حل تمرین سری دوم

۱- الف) G و H کد را بدست آورید.

$$v_0 = u_0 + u_2 + u_3$$
$$v_1 = u_0 + u_1 + u_2$$
$$v_2 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$v_3 = u_0 + u_1 + u_2$$

$$\Rightarrow G = \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\quad u_0 \; u_1 \; u_2 \; u_3 \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right]_{4\times 8} \end{array}$$

$$G = [\,\underbrace{P}\;\; \underbrace{I}\,]$$

با توجه به $H = [I \;\; P^T]$

$$\Rightarrow H = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1 \end{array}\right]$$

ب) - کدهای متفاوت و وزن همه آنها فرد است پس حداقل فاصله و گستره مساوی ۴ است اگر تعداد ۱ها ۳ و ۵ و ۷ در جمع کنیم صفر شود پس $d_{min} = 4$ می‌باشد.

با بدست آوردن تمام کدها و محاسبه وزن آنها

$$A_0 = 1 \;,\; A_4 = 14 \;,\; A_8 = 1$$

$$A(z) = 1 + 14z^4 + z^8$$

ب-۱

$$P_u(E) = \sum_{i=1}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i} = 14p^4(1-p)^{12} + p^8$$
$$= 1.241 \times 10^{-7}$$
$$p = 10^{-2}$$

---

(2) فرض کنید C مجموعه کلمات کد و $C_e$ و $C_o$ مجموعه کلمات کد با وزن زوج و فرد باشد. اگر یک کلمه کد (مثلاً $v$) را از مجموعه $C_o$ انتخاب کنیم و آن را با تمام کلمات که $C_o$ جمع کنیم. به خاطر داریم که اگر یک بردار با وزن فرد را با یک بردار با وزن فرد جمع کنیم حاصل یک بردار با وزن زوج خواهد شد. بنابراین حاصل این کار مجموعه‌ای از کلمات کد با وزن زوج است که آن را $\tilde{C}_e$ می‌نامیم. واضح است که $\tilde{C}_e \subset C_e$ می‌باشد. و تعداد عناصر مجموعه $\tilde{C}_e$ با تعداد بردارهای $C_o$ هم برابر هستند. حال اگر

(1) $\quad Ord(C_o) \leq Ord(C_e)$

حال اگر $v$ را با تمام $C_e$ها جمع کنیم، حاصل بردارهایی با وزن فرد خواهد شد که آن را $\tilde{C}_o$ می‌نامیم که تعداد بردارهای $\tilde{C}_o$ با $C_e$ برابر است بنابراین $|\tilde{C}_o| = C_e$

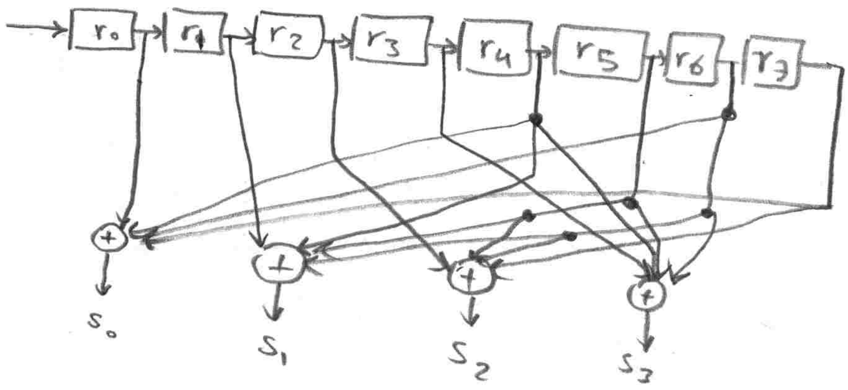
(2) $\quad Ord(C_e) \leq Ord(C_o) \Leftarrow \tilde{C}_o \subset C_o$

