המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

אלגוריתמים I

עבודת בית מס' 2

- ניתן להכין את המטלה בזוגות. רק חבר אחד בצמד יגיש בפועל את העבודה (במידה ומוגש כעבודה זוגית, יש לרשום בתחילת הקובץ את שמות המגישים ואת מספרי הזהות שלהם).
- את הפתרון יש להגיש בקובץ אחד בפורמט pdf.
- הגשה דרך מודל בלבד!
- כל שאלה בנוגע לתרגיל יש להפנות אך ורק לאחראי על התרגיל – גב' סופי קרימברג, באימייל: krsofi@gmail.com, פניות בכל בדרך אחרת – לא יענו!
- אישורי ההארכה יינתנו ע"י מרצה בלבד!
- עבודות שיוגשו באיחור לא יתקבלו!

1. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 4T(n-1) + n^2$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

א) פתרו את המשוואה.

ב) מהו סדר גודל של $T(n)$? הוכיחו במפורט.

2. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 4T(n-2) + n^2$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

א) פתרו את המשוואה.

ב) מהו סדר גודל של $T(n)$? הוכיחו במפורט.

3. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 4T(n-2) + n \log_2 n$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

ג) פתרו את המשוואה.

ד) מהו סדר גודל של $T(n)$? הוכיחו במפורט.

4. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

$n = 3^k$ ←

א) פתורו את המשוואה ללא שימוש במשפט מאסטר עבור n שהוא חזקות של 3.

ב) מהו סדר גודל של $T(n)$? הסבירו במפורט.

5. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 + n^4$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

$n = 3^k$ ←

ג) פתרו את המשוואה ללא שימוש במשפט מאסטר עבור n שהוא חזקות של 3.

ד) מהו סדר גודל של $T(n)$? הסבירו במפורט.

6. נתונה ערימת מקסימום רגילה T[P..n]
נניח כי ב- Heap ברמה התחתונה יש 2023 קדקודים.
   א) מהו מספר הרמות בערימה?
   ב) מהו מספר העלים בערימה?
   ג) מהו מספר העלים ברמה אחרונה בערימה?

7. נתונה סדרת המספרים הבאה (משמאל לימין):
20,10,30,25,11,42,77,12

   א) הדגימו את כל השלבים של makeheap על המספרים הנ"ל (הסדר: משמאל לימין)
   ב) הדגימו את כל השלבים של insert_value(32) לערימה שהתקבלה בסעיף א'
   ג) הדגימו את כל השלבים של insert_value(23) לערימה שהתקבלה בסעיף ב'
   ד) הדגימו את כל השלבים של delete_value(42) לערימה שהתקבלה בסעיף ג'
   ה) הדגימו את כל השלבים של heapsort על הערימה שמתקבלת בסעיף ד'

עבודה נעימה !

עומר שי
322480807

1. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 4T(n-1) + n^2$$

$T(n) \dots T(n-k)$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

א) פתרו את המשוואה.

ב) מהו סדר גודל של $T(n)$? הוכיחו במפורט.

$$T(n) - 4T(n-1) = n^2 \cdot 1$$

דרגה = 2

$b^n = 1$

$$\boxed{P(x) = P_0(x) \cdot \prod_{i=1}^{s} (x-b_i)^{d_i+1}}$$

$$P(x) = (x-4)(x-1)^3$$

$r_1 = 4 \quad r_2 = 2$

ריבוי 3

$$(\alpha^k a_0 + \alpha^{k-1} a_1 + \dots)(\alpha - b)^{d+1} = 0$$

$$c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 1^n \cdot n^2 + c_3 \cdot 1^n \cdot n + c_4 \cdot 1^n$$

$$T(n) = c_1 \cdot 4^n + c_2 n^2 + c_3 n + c_4$$

נגיד ונתרכז רק על המקדם של n^2 (המקדם של 4^n מאבד להבדה):

$$c_2 n^2 - 4c_2 (n-1)^2 = n^2$$

(מדובר רק על המקדמים של n^2)

$$c_2 - 4c_2 = 1$$

$$-3c_2 = 1 \implies c_2 = -\frac{1}{3}$$

מאחר והמקדם של c_2 הינו שלילי, יש להתרכז על הגורמים "התנקים" יותר ממנו שאומר על c_1 או c_3 או c_4

המקדם של n^2 הינו שלילי ו- n^2 הוא הגורם השני בהשפעה על מספר הפעולות לאחר 4^n.

מאחר ומספר הפעולות חייב להיות חיובי, מה שגורם למקדם של $c_1 = 4^n$ להיות דומיננטי אין סדר גודל של המשוואה הוא

$$\Theta(4^n)$$

2. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 4T(n-2) + n^2$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

א) פתרו את המשוואה.

ב) מהו סדר גודל של $T(n)$? הוכיחו במפורט.

(ב)

$$T(n) = 4T(n-2)+n^2$$

$$T(n)-4T(n-2) = n^2$$

$$T(n)-0T(n-1)-4T(n-2) = n^2$$

$$(x^2-4)(x-1)^3 = (x+2)(x-2)(x-1)^3$$

$$\Downarrow$$

$r_1 = -2$

$r_2 = 2$

$r_3 = 1$ כפול 3

$$T(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-2)^n + c_3 n^2 + c_4 \cdot n + c_5$$

נג'ד ונקבל אזור מקדם של n^2 (המקדמים של 2^n, $(-2)^n$ לא נמשיך)

$$c_3 n^2 - 4c_3(n-2)^2 = n^2$$

נסתכל רק על המקדמים של n^2:

$$c_3 - 4c_3 = 1$$

$$-3c_3 = 1 \Rightarrow \boxed{c_3 = -\frac{1}{3}}$$

לאחר הצבה $c_4 = -\frac{16}{9}$

$c_5 = -8$

מאחר והמקדם של c_3 הינו שלילי, יש להתבונן על הדומים המשפיעים יותר ממנו על תוצאת המשוואה, כלומר על $c_1 \cdot (2^n)$, $c_2(-2)^n$

מאחר ומספר הפעולות האלמנטריות עלול להיות אי זוגי כאמור הגדל של $c_2(-2)^n$ יהיה שלילי, נרצה שהגדל של המשוואה הכללית יהיה חיובי. ולכן $c_1 2^n > c_2(-2)^n$ אחרת נגיע למצב של מספר שלילי דפעולות אלמנטריות נוכל לבנות דוגמאות שהמשוואה חיובי ממידה וסכום c_1 (חיובי) ואז $|c_1| > |c_2|$ מספר נדע

גם ש $T(n) \in \Theta(2^n)$

3. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 4T(n-2) + n \log_2 n$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

ג) פתרו את המשוואה.

ד) מהו סדר גודל של $T(n)$? הוכיחו במפורט.

