocar o conhecimento em prática, imagine que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, contratada para melhoria de um sistema de acionamento de um airbag que não está funcionando corretamente e, para auxiliar em seu serviço, o cliente lhe entregou o manual técnico desse sistema. Ao analisar o manual, você pôde perceber que ele não informava os valores do capacitor e do indutor que deveriam acionar o sistema. As informações contidas para esse sistema são: constante de tempo igual a 0,5 s e frequência natural não amortecida igual a 5π rad/s. A partir desse contexto, como garantir o bom funcionamento do airbag ao cliente? Quais os valores dos elementos armazenadores de energia desse circuito?

No decorrer desta seção você verá conteúdos que irão ajudá-lo a responder essas questões.

Não pode faltar

Os circuitos de segunda ordem são aqueles cujas respostas são descritas por equações diferenciais com derivadas de segunda ordem. Sabemos que a ordem da equação diferencial que representa o circuito é no máximo igual à soma do número de capacitores e indutores, equivalentes, que formam o circuito. Assim, um circuito de segunda ordem pode conter, por exemplo, um capacitor e um indutor, ou dois capacitores e nenhum indutor ou dois indutores e nenhum capacitor; e os mais comuns são os circuitos RLC, nos quais estão presentes os três tipos de elementos passivos, como mostra a Figura 4.12.

Figura 4.12 | Exemplo de circuito de segunda ordem: (a) série e (b) paralelo



Fonte: elaborada pela autora.



Assimile

Os circuitos de segunda ordem são caracterizados por equação diferencial de segunda ordem e podem ser formados por resistores e **equivalentes** de dois elementos armazenadores de energia (dois capacitores, dois indutores ou um capacitor e um indutor).

Iniciamos nosso estudo dos circuitos de segunda ordem com a determinação dos valores inicial e final das variáveis de circuitos e suas derivadas.

Para determinarmos as condições iniciais das variáveis do circuito, nos concentraremos inicialmente nas variáveis que não podem mudar abruptamente, como a tensão no capacitor e a corrente no indutor, como mostrado em *Exemplificando*.



Lembre-se

A tensão no capacitor (v_c) é sempre contínua, de modo que:

$$v_c(0^+) = v_c(0^-)$$

E a corrente no indutor (i_L) é sempre contínua, de modo que:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$



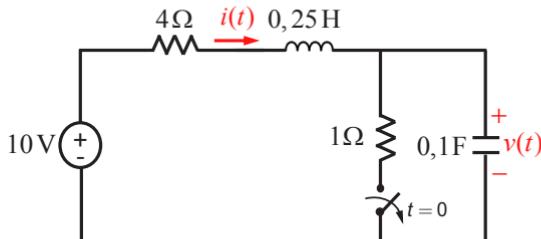
Exemplificando

Determine para o circuito da Figura 4.13:

(a) $i(0^+), v(0^+)$, (b) $\frac{di(0^+)}{dt}, \frac{dv(0^+)}{dt}$ e (c) $i(\infty), v(\infty)$

Considere que a chave foi fechada por um longo tempo.

Figura 4.13 | Circuito de segunda ordem – Exemplificando 1



Fonte: adaptado de Sadiku (2013).

Sabemos que, se a chave está inicialmente fechada por um longo tempo, então o circuito atingiu o regime estável em CC em $t=0$. Nesse estágio, o indutor comportará como CC enquanto o capacitor atua como circuito aberto.

Assim, podemos afirmar que:

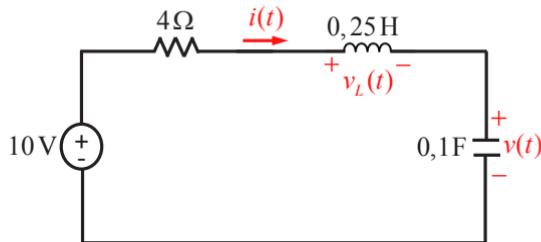
$$i(0^-) = \frac{10}{4+1} = 2\text{A}, \quad v(0^-) = 1i(0^-) = 2\text{V}$$

Como a corrente no indutor e a tensão no capacitor não mudam de forma instantânea, então:

$$i(0^+) = i(0^-) = 2 \text{ A}, \quad v(0^+) = v(0^-) = 2 \text{ V}$$

Já em $t = 0^+$, a chave abre e o circuito equivalente pode ser visto na Figura 4.14:

Figura 4.14 | Circuito equivalente em $t = 0^+$ – Exemplificando 1



Fonte: adaptado de Sadiku (2013).

Ao observarmos a Figura 4.14, notamos que a mesma corrente flui pelo indutor e capacitor, então:

$$i_c(0^+) = i(0^+) = 2 \text{ A}$$

Uma vez que $i_c = \frac{CdV}{dt}$, então:

$$\frac{dV(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ V/s}$$

De forma similar, uma vez que $V_L = \frac{Ldi}{dt}$, $\frac{di}{dt} = \frac{V_L}{L}$. Para obtermos V_L , aplicamos a LKT (Lei de Kirchhoff das Tensões) à malha da Figura 4.14.

Logo:

$$-10 + 4i(0^+) + V_L(0^+) = 0$$

$$V_L(0^+) = 10 - 4 \cdot 2 - 2 = 0$$

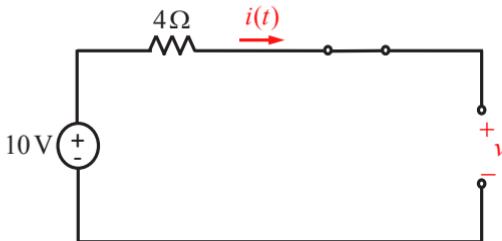
Então:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{0}{0,25} = 0 \text{ A/s}$$

E por fim, após o fechamento da chave, isto é, após o circuito passar por um período transiente, atinge seu estado permanente quando $t \rightarrow \infty$. Nesse momento, o indutor se comporta como um curto-círcito e o capacitor como circuito aberto, como ilustra a Figura 4.15.

$$i(\infty) = 0 \text{ A}, v(\infty) = 10 \text{ V}$$

Figura 4.15 | Circuito equivalente em $t \rightarrow \infty$



Fonte: adaptado de Sadiku (2013).

Agora que entendemos como determinar os valores iniciais e finais dos circuitos de segunda ordem, podemos analisar a resposta natural dos circuitos RLC, que são os circuitos mais frequentemente utilizados em projetos de filtros e redes de comunicação.

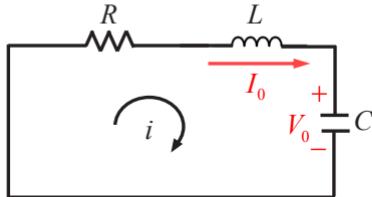
Começaremos nosso estudo pelos circuitos RLC série, como mostra a Figura 4.16. Ele é excitado pela energia, inicialmente armazenada no capacitor e indutor, representada pela tensão inicial V_0 no capacitor e pela corrente inicial I_0 no indutor.

Sendo assim, podemos afirmar que em $t = 0$:

$$v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt = V_0 \quad (4.23)$$

$$i(0) = I_0 \quad (4.24)$$

Figura 4.16 | Circuito RLC série sem fonte



Fonte: elaborada pela autora.

Aplicando a LKT no circuito da Figura 4.16, temos que:

$$RI + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = 0 \quad (4.25)$$

Para eliminar a integral, diferenciamos a equação (4.25) em relação à t e reorganizamos os termos. Assim, temos:

$$\frac{di^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (4.26)$$

Como esperado, a equação 4.26 é uma equação diferencial de segunda ordem. Para sua resolução, é necessário termos duas condições iniciais: o valor de i e sua derivada, por exemplo, ou os valores iniciais de i e v . Sendo o valor inicial para i expresso pela equação 4.24, podemos obter o valor inicial da derivada por meio das equações 4.23 e 4.25, então:

$$\begin{aligned} RI(0) + L \frac{di(0)}{dt} + V_0 &= 0 \\ \frac{di(0)}{dt} &= -\frac{1}{L}(RI_0 + V_0) \end{aligned} \quad (4.27)$$

A partir do que já aprendemos sobre circuitos de primeira ordem, sabemos que a tensão do capacitor e a corrente do indutor é dada de forma exponencial. Portanto, podemos sugerir que a solução requerida desse circuito se dará de forma exponencial, como mostra a equação a seguir, em que A e s são constantes a serem determinadas:

$$i = Ae^{st} \quad (4.28)$$

Substituindo a equação 4.28 na equação 4.26, temos que:

$$As^2e^{st} + \frac{AR}{L}se^{st} + \frac{A}{LC}e^{st} = 0$$

Ou:

$$Ae^{st} \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (4.29)$$

Considerando que $i = Ae^{st}$ é a solução buscada, apenas a expressão entre parênteses pode ser zero. Assim, devemos solucionar a equação:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (4.30)$$

A equação 4.30 é conhecida como **equação característica**, uma vez que as raízes dessa equação ditam as características básicas da solução requerida, nesse caso, para corrente i .

