

Robótica Móvil Probabilística IPD-482. Guía 1: Cinemática y Dinámica

Bastían Rivas C.
Ing. Civil Electrónica
UTFSM
Valparaíso, Chile
bastian.rivas@usm.cl

I. INTRODUCCIÓN

En este documento se presentan los desarrollos hechos en la primera guía del ramo IPD482 - Robótica Móvil Probabilística. Se incluyen desarrollos matemáticos y simulaciones hechas en Matlab. Los códigos, animaciones y diagramas generados se presentan en el siguiente repositorio: <https://github.com/BRivsC/CodigoIPD482>

II. PROBLEMA 1

En este problema se pide demostrar que se puede obtener el modelo de cinemática externa de un robot tipo triciclo con motor de tracción trasera como el de la figura 1. Basándose en el análisis propuesto en [1], se usan las ecuaciones 1 y 2 de restricción de rodadura y deslizamiento, respectivamente, para deducir el modelo cinemático externo, donde $\dot{I}\xi = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$ representa las velocidades del robot en el sistema inercial.

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos(\beta) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{I}\xi - r\dot{\phi} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin(\beta) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{I}\xi = 0 \quad (2)$$

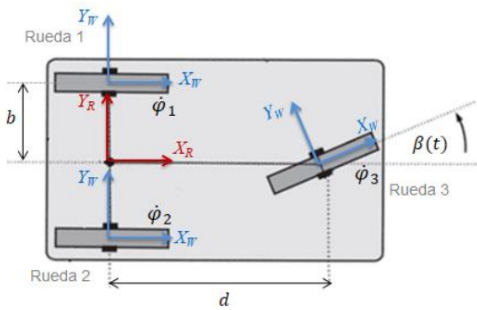


Figura 1: Geometría del robot tipo triciclo con sus variables identificadas [1]

Considerando que las ruedas traseras son activas y comparan el mismo eje, se puede plantear que $\phi_1 = \phi_2 = \phi_f$. Por otra parte, al tener una rueda frontal pasiva se puede afirmar que $\phi_3 = 0$. Para analizar las restricciones de movimiento de cada rueda, se deben analizar los parámetros geométricos de cada una. Considerando las posiciones de cada una, y que la

Rueda	Ángulo α	Ángulo β	Distancia l
Izquierda (1)	π	0	b
Derecha (2)	π	0	$-b$
Frontal (3)	0	$\pi + \beta(t)$	d

Tabla I: Parámetros geométricos de las ruedas

rueda frontal es orientable, se plantean los parámetros de la tabla I.

Evaluando en las ecuaciones 1 y 2 con los parámetros geométricos de cada rueda se puede llegar a las siguientes restricciones, donde $\dot{R}\xi$ representa a las velocidades del robot en el sistema de referencia del robot y $\dot{I}\xi = R(\theta)\dot{R}\xi$.

Para la rueda 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \end{bmatrix} \dot{R}\xi = r\dot{\phi}_f$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{R}\xi = 0$$

Para la rueda 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \end{bmatrix} \dot{R}\xi = r\dot{\phi}_f$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{R}\xi = 0$$

Rodadura de la rueda 3:

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi + \beta(t)) & \sin(\pi + \beta(t)) & d \sin(\pi + \beta(t)) \end{bmatrix} \dot{R}\xi = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & d \cos(\beta(t)) \end{bmatrix} \dot{R}\xi = 0$$

Simplificando las dos ruedas traseras como una única rueda fija motorizada en el origen del sistema de referencia se puede plantear $b = 0$ y reducir más el sistema, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{R}\xi = r\dot{\phi}_f$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{R}\xi = 0$$

Juntando las ecuaciones de las ruedas fijas con la de la rueda frontal se puede llegar al sistema de la expresión 3, que corresponde al de un robot tipo bicicleta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t)) & d \cos(\beta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{R}\xi = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}_f \quad (3)$$

Finalmente, pasando el sistema de referencia de uno local al inercial se obtiene la expresión 4, donde v y ω corresponden a la velocidad lineal y angular del robot en el sistema inercial, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4)$$

III. PROBLEMA 2

El robot a trabajar en este problema es uno omnidireccional de 5 ruedas. Se pide encontrar su modelo cinemático, describir un camino, simular el movimiento del robot y visualizarlo.