המשוואה הנתונה אינה הומוגנית דרגה 4 לכן הגדיר הנרפא אינו פולינום, אם נרשם את המשוואה ל"ד נקבל משוואה:

$$T(n) = 4T(n-2) + n\log_2 n$$

$$4T(n-2) + n^0 < T(n) < 4T(n-2) + n^2$$

תקרנו את המשוואה
דרגת הקודם (2)
נקרא מאנו את המסקנה

נתקור את המשוואה השמאלית

$$T(n) = 4T(n-2) + n^0$$

$$\Downarrow$$

$$(x^2-4)(x-1)^1$$

$$(x+2)(x-2)(x-1)$$

$$r_1 = -2$$

$$r_2 = 2$$

$$r_3 = 1$$

$$T(n) = c_1 \cdot (-2)^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 = n^0$$

נשווה מקדמים עבור n^0 <=

$$\boxed{c_3 = 1}$$

לסה

לכן, ניתן לסכם שסי אובאר של נוסחת משוואה כ1 והמשוואה בתרגיל 2:

1. דוגמה והמקרה של $(-2)^n$ $c_1>0$ ו- n כלומר $T(n)\in\Theta(2^n)$

2. דוגמה ו- $c_1=0$, $c_2>0$: $T(n)\in\Theta(2^n)$

3. דוגמה ו- $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3>0$ $T(n)\in\Omega(n^0=1)\wedge T(n)\in O(n^2)$

(תכונה)

4. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

$n = 3^k$

א) פתורו את המשוואה ללא שימוש במשפט מאסטר עבור n שהוא חזקות של 3.

ב) מהו סדר גודל של $T(n)$? הסבירו במפורט.

נמיר את המשוואה

$t_n = T(n) = t(3^k) = T_k$

(סימון)

$\log_3 n = k$ $\quad \begin{cases} b^x = y \\ \log_b y = x \end{cases}$

$t\left(\frac{n}{3}\right) = t(3^{k-1}) = T_{k-1}$

$n^3 = (3^k)^3 = 3^{3k} = 9^k$

נכתוב את משוואת הנסיגה:

$t_n - 2T\left(\frac{n}{3}\right) = n^3$

נעבור בדרך ל T_k

$T_k - 2T_{k-1} = 9^k \cdot k^0$

נכתוב פולינום אופיני של המשוואה

$$\boxed{P(x) = P_0(x) \cdot \prod_{i=1}^{s} (x-b_i)^{d_i+1}}$$

$P(x) = (x-2)\cdot(x-9)$

$r_1 = 2$ רי"ז 1 $\quad r_2 = 9$ רי"ז 1

נקבל תצורה למשוואה:

$T_k = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 9^k$

נחזור למשוואה המקורית

$T_k = c_1 \cdot 2^{\log_3 n} + c_2 \cdot 9^{\log_3 n}$

$c =$
$b = n$
$a = 3$

$$\boxed{\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c}$$

ערך אסימפטוטי של המשוואה.

$9^k = 9^{\log_3 n} = 9^{\log_9 n \cdot \log_3 9} = n^{\log_3 9} = n^2$

$2^k = 2^{\log_3 n} = 2^{\log_2 n \cdot \log_3 2} = n^{\log_3 2}$

$$t_n = c_1 \cdot n^{\log_3 2} + c_2 \cdot n^2$$

מכאן:

לפי משפט הדמיון

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^{\log_3 2}} = +\infty$$

נסמן: $f(n) = n^2$

$g(n) = n^{\log_3 2}$

$$\boxed{\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c}$$

2 מצבים:

אם $c_2 > 0$ זה מצב דלא אפשרי $\leftarrow$ $t(n) < 0$

אם $c_1 > 0$ ולכל n מספיק $c_2 n^2 \geq c_1 \cdot n^{\log_3 2}$

$T(n) \in \Theta(n^2)$ מלל

5. נתונה משוואת הנסיגה הבאה:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 + n^4$$

כאשר ידוע כי $T(n)$ - מספר הפעולות האלמנטאריות באלגוריתם מסוים.

ג) פתרו את המשוואה ללא שימוש במשפט מאסטר עבור n שהוא חזקות של 3. $n = 3^k \leftarrow$

ד) מהו סדר גודל של $T(n)$? הסבירו במפורט.

(ג) נבצע החלפת משתנים כך ש $n=3^k$ ו- $T(3^k) = S_k$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 + n^4$$

$$T(n) = T(3^k) = S_k$$

$$T\left(\frac{n}{3}\right) = T(3^{k-1}) = S_{k-1}$$

$$n^2 = 9^k$$

$$n^4 = 81^k$$

$$S_k - S_{k-1} = 9^k \cdot \underline{1} + 81^k \cdot \underline{1}$$

$$p(x) = (x-1)(x-9)(x-81)$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 9 \\ r_3 &= 81 \end{aligned}}$$

נכתוב את המשוואה S_k:

$$S_k = c_1 \cdot 1^k + c_2 \cdot 9^k + c_3 \cdot 81^k$$

$$S_k = c_1 + c_2 \cdot 9^k + c_3 \cdot 81^k \qquad 3$$

נחזיר הצבה ל T:

$$T(n) = c_1 + c_2 \cdot n^2 + c_3 n^4$$

$$T(n) = \cancel{c_1} + c_2 n^2 + c_3 n^4 - \left(\cancel{c_1} + c_2\left(\frac{n}{3}\right)^2 + c_3\left(\frac{n}{3}\right)^4\right)$$

$$T(n) = c_2 n^2 + c_3 n^4 - \frac{c_2 n^2}{9} - \frac{c_3 n^4}{81} = n^2 + n^4$$

$$T(n) = \frac{8}{9}c_2 n^2 + \frac{80}{81}c_3 n^4 = n^2 + n^4$$

$$\frac{8}{9}c_2 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{9}{8}}$$

$$\frac{80}{81}c_3 = 1 \Rightarrow \boxed{c_3 = \frac{81}{80}}$$

$$c_2 > 0 \qquad c_3 > 0$$

מקרה של האיבר הכי תצוך שלנו יראה מה הוא

$T(n) \in \Theta(n^4) : c_3 > 0$ | $(c_3 > 0)$ אם

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמע

6. נתונה ערימת מקסימום רגילה $T[1..n]$

נניח כי ב- Heap ברמה התחתונה יש 2023 קדקודים.

א) מהו מספר הרמות בערימה?

ב) מהו מספר העלים בערימה?

ג) מהו מספר העלים ברמה אחרונה בערימה?

? 2023

max-heap

נתון max-heap יש 2023 קודקודים, לפי מנה

ערימה מקסימום כן, הוא ACBT (הרמה התחתונה לא מלאה) ומה הרמה

ל- ACBT הינו $\lfloor \log_2 n \rfloor$ כאשר n = מס' קדקודים סה"כ

אלא נסמן M - ל- מס' הרמה לפי

מספר הרמות בערימה $M = \lfloor \log_2 n \rfloor$

$M = \lfloor \log_2 2023 \rfloor = \lfloor 10.98 \rfloor = 10$ רמות

ה) מה הקלים ביותר: עץ המשפט עם מה בעלים n איברים כולל $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

נוכיח את המשפט לכן שימוש בו

תהי T עץ מה בעלים n איברים כולל $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ עלים.