As raízes obtidas ao resolver a equação do segundo grau, expressa em 4.30, são:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (4.31)$$

Sendo $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, então podemos reescrever a equação 4.31 como:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.32)$$

Segundo Sadiku (2013), as raízes da equação 4.32 são conhecidas como *frequência natural* do sistema cuja medida é dada por nepers por segundo (Np/s), pois estão associadas à resposta natural do circuito. Já ω_0 é chamada de **frequência ressonante**, **frequência de corte** ou de **frequência natural não amortecida**, expressa em radianos por segundo (rad/s), e α é o fator de amortecimento cuja medida é adimensional – esta é uma medida do grau de amortecimento da resposta do sistema, isto é, determina a rapidez com que a resposta é amortecida.

Em termos do fator de amortecimento, α , e da frequência natural não amortecida podemos reescrever a equação característica do sistema, equação 4.30, como:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega^2 = 0 \quad (4.33)$$

Se $s_1 \neq s_2$, a solução para a equação diferencial, 4.26, e consequentemente a resposta natural do circuito RLC, para $t > 0$, pressupondo a equação 4.28, é dada por:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.34)$$

sendo $i_1 = A_1 e^{s_1 t}$ e $i_2 = A_2 e^{s_2 t}$.

Da equação 4.32, podemos inferir que existem três tipos de soluções:

1. Se $\alpha > \omega_0$, temos o caso de amortecimento supercrítico ou circuito superamortecido.
2. Se $\alpha = \omega_0$, temos o caso de amortecimento crítico ou de circuito criticamente amortecido.
3. Se $\alpha < \omega_0$, temos o caso de subamortecimento ou circuito subamortecido.

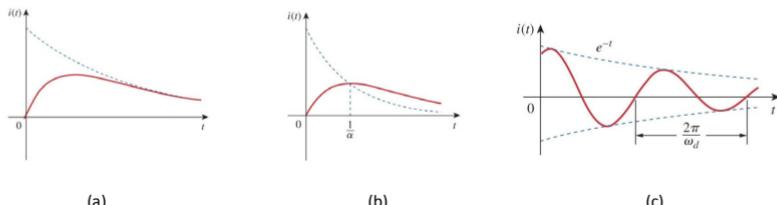
A seguir, analisaremos separadamente cada um dos casos.

Caso de amortecimento supercrítico ou circuito superamortecido ($\alpha > \omega_0$)

A partir das equações 4.31 e 4.32, se $\alpha > \omega_0$, então $C > \frac{4L}{R^2}$.

Quando isso ocorre, as raízes s_1 e s_2 são reais e diferentes. Portanto, a solução para o circuito da Figura 4.16 decai e se aproxima de zero à medida que t aumenta, como ilustra a Figura 4.17 (a).

Figura 4.17 | Resposta de um circuito RLC: (a) amortecimento supercrítico ou circuito superamortecido, (b) amortecimento crítico ou circuito criticamente amortecido e (c) caso subamortecido ou circuito subamortecido



Fonte: Sadiku (2013, p. 285).

Note que, pelo comportamento da corrente, Figura 4.17, há uma perda gradual da energia armazenada no indutor e no capacitor devido ao resistor R do circuito RLC série.

Caso de amortecimento crítico ou o circuito criticamente amortecido ($\alpha = \omega_0$)

A partir das equações 4.31 e 4.32, se $\alpha = \omega_0$, então $C = \frac{4L}{R^2}$. Quando isso ocorre, as raízes s_1 e s_2 são iguais com valor:

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

Logo, para que a equação diferencial de ordem tenha solução satisfatória, a resposta natural de um circuito com amortecimento crítico é a soma de dois termos, sendo um exponencial negativo e outro exponencial negativo multiplicado por um termo linear, como mostra a equação 4.35.

$$i(t) = (A_2 + A_1 t)e^{-\alpha t} \quad (4.35)$$

A solução característica desse circuito criticamente amortecido pode ser vista na Figura 4.17 (b).

Na Figura 4.17 (b), a corrente $i(t)$ atinge um valor máximo igual a $\frac{e^{-1}}{\alpha}$ em $t = \frac{1}{\alpha}$ e, em seguida, decresce até chegar a zero.



Pesquise mais

Para saber sobre a resolução completa da equação diferencial dos circuitos criticamente amortecidos, consulte o Capítulo 8 da obra indicada a seguir.

SADIKU, Matthew N. O.; ALEXANDER, Charles K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013. Capítulo 8, p. 284–285.

Caso de subamortecimento ou circuito subamortecido ($\alpha < \omega_0$)

A partir das equações 4.31 e 4.32, se $\alpha < \omega_0$, então $C < \frac{4L}{R^2}$. Quando isso ocorre, as raízes s_1 e s_2 são complexas, com valores iguais a:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (4.36)$$

sendo $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ a frequência natural amortecida do sistema.

Logo, a resposta natural do circuito RLC é dada como:

$$i(t) = A_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t} = e^{(-\alpha t)} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

Utilizando as identidades de Euler, $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$, obtemos:

$$i(t) = e^{(-\alpha t)} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \quad (4.37)$$

Substituindo $B_1 = (A_1 + A_2)$ e $B_2 = j(A_1 - A_2)$ na equação 4.37, então:

$$i(t) = e^{(-\alpha t)} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (4.38)$$

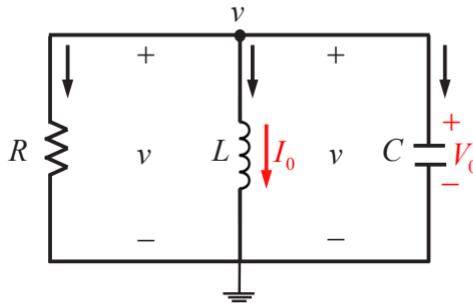
Observando as funções seno e cosseno na equação 4.38, concluímos que a resposta natural para esse caso é oscilatória e amortecida exponencialmente. Essa resposta tem constante de tempo igual a $\frac{1}{\alpha}$ e um período $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$, como mostra a Figura 4.17 (c).



No caso de circuitos do tipo subamortecido, qual a característica da resposta natural quando $R=0$? Como seria o gráfico da solução desse sistema?

Continuando nosso estudo dos circuitos de segunda ordem, veremos agora os circuitos RLC sem fonte em paralelo, como ilustra a Figura 4.18.

Figura 4.18 | Circuito RLC paralelo sem fonte



Fonte: elaborada pela autora.

Assim como no caso dos RLC série, para obtermos a resposta desse circuito é necessário conhecermos os valores iniciais das variáveis dos elementos armazenadores de energia. Sendo assim, consideremos a corrente inicial no indutor como I_0 e a tensão inicial no capacitor como V_0 . Então, podemos afirmar que:

$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt \quad (4.39)$$

$$v(0) = V_0 \quad (4.40)$$

Logo, ao aplicarmos a LKC (Lei de Kirchhoff das Correntes) ao nó superior do circuito apresentado na Figura 4.18, temos que:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (4.41)$$

Extraindo a derivada em relação a t e dividindo por C, temos que:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0$$

Assim como para o circuito em série, se considerarmos $v(t) = Ae^{st}$, em que A e s são constantes a serem determinadas, após algumas simplificações algébricas podemos afirmar que a equação característica para o circuito RLC paralelo será dado por:

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (4.42)$$

Obtendo as raízes da equação característica 4.41 como:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (4.43)$$

Considerando $\alpha = \frac{1}{2RC}$, o fator de amortecimento, e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, frequência natural não amortecida, podemos reescrever a equação 4.42, como:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.44)$$

Observe que as equações 4.33 e 4.44 são idênticas, e, da mesma forma, teremos três possíveis soluções:

1. Se $\alpha > \omega_0$, temos o **caso de amortecimento supercrítico** ou **círcuito superamortecido**. Neste caso, teremos $L > 4R^2C$ e as

raízes são reais e diferentes. A resposta natural para o sistema é dada como:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (4.45)$$

2. Se $\alpha = \omega_0$, temos o **caso de amortecimento crítico ou circuito criticamente amortecido**. Nesse caso, teremos $L = 4R^2C$ e as raízes são iguais, de modo que a resposta natural para o sistema seja:

$$v(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \quad (4.46)$$

3. Se $\alpha < \omega_0$, temos o **caso de subamortecimento ou circuito subamortecido**. Nesse caso, teremos $L < 4R^2C$ e as raízes são complexas, de modo que a resposta natural para o sistema seja:

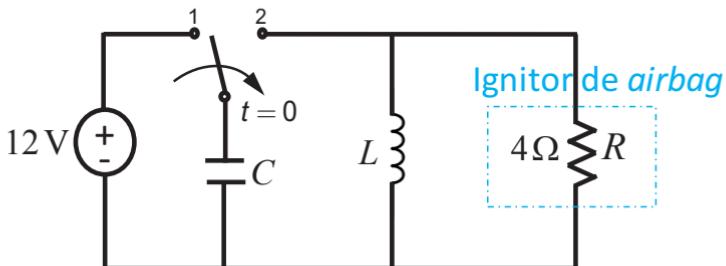
$$i(t) = e^{(-\alpha t)} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (4.47)$$

Sem medo de errar

As respostas para o circuito RLC paralelo são similares às apresentadas pela Figura 4.17 e dependerão do tipo de amortecimento do circuito.

