فـصل چـهـا رم

تــبـديـلـهـا ي هـنـدسي

۴-۱ مقـدمـه

در کاربرد های مختلف گرافیک کامپیوتری لازم می شود که الگوهای خاصی در مکانهای مختلف در اندازه ها، و جهتهای متفاوتی تکرار شوند. به عنوان مثال در پویا نمائی اغلب لازم می شود که در شکلی از یک قاب به قاب دیگر تغییری بوجود آید. **تبدیلهای هندسی**[1] جهت انجام اینگونه اعمال مورد استفاده قرار می گیرند. در این فصل ابتدا تبدیلهای هندسی دو بعدی شامل انتقال، تعییر اندازه، دوران، و کشش و سپس تعمیم آنها به سه بعد معرفی می گردند.

۴-۲ تــبـديـلـهـا ي دو بـعـدي

نقاط در صفحهٔ (x,y) را می توانیم بوسیلهٔ اضافه کردن میزان جابجائی به مختصات آنها به مکانهای جدید **انتقال**[2] دهیم. برای هر نقطهٔ P(x,y) که قرار است به اندازهٔ d_x واحد به موازات محور x و d_y واحد به موازات محور y حرکت کند، مختصات نقطهٔ جدید P'(x',y') بوسیلهٔ روابط زیر بدست می آیند:

$$x' = x + d_x \qquad y' = y + d_y \qquad (۱)$$

اگر بردارهای ستونی زیر را تعریف کنیم:

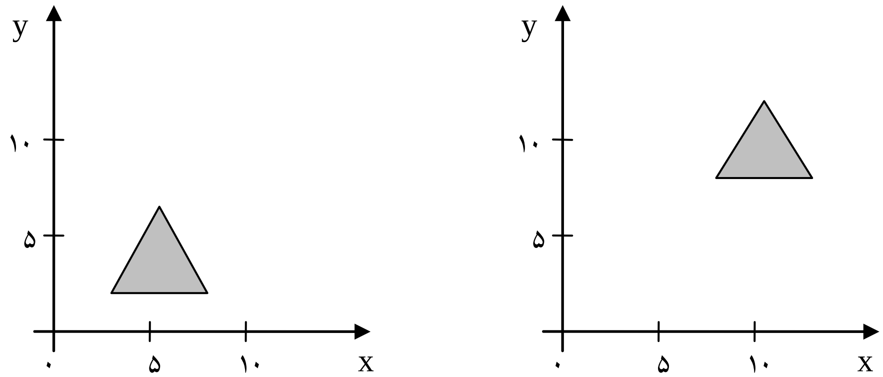
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

آنگاه روابط ۱ را می توان بصورت خلاصهٔ زیر بیان نمود:

$$P' = P + T$$

می توانیم تمامی یک شئ را با اعمال روابط ۱ به تمامی نقاط آن جابجا کنیم. به عنوان مثال به این روش می توان تمامی نقاط یک خط را به مکان جدید منتقل نمود. ولی چون یک خط از نقاط بسیار زیادی تشکیل شده است، این فرآیند می تواند بسیار وقت گیر باشد. خوشبختانه می توانیم فقط نقاط انتهائی خط را به مکان جدید منتقل نموده و سپس یک خط جدید بین نقاط انتهائی انتقال یافته رسم نمود. شکل ۱ اثر انتقال یک مثلث بوسیلهٔ (۴و۵) را نشان می دهد.

---
[1] Geometrical transformations
[2] Translation



شکل1

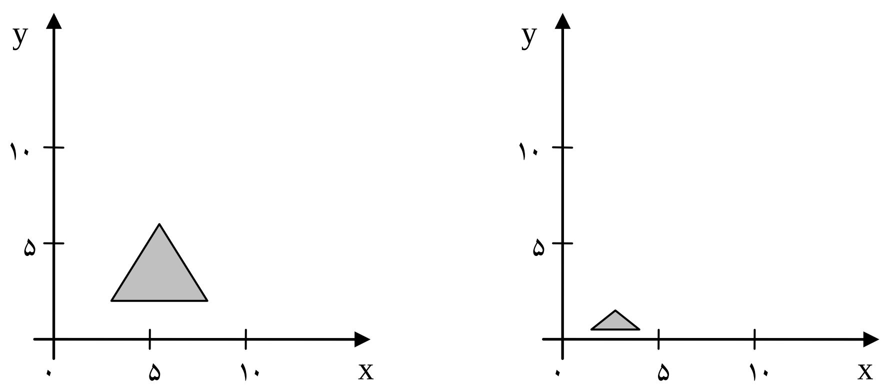
نقاط را می توان به اندازهٔ s_x در جهت محوردx و s_y در جهت محور y **تغییر اندازه**[3] داد. برای هر نقطهٔ P(x,y) مختصات نقطهٔ جدید از روابط زیر بدست می آیند:

$$(۲)\; x' = s_x.x \qquad y' = s_y.y$$

این روابط را می توان بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$P' = S.P \qquad \text{یا} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