III-A. Planteamiento del modelo

Para obtener su modelo, se hace un análisis similar al planteado en [1], donde se expande el desarrollo original de 3 ruedas a uno de 5 ruedas. A lo largo del desarrollo se usa el robot planteado en la figura 2. Además, como el robot se compone de ruedas suecas, se considera que no existen restricciones de deslizamiento, por lo que se usa como base la ecuación 5. Dada la construcción de las ruedas suecas, se considera un ángulo de rodillos $\gamma = 0$.

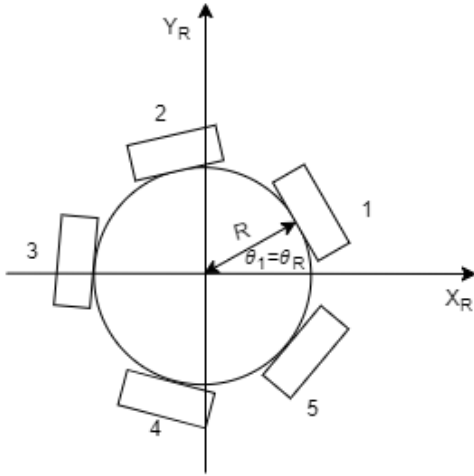


Figura 2: Diagrama con la disposición del robot omnidireccional

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ -\cos(\alpha + \beta + \gamma) \\ -l \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix}^T R(\theta) \dot{\xi} - r \dot{\phi} \cos(\gamma) = 0 \quad (5)$$

Por otra parte, a modo de relacionar las restricciones de las ruedas con los movimientos del robot se plantea la ecuación 6, donde A representa a las restricciones de las ruedas y B concentra los radios de las mismas.

$$A {}^R \dot{\xi} = B \dot{\phi} \quad (6)$$

Al igual que en el problema 1 de esta guía, se tabulan los parámetros geométricos de cada rueda, obteniéndose así la tabla II.

Rueda	Ángulo α	Ángulo β	Distancia l
1	0	0	R
2	$2\pi/5$	0	R
3	$4\pi/5$	0	R
4	$6\pi/5$	0	R
5	$8\pi/5$	0	R

Tabla II: Parámetros geométricos de las ruedas

Evaluando los parámetros geométricos para cada rueda y ordenando todo se obtiene la matriz A , donde la fila i corresponde a la rueda i :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -R \\ 0,95 & -0,31 & -R \\ 0,59 & 0,81 & -R \\ -0,59 & 0,81 & -R \\ -0,95 & -0,31 & -R \end{bmatrix}$$

Suponiendo un radio r de las ruedas suecas, se plantea la matriz B :

$$B = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Finalmente, al ser 5 ruedas se plantea la matriz de velocidades angulares de las ruedas $\dot{\phi}$ como

$$\dot{\phi}^T = [\dot{\phi}_1 \quad \dot{\phi}_2 \quad \dot{\phi}_3 \quad \dot{\phi}_4 \quad \dot{\phi}_5]$$

Para obtener el modelo cinemático es necesario obtener la matriz jacobiana J del sistema. En [1] se plantea la expresión 7,

$$J = A^\# B \quad (7)$$

donde $A^\#$ corresponde a la pseudoinversa de la matriz A . Usando Matlab para trabajar con las matrices se obtiene la expresión 8

$$J = r \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0,38 & 0,24 & -0,24 & -0,38 \\ -0,4 & -0,12 & 0,32 & 0,32 & -0,12 \\ -0,2/R & -0,2/R & -0,2/R & -0,2/R & -0,2/R \end{bmatrix} \quad (8)$$

Habiendo obtenido la matriz jacobiana, se puede obtener la matriz de velocidades del robot ${}^R \dot{\xi}$ a partir de la ecuación 9.

$${}^R \dot{\xi} = J \dot{\phi} \quad (9)$$

Luego, para cambiar el sistema de referencia del robot hacia uno inercial se puede usar la matriz de rotación ${}^I R_R$, obteniéndose así la matriz de velocidades para la cinemática directa con la ecuación 11.

$${}^I \dot{\xi} = {}^I R_R {}^R \dot{\xi} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) & -\sin(\theta_R) & 0 \\ \sin(\theta_R) & \cos(\theta_R) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^R \dot{\xi} \quad (11)$$