צ"ל $\text{length}(\text{leaf}(T)) = \frac{n}{2}$

נחלק ל- 2 מקרים:

1. כאשר כל הצמתים הפנימיים לעץ מה בעלים הם בעלי דרגה 2.

נניח ש e = מס' עלים

M = צמתים פנימיים

אז

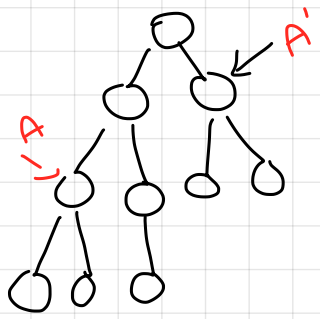
$e = M+1$ לאור בעל דרגה 2

לכן:

$n = e + M = 2 \cdot e - 1$ ← אי"ש

$e = \frac{(n+1)}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ← (נובע מיד מעלים מס' שלם)

2. קיים צומת פנימי שדרגתו 1.



נסמן A, A'

נניח ש-

M – מס' צמתים פנימיים

מס' כ-n – צמתים סה"כ

נעבור A' מעל

$M-1$ צמתים פנימיים

e – עלים

נובע ← $n-1$ צמתים סה"כ ⇐ $e = \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil = \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ולכן לאחר שהוכחנו את המשפט ניתן לרשום זו-

מס' העלים בעץ הוא $\left\lceil \frac{2023}{2} \right\rceil = 1{,}012$

ג) מס' הילדים ברמה התחתונה נמצא ב-t

$$t = \underbrace{2023}_{\text{מס' צמתים בכל העץ}} - \underbrace{\left(2^{10} - 1\right)}_{\text{מס' צמתים לא ברמה האחרונה}} = \underbrace{998}_{\text{מס' הצמתים ברמה האחרונה.}}$$

$$\text{all nodes} - \underbrace{\text{all nodes till 10 level}}_{2^{i} - 1}$$

7. נתונה סדרת המספרים הבאה (משמאל לימין):

20,10,30,25,11,42,77,12

2k , 2k+1

א) הדגימו את כל השלבים של makeheap על המספרים הנ"ל (הסדר: משמאל לימין)

ב) הדגימו את כל השלבים של insert_value(32) לערימה שהתקבלה בסעיף א'

ג) הדגימו את כל השלבים של insert_value(23) לערימה שהתקבלה בסעיף ב'

ד) הדגימו את כל השלבים של delete_value(42) לערימה שהתקבלה בסעיף ג'

ה) הדגימו את כל השלבים של heapsort על הערימה שמתקבלת בסעיף ד'