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, que foi contratada para melhoria de um sistema de acionamento de um airbag. Sabemos que os airbags são bastante utilizados para proteger os motoristas e os passageiros automotivos. Contudo, o cliente informou que o sistema de acionamento desse dispositivo de segurança, em seu automóvel, não está funcionando corretamente e, para auxiliá-lo em seu serviço, entregou-lhe o manual técnico desse sistema.

Figura 4.19 | Circuito de um ignitor de airbag



Fonte: adaptado de Dorf (2012, p. 372).

Nesse manual, havia o esquemático elétrico do sistema, como mostra a Figura 4.19.

Ao analisar o manual, você pode perceber que, em caso de acidente, um pêndulo (ou chave) faz com que um capacitor seja ligado ao ignitor do airbag. Este é inflado por um explosivo detonado quando o componente resistivo, representado por R , dissipava energia. Todavia, não havia no manual os valores do capacitor e do indutor que deveriam acionar o sistema, as informações contidas para esse sistema são: constante de tempo igual $0,5\text{ s}$ e frequência natural não amortecida igual a $5\pi\text{ rad/s}$.

Como você poderia garantir o bom funcionamento do airbag ao cliente? Quais os valores dos elementos armazenadores de energia desse circuito?

Resolução da situação-problema

Para resolver essa situação, você deve certificar-se de quais os valores do capacitor e indutor que compõem o circuito de segunda ordem desse dispositivo de segurança.

Por meio do manual, você pôde perceber que a chave permanece por um longo tempo na posição 1 em $t = 0^-$. Nesse momento, o capacitor funcionará como um circuito aberto e a tensão do capacitor será a própria tensão da bateria, isto é, $V_c = 12\text{V}$ e a corrente no indutor, inicialmente, será nula ($i_L(0^-) = 0$), uma vez que a chave está na posição 1.

Considerando que a constante de tempo do sistema é igual a $0,5\text{ s}$ e que a constante de tempo é igual a $\frac{1}{\alpha}$, logo, podemos afirmar que $\alpha = 2$. Sendo $\alpha = \frac{1}{2RC}$, então:

$$C = \frac{1}{2R\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{16}\text{F}$$

Além disso, como a frequência natural não amortecida (ω_0) é $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, então:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{25\pi^2 \left(\frac{1}{16}\right)} = 0,065\text{H}$$

Assim, para que esse sistema de acionamento do airbag funcione corretamente, é necessário que o capacitor seja de 0,0625 F e o indutor seja de 0,065 H.

Avançando na prática

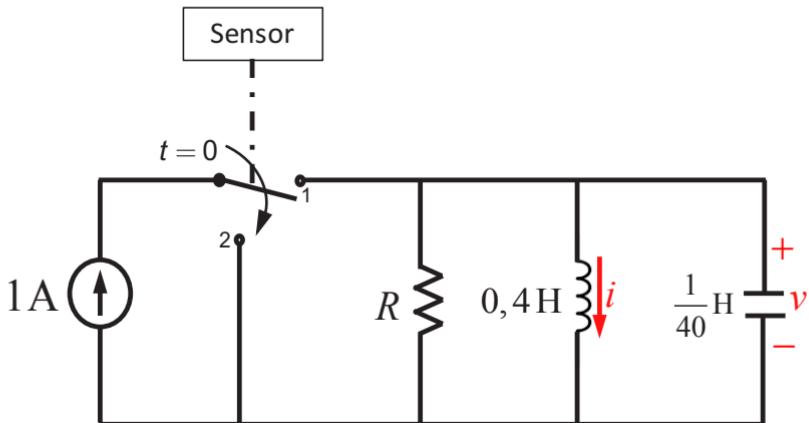
Análise circuito detector de fumaça

Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, que foi contratada para manutenção do sistema de detector de fumantes em aviões. A empresa aérea contratante informou que o circuito detector de fumaça não estava funcionando corretamente e, para auxiliar em seu serviço, entregou-lhe o manual técnico desse sistema.

Nesse manual, havia o esquemático elétrico do sistema, como mostra a Figura 4.20. Além disso, o manual do fabricante também informava que a frequência ressonante era de 10 rad/s e o fator de amortecimento era de 20.

Figura 4.20 | Circuito detector de fumaça



Fonte: adaptado de Dorf (2012, p. 378).

Para funcionar corretamente, o sensor deveria acionar uma chave e o aumento momentâneo da tensão faria uma lâmpada de advertência piscar no posto dos comissários de bordo, sinalizando a presença de fumante no voo.

Na tentativa de solucionar essa situação, com auxílio de um multímetro, seu colega de trabalho detectou uma corrente alta no resistor (R), o que poderia representar um possível curto no sistema. O que você deve fazer para resolver essa questão? Qual valor da tensão e corrente deveria ocorrer sobre a resistência (R) para que o detector de fumaça funcione corretamente?

Resolução da situação-problema

Para tentar solucionar esse problema, você resolveu pôr todo o seu conhecimento sobre circuitos RLC paralelos em prática. Como o indutor funciona como um curto-círcito no regime estacionário, a corrente apresentada sobre o resistor não está correta. Assim, você resolve calcular para ter certeza.

Sabendo inicialmente que a chave está por um longo tempo na posição 1, você consegue afirmar que a corrente no indutor no instante $t = 0^-$ é $i(0^-) = i(0^+) = 1\text{A}$ e a tensão no capacitor é de $v(0^-) = v(0^+) = 0\text{V}$.

Sabendo que o fator de amortecimento (α) é igual a 20 e que a frequência ressonante, ou de corte, é igual a 10, podemos afirmar que as raízes da equação característica são:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Logo:

$$s_{1,2} = -20 \pm \sqrt{20^2 - 10^2}$$

$$s_1 = -2,7 \text{ e } s_2 = -37,3$$

Como $\alpha > \omega_0$, o sistema é superamortecido ou contém amortecimento supercrítico. Então, a resposta natural para o circuito é dada pela equação (4.46) e repetida a seguir:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ou:

$$v(t) = A_1 e^{-2,7t} + A_2 e^{-37,3t}$$

Em $t = 0$:

$$v(0) = 0 = A_1 + A_2 \quad (4.49)$$

Aplicando a LKC ao nó superior em $t = 0^+$, temos:

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$\frac{v(0^+)}{R} + i(0^+) + \frac{dv(0^+)}{dt} = 0$$

$$\frac{0}{R} + i(0^+) + \frac{1}{40} \frac{dv(0^+)}{dt} = 0$$

Então:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -40i(0^+) = -40 \quad (4.50)$$

Ou derivando a equação 4.46:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -2,7A_1 - 37,3A_2 \quad (4.51)$$

Igualando as equações 4.50 e 4.51:

$$+2,7A_1 + 37,3A_2 = +40 \quad (4.52)$$

A partir das equações 4.49 e 4.52, podemos afirmar que:

$$A_1 = -1,16 \text{ e } A_2 = 1,16$$

Assim, a tensão esperada sobre os elementos passivos é $v(t) = -1,16e^{-2,7t} + 1,16e^{-37,3t}$ e, no momento do chaveamento, a corrente sobre o resistor é nula.

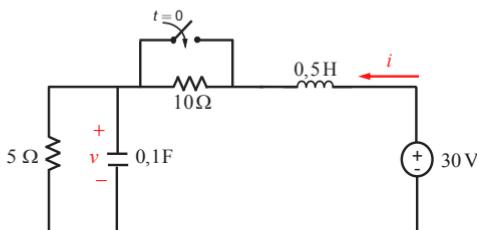
Para garantir o correto funcionamento desse sistema, vale a pena procurar algum ponto de curto-círcuito.

Faça valer a pena

1. Os circuitos de segunda ordem são aqueles cujas respostas são descritas por equações diferenciais com derivadas de segunda ordem. Para análise da resposta natural de um circuito de segunda ordem, é fundamental a determinação dos valores iniciais, finais das variáveis de circuito, bem como de suas variações determinadas pelas derivadas.