Finalmente, tras ejecutar las operaciones se obtiene la matriz de la expresión 12, donde las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ se reescribieron como $s(x)$ y $c(x)$ para permitir la visualización de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0,4rs(\theta) & -0,4rc(\theta) & -\frac{0,2r}{L} \\ 0,38rc(\theta) + 0,12rs(\theta) & 0,38rs(\theta) - 0,12rc(\theta) & -\frac{0,2r}{L} \\ 0,24rc(\theta) - 0,32rs(\theta) & 0,32rc(\theta) + 0,24rs(\theta) & -\frac{0,2r}{L} \\ -0,24rc(\theta) - 0,32rs(\theta) & 0,32rc(\theta) - 0,24rs(\theta) & -\frac{0,2r}{L} \\ 0,12rs(\theta) - 0,38rc(\theta) & -0,12rc(\theta) - 0,38rs(\theta) & -\frac{0,2r}{L} \end{bmatrix} \quad (12)$$

III-B. Resultados de la simulación

Habiendo obtenido el modelo, se plantea un camino en línea recta en el que el robot vaya avanzando y girando sobre su propio eje. Para ello, se plantea una matriz $P = [X \ Y \ \theta]$ que describe al camino, en donde cada fila corresponde a un punto, las primeras dos columnas corresponden a las coordenadas X e Y de cada punto, y la tercera columna corresponde al ángulo que debe tener el robot en dicho lugar. El camino generado junto con las poses se presentan en la figura 3 Una

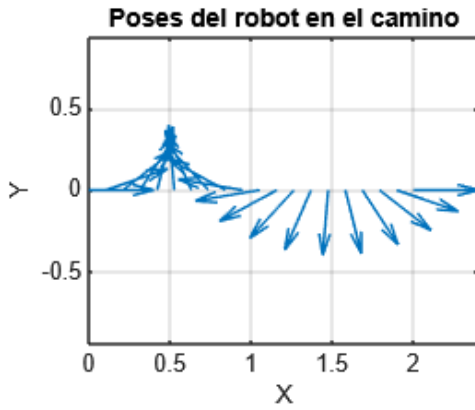


Figura 3: Posiciones y orientación del robot en el camino recto

vez generado el camino, se calcularon las velocidades de cada rueda por medio del método de Euler en la expresión 13, en donde se usa la pseudoinversa $J^\#$ de la matriz 12, un paso de tiempo t_s , y puntos P_{K+1}, P_K para el instante K . Los perfiles de velocidad resultantes se presentan en la figura 4.

$$\dot{\phi} = J^\# \cdot (P_{K+1} - P_K) / t_s \quad (13)$$

Finalmente, se hace una animación representando el movimiento del robot, disponible en el siguiente enlace:

<https://shorturl.at/xraEv>

IV. PROBLEMA 3

El tercer problema de esta guía considera un sistema compuesto por un tractor skid-steer de 4 ruedas con dos trailers acoplados de un eje cada uno. Se busca modelar la cinemática del sistema completo y simularlo siguiendo una trayectoria recta y otra circular.

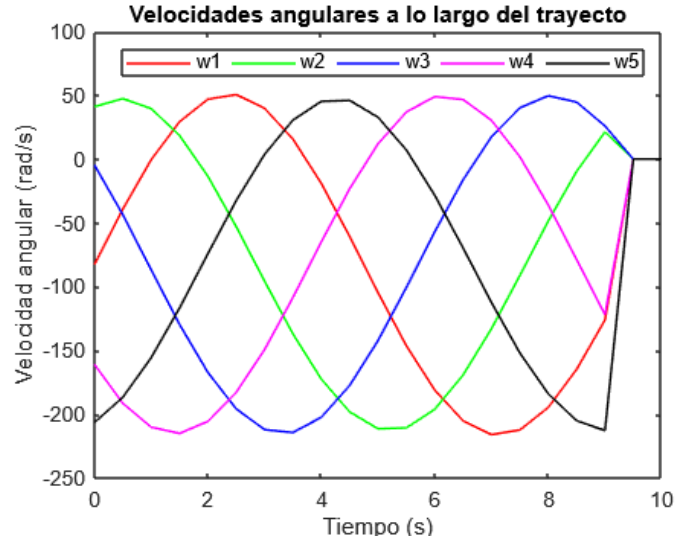


Figura 4: Perfiles de velocidad de cada rueda

IV-A. Modelo de sistema

Para modelar el sistema completo se usan los modelos generalizados propuestos en [2] y [3]. Se plantea el sistema con un tractor y dos trailers como el presentado en la figura 5. Además, se trabaja con el modelo genérico propuesto en

