Construction 3 – TP 2

Rappels de résistance des matériaux

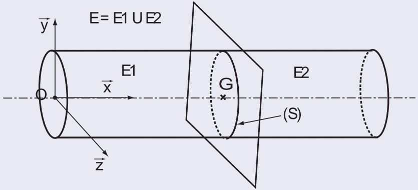
Laurence Meylheuc, Olivier Piccin

STRASBOURG
Plate-Forme Mécanique

Torseur des efforts intérieurs

Poutre droite

- On considère une poutre droite E découpée arbitrairement en deux tronçons E_1 et E_2.
- On suppose que cette poutre est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs.



Torseur des efforts intérieurs

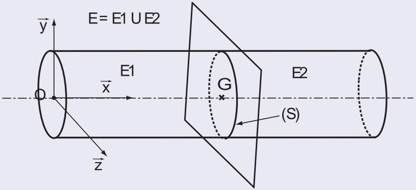
- Par convention, le torseur des actions intérieures (ou de cohésion) est défini comme suit :
$\left\{\mathcal{F}_{coh}\right\} = \left\{\mathcal{F}_{E_2\rightarrow E_1}\right\} = -\left\{\mathcal{F}_{Ext\rightarrow E_1}\right\}$

Composantes du torseur des efforts intérieurs

Torseur des efforts intérieurs

- Dans le repère local de la section droite, le torseur des actions intérieures s'écrit :

$$\{\mathcal{F}_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ M_t\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z} \end{array} \right\}_G .$$



- Dans le cas de poutres droites à plan moyen $(\vec{x}, \vec{y})$, on a :

$$\{\mathcal{F}_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x} + T_y\vec{y} \\ M_t\vec{x} + M_{fz}\vec{z} \end{array} \right\}_G .$$

Sollicitations associées

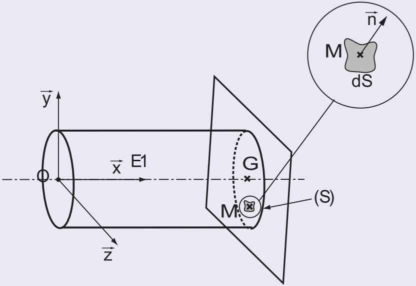
$$\{\mathcal{F}_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N\vec{x} + T_y\,\vec{y} \\ M_t\,\vec{x} + M_{fz}\,\vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

Sollicitation élémentaire	Composante non nulle	$\{\mathcal{F}_{coh}\}$
Traction/compression	N	$\begin{Bmatrix} N\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Cisaillement pur	T_y	$\begin{Bmatrix} T_y\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Torsion	M_t	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t\,\vec{x} \end{Bmatrix}_G$
Flexion pure	M_{fz}	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{fz}\,\vec{z} \end{Bmatrix}_G$
Flexion simple	T_y et M_{fz}	$\begin{Bmatrix} T_y\,\vec{y} \\ M_t\,\vec{x} \end{Bmatrix}_G$

Contrainte – Vecteur contrainte

Vecteur contrainte

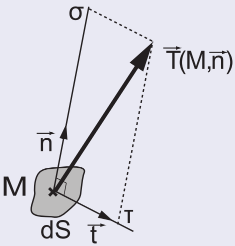
- En MMC, les efforts de cohésion exercés sur un petit élément de surface dS et de normale $\vec{n}$ sont une densité de force par unité de surface.



- Cette densité de force est caractérisée par le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.

Projections du vecteur contrainte

- Les projections du vecteur contrainte s'écrivent : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t}$.



- Le torseur des efforts intérieurs a pour expression :

$$\{\mathcal{F}_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_S \vec{T}(M,\vec{n})dS \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M,\vec{n})dS \end{array} \right\}_G$$

Tenseur des déformations linéarisées

Tenseur des déformations

- On note $\vec{u}$ le vecteur déplacement. Ses composantes dans une certaine base s'écrivent $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$.
- Le tenseur des déformations linéarisées s'écrit : $\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\nabla}}\vec{u} + \overline{\overline{\nabla}}\vec{u}^T)}$.
- Ses composantes, exprimées dans un repère cartésien, ont pour expression : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$.

INSA STRASBOURG PFM Plate-Forme Mécanique

Loi de comportement

Loi de comportement élastique, isotrope

- La loi de comportement élastique, isotrope est caractérisée par deux coefficients :
  - λ, μ dits coefficients de Lamé, ou bien
  - E, module d'Young et ν, coefficient de Poisson.

  μ est aussi noté G et appelé module de distorsion (ou module de Coulomb).
- Le tenseur des contraintes a pour expression : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \lambda Tr(\overline{\overline{\varepsilon}})\overline{\overline{Id}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}}$.
- Le tenseur des déformations a pour expression : $\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} Tr(\overline{\overline{\sigma}})\overline{\overline{Id}}}$.
- Relations entre les coefficients : $\boxed{\begin{array}{cc} E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} & \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array}}$

Caractéristiques mécaniques de matériaux

Quelques ordres de grandeur

	ρ (kg·m^{-3})	E (GPa)	ν	$R_{0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)
Acier ordinaire	7800	200	0.29	200	400
Acier allié	7800–8300	195–215	0.25–0.33	200–2000	400–2400
Aluminium	2700	78	0.34	50	200
Nylon	1200	2–4	0.4	50–80	100

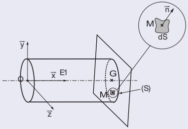
- $R_{0,2}$: limite conventionnelle d'élasticité. C'est la contrainte en traction simple pour une déformation permanente de 0.2%.
- R_m : limite de rupture en traction.