که S ماتریس تغییر اندازه می باشد. در شکل ۲ مثلث شکل ۱ به اندازهٔ ۱/۲ در x و ۱/۴ در y تغییر اندازه شده است. توجه کنید که تغییر اندازه حول مبدأ می باشد. در این حالت مثلث کوچکتر و نزدیکتر به مبدأ شده است. اگر ضریب تغییر اندازه بزرگتر از ۱ بود، مثلث بزرگتر و دورتر از مبدأ می بود. نسبت اندازه های مثلث نیز تغییر یافته است چون $s_x \neq s_y$ (که به آن تغییر اندازهٔ غیر یکنواخت[4] گفته می شود). در یک تغییر اندازهٔ یکنواخت که $s_x = s_y$ نسبتها دست نخورده می مانند.



شکل2

نقاط را می توان حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ θ نیز دوران[5] داد. دوران نقطهٔ P(x,y) بصورت ریاضی زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \qquad (۳)$$

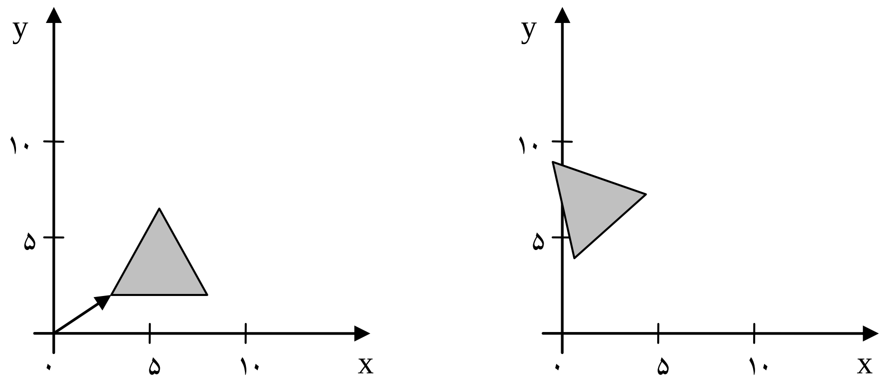
---

[3] Scale
[4] Differential scaling
[5] rotation

که بصورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$P' = R.P \qquad \text{یا} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

که R ماتریس دوران می باشد. شکل ۳ دوران مثلث را به اندازهٔ ۴۵ درجه نشان می دهد. زوایای مثبت در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت از x به طرف y (جهت مثلثاتی) اندازه گیری می شوند.



شکل3

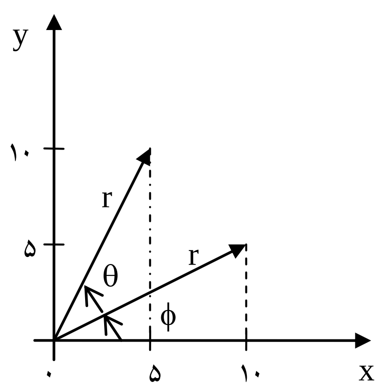
معادلات ۳ به آسانی از شکل ۴ که در آن دوران θ نقطهٔ P(x,y) را به نقطهٔ P'(x',y') منتقل می کند بدست می آیند.
چون دروان حول مبدأ است مسافت P و P' تا مبدأ برابر (مقدار r) می باشند. با استفاده از مثلثات ساده بدست می آوریم:

$$x = r.\cos\phi \qquad y = r.\sin\phi \qquad (۴)$$

و

$$\begin{aligned} x' &= r.\cos(\theta+\phi) = r.\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' &= r.\sin(\theta+\phi) = r.\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{aligned} \qquad (۵)$$

با جایگزین کردن معادلات ۴ در معادلات ۵ معادلات ۳ بدست می آید.



شکل4

۴-۳ مختصات همگن و نمایش تبدیلهاي دوبعدي

نمایش ماتریسی انتقال، تعییر اندازه، و دوران به ترتیب عبارتند از:

$$P' = T + P$$
$$P' = S.P$$
$$P' = R.P$$

متأسفانه بر خلاف تغییر اندازه و دوران، انتقال با عمل جمع ماتریسها انجام می گیرد. علاقمند هستیم که قادر باشیم هر سه تبدیل را بصورت سازگاری انجام دهیم به گونه ای که براحتی بتوان آنها را ترکیب نمود.