(1), (2) $\Rightarrow Ord(C_e) = Ord(C_o)$

$Ord(A) =$ تعداد عناصر مجموعه $A$

(3-3

$$H = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix}$$




---

3-(4

$$H_1 = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & H \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1\ 1\ \cdots\ 1} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (0\ \underline{h}_1) \\ \vdots \\ (0\ \underline{h}_{n-k}) \\ (11\cdots1) \end{bmatrix}_{(n-k+1)\times(n+1)} \qquad H = \begin{bmatrix} \underline{h}_1 \\ \vdots \\ \underline{h}_{n-k} \end{bmatrix}_{(n-k)\times n}$$

a - بنابراین کد $C_1$ یک کد $(n+1, k)$ می‌باشد $\qquad n+1-(n-k+1)=k$

با اضافه شدن ستون صفر و سطر تمام یک‌ها، ماتریس $H_1$ شامل $n-k+1$ سطر مستقل خطی است

اثبات استقلال خطی سطرهای $H_1$:

$$a_1\underline{h}_1 + \cdots + a_{n-k}\underline{h}_{n-k} = \underline{0} \Rightarrow (a_1, \cdots, a_{n-k}) = \underline{0} \quad \text{(I)}$$

$$a_1(0\ \underline{h}_1) + \cdots + a_{n-k}(0\ \underline{h}_{n-k}) + a_{n-k+1}\times(111\cdots1) = \underline{0}$$

$$(a_{n-k+1},\ a_1\underline{h}_1 + \cdots + a_{n-k}\underline{h}_{n-k}) = (0, \underline{0}) \Rightarrow \begin{cases} a_{n-k+1} = 0 \\ \text{(I)} = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}) = \underline{0} \end{cases}$$

پس کد $C_1$ یک کد خطی $(n+1, k)$ می‌باشد

که بردارهای کد آن همان بردارهای کد ... $C(n+1, k)$ می‌باشد

b - می‌دانیم که $\underline{v}_0 = (11\cdots1)_{1\times n+1}$ یک کلمه کد در کد دوگان $C(n+1, k)$ می‌باشد. اگر $\underline{v}$ یک کلمه دلخواه از کد $C(n+1, k)$ باشد و فرض کنیم دارای وزن فرد می‌باشد، ضرب داخلی $\underline{v}_0$ و $\underline{v}$ برابر مجموع تعداد یک‌های $\underline{v}$ می‌باشد که حاصل آن قطعاً برابر 1 است. پس وزن $\underline{v}$ نمی‌تواند فرد باشد. بنابراین کلمات کد $\underline{v}$ باید دارای وزن زوج باشند.

c - فرض کنید $\underline{v} = (v_0, \ldots, v_{n-1})$ متعلق به $C(n, k)$ باشد و $\underline{v}' = (v_\infty, \underline{v})$ کد مربوطه در $C(n+1, k)$ باشد.

$$\underline{v}'_{1\times n+1} H_1^T{}_{n+1\times} = \underline{0}$$

بدیهی است که اگر $\underline{v}$ دارای وزن زوج باشد، الزاماً باید $v_\infty = 0$ باشد و اگر $\underline{v}$ دارای وزن فرد باشد $v_\infty = 1$ باشد، بنابراین ثابت کردیم که کلمات کد $\underline{v}'$ همگی دارای وزن زوج می‌باشند.

3-15 همانطور که در روش‌های شکل بیان شده است. اگر از روش آرایه استاندارد استفاده کنیم سردسته کلاسها حداکثر دارای وزن $t$ در خواهند داشت و ممکن است برخی از سردسته‌ها نیز وزن $t+1$ نیز داشته باشند. در هر سطر کد تنها تعداد $2^k$ بردار $n$ تایی داریم. تعداد بردارهای موجود در این سطرها برابر:

$$2^k\times\left(C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^t\right)$$

می‌باشد. که تعداد فوق کمتر یا مساوی از تعداد کل بردارهای $n$ تایی است ($2^n$) بنابراین

$$2^n \geq 2^k\left(C_n^0+\dots+C_n^t\right) \Rightarrow 2^{n-k} \geq C_n^0+\dots+C_n^t$$

$$\Rightarrow (n-k) \geq \lg_2\left(C_n^0+\dots+C_n^t\right)$$