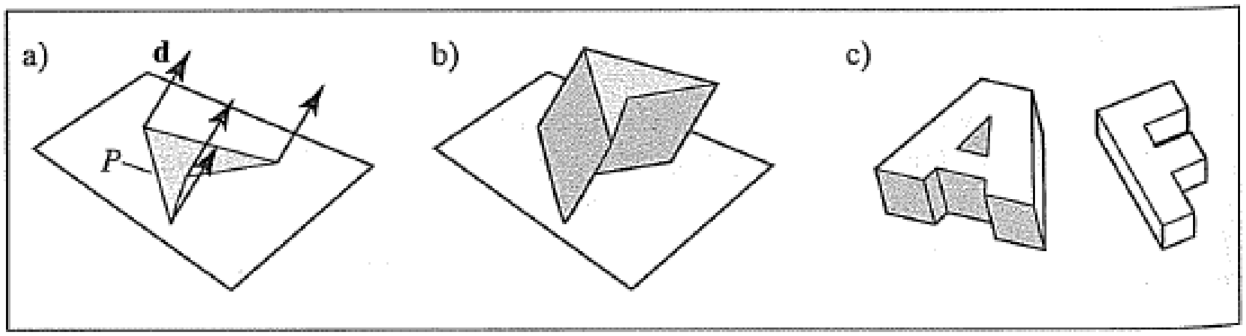
بسمه تعالی

شبکه های چندضلعی-۲

منشورها

یک منشور[1] از جاروب (یا بیرون زدگی[2]) یک چندضلعی در طول یک خط مستقیم بدست می آید. در این حالت یک چندضلعی تبدیل به یک چند وجهی می شود. هنگامی که d عمود به چندضلعی P باشد یک منشور قائم خواهیم داشت.