اگر نقاط در مختصات همگن[6] بیان شوند هر سه تبدیل را می توان با ضرب انجام داد. در مختصات همگن، یک مختصهٔ سوم به یک نقطه اضافه می کنیم. به جای نمایش یک نقطه بوسیلهٔ یک جفت اعداد (x,y)، هر نقطه بوسیلهٔ یک سه تائی (x,y,W) نمایش داده می شود. می گوئیم که دو مجموعه مختصات همگن (x,y,W) و (x',y',W') نقطهٔ مشابهی را نشان می دهند اگر و تنها اگر یکی ضریبی از دیگری باشد. بنابر این، (۶و۳و۲) و (۱۲و۶و۴) نقاط مشابهی هستند که بوسیلهٔ سه تائیهای متفاوتی نشان داده شده اند. یعنی، یک نقطه دارای تعداد زیادی نمایش مختصات همگن متفاوت می باشد. همچنین حداقل یکی از مختصات همگن بایستی غیرصفر باشد، (۰و۰و۰) مجاز نیست.

اگر مختصهٔ W غیر صفر باشد می توان همهٔ مختصات را به آن تقسیم نمود: (x,y,W) نقطهٔ مشابهی همانند (x/W,y/W,1) را نمایش می دهد. هنگامی که W غیر صفر است، معمولاً این تقسیم را انجام می دهیم و اعداد x/W و y/W متخصات دکارتی نقطهٔ همگن نامیده می شوند. نقاطی با W=0 نقاط در بی نهایت نامیده می شوند و در بحثهای ما زیاد ظاهر نمی گردند.

چون نقاط اکنون بردارهای ستونی سه عنصری هستند، ماتریسهای تبدیل که در بردار نقطه ضرب شده تا نقطهٔ دیگری را تولید نمایند بایستی ماتریسهای ۳×۳ باشند. در این حالت معادلات انتقال بصورت زیر می باشند:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ فوق را بصورت دیگر $P'=T(d_x,d_y).P$ نیز می توان بیان نمود که در آن

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال، چه اتفاقی خواهد افتاد اگر یک نقطه بوسیلهٔ $T(d_{x1},d_{y1})$ به P' و سپس بوسیلهٔ $T(d_{x2},d_{y2})$ به P'' منتقل شود؟ انتظار داریم که انتقال کل به اندازهٔ $T(d_{x1}+d_{x2},d_{y1}+d_{y2})$ باشد. برای تأئید این احساس داریم که

$$P' = T(dx_1, dy_1).P \qquad (۶)$$
$$P'' = T(dx_2, dy_2).P' \qquad (۷)$$

با جایگزین کردن معادلهٔ (۶) در معادلهٔ (۷) داریم

$$P'' = T(dx_2, dy_2).(T(dx_1, dy_1).P) = (T(dx_2, dy_2).T(dx_1, dy_1)).P$$

ضرب ماتریسی $T(dx_2, dy_2).T(dx_1, dy_1)$ عبارت است از

[6] Homogeneous coordinates

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1}+d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1}+d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابر این انتقال خالص واقعاً $T(d_{x1}+d_{x2},d_{y1}+d_{y2})$ می باشد. این ضرب ماتریسی به عنوان ترکیب یا الحاق $T(d_{x1},d_{y1})$ و $T(d_{x2},d_{y2})$ رجوع می شود که ما از اصطلاح ترکیب استفاده می کنیم.

بطور مشابه معادلهٔ تغییر اندازه در مختصات همگن بصورت ماتریسی زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

که با تعریف

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت

$$P' = S(s_x, s_y).P$$

همانگونه که انتقالهای متوالی بصورت جمع هستند، انتظار داریم که تغییر اندازه های متوالی بصورت ضرب باشند. با داشتن

$$(۸)\; P' = S(s_{x1}, s_{y1}).P$$

$$(۹)\; P'' = S(s_{x2}, s_{y2}).P'$$

و سپس جایگزین کردن معادلهٔ (۸) در معادلهٔ (۹) خواهیم داشت:

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}).(S(s_{x1}, s_{y1}).P) = (S(s_{x2}, s_{y2}).(S(s_{x1}, s_{y1})).P$$

و

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x2}.s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2}.s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که احساس ما را تأئید می کند.