A chave da figura a seguir foi aberta há um certo tempo e, no instante $t = 0$, foi fechada.

Figura | Esquemático do circuito de segunda ordem – Questão 1



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos afirmar, respectivamente, que

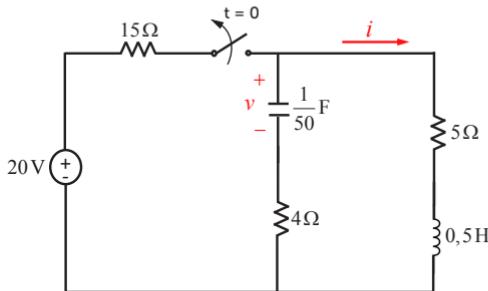
$i(0^+), v(0^+), \frac{di(0^+)}{dt}, \frac{dv(0^+)}{dt}, i(\infty) \text{ e } v(\infty)$ equivalem a:

- a) 6 A, 10 V, 40 A/s, 0 V/s, 2 A, 30 V.
- b) 6 A, 10 V, 40 A/s, 0 V/s, 6 A, 30 V.
- c) 2 A, 10 V, 40 A/s, 0 V/s, 6 A, 30 V.
- d) 2 A, 10 V, 40 A/s, 0 V/s, 2 A, 30 V.
- e) 2 A, 10 V, 40 A/s, 0 V/s, 6 A, 10 V.

2. Os circuitos de segunda ordem são descritos por equações diferenciais com derivadas de segunda ordem. Os mais comuns são os circuitos RLC, isto é, compostos por resistor, indutor e capacitor, podendo estar associados em série ou paralelo.

Dado o circuito da figura a seguir, determine a corrente $i(t)$. Suponha que a chave estava inicialmente fechada por um longo tempo e em $t = 0$ a chave é aberta.

Figura | Esquemático do circuito de segunda ordem – Questão 2



Fonte: Sadiku (2013).

- a) $i(t) = e^{-9t} (0,6882 \cos 4,359t + \operatorname{sen} 4,359t) A$
- b) $i(t) = 0,6882 \cos 4,359t + \operatorname{sen} 4,359t A$
- c) $i(t) = \cos 4,359t + 0,6882 \operatorname{sen} 4,359t A$
- d) $i(t) = e^{-9t} (\cos 4,359t + 0,6882 \operatorname{sen} 4,359t) A$
- e) $i(t) = (1 + 0,6882t) e^{-9t} A$

3. Os circuitos de segunda ordem caracterizam-se por serem descritos por equações diferenciais com derivadas de segunda ordem. A resposta natural, ou transitória, desse tipo de circuito pode ser do tipo subamortecida, criticamente amortecida ou superamortecida, a depender dos valores dos elementos passivos que formam esse tipo de circuito.

Considere $R = 20\Omega$, $L = 2H$ e $C = \frac{1}{2}F$. Agora, escolha a alternativa que determina qual é esse tipo de circuito e suas raízes:

- a) Circuito superamortecido, $s_1 = -0,101$ e $s_2 = -9,899$.
- b) Circuito criticamente amortecido, $s_1 = -0,101$ e $s_2 = -0,101$.
- c) Circuito subamortecido, $s_{1,2} = -0,101 \pm j9,899$.
- d) Circuito superamortecido, $s_{1,2} = -0,101 \pm j9,899$.
- e) Circuito subamortecido, $s_1 = -0,101$ e $s_2 = -9,899$.

Seção 4.3

Circuitos de segunda ordem com fonte

Diálogo aberto

Na seção anterior fomos apresentados aos circuitos de segunda ordem, isto é, circuitos formados por um resistor equivalente e dois elementos armazenadores de energia, podendo ser dois indutores, dois capacitores ou um capacitor e um indutor. Aprendemos que esses elementos passivos podem ser associados em série ou paralelo sem a presença de fontes e vimos como obter a resposta natural desse tipo de circuito.

Nesta seção, aprenderemos como analisar a resposta completa, isto é, a resposta natural e a forçada (ou transitória e permanente) que ocorre quando os circuitos de segunda ordem são excitados por fontes independentes de energia do tipo CC (corrente contínua) aplicadas de forma súbita ou instantânea. Os circuitos de segunda ordem alimentados com esses tipos de fontes correspondem à operação de muitos dispositivos reais, como os rádios de receptores de comunicação e projetos de filtros nas áreas de telecomunicações.

Sendo assim, para pôr esse conhecimento em prática, imagine que você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, que foi contratada para a implementação de um sistema de ignição de automóveis. Sua atividade é analisar qual a tensão produzida pelo indutor que será entregue ao transformador para gerar uma faísca na vela de ignição de um automóvel popular. Qual você acredita ser a melhor forma de obter esse valor de tensão?

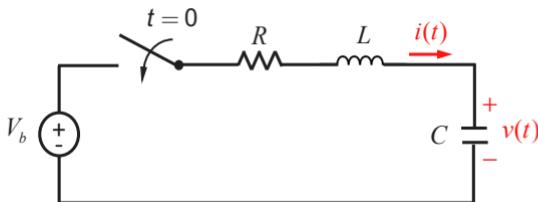
Estude atentamente os conteúdos desta seção para ser capaz de solucionar essa questão.

Não pode faltar

Na Seção 4.1 desta unidade, vimos como se comportam os circuitos de primeira ordem quando alimentados por uma fonte CC aplicada de forma súbita ao circuito, isto é, quando submetidos a uma função forçante no instante de tempo nulo em que uma chave é fechada. De forma similar, aprenderemos nesta seção como analisar e obter a resposta dos circuitos de segunda ordem quando submetidos a uma função degrau.

Sabemos que a resposta à função degrau é obtida por uma aplicação repentina de uma fonte CC, o que equivale a dizer que o circuito opera com uma chave em série com uma bateria. Sendo assim, considere um circuito RLC série, conforme ilustrado na Figura 4.21, no qual a chave é fechada em $t = 0$. Como a chave está aberta, podemos notar que a corrente é nula antes de $t = 0$.

Figura 4.21 | Circuito RLC série excitado por uma fonte de tensão em degrau



Fonte: elaborada pela autora.

Contudo, para $t > 0$, temos a comutação, ou fechamento, da chave e, portanto, podemos calcular a corrente desse circuito. Com esse objetivo, devemos inicialmente aplicar a Lei de Kirchhoff das tensões:

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + v = V_b \quad (4.42)$$

Como o circuito está em série, podemos dizer que:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (4.43)$$

Substituindo a equação 4.43 em 4.42, reorganizando os termos, podemos afirmar que:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_b}{LC} \quad (4.44)$$



Refletir

Ao analisarmos a equação diferencial para os circuitos com fonte e sem fonte, vista na seção anterior, o que muda? Essa equação que descreve o comportamento do sistema é alterada? O que podemos concluir?

Como o circuito está alimentado por uma função forçante, a solução desse sistema é formada pela resposta natural e pela resposta forçada, isto é:

Resposta completa = resposta natural + resposta forçada

Ou ainda:

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) \quad (4.45)$$

Sendo v_t , a resposta transitória, natural ou transiente, é a componente da resposta que irá desaparecer com o tempo; e v_{ss} , a resposta de estado estável ou permanente, é o valor final de $v(t)$.

A forma da resposta natural é a solução estudada na seção anterior para o circuito série sem fonte e depende das características de amortecimento do sistema.

Já a resposta, ou tensão do capacitor, em regime permanente,



Lembre-se

A resposta transitória ou natural, $v_t(t)$ para um circuito de segunda ordem é dada de acordo com o amortecimento, conforme indicado:

$$v_t(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \rightarrow \text{Amortecimento supercrítico}$$

$$v_t(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \rightarrow \text{Amortecimento crítico}$$

$$v_t(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t) e^{-\alpha t} \rightarrow \text{Subamortecido}$$

ou estado estável, para o circuito da Figura 4.21 é V_b , ou seja, o valor final da tensão do capacitor é o mesmo da fonte, visto que o capacitor irá funcionar como circuito aberto. Sendo assim:

$$v_{ss} = v(\infty) = V_b \quad (4.46)$$

Logo, a resposta completa para o circuito RLC série, Figura 4.21, para os casos de amortecimento supercrítico, crítico e subamortecido, pode, respectivamente, ser dada como:

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + V_b \rightarrow \text{Amortecimento supercrítico} \quad (4.47a)$$

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} + V_b \rightarrow \text{Amortecimento crítico} \quad (4.47b)$$

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} + V_b \rightarrow \text{Subamortecido} \quad (4.47c)$$

Os valores das constantes A_1 e A_2 são obtidas a partir das condições iniciais $v(0)$ e $\frac{dv(0)}{dt}$, como fizemos ao calcular a resposta natural na seção anterior.