Contrainte équivalente de Von Mises

- Critère d'endommagement utilisé très fréquemment. On compare σ_{VM} à $R_{0,2}$ pour les métaux ($\sigma_{VM} \leq R_{0,2}$).
  $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 3(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)\right]}$
  Écrite avec les containtes principales, σ_{VM} vaut :
  $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_I-\sigma_{II})^2 + (\sigma_{II}-\sigma_{III})^2 + (\sigma_{III}-\sigma_I)^2\right]}$

Traction – Compression

- Sollicitation de la poutre d'extrémité A : $\{\mathcal{F}_{ext}\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$



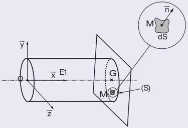
- Matrice des contraintes :
$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \text{avec } \sigma_{xx} = \frac{F}{S}.$$
- Allongement relatif ou déformation : $\dfrac{\Delta L}{L_0} = \varepsilon_{xx}$.
- Contrainte normale : $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$.
- Contrainte équivalente de Von Mises : $\sigma_{VM} = \sigma_{xx}$.

INSA STRASBOURG PFM Plate-Forme Mécanique

Flexion

- Sollicitation de la poutre de longueur l, encastrée en O, d'extrémité A :

$$\{\mathcal{F}_{ext}\} = \begin{Bmatrix} F\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

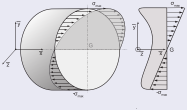


- Équilibre de la poutre : $M_{fz} = EI_{G_z}\dfrac{d^2y}{d\,x^2}$ avec I_{G_z} moment quadratique par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$: $I_{G_z} = \displaystyle\int y^2 dS$.

  Par ailleurs, comme $M_{fz}(x) = (l - x)F$, on a : $EI_{G_z}\dfrac{d^2y}{d\,x^2} = (l-x)F$.

- Par intégration, on obtient l'équation de la déformée de la poutre : $y(x) = \dfrac{F}{EI_{G_z}}\left(l - \dfrac{x}{3}\right)\dfrac{x^2}{2}$. Flèche en A : $y_{max} = \dfrac{Fl^3}{3EI_{G_z}}$.

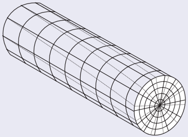
- Contrainte normale : $\sigma_{xx} = -\dfrac{M_{fz}}{I_{G_z}}y$.

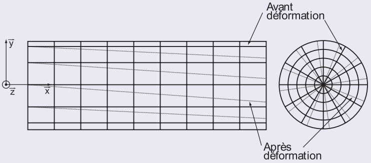


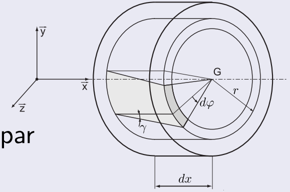
Torsion

- Sollicitation de la poutre de longueur l, encastrée en O, d'extrémité A :

$$\{\mathcal{F}_{ext}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t\,\vec{x} \end{Bmatrix}_{\_}$$







- γ : Déformation de cisaillement. $\gamma = r\dfrac{d\varphi}{d\,x}$.
- θ : Angle unitaire de torsion (rad·m^{-1}) défini par $\theta = \dfrac{d\varphi}{d\,x}$. On a : $\gamma = r\theta$.
- Rappel : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ module de distorsion (ou de cisaillement ou de Coulomb).

STRASBOURG
Plate-Forme Mécanique

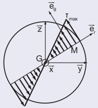
Torsion

- Matrice des contraintes dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & G\theta z & -G\theta y \\ G\theta z & 0 & 0 \\ -G\theta y & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Matrice des contraintes dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\theta r \\ 0 & G\theta r & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)}$$



- Matrice des contraintes dans la base principale $(\vec{d}_I, \vec{d}_{II}, \vec{d}_{III})$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} G\theta r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G\theta r \end{bmatrix}_{(\vec{d}_I,\vec{d}_{II},\vec{d}_{III})}$$

Torsion

- Contrainte de cisaillement : $\tau_{\theta z} = G\gamma = G\theta r$.
- I_0 : Moment quadratique polaire. $I_0 = \int r^2 dS$.
- Relation entre M_t et la contrainte :

$$\begin{aligned}
M_t \vec{e}_z &= \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{e}_z) dS \\
&= \int_S r\vec{e}_r \wedge G\theta r \vec{e}_\theta dS \\
&= G\theta \int_S r^2 dS \vec{e}_z \\
M_t \vec{e}_z &= G\theta I_0 \vec{e}_z
\end{aligned}$$

- Contrainte de cisaillement maximale : $|\tau_{max}| = \dfrac{M_t}{I_0} R = G\theta R$.
- Distorsion maximale : $\gamma_{max} = \dfrac{\tau_{max}}{G}$.
- Déplacement maximal : $\gamma_{max} l$.
- Contrainte de Von Mises : $\tau_{VM} = \sqrt{3}\tau_{max}$.
  Pour le dimensionnement, on compare τ_{VM} à la limite d'élasticité (obtenue par un essai en traction).