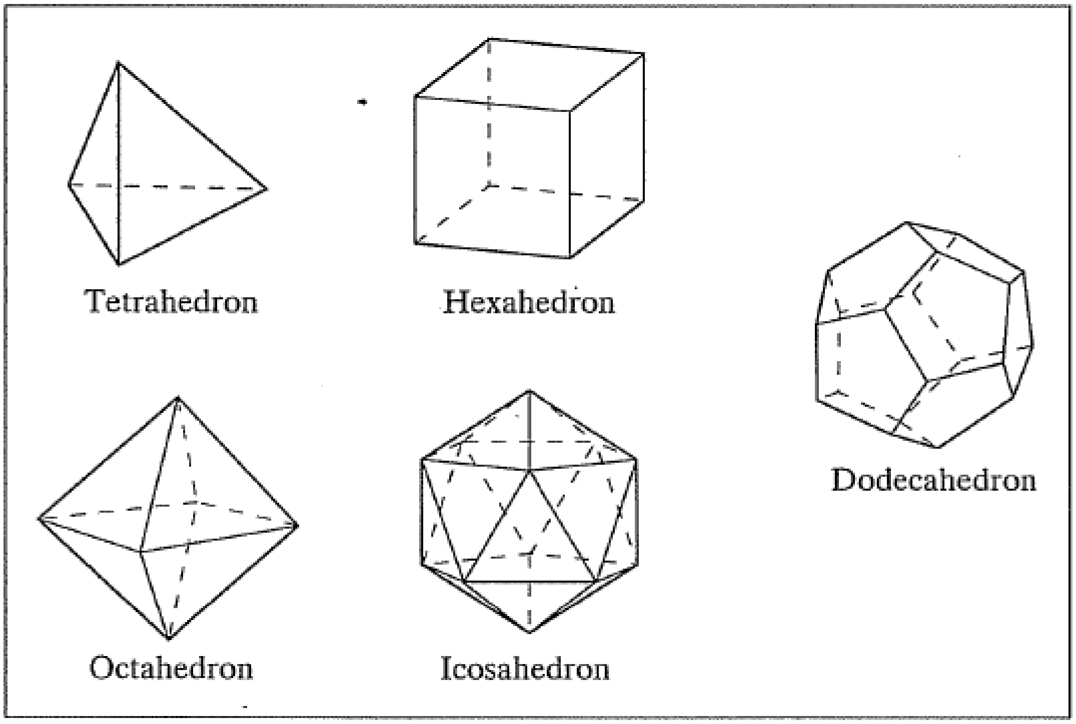


شکل ۱ استفاده از بیرون زدگي براي تشكيل منشور

اجسام افلاطونی

اگر همهٔ وجوه یک چندوجهی یکسان بوده و هر یک، یک چندضلعی منتظم باشد، شئ را چندوجهی منتظم گویند. فقط ۵ چنین جسمی وجود دارند که به آنها اشکال افلاطونی گفته می شود. سه تا از اجسام افلاطونی از مثلث متساوی الاضلاع به عنوان وجه استفاده می کنند، یکی از مربع، دیگری از پنج ضلعی استفاده می کنند.