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{8}{2} - 4$

סה"כ

מחצית

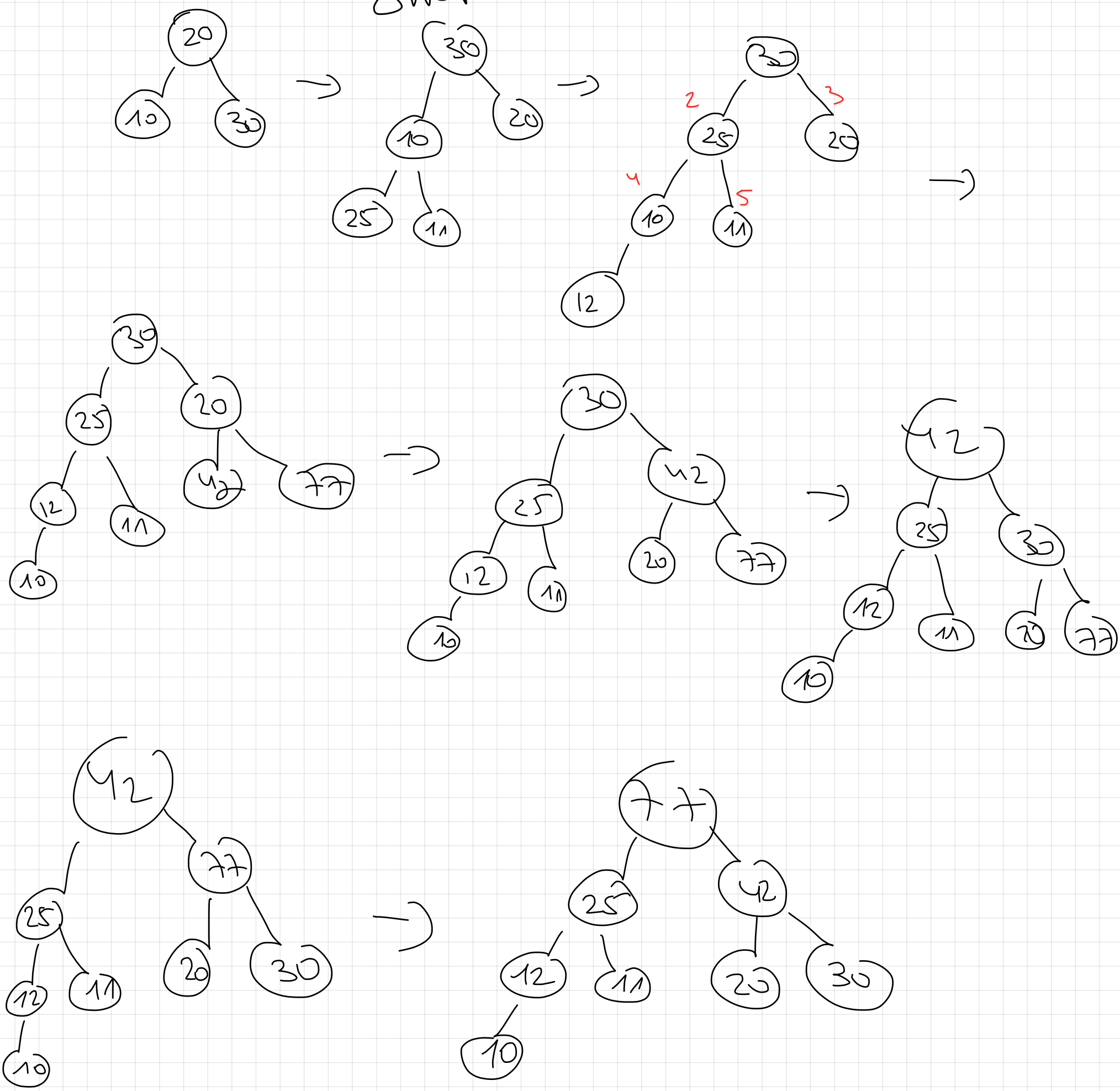
עלים

אבא > בן

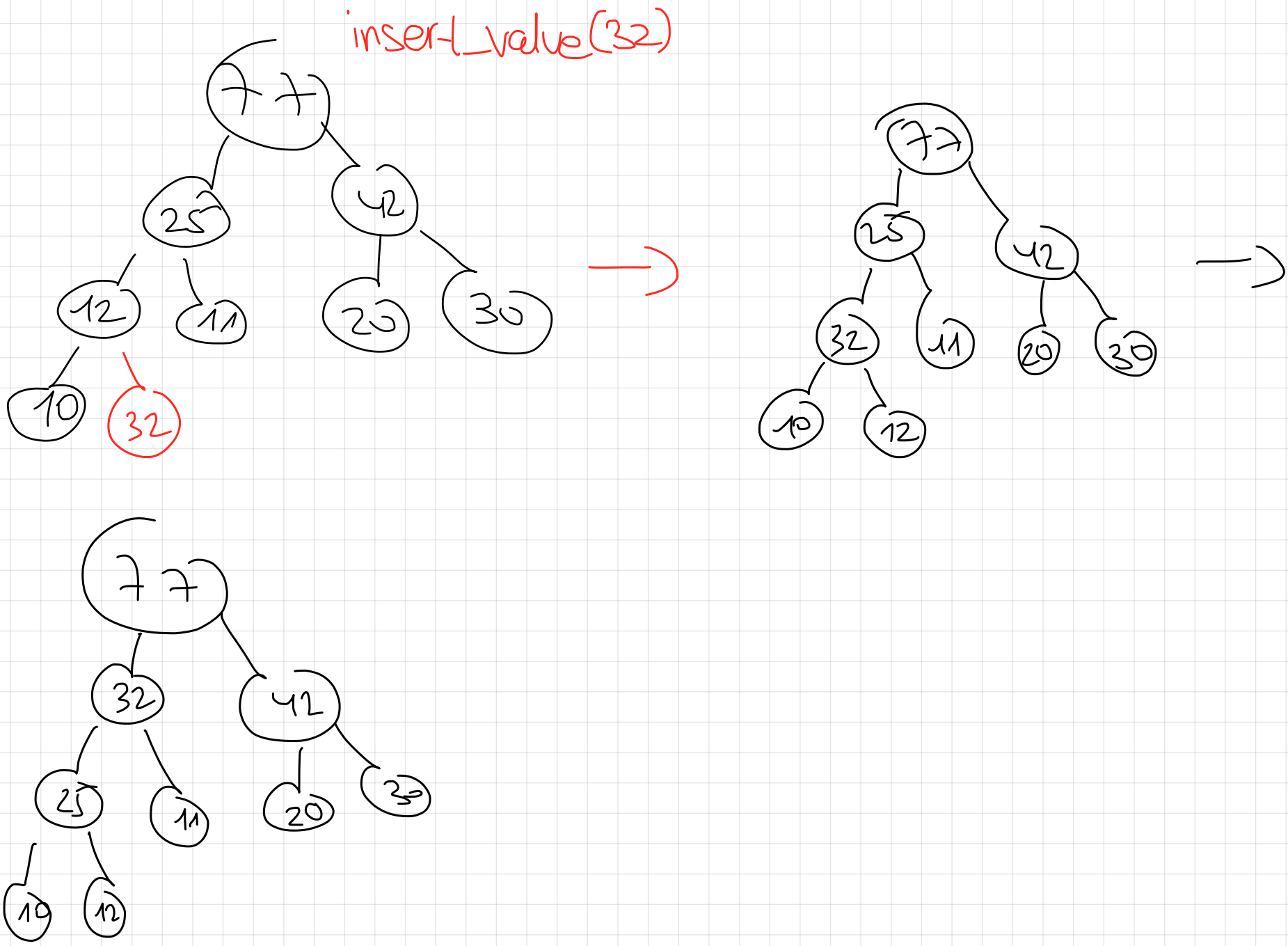
Max heap prop

make-heap

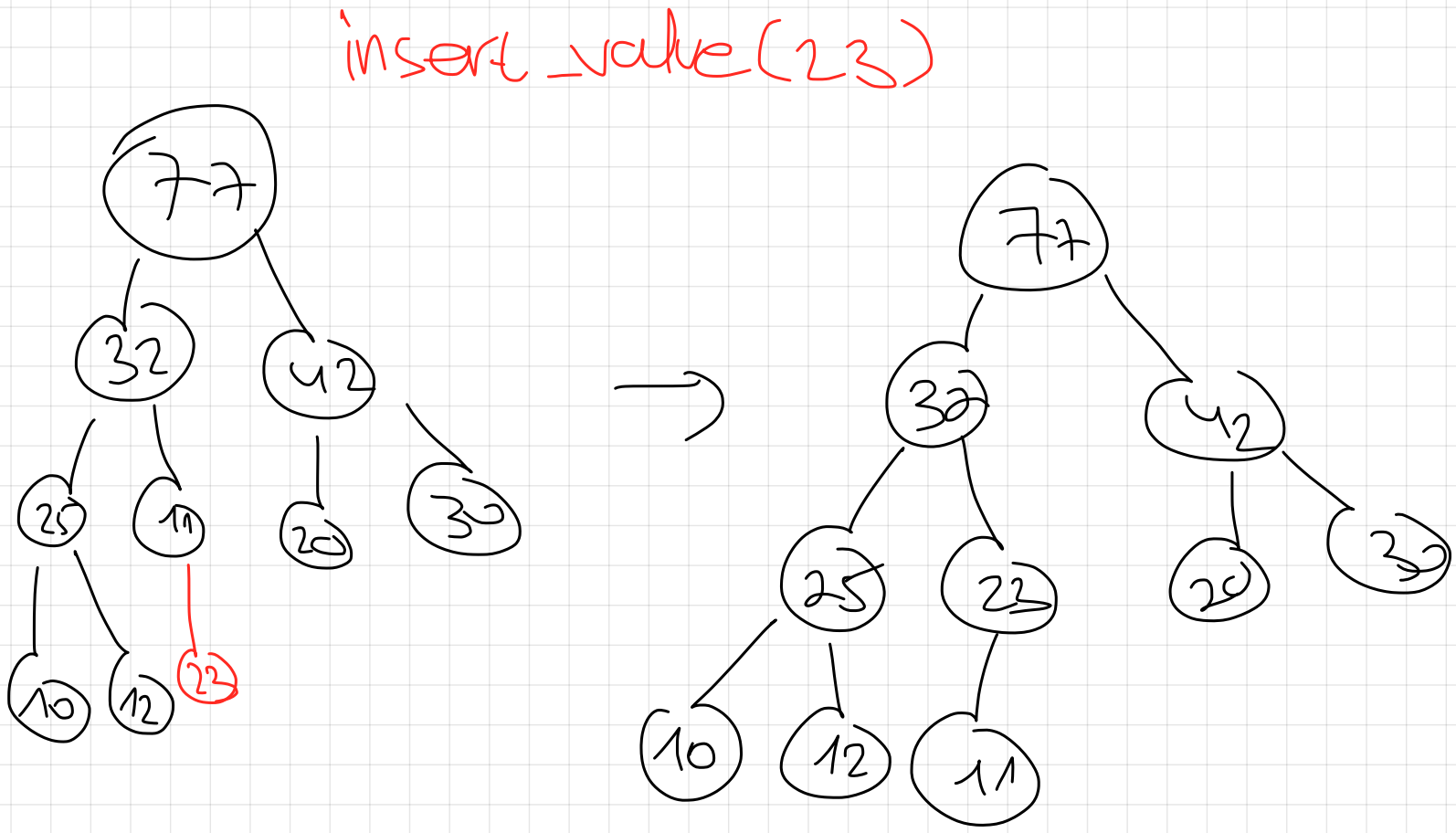
swap



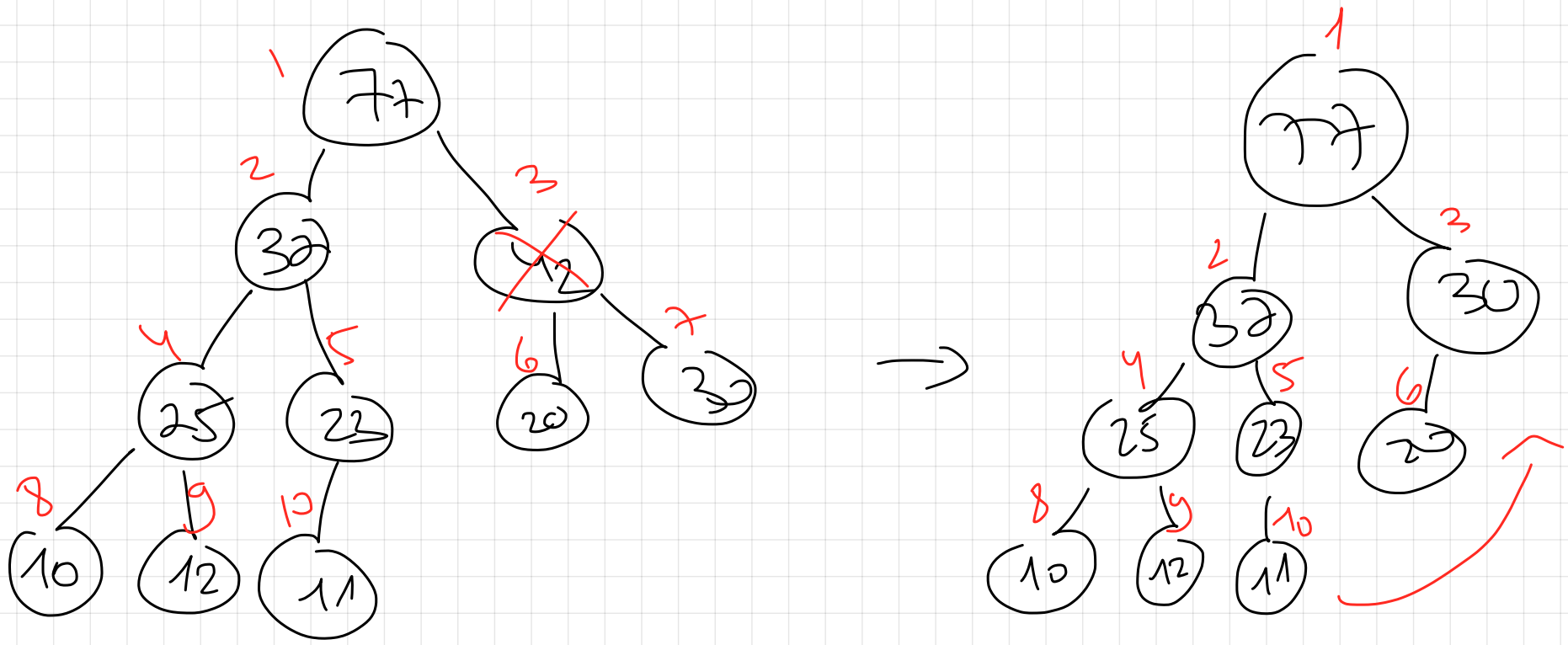