A partir da equação 4.47, podemos, então, obter a corrente do circuito, $i(t)$, pois o valor de $v(t)$ agora é conhecido. Sendo assim, basta substituirmos a equação 4.47 na equação 4.43 para obtermos a solução desejada para o circuito RLC série. Vale salientar que a corrente é a mesma através do capacitor, indutor e resistor. Logo, podemos afirmar que a tensão no resistor será dada como

$$v_R = R i(t) \text{ e a tensão no indutor como } v_L = L \frac{di}{dt}.$$



Pesquise mais

Se a função forçante for uma constante, vimos que a resposta forçada esperada também será uma constante, uma vez que as derivadas são nulas. Contudo, se a função forçante de entrada for uma exponencial, a resposta esperada também será uma exponencial, pois as derivadas são exponenciais.

Logo, a solução forçada, ou em regime permanente, depende da função forçante de entrada no circuito, como mostra o quadro:

Quadro 4.1 | Respostas forçadas para um circuito elétrico

Função forçante	Solução esperada
K (constante)	A (constante)
Kt	$At + B$
Kt^2	$At^2 + Bt + C$
$K \sin \omega t$	$A \sin \omega t + B \cos \omega t$
$K e^{-\alpha t}$	$A e^{-\alpha t}$

Fonte: adaptado de Dorf (2012, p. 359).

Para saber uma pouco mais sobre as diferentes funções forçantes, consulte o material indicado a seguir.

DORF, Richard C.; SVOBODA, James A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

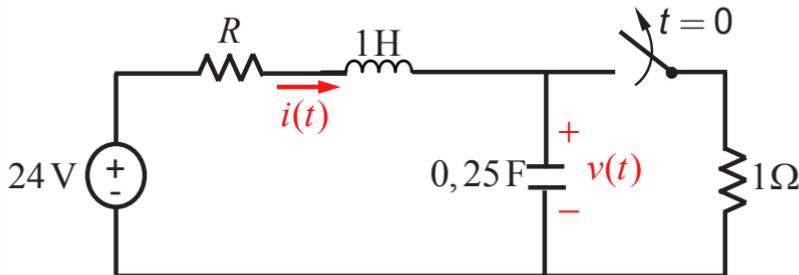
Também presente em nossa biblioteca virtual, disponível em: <<https://biblioteca-virtual.com/detalhes/parceiros/5>>. Acesso em: 11 abr. 2018.



Exemplificando

Para o circuito da Figura 4.22, determine $v(t)$ para $t > 0$. Considere $R = 5\Omega$, $R = 4\Omega$ e $R = 1\Omega$.

Figura 4.22 | Esquemático elétrico com diferentes valores de R



Fonte: Sadiku e Alexander (2013, p. 295).

Nesse sistema, a chave encontra-se fechada há um longo tempo para $t < 0$. Dessa forma, o capacitor se comportará como um circuito aberto, enquanto o indutor irá atuar como um curto-círcuito. Sendo assim:

- Quando $R = 5\Omega$: a corrente inicial através do indutor será:

$$i(0) = \frac{24}{5+1} = 4 \text{ A}$$

A tensão inicial do capacitor será igual à tensão sobre o resistor de 1Ω , logo:

$$v(0) = 1 \cdot 4 = 4 \text{ V}$$

Para $t > 0$, a chave é aberta e o resistor de 1Ω é desconectado. O circuito resultante é um RLC série com uma fonte de tensão, constante ou degrau.

Como visto na seção anterior, as raízes características desse sistema são dadas como:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \cdot 1} = 2,5 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$$

Logo:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -4$$

Sendo $\alpha > \omega_0$, podemos afirmar que se trata de um sistema com amortecimento supercrítico. Assim, a resposta transitória desse sistema será dada como:

$$v_t(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

Já a resposta em regime permanente será o valor final da tensão no capacitor. Sendo assim:

$$v_{ss} = 24 \text{ V}$$

Visto que o capacitor irá funcionar como circuito aberto, a corrente será nula e o valor de tensão será o próprio valor de tensão da fonte. Dessa forma, a resposta completa para esse circuito será dada como:

$$v(t) = v_t + v_{ss} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + 24$$

Para determinarmos as constantes A_1 e A_2 , devemos utilizar as condições iniciais:

$$v(0) = A_1 e^{s_1 \cdot 0} + A_2 e^{s_2 \cdot 0} + 24 = A_1 + A_2 + 24$$

Como $v(0) = 4$, então:

$$4 = A_1 + A_2 + 24$$

$$A_1 + A_2 = 20$$

Já a corrente no indutor, que é a mesma corrente no capacitor, será dada como para $t = 0$:

$$i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 4$$

Logo:

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{C} = \frac{4}{0,25} = 16$$

Derivando a equação da resposta completa para o sistema, encontramos:

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t}$$

Em $t = 0$:

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16 = A_1 - 4A_2$$

Podemos concluir que $A_1 = -\frac{64}{3}$ e $A_2 = \frac{4}{3}$. Assim, a resposta completa ficará:

$$v(t) = \frac{4}{3}(-16e^{-t} + e^{-4t}) + 24$$

- Quando $R = 4\Omega$: a corrente inicial através do indutor será:

$$i(0) = \frac{24}{4+1} = 4,8\text{ A}$$

A tensão inicial do capacitor será igual à tensão sobre o resistor de 1Ω , logo:

$$v(0) = 1 \cdot 4,8 = 4,8\text{ V}$$

As raízes características desse sistema serão dadas como:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$$

Logo:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha = -2$$

Sendo $\alpha = \omega_0$, podemos afirmar que se trata de um sistema com amortecimento crítico. Logo, a resposta transitória desse sistema será dada como:

$$v_t(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

Já a resposta em regime permanente será o valor final da tensão no capacitor. Sendo assim:

$$v_{ss} = 24 \text{ V}$$

A resposta completa para esse circuito será dada como:

$$v(t) = v_t + v_{ss} = (A_1 + A_2 t)e^{-2t} + 24$$

Para determinarmos as constantes A_1 e A_2 , devemos utilizar as condições iniciais:

$$v(0) = 4,8 = 24 + A_1$$

$$A_1 = -19,2$$

Sendo $i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 4,8$

ou

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{4,8}{C} = 19,2$$

Derivando a equação da resposta completa para o sistema, encontraremos:

$$\frac{dv}{dt} = (-2A_1 - 2tA_2 + A_2)e^{-2t}$$

Em $t = 0$:

$$19,2 = -2A_1 + A_2$$

Logo, podemos afirmar que $A_1 = -19,2$ e $A_2 = -19,2$.
A resposta completa ficará:

$$v(t) = -19,2(1+t)e^{-2t} + 24$$

- Quando $R = 1\Omega$: a corrente inicial através do indutor será

$$i(0) = \frac{24}{1+1} = 12\text{ A}$$

A tensão inicial do capacitor é igual à tensão sobre o resistor de 1Ω , logo:

$$v(0) = 1 \cdot 12 = 12\text{ V}$$

As raízes características desse sistema serão dadas como:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2 \cdot 1} = 0,5 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$$

Logo:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 0,5 \pm j1,936$$

Sendo $\alpha < \omega_0$, podemos afirmar que se trata de um sistema suavamente amortecido. Logo, a resposta transitória desse sistema será dada como:

$$v_i(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t}$$

Já a resposta em regime permanente será o valor final da tensão no capacitor. Sendo assim:

$$v_{ss} = 24\text{ V}$$

A resposta completa para esse circuito será dada como:

$$v(t) = v_t + v_{ss} = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} + 24$$

Para determinarmos as constantes A_1 e A_2 , devemos utilizar as condições iniciais:

$$v(0) = 12 = 24 + A_1$$

$$A_1 = -12$$

Sendo $i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 12$

ou

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{12}{C} = 48$$

Derivando a equação da resposta completa para o sistema, encontraremos:

$$\frac{dv}{dt} = 0,5e^{-0,5t} (A_1 \cos 1,936t + A_2 \sin 1,936t)$$

Em $t = 0$:

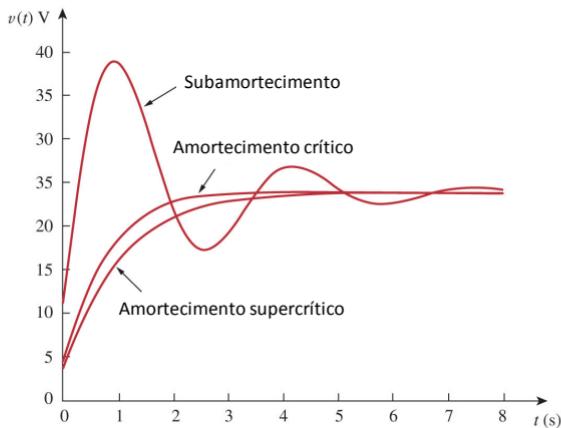
$$48 = (-0 + 1,936A_2) - 0,5(A_1 + 0)$$

Sabendo que $A_1 = -12$, então resulta em $A_2 = 21,694$. A resposta completa ficará:

$$v(t) = (-12\cos 1,936t + 21,694\sin 1,936t)e^{-0,5t} + 24$$

A Figura 4.23 representa graficamente as respostas para os três casos.