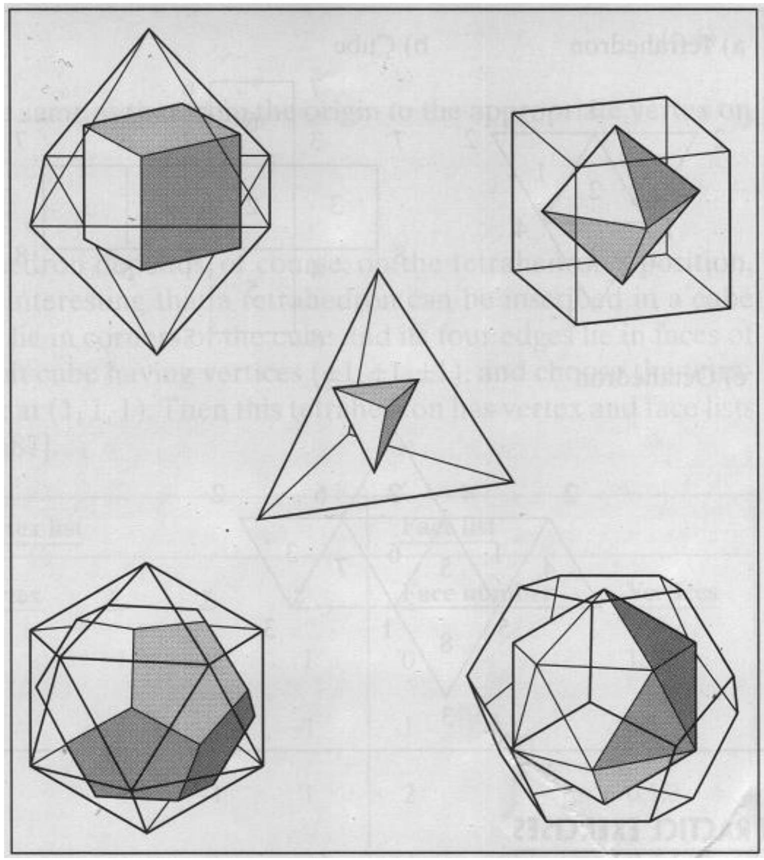
[1] prism
[2] extruding



شکل ۲

دوگان چندوجهیها

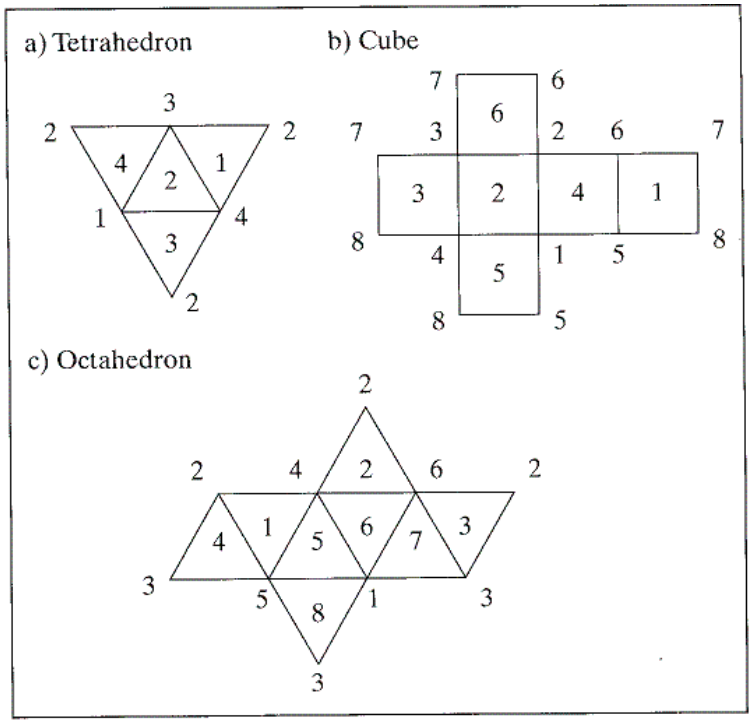
هر جسم افلاطونی P دارای یک چندوجهی دوگان D است. رئوس D مراکز وجوه P هستند. لبه های D مراکز وجوه مجاور در P را به هم متصل می کنند. دوگانها خود اجسام افلاطونی هستند.



شکل ۳ دوگان اجسام افلاطوني.

دوگان چهاروجهی، چهار وجهی است. مکعب و هشت وجهی دوگان یکدیگرند. بیست وجهی و دوازده وجهی دوگان یکدیگرند. دوگانها دارای تعداد برابری لبه هستند. تعداد رئوس یکی برابر تعداد وجوه دوگانش است.

برای دنبال کردن شماره گذاری رأس و وجه از یک مدل استفاده می کنیم. با بریدن لبه های معینی از هر شئ و پهن کردن آن روی یک سطح صاف بطوریکه همهٔ وجوه از خارج دیده شوند



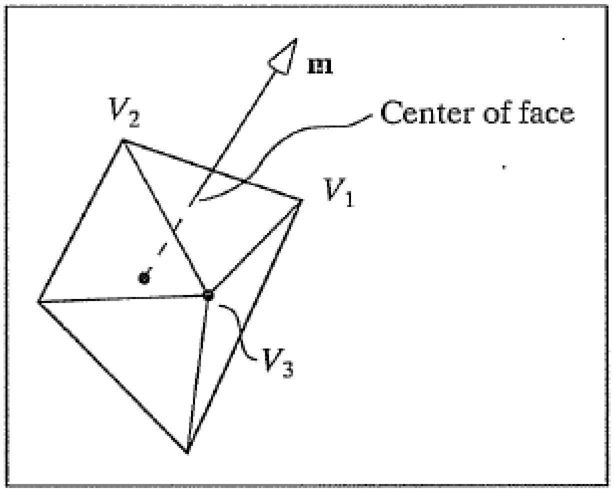
شکل ٤

وجه ۴ مکعب بوسیلهٔ رئوس ۱، ۵، ۶، و ۲ احاطه شده است. رأس ۴ دوگانش بوسیلهٔ وجوه ۱، ۵، ۶، و ۲ احاطه شده است. مکان رأس ۴ هشت وجهی مرکز وجه ۴ مکعب است. مرکز یک وجه میانگین رئوس متعلق به آن وجه است. اگر V_1، V_5، V_6، و V_2 وجه ۴ مکعب را داشته باشیم رأس $V4$ هشت وجهی عبارت است از:

$$V_4 = \frac{1}{4}(V_1 + V_5 + V_6 + V_2)$$

بردارهای عمود برای اجسام افلاطونی

برای ساختن شبکه به عمودها نیاز داریم. می توان از روش نیوول استفاده کرد، یا اگر جسم در مبدأ باشد، عمود بردار از مبدأ به مرکز وجه را به عنوان عمود وجه در نظر گرفت.

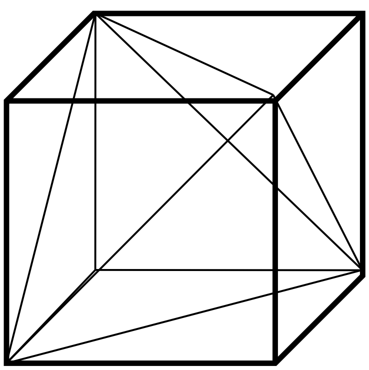


شکل ۵

$$m = (V_1 + V_2 + V_3)/3$$

چهاروجهی منتظم

چهار وجهی را می توان از روی یک مکعب که از هر طرف از ۱- تا ۱ بسط دارد بدست آورد.

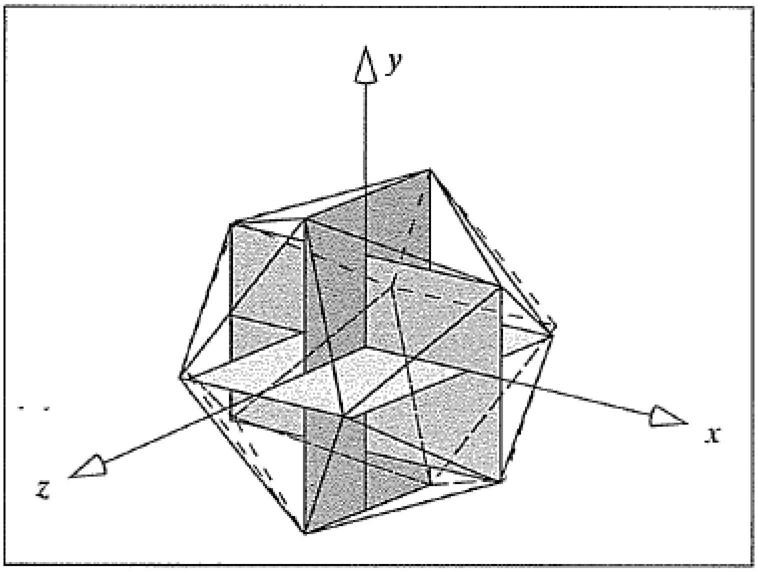


vertex list				face list	
Vertex	x	y	z	Face number	Vertices
0	1	1	1	0	1, 2, 3
1	1	−1	−1	1	0, 3, 2
2	−1	−1	1	2	0, 1, 3
3	−1	1	−1	3	0, 2, 1

بیست وجهی

سه مستطیل طلائی درون بیست وجهی قرار می گیرند. هر مستطیل را روی یک محور تراز می کنیم. طول مستطیل از ۱- تا ۱ و عرض آن از τ- تا τ بسط دارد. مقدار τ عکس مقدار ϕ می باشد.

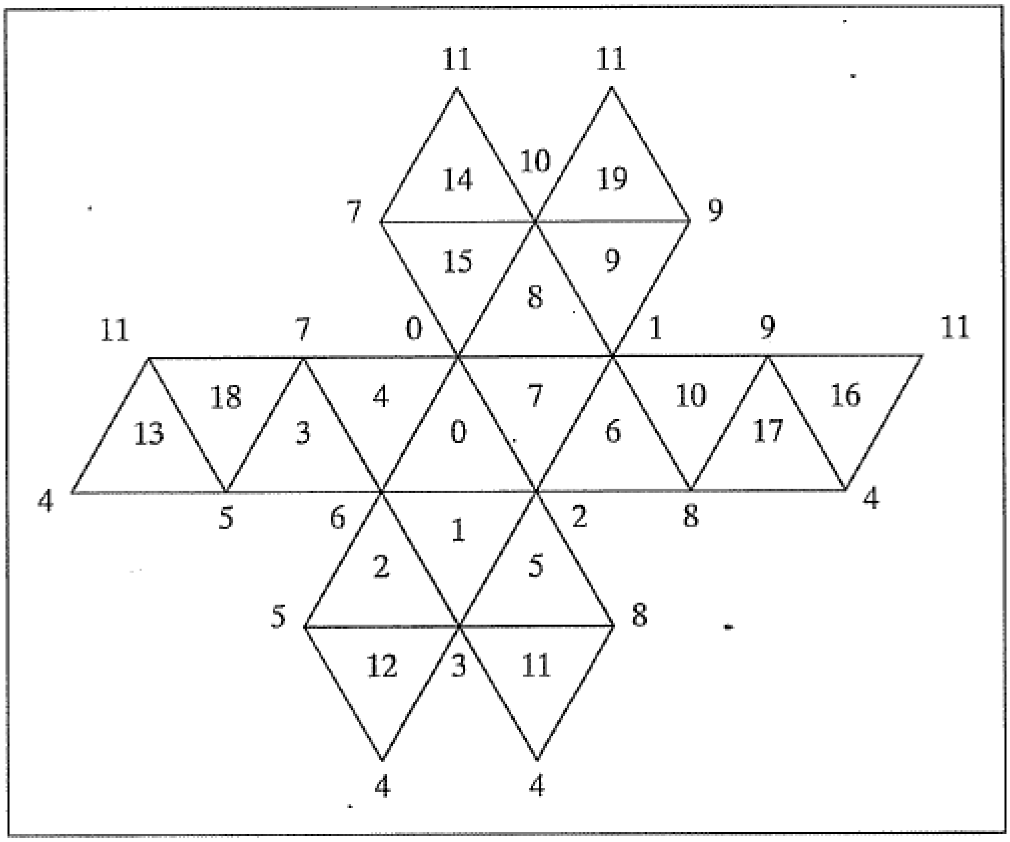
$$\tau = \frac{1}{\phi} = \left(\sqrt{5} - 1\right)/\,2 = 0.618$$



شکل ٦

Vertex	x	y	z
0	0	1	τ
1	0	1	–τ
2	1	τ	0
3	1	–τ	0
4	0	–1	–τ
5	0	–1	τ
6	τ	0	1
7	–τ	0	1
8	τ	0	–1
9	–τ	0	–1
10	–1	τ	0
11	–1	–τ	0

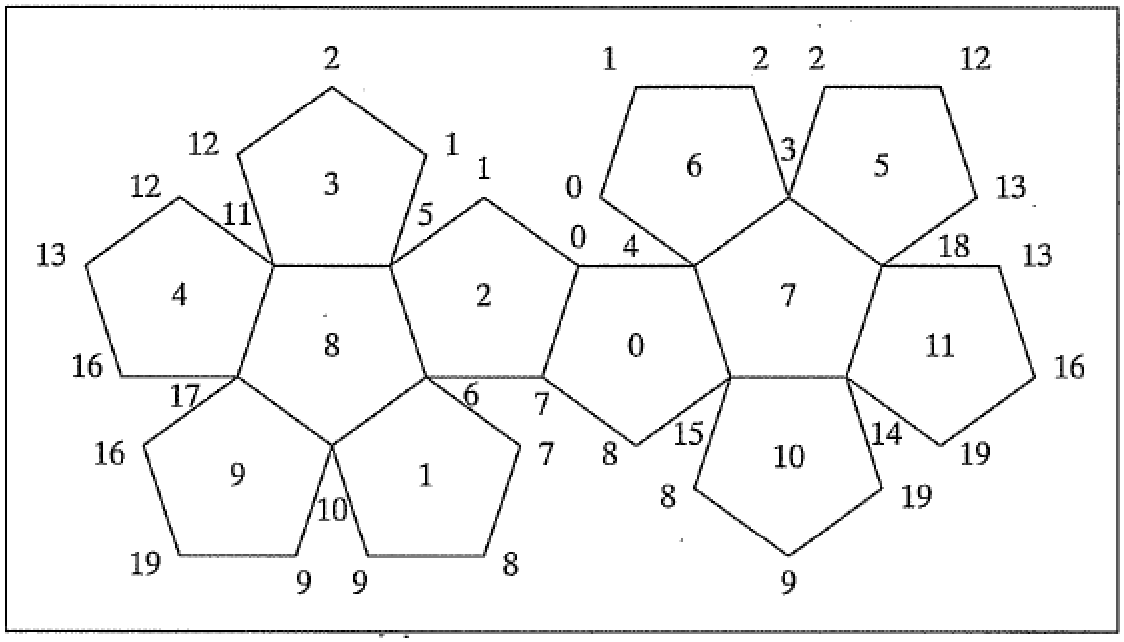
مدل بیست وجهی



شکل ۷

دوازده وجهی