ב) הדגימו את כל השלבים של insert_value(32) לערימה שהתקבלה בסעיף א'

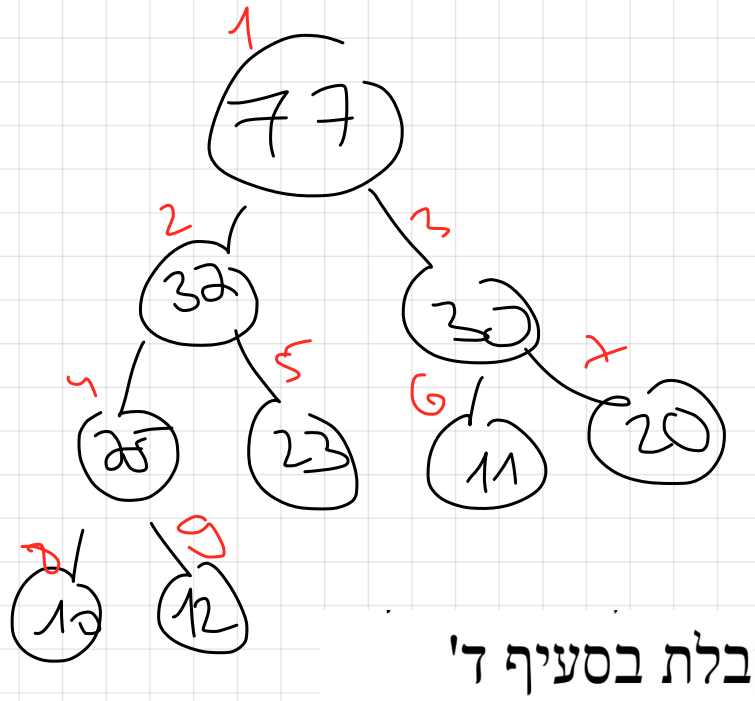


ג) הדגימו את כל השלבים של insert_value(23) לערימה שהתקבלה בסעיף ב'



ד) הדגימו את כל השלבים של delete_value(42) לערימה שהתקבלה בסעיף ג'



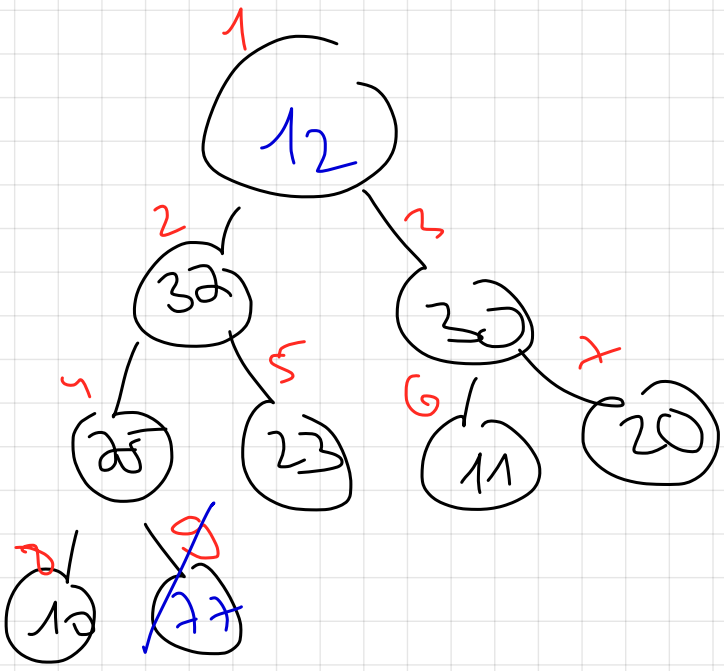


ה) הדגימו את כל השלבים של heapsort על הערימה שמתקבלת בסעיף ד'