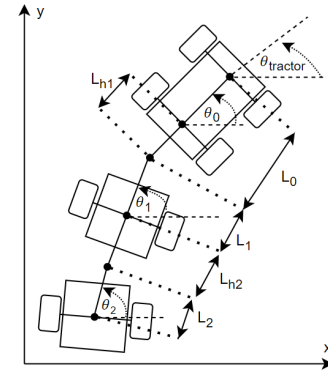


Figura 5: Diagrama del sistema tractor-trailer

[2] para N trailers. En este caso, al trabajar con dos trailers el valor de N es 2, por lo que el modelo queda de la siguiente forma:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = S(q)u_o, \quad u_o = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix},$$

donde

$$S(q) = \begin{bmatrix} S_{T2} \\ S_\theta \end{bmatrix}.$$

A su vez,

$$S_{T2} = G(q_2) \cdot J_2(\beta_2) \cdot J_1(\beta_1),$$

$$S_\theta = \begin{bmatrix} [1 & 0] \cdot J_1(\beta_1) \\ [1 & 0] \end{bmatrix}$$

$$G(q_2) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta_2) \\ 0 & \sin(\theta_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_i(\beta_i) = \begin{bmatrix} -\frac{L_{hi}}{L_i} \cos(\beta_i) & \frac{1}{L_i} \sin(\beta_i) \\ L_{hi} \sin(\beta_i) & \cos(\beta_i) \end{bmatrix}$$

$$\beta_i = \theta_{i-1} - \theta_i$$

Si se juntan todas las matrices anteriores se puede llegar a la ecuación 14 que relaciona las velocidades externas del sistema a partir de las actuaciones hechas.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} G(q_2) \cdot J_2(\beta_2) \cdot J_1(\beta_1) \\ [1 & 0] \cdot J_1(\beta_1) \\ [1 & 0] \end{bmatrix}}_{S(q) \in \mathbb{R}^{5 \times 2}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix}}_{u_0} \quad (14)$$

IV-B. Preparación de la simulación

Al igual que en la pregunta 2, se calculan las matrices del modelo y se genera una simulación usando Matlab. Para ello, se empieza por definir los parámetros físicos del tractor y los trailers. En este caso, las medidas del tractor se basan en un robot Clearpath Jackal UGV [4], y los trailers se consideran como una mitad de un Gorilla Cart 170L Steel Mesh [5] cada uno. Los valores se resumen en la tabla III, donde también se agregan offsets de enganche L_h de 20 cm.

Parámetro	Valor [m]
L_0	0.5
L_1	0.66
L_2	0.66
L_{h1}	0.2
L_{h2}	0.2

Tabla III: Medidas de los elementos del sistema

Para trazar los caminos en línea recta y círculo solicitados se van ajustando las señales de control en base a los casos puntuales. En el caso de la línea recta se define una velocidad lineal v_0 constante de 0.5 m/s con una velocidad angular ω_0 de 0 rad/s. Por otra parte, para trazar el círculo se define un radio R de 2 metros con un ω_0 de v_0/R y se hace correr la simulación.

IV-C. Resultados de la simulación

Tras implementar las matrices y sus cálculos se obtienen las trayectorias de las figuras 6 y 7. En el caso de la línea el conjunto recorrió prácticamente el mismo camino, y dada la forma en la que se disponen los carros terminaron en distintos lugares al finalizar la simulación. Por otra parte, para el caso circular se obtuvo que los tres elementos trazaron circunferencias distintas, lo que se tradujo en rutas ligeramente distintas una de la otra. Las versiones animadas de las simulaciones se

pueden ver en los siguientes links (En caso de no funcionar se recomienda descargar el gif en cuestión)

Ruta lineal:

<https://shorturl.at/XYiHX>

Ruta circular:

<https://shorturl.at/FzABx>

Trayectoria del conjunto tractor + 2 trailers

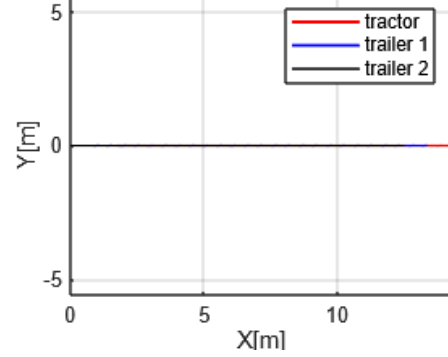


Figura 6: Ruta seguida por el sistema en una línea

Trayectoria del conjunto tractor + 2 trailers

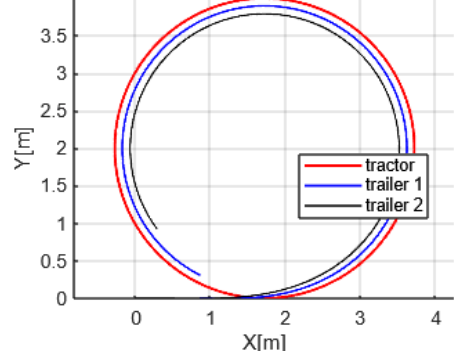


Figura 7: Ruta seguida por los carros al recorrer un círculo

V. PROBLEMA 4

Se pide simular la dinámica directa de un robot skid-steer de 4 ruedas tomando en cuenta el efecto de las ruedas con el suelo. Se debe simular en base a parámetros a escoger del robot, definiendo distintos perfiles de torque para trazar rutas. Para modelar esta interacción, se plantea usar el modelo LuGre presentado en [6], donde se plantean las distintas maneras en las que la fricción puede actuar. Para la dinámica del robot en sí se utiliza un modelo similar al propuesto en [7].

V-A. Modelamiento del sistema

Considerando el objetivo del problema, se plantea un sistema dinámico cuyas entradas deben ser los perfiles de torque del lado izquierdo y derecho $\tau_L(t)$ y $\tau_R(t)$, respectivamente. Estos perfiles se van modificando según el camino que se desee

trazar. Las variables de estado del robot se representan por el vector $q(t)$ de la expresión 15.

$$q = [X \ Y \ \theta \ v_x \ \omega \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T, \quad (15)$$

donde X e Y representan las coordenadas del robot, θ representa el ángulo de pose, v_x y ω contienen las velocidades lineal y angular, y z_1, \dots, z_4 contienen las variables de estado internas del modelo LuGre. El modelo LuGre presentado es

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z = v - h(v)z \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \\ g(v) &= F_c + (F_s - F_c)e^{-|v/v_s|^2} \end{aligned}$$

donde $\sigma_0, \dots, \sigma_2$ son parámetros propios del modelo, F_c y F_s son las fricciones cinéticas y estáticas, respectivamente. El modelo general [8] para el movimiento es el de la ecuación 16,

$$M\ddot{q} + R(\dot{q}) = B\tau + A(q)^T \lambda \quad (16)$$

donde M es la matriz de inercia, $R(\dot{q})$ tiene las fuerzas resistivas, B está relacionada con los torques de entrada y $A(q)$ contiene las restricciones no holonómicas junto a los multiplicadores lagrangianos. Siguiendo una metodología parecida a la de [7], donde se linealiza el modelo, se eliminan los multiplicadores lagrangianos.

V-B. Simulación

Para simular el modelo se implementan las ecuaciones y matrices en Matlab, donde se define una función que se va resolviendo de forma numérica con el solver ode45. Para simular se utilizan los parámetros de la tabla IV, basados en un Clearpath Jackal UGV [4].

Parámetro	Valor
m, masa	50 kg
I, inercia	2 kg · m ²
r, radio ruedas	0,1 m
c, semiancho	0,215 m

Tabla IV: Parámetros físicos del robot

Por otra parte, para simular el efecto de roce por LuGre se utilizan los parámetros propuestos en [7], presentados en la tabla V.

Parámetro	Valor
σ_0	20 N/m
σ_1	5 N · s/m
σ_2	20 N · s/m
μ_c	0,28 N
μ_s	0,34 N
v_s	12,5 m/s

Tabla V: Parámetros para LuGre [7]

V-B1. Avance hacia adelante: Configurando los torques de ambos lados con un valor de 10 N · m se obtienen las figuras 8 y 9, donde se muestra la trayectoria y las velocidades del robot. Una versión animada puede verse en <https://shorturl.at/tr771>, donde se puede ver cómo acelera el robot dada la dinámica del sistema.