نهایتاً، معادلهٔ دوران را می توان بصورت زیر در مختصات همگن بیان نمود

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

با فرض

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$P' = R(\theta).P$$

بطور مشابه می توان نشان داد که دورانهای متوالی بصورت جمع هستند.

در زیر ماتریس ۲×۲ بالا- چپ معادلهٔ دوران، هر یک از دو سطر را به عنوان برداری در نظر بگیرید. می توان نشان داد که این بردارها دارای سه خاصیت هستند:

۱. هر یک، یک بردار یکه است.
۲. هر یک بر دیگری عمود است (ضرب داخلی آنها صفر است).
۳. اگر بردار اول و دوم تحت $R(\theta)$ دوران داده شوند، به ترتیب بر روی قسمت مثبت محورهای x و y قرار می گیرند.

خاصیت سوّم را می توان بصورت زیر بررسی نمود:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

دو خاصیت اوّل در مورد ستونهای زیرماتریس ۲×۲ نیز صادقند. اگر بردارهای یکه در جهت مثبت محورهای x و y تحت $R(\theta)$ دوران داده شوند به ترتیب بر روی جهتهائی که توسط این دو بردار ستونی مشخص شده قرار می گیرند. خاصیت اخیر بصورت زیر نمایش داده شده است:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

این خواص دو روش مفید برای تعیین یک ماتریس دوران هنگامی که اثر مطلوب دوران را می دانیم را ارائه می دهند. ماتریسی که دارای این خواص باشد ماتریس **عمود خاص**[۷] نامیده می شود.

---

[7] Special orthogonal

ماتریس تبدیلی به شکل

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که زیر ماتریس ۲×۲ بالا- چپ آن عمود باشد، طولها و زوایا را تغییر نمی دهد. یعنی، یک مربع واحد، یک مربع واحد باقی مانده و تبدیل به لوزی با اضلاع واحد، یا مربعی به اضلاع غیر واحد تبدیل نمی شود. چنین تبدیلهائی، تبدیلهای **بدنهٔ سخت**[۸] نیز نامیده می شوند چون بدنه یا شیئی که در حال تبدیل است به هیچ طریقی اعواج نمی یابد. یک دنبالهٔ اختیاری از تبدیلهای انتقال و دوران ماتریسی بدین شکل را پدید می آورد.

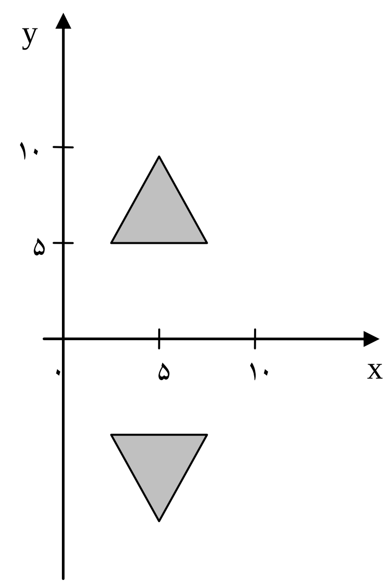
یک دنبالهٔ اختیاری از تبدیلهای انتقال، دوران، و تغییر اندازه یک **تبدیل مستوی**[۹] را بوجود می آورد که دارای این خاصیت است که موازی بودن خطوط را نگاه می دارد ولی طولها و زاویه را نه.

۴-۴ تبدیلهاي ديگر

حالت خاصی از تبدیل به نام **انعکاس**[۱۰] وجود دارد که در آن می توان تصویر آینه ای یک شکل را حول یک محور مشخص بنام محور انعکاس بدست آورد. اشیاء را می توان حول محور x با استفاده از تبدیل زیر انعکاس داد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این انعکاس مقدار x را تغییر نمی دهد ولی باعث می شود که مقادیر y تغییر علامت دهند. شکل ۵ انعکاس یک مثلث حول محور x را نشان می دهد.



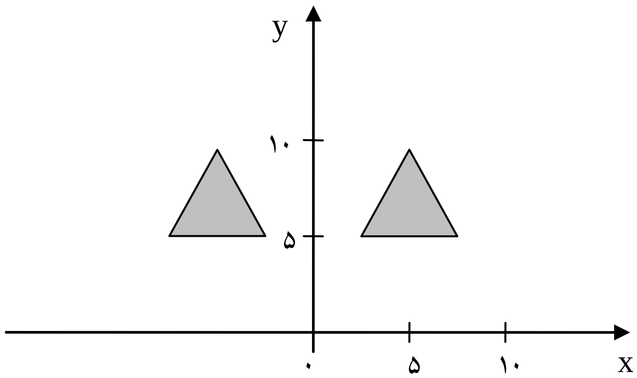
شکل5

[8] Rigid body
[9] Affine transform
[10] Reflection

انعکاس حول محور y باعث می شود که مختصه های y ثابت مانده ولی مختصه های x تغییر علامت دهند. ماتریس تبدیل زیر می تواند این عمل را انجام دهد:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