77	32	30	25	23	11	20	10	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9

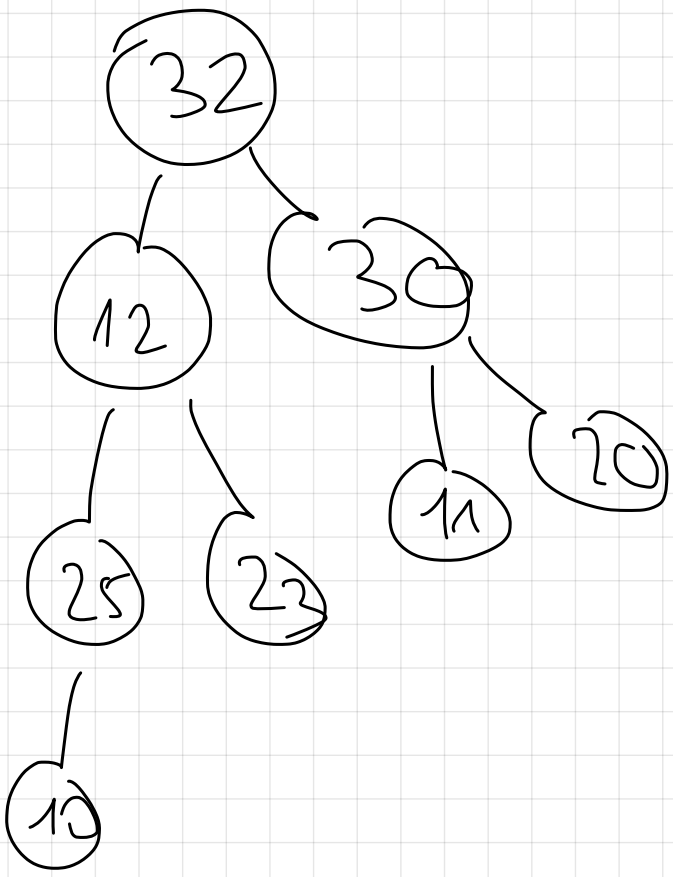
Swap

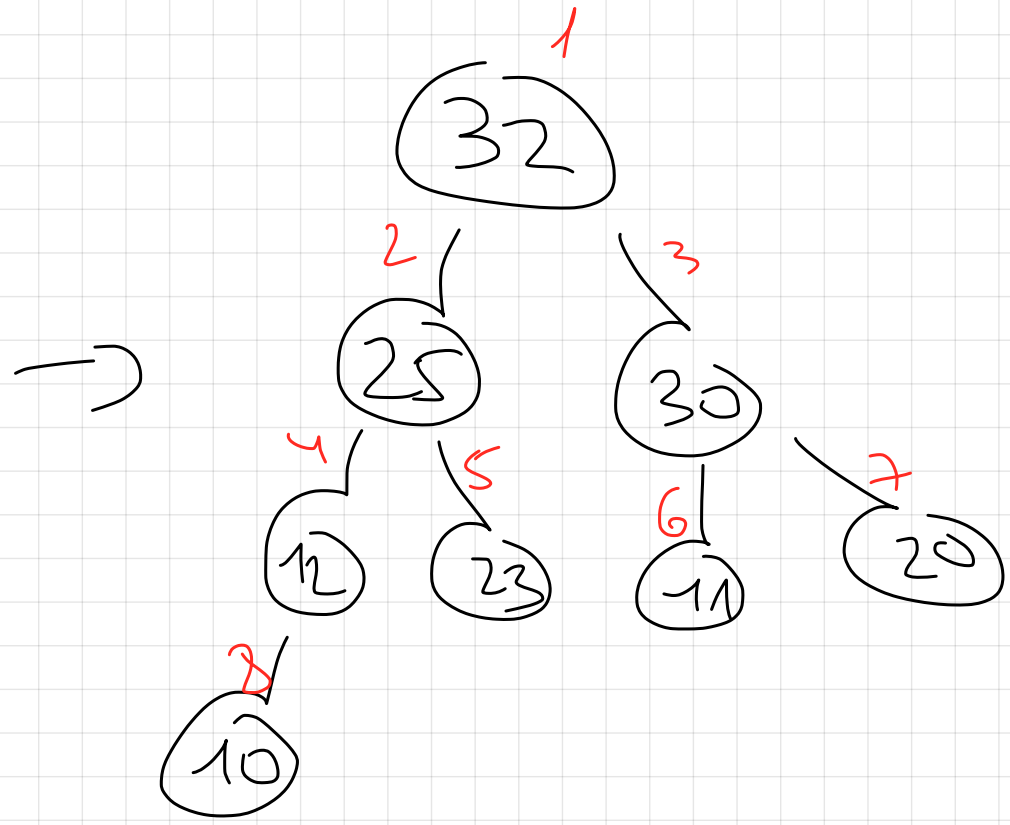
12



12	32	30	25	23	11	20	10	~~77~~
1	2	3	4	5	6	7	8	~~9~~

heapify:

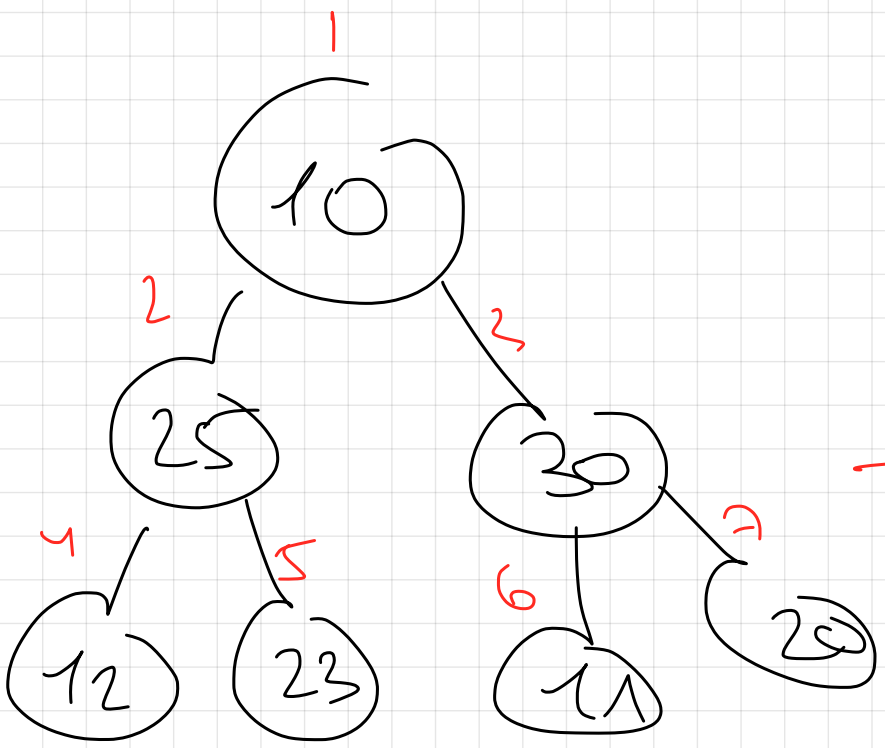




list:

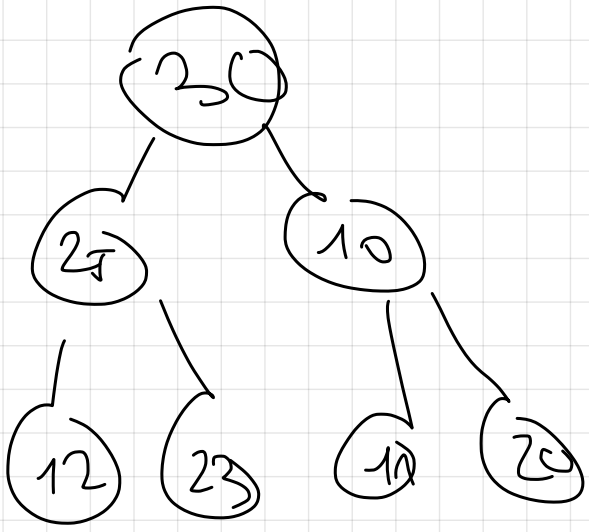
32	25	30	12	23	11	20	~~10~~
1	2	3	4	5	6	7	8

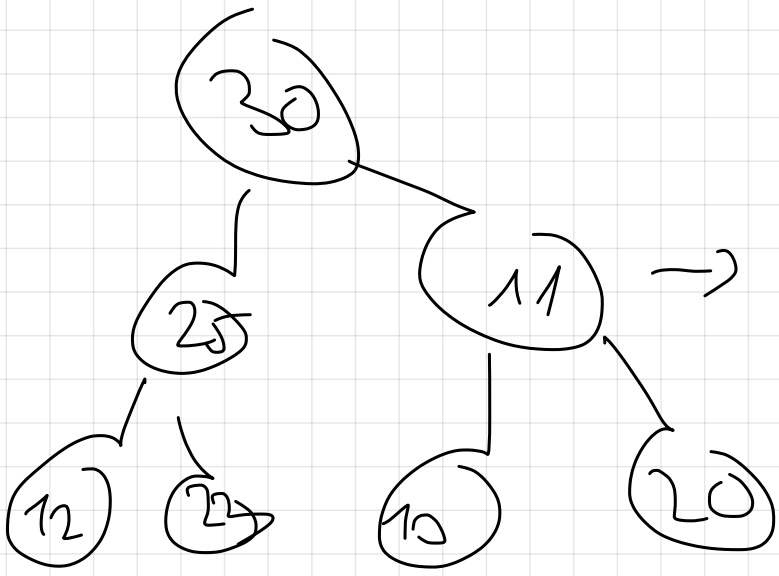
Swap

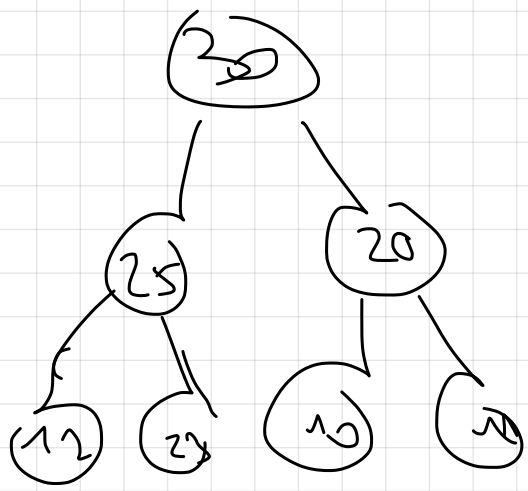


heapify

32	25	30	12	23	11	20
1	2	3	4	5	6	7

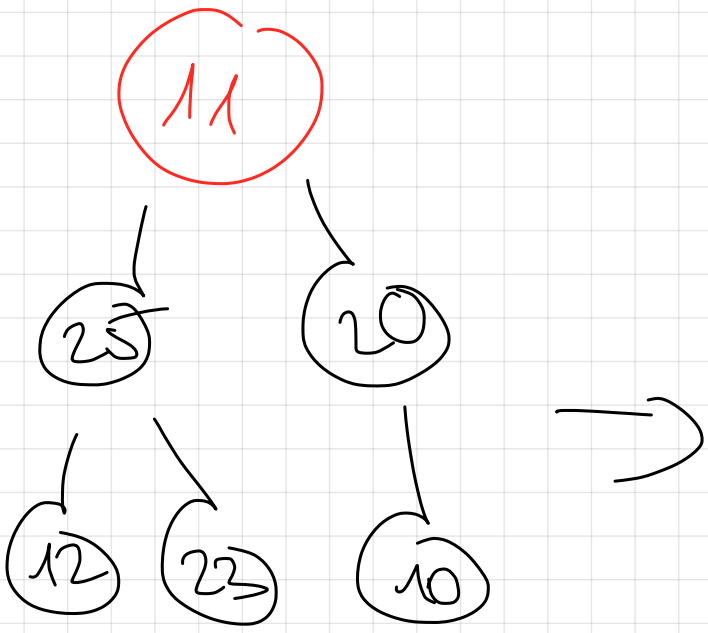




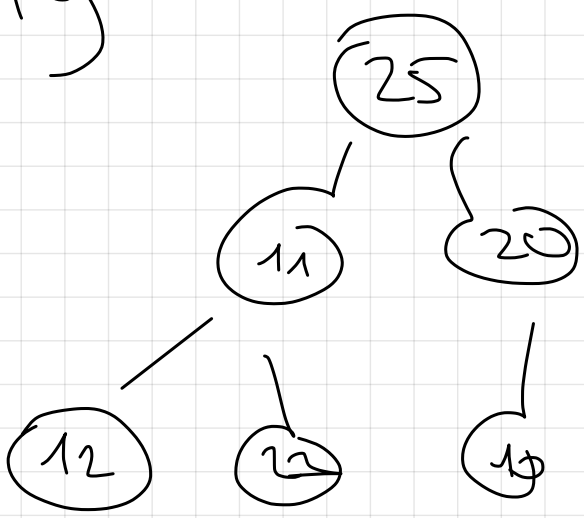


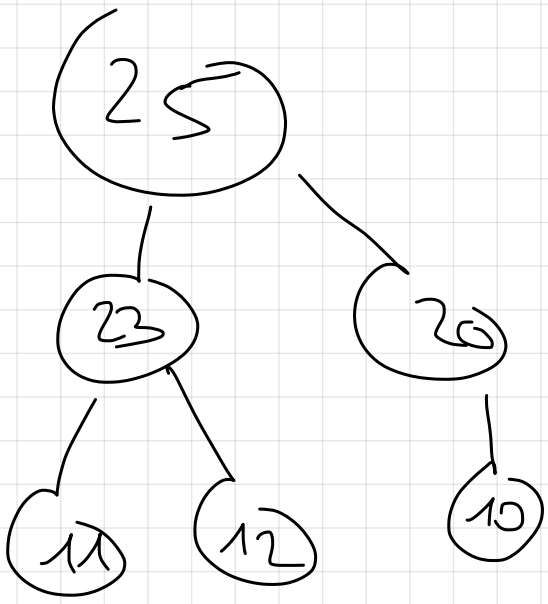
30	25	20	12	23	10	~~11~~
1	2	3	4	5	6	7

Swap



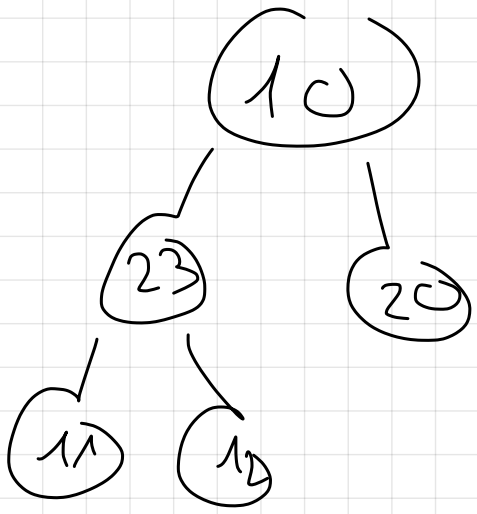