Figura 4.23 | Resposta para os três níveis de amortecimento do circuito da Figura 4.22 | Esquemático elétrico com diferentes valores de R_2

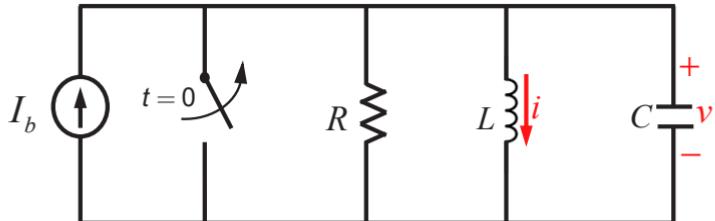


Fonte: adaptada de Sadiku (2013, p. 299).

Observe, a partir da Figura 4.23, que, nesse caso, a resposta com amortecimento crítico se aproxima mais rapidamente da entrada degrau de 24 V.

Agora, vamos analisar a resposta completa para um circuito RLC em paralelo. Como mostra a Figura 4.24, a chave é aberta em $t = 0$. Como a chave está fechada, podemos notar que a corrente é nula antes de $t = 0$.

Figura 4.24 | Circuito RLC paralelo excitado por uma fonte de corrente em degrau



Fonte: elaborada pela autora.

Contudo, para $t > 0$, temos a comutação, ou abertura, da chave e, portanto, podemos calcular a corrente desse circuito. Com esse objetivo, devemos inicialmente aplicar a Lei de Kirchhoff das correntes:

$$\frac{v}{R} + i + C \frac{dv}{dt} = I_b \quad (4.48)$$

Como o circuito está em paralelo, podemos dizer que:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (4.49)$$

Substituindo a equação 4.49 em 4.48, reorganizando os termos, podemos afirmar que:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_b}{LC} \quad (4.50)$$

Como o circuito está alimentado por uma fonte CC, degrau, a solução desse sistema é formada pela resposta natural (i_t) e pela resposta de estado estável (i_{ss}):

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) \quad (4.51)$$

A forma da resposta natural é a solução estudada na seção anterior para o circuito paralelo sem fonte e depende das características de amortecimento do sistema.



A resposta transitória ou natural, $i_t(t)$, para um circuito de segunda ordem, é dada de acordo com o amortecimento, como:

$$i_t(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \rightarrow \text{Amortecimento supercrítico}$$

$$i_t(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \rightarrow \text{Amortecimento crítico}$$

$$i_t(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} \rightarrow \text{Subamortecido}$$

Já a resposta em regime permanente, ou estável, para o circuito da Figura 4.23, é I_b , ou seja, o valor final para corrente através do indutor é o valor final de i . Logo:

$$i_{ss} = i(\infty) = I_b \quad (4.52)$$

Assim, a resposta completa para o circuito RLC paralelo, Figura 4.22, para os casos de amortecimento supercrítico, crítico e subamortecido, pode, respectivamente, ser dada como:

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + I_b \quad \begin{array}{l} \text{à Amortecimento supercrítico} \\ (4.53a) \end{array}$$

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} + I_b \quad \begin{array}{l} \text{à Amortecimento crítico} \\ (4.53b) \end{array}$$

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} + I_b \quad \begin{array}{l} \text{à Subamortecido} \\ (4.53c) \end{array}$$

Os valores das constantes A_1 e A_2 são obtidas a partir das condições iniciais $i(0)$ e $\frac{di(0)}{dt}$, como fizemos ao calcular a resposta natural na seção anterior.

A partir da equação 4.53, podemos obter a tensão do circuito, $v(t)$, pois o valor de $i(t)$ agora é conhecido. Sendo assim, basta substituirmos a equação 4.53 na equação 4.49 para obtermos a solução desejada para o circuito RLC paralelo.



Dado um circuito de segunda ordem, determinamos sua resposta a uma fonte degrau da seguinte forma:

1. Inicialmente, determinamos as condições iniciais e o valor final da tensão ou corrente, que dependem da arquitetura do sistema a ser analisado.
2. Desativamos as fontes independentes e encontramos a resposta transitória, da tensão ou corrente, aplicando a LKC e LKT. Assim que for obtida a equação diferencial que descreve o sistema, determinamos as suas raízes características. A depender do amortecimento da resposta, podemos obter a solução transitória da resposta com duas constantes desconhecidas.
3. Obtemos a resposta em regime permanente, que é o valor final, da tensão ou corrente, obtido na etapa 1.
4. Monta-se a resposta completa do sistema analisado que é a soma da resposta transitória e da resposta em regime permanente.
5. Estabelecer as constantes associadas com a resposta transitória, impondo as condições iniciais, determinadas no item 1.

Nesta etapa do estudo de circuitos de segunda ordem, você deve ter notado a similaridade entre as equações ordinárias de um circuito RLC série e a equação ordinária que descreve o comportamento do circuito RLC paralelo. Essas equações são realmente as mesmas, exceto pelo fato de trocarmos a tensão pela corrente, a resistência pela condutância e a capacidade pela indutância. Portanto, algumas vezes, na análise de circuitos acontece de dois diferentes circuitos apresentarem as mesmas equações e soluções (exceto por alguns elementos complementares, que são trocados) e esse princípio, ou intercambialidade, é conhecido como **dualidade**.

Esse conceito é muito utilizado para diminuir o tempo e esforço gasto na análise dos circuitos elétricos, pois quando é conhecida a solução para um circuito, automaticamente temos a solução para o circuito dual.

Os pares duais podem ser vistos no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 | Pares duais

Resistência (R)	Condutância (G)
Indutância (L)	Capacitância (C)
Tensão (v)	Corrente (i)
Fonte de tensão	Fonte de corrente
Nó	Malha
Caminho em série	Caminho em paralelo
Círculo aberto	Curto-circuito
LKT	LKC
Thévenin	Norton

Fonte: adaptado de Sadiku (2013, página 312).



Refletia

Observe no Fonte de corrente que a potência não tem nenhum dual. Qual o motivo dessa e

Observe no Quadro 4.2 que o princípio da dualidade se estende a teoremas, configurações e elementos de circuitos. Além disso, deve-se salientar que o princípio da dualidade se limita a circuitos planares, uma vez que os circuitos não planares não podem ser descritos por um sistema de equações de malhas.

O dual de um circuito é determinado por técnicas gráficas, segundo as seguintes etapas:

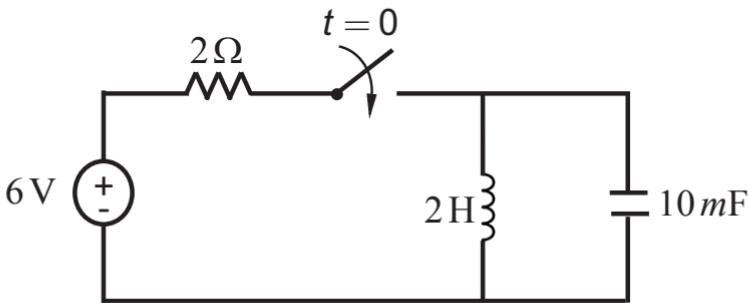
1. Inserir um nó ao centro de cada malha do circuito dado e colocar o nó de referência, o terra, do circuito fora do circuito dado.
2. Substituir cada elemento por seu dual.
3. Para determinar a polaridade das fontes de tensão e o sentido das fontes de corrente, atentar-se ao fato de que uma fonte de tensão que produz uma corrente de malha positiva, sentido horário, possui como seu dual uma fonte de corrente cujo sentido de referência é do terra para o nó que não é de referência.

Em caso de dúvida, você pode verificar o circuito dual escrevendo as equações de malhas ou de nós. As equações de malhas do circuito original devem ser iguais às equações nodais do circuito dual.



Determine o dual do circuito:

Figura 4.25 | Circuito original

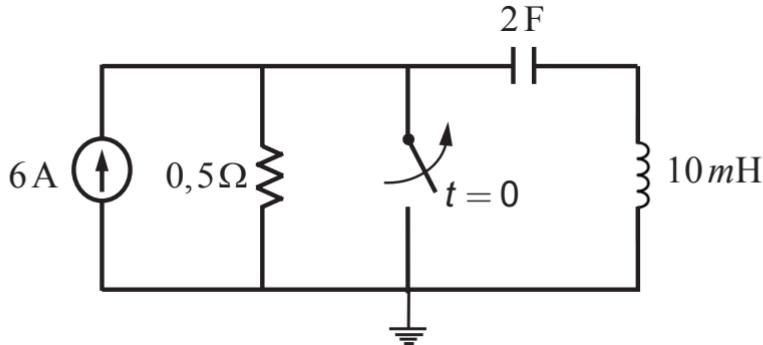


Fonte: Sadiku (2013, p. 313).

