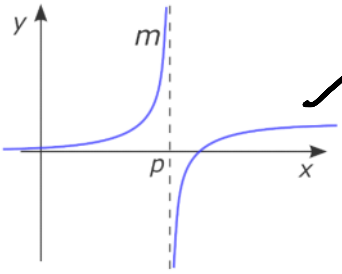
Anotações de aula

quarta-feira, 28 de agosto de 2024 09:45

Limites

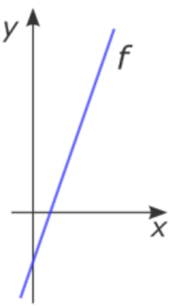
▷ Definição intuitiva



→ $P \notin f(x)$ ∴ não é contínua em P

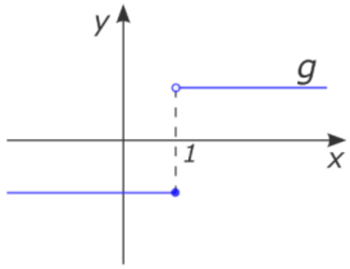
m não é contínua em p

a) $f(x) = 3x - 1$



f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{se } x \leq 1 \\ 1\,, & \text{se } x > 1 \end{cases}$



g não é contínua em $p = 1$

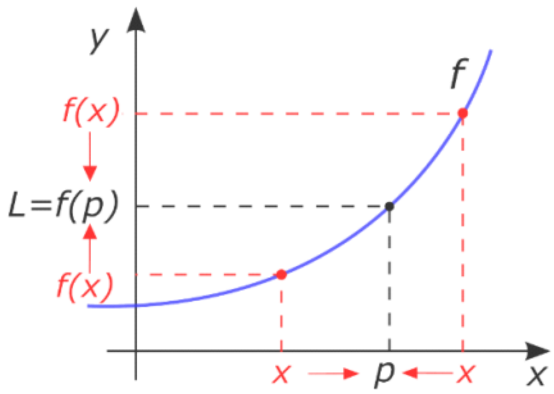
Definição 2 (Continuidade)

Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. A função f é contínua em p se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, sempre é possível encontrar $\delta > 0$, de forma que se x fica entre $p - \delta$ e $p + \delta$, $f(x)$ fica entre $f(p) - \varepsilon$ e $f(p) + \varepsilon$.

$$\lim_{x \to P} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$

Definição 4 (Limite)

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número p, exceto possivelmente o próprio p. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a p é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema 1

Sejam f uma função e $p \in D_f$

$$f \text{ é contínua em } p \Longleftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Teorema 2 (Propriedades do limite)

Considere f e g funções tais que $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_2$

a) $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \cdot \lim_{x \to p} g(x) = L_1 \cdot L_2$

c) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *desde que* $L_2 \neq 0$

$\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \to$ sen$(22{,}5°)$ + cos$(22{,}5°)$

Exemplo 2. Calcule os limites a seguir.

a) $\lim\limits_{x \to 0} (8x - 4)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (3^x - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} = -4$

b) $\lim\limits_{x \to 0} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 3} = \frac{\cancel{3}\sqrt{2} - \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$

$= \text{sen}(225°) + \cos(225°)$

Exercício 2. Calcule os limites a seguir.

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 4)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (3^x - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{x^2 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x + 1}{x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

g) $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x^2 - 16x + 64}{x - 8}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3 + x}{2x}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

a) Contínua em $x = 1$ ∴ pelo teorema 1: $\lim\limits_{x \to 1} = 6$ //

b) Contínua em $x = 0$ ∴ pelo teorema 1: $\lim\limits_{x \to 0} = 1$ //

c) Contínua em $x = 0$ ∴ pelo teorema 1: $\lim\limits_{x \to 0} = -4$ //

d) Contínua em $x = -1$ ∴ pelo teorema 1: $\lim\limits_{x \to -1} = 0$ //

e) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5 = 10$ // Preciso falar que $5 \notin D(f(x))$?

f) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = x + 2 = 0$ //

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{x+2} = x+2 = 0$ //

g) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2-16x+64}{x-8} = x-8 = 0$ //

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^3+x}{2x} = \dfrac{4x^2+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ //

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$ //

Definição 5 (Limites laterais)

Seja f uma função. O limite

$$\lim_{x \to p^+} f(x)$$

é chamado **limite lateral à direita** *da função f em p. Neste caso x se aproxima de p por valores maiores que p.*

Analogamente se define o **limite lateral à esquerda**

$$\lim_{x \to p^-} f(x)$$

em que x se aproxima de p por valores menores que p.

Teorema 3

Seja f uma função

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L \end{cases}$$

O teorema acima nos diz então que a existência do limite de f em p depende da existência dos seus limites laterais e que os valores dos limites laterais sejam iguais.

Interpretação geométrica dos limites laterais

Exercício 3. Considere o gráfico da função $f(x) = |x|$. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} = \frac{x}{x} = \underline{1} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} = \frac{x}{-x} = -\underline{1} \end{cases}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \therefore \lim\limits_{x \to 0}$ não é definido