heapify



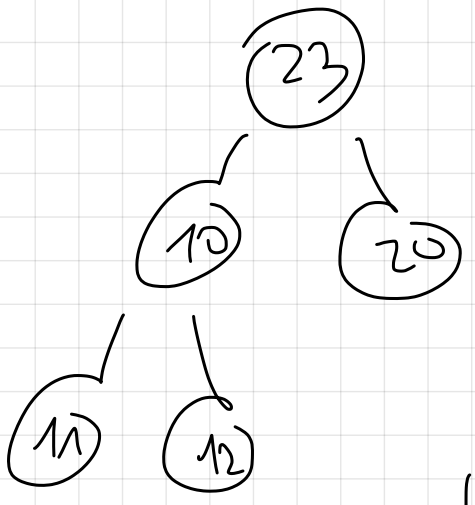


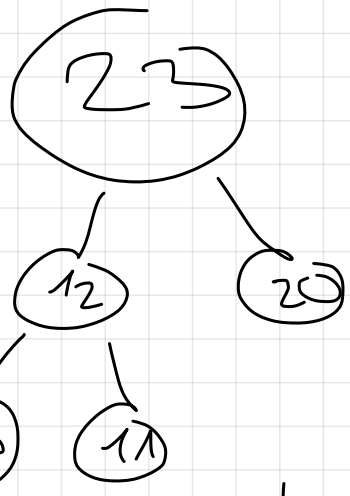
25	23	20	11	12	~~10~~
1	2	3	4	5	6

swap



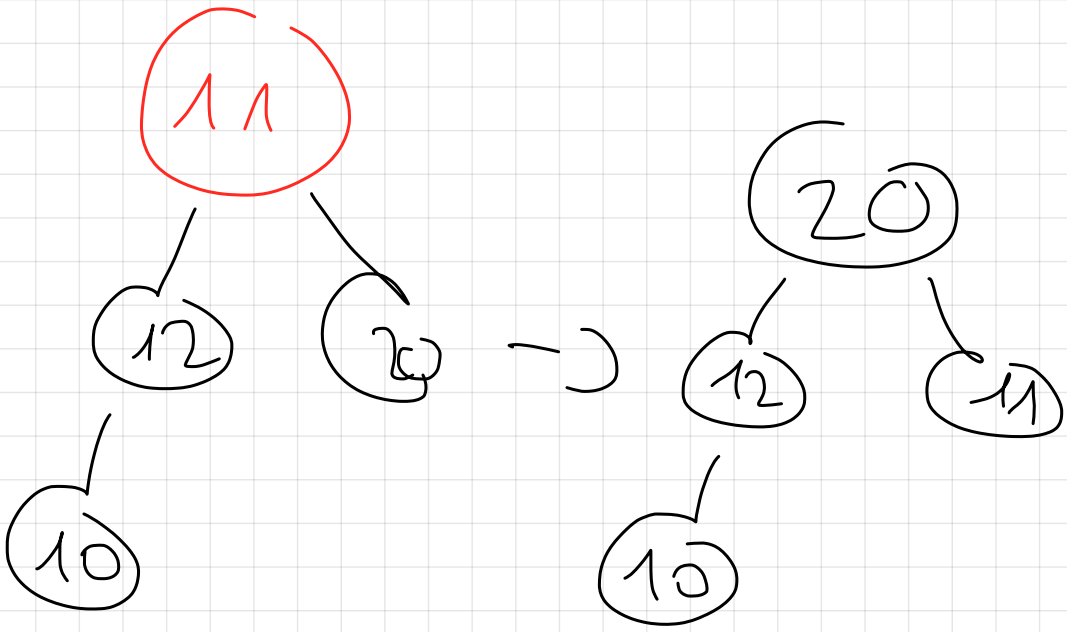
heapify:





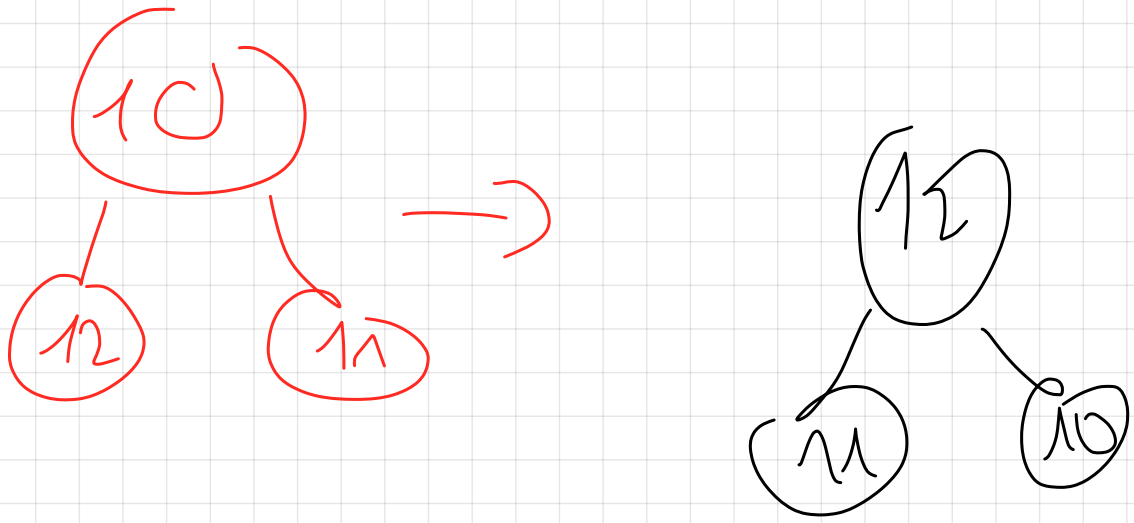
23	12	20	10	~~11~~
1	2	3	4	5

swap



20	12	11	~~10~~
1	2	3	4

swap



: אפשר לראות

77	32	30	25	23	20	12	11	10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Sorted array