A partir do Fonte de corrente, devemos inicialmente desenhar um nó central e um nó de referência. Em seguida, o que é série torna-se paralelo e vice-versa, a fonte de tensão torna-se fonte de corrente; a indutância torna-se capacitância e vice-versa.

Portanto, o dual para o circuito original ilustrado pela Figura 4.25 é dado como:

Figura 4.26 | Dual do circuito da Figura 4.25

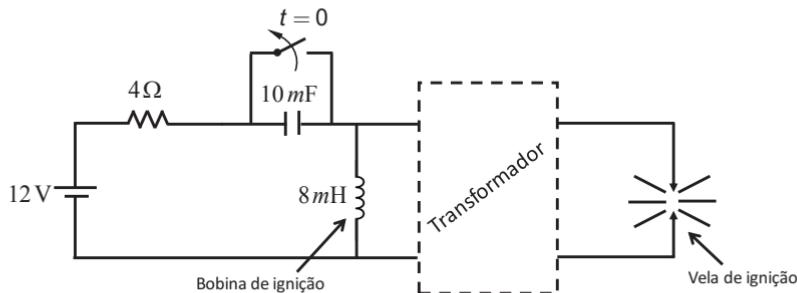


Fonte: Sadiku (2013, p. 313).

Sem medo de errar

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica, que foi contratada para a implementação de um sistema de ignição de automóveis que é modelado como ilustrado pela Figura 4.27. Sua atividade é analisar qual a tensão produzida pelo indutor que será entregue ao transformador para gerar uma faísca na vela de ignição de um automóvel popular.

Figura 4.27 | Circuito gerador de ignição de automóvel



Fonte: Sadiku (2013, p. 315).

Sendo a fonte de tensão de 12 V relativa à bateria e ao alternador, o resistor de 4Ω equivalente à resistência da fiação, o indutor de 8 mH correspondente à bobina de ignição e o capacitor de $1\mu F$, paralelo com a chave (denominada de distribuidor ou ignição eletrônica), análogo ao condensador.

Considerando que a chave estava fechada em $t = 0^-$ por um longo tempo, isto é, o circuito estava em um estado estável em que o capacitor funcionava como circuito aberto e o indutor como um curto-círcuito, então:

$$i(0^-) = i(0^+) = \frac{12}{4} = 3 \text{ A} , v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$$

Para obtermos $\frac{di(0^+)}{dt}$, aplicamos a LKT à malha em $t = 0^+$, logo:

$$-12 + 4i(0^+) + v_L(0^+) + v_c(0^+) = 0$$

$$v_L(0^+) = 0$$

Sabendo que $v_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt}$, então:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 0$$

Para obtermos as características transientes do sistema, vimos que basta obtermos:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4}{2 \cdot 0,008} = 250, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}} = 1,118 \cdot 10^4$$

Como $\alpha < \omega_0$, a resposta do sistema é subamortecida com frequência natural igual a:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \simeq \omega_0 = 1,118 \cdot 10^4$$

Dessa forma, a resposta transitória para corrente do circuito é dada como:

$$i_t(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

Já a corrente do regime permanente, ou estado estável, é dada conforme indicado a seguir, uma vez que o capacitor funcionará como um circuito aberto:

$$i_{ss}(t) = i(\infty) = 0$$

Assim, a resposta completa para corrente é dada como:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_t(t) + i_{ss}(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + 0 = \\ &= e^{-250t} (A \cos 11180t + B \sin 11180t) \end{aligned}$$

Para determinarmos os valores das constantes A e B, devemos utilizar os valores quando $t = 0$. Assim:

$$i(0) = 3 = A + 0$$

$$A = 3$$

Derivando a resposta completa para corrente, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -250e^{-250t} (A \cos 11180t + B \sin 11180t) + \\ &+ e^{-250t} (-11180A \cos 11180t + 11180B \sin 11180t) \end{aligned}$$

Em $t = 0$ a equação da derivada da resposta completa é:

$$\frac{di}{dt} = 0 = -250A + 11180B$$

Como $A = 3$, então:

$$B = 0,0671$$

Portanto:

$$i(t) = e^{-250} (3\cos 11180t + 0,0671 \operatorname{sen} 11180t)$$

Como $v_L(t) = L \frac{di}{dt}$, então:

$$v_L = -268e^{-250t} \operatorname{sen} 11180t$$

A tensão no indutor é máxima quando o seno é unitário, ou seja, quando $11180t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = 140,5 \mu s$. Assim, a tensão de pico do indutor é:

$$v_L(140,5 \mu s) = -268e^{-250 \cdot 140,5 \cdot 10^{-6}} = -259 V$$

Portanto, a tensão que deve ser entregue na entrada do transformador é de **259 V**. O transformador (dispositivo que induz valores de tensões e corrente, modificando seus valores) irá ser usado para aumentar a tensão no indutor para o nível necessário para gerar uma faísca na vela de ignição de um automóvel popular.

Avançando na prática

Desenvolvimento de um transponder

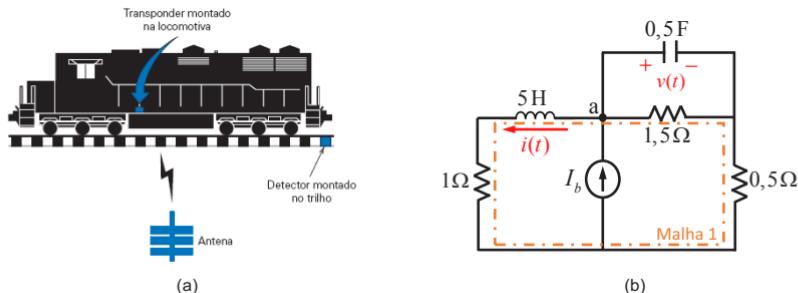
Descrição da situação-problema

Você é o responsável técnico de uma empresa que oferece soluções e manutenção elétrica contratada por uma empresa ferroviária para o desenvolvimento de um transponder, para o controle de informações das locomotivas dela.

As ferrovias, usualmente, utilizam um sistema elétrico de acompanhamento dos trens. Quando um trem passa por um ponto de controle, um detector situado nos trilhos ativa um módulo de radiofrequência. A antena do módulo, ilustrada na Figura 4.28 (a), envia e recebe de volta um sinal para o transponder situado na

locomotiva. Um processador acoplado à antena extrai do sinal informações úteis sobre a locomotiva, como localização, velocidade e direção do trem, o que auxilia as empresas na otimização do uso das locomotivas, trens, pessoal e equipamentos (DORF, 2012).

Figura 4.28 | Transponder: (a) sistema de identificação e (b) esquemático elétrico



Fonte: adaptado de Dorf (2012, p. 381).

A Figura 4.28 (b) apresenta uma representação simplificada de um transponder. Sua atividade é analisar qual a tensão do capacitor e qual a corrente do indutor, quando a fonte de corrente de entrada for $9 + 3e^{-2t}u(t) \text{ A}$, para dimensioná-las para equipe de compra.

Resolução da situação-problema

Como a fonte de corrente é uma função degrau, vimos, na Seção 4.1 desta unidade, que ela pode ser representada como ação de uma chave, como ilustrado na Figura 4.3.

Sendo assim, podemos considerar para $t = 0^-$ que a fonte esteja ligada há muito tempo ao circuito, logo, o capacitor funciona como um circuito em aberto e o indutor como curto-círcuito e obtemos os valores iniciais para $i(t)$ e $v(t)$ como:

$$i(0^-) = i(0^+) = \frac{2}{2+1} \cdot 9 = 6 \text{ A} \quad v(0^-) = v(0^+) = \frac{1}{2+1} \cdot 1,5 = 4,5 \text{ V}$$

Já em $t > 0$, após a comutação da fonte, para encontrarmos as respostas desejadas, devemos inicialmente aplicar a LKC ao nó “a”, como:

$$i(t) + 0,5 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{1,5} = I_b$$

Em seguida, aplica-se a LKT à malha 1, ilustrada na Figura 4.27 (b), como:

$$V_{resistor\ 1\Omega} + V_{indutor} = v + V_{resistor\ 5\Omega}$$

$$1i + 5 \frac{di}{dt} = v + 0,5(i_{capacitor} + i_{resistor\ 1,5\Omega})$$

$$1i + 5 \frac{di}{dt} = v + 0,5 \left(0,5 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{1,5} \right)$$

Substituindo a equação resultante ao aplicar a LKC na última equação e organizando os termos, chegamos a:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{49}{30} \frac{dv}{dt} + \frac{4}{5}v = \frac{2}{5}I_b + 2 \frac{di_b}{dt}$$

Como $I_b = 9 + 3e^{-2t} A$, então podemos encontrar a equação característica do sistema como:

$$s^2 + \frac{49}{30}s + \frac{4}{5} = 0$$

Cujas raízes são $s_{1,2} = -0,817 \pm j0,365$. Como as raízes são complexas, caracterizam um sistema com subamortecimento com resposta transitória como:

$$v_t(t) = e^{-0,817t} (A_1 \cos 0,365t + A_2 \sin 0,365t)$$

Já a reposta em regime permanente pode ser considerada como:

$$v_{ss}(t) = B_0 + B_1 e^{-2t}$$

Uma vez que a fonte de corrente de entrada é $I_b = 9 + 3e^{-2t} A$.