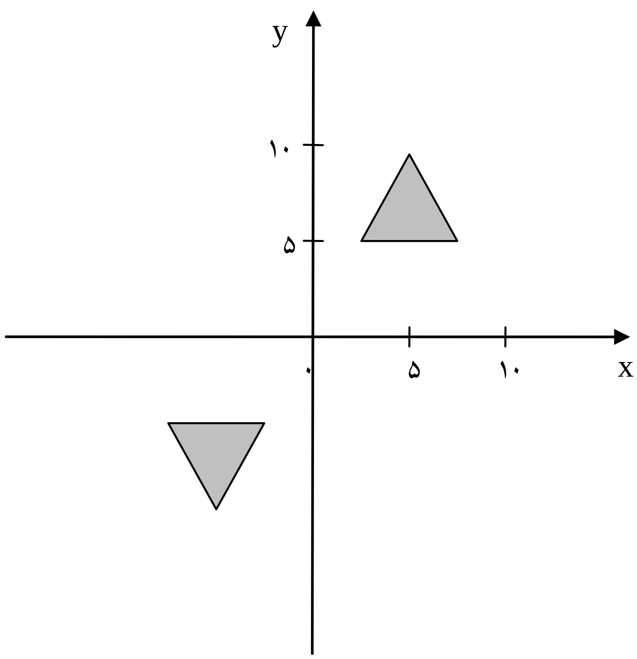
شکل ۶ نیز انعکاس یک مثلث حول محور y را نشان می دهد..



شکل6

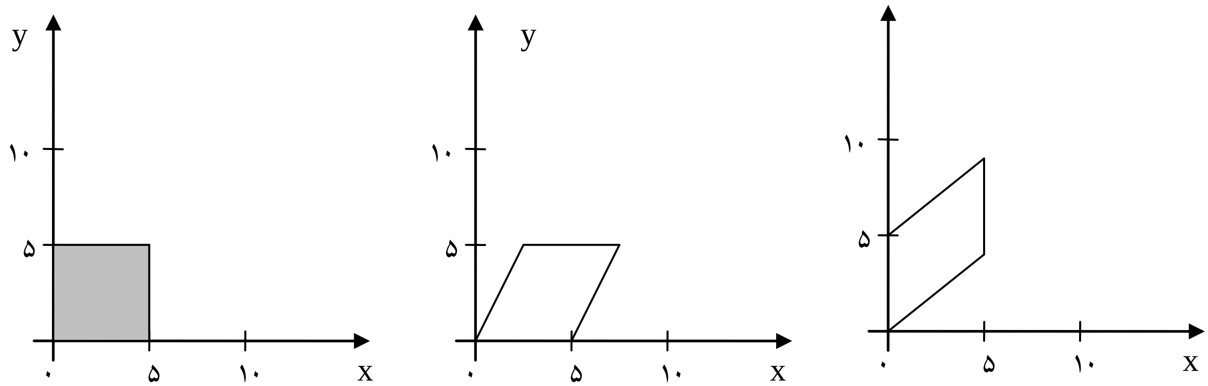
حالت دیگری از انعکاس مقادیر مختصه های x و y هر دو را تغییر می دهد. در این حالت انعکاس حول مبدأ مختصات می باشد. شکل ۷ انعکاس یک مثلث حول مبدأ را نشان می دهد. ماتریس تبدیل زیر می تواند این تبدیل را انجام دهد:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل7

نوع دیگری از تبدیلها، تبدیل **کشش**[11] می باشد. تبدیل کشش دو بعدی به دو صورت کشش در طول محور x و کشش در طول محور y می باشد. شکل ۸ اثر تبدیل کشش را در طول این دو محور نشان می دهد.



شکل8

کشش در طول محور x توسط ماتریس زیر نمایش داده می شود:

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در صورتی که نقطهٔ $P=[x\ y\ z]^T$ توسط SH_x تبدیل شود نقطهٔ $P'=[x+ay\ y\ z]^T$ بدست می آید که نشان می دهد مختصهٔ x بصورت تابعی از مقدار y آن تغییر می یابد.

بطور مشابه کشش در طول محور y توسط ماتریس زیر نمایش داده می شود:

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این حالت مختصهٔ y بصورت تابعی از مقدار x تغییر پیدا می کند.

[11] Shear