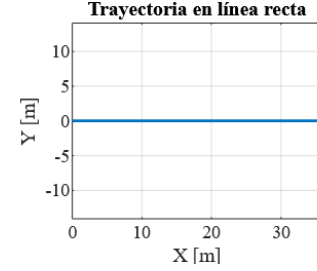


Figura 8: Trayectoria del robot en línea recta

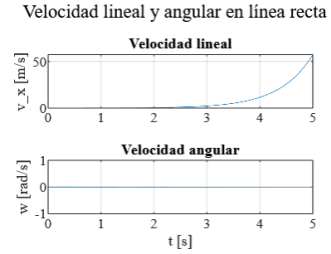


Figura 9: Velocidades del robot en línea recta

V-B2. Avance hacia atrás: De forma similar a la anterior, se configuran los torques del robot para que en este caso opere en -10 N · m, obteniéndose así las figuras 10 y 11. Se puede ver una animación en <https://shorturl.at/YY3A6>.

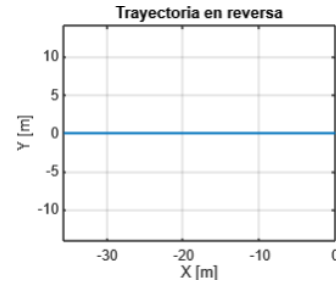


Figura 10: Trayectoria del robot en reversa

V-B3. Una sola rueda: Para hacer que el robot ande con una rueda se configuran los torques izquierdo y derecho en 0 y 10 N · m respectivamente, resultando en las figuras 12 y 13. La versión animada de la simulación se presenta en <https://shorturl.at/DcVL7>.

V-B4. Ruedas contrapuestas: La contraposición de ruedas se configuró para tener un torque izquierdo de -10 N · m y uno derecho de 10 N · m, retornando las figuras 14 y 15. Se muestra una animación en <https://shorturl.at/IFk3p>

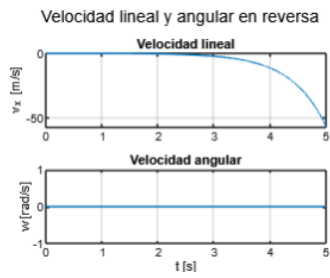


Figura 11: Velocidades del robot en reversa



Figura 12: Trayectoria del robot con una rueda

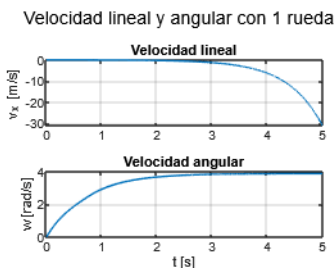


Figura 13: Velocidades del robot con una rueda



Figura 14: Trayectoria del robot con ruedas contrapuestas

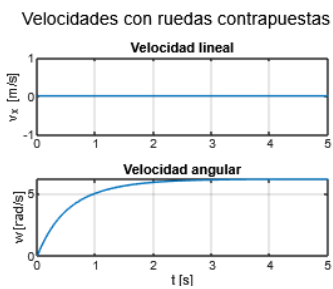


Figura 15: Velocidades del robot con ruedas contrapuestas

REFERENCIAS

- [1] J. Figueroa, W. Montalvo, and M. Bayas, “Cinemática y dinámica de robots móviles con ruedas,” *Editorial CILADI*, pp. 83–85, 2023.
- [2] L. Guevara, F. Jorquera, K. Walas, and F. Auat-Cheein, “Robust control strategy for generalized n-trailer vehicles based on a dual-stage disturbance observer,” *Control Engineering Practice*, vol. 131, p. 105382, 2023.
- [3] M. M. Michałek, “Scalable parametric-identification procedure for kinematics of automated n-trailer vehicles,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 73, no. 6, pp. 7758–7770, 2024.
- [4] Clearpath Robotics, “Jackal UGV – Small Weatherproof Robot,” 2024. Accedido el 17 de abril de 2025.
- [5] Gorilla Carts ANZ, “170L Steel Mesh Utility Cart,” 2024. Accedido el 17 de abril de 2025.
- [6] K. Johansson and C. Canudas-De-Wit, “Revisiting the lugre friction model,” *IEEE Control systems magazine*, vol. 28, no. 6, pp. 101–114, 2008.
- [7] A. B. Robat, K. Arezoo, K. Alipour, and B. Tarvirdizadeh, “Dynamics modeling and path following controller of tractor-trailer-wheeled robots considering wheels slip,” *ISA transactions*, vol. 148, pp. 45–63, 2024.
- [8] K. Kozłowski and D. Pazderski, “Modeling and control of a 4-wheel skid-steering mobile robot,” *International journal of applied mathematics and computer science*, vol. 14, no. 4, pp. 477–496, 2004.