Substituindo o v_{ss} na equação diferencial e igualando os termos, encontramos os valores das constantes $B_0 = 4,5$ e $B_1 = -7,04$. Assim, podemos escrever a resposta completa para a tensão do capacitor como:

$$v(t) = v_t + v_{ss} = \left[e^{-0,817t} (A_1 \cos 0,365t + A_2 \sin 0,365t) \right] + 4,5 - 7,04e^{-2t}$$

Logo, utilizando as características iniciais, podemos dizer que:

$$v(0) = 4,5 = A_1 + 4,5 - 7,04 \quad , \quad A_1 = 7,04$$

E, fazendo:

$$\frac{dv(0)}{dt} = 2I_b(0) - 2i(0) - \frac{4}{3}v(0) = 2(9+3) - 2 \cdot 6 - \frac{4}{3} \cdot 4,5 = 6$$

$$6 = -0,817A_1 + 0,365A_2 + 14,08$$

Então:

$$A_2 = -22,82$$

Portanto:

$$v(t) = \left[e^{-0,817t} (7,04 \cos 0,365t - 22,82 \sin 0,365t) \right] + 4,5 - 7,04e^{-2t}$$

Já a corrente:

$$i(t) = I_b(t) - \frac{v(t)}{1,5} - 0,5 \frac{dv(t)}{dt}$$

Considerando o valor de $v(t)$, então:

$$i(t) = e^{0,817t} (2,37 \cos 0,365t + 7,14 \sin 0,365t) + 6 + 0,65e^{-2t} A$$

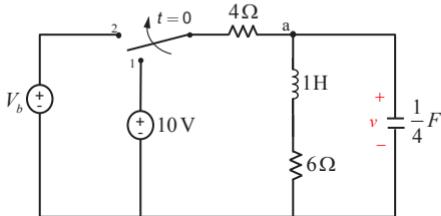
Sendo assim, você deve dimensionar os elementos passivos para suportar os valores de pico, sendo $v_{max} = 4,5V$ e $i_{max} = 9,02A$.

Faça valer a pena!

- 1.** A resposta natural e a forçada (ou transitória e a permanente) ocorrem quando os circuitos elétricos de segunda ordem são excitados por fontes independentes de energia do tipo CC (corrente contínua) aplicadas de forma súbita, ou instantânea.

Determine a alternativa que contém a resposta completa $v(t)$ do circuito, conforme figura a seguir, para $t > 0$.

Figura | Esquemático elétrico – Questão 1



Fonte: Dorf (2012, p. 362).

Considere que a chave está há muito tempo na posição 1, antes do chaveamento, e que $V_b = 6e^{-3t}u(t)V$.

a) $v(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{44}{3}e^{-5t} + 9e^{-3t} V$

b) $v(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{44}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} V$

c) $v(t) = -\frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} V$

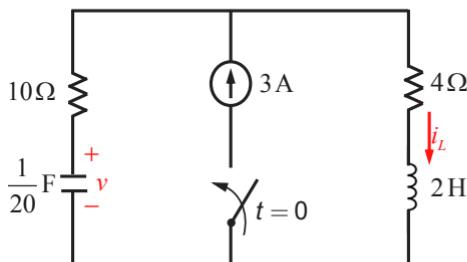
d) $v(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{44}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} V$

e) $v(t) = \frac{44}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t} V$

2. Os circuitos de segunda ordem alimentados por fontes independentes de energia do tipo CC (corrente contínua) aplicadas de forma súbita, ou instantânea, correspondem à operação de muitos dispositivos reais, como os rádios de receptores de comunicação e projetos de filtros na área de telecomunicações.

Determine a alternativa que contém a resposta completa da corrente $i_L(t)$ para $t > 0$, no circuito da figura a seguir.

Figura | Esquemático elétrico – Questão 2



Fonte: adaptado de Sadiku (2013, p. 303).

a) $i_L(t) = 3(1 - e^{-5t}) A$

b) $i_L(t) = 3(1 - e^{+5t}) A$

c) $i_L(t) = 3(1 + e^{-5t}) A$

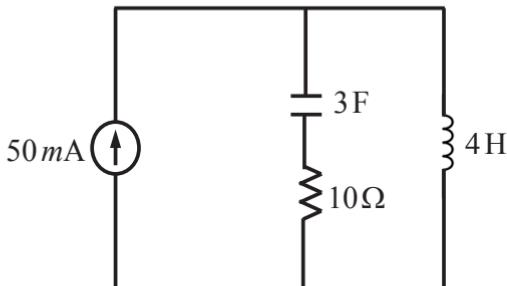
d) $i_L(t) = 3(1 - e^{-2t}) A$

e) $i_L(t) = 3(1 + e^{-2t}) A$

3. Dois circuitos são duais entre si se forem descritos pelas mesmas equações características com valores intercambiados. Esse conceito é muito utilizado para diminuir o tempo e esforço gasto na análise dos circuitos elétricos, pois, conhecida a solução para um circuito, automaticamente temos a solução para o circuito dual.

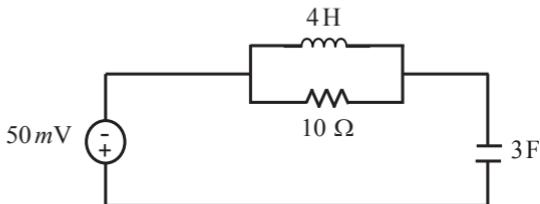
Determine a alternativa que contém o circuito dual daquele exibido pela figura a seguir.

Figura | Circuito original – Questão 3

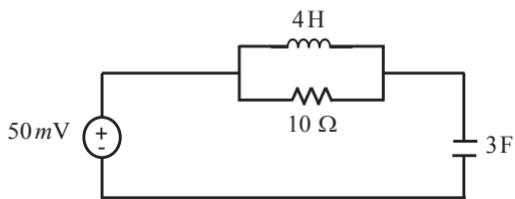


Fonte: Sadiku (2013, p. 313).

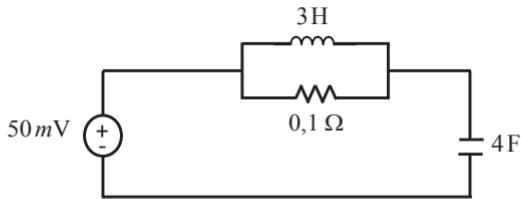
a)



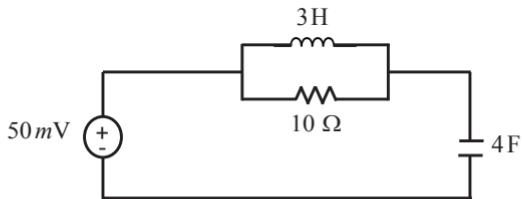
b)



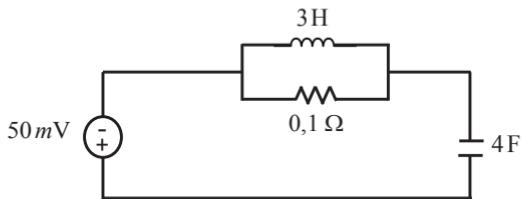
c)



d)



e)



Referências

DORF, Richard C.; SVOBODA, James A. **Introdução aos circuitos elétricos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

HAYT JUNIOR, William H.; KEMMERLY, Jack E.; DURBIN, Steven M. **Análise de circuitos em engenharia**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.

SADIKU, Matthew N. O.; ALEXANDER, Charles K. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações



The background of the page features a minimalist abstract design. It consists of several overlapping triangles in different shades of blue and grey, set against a dark teal background. The triangles are positioned in the upper half of the page, creating a sense of depth and movement.

ISBN 978-85-522-0663-7



9 788552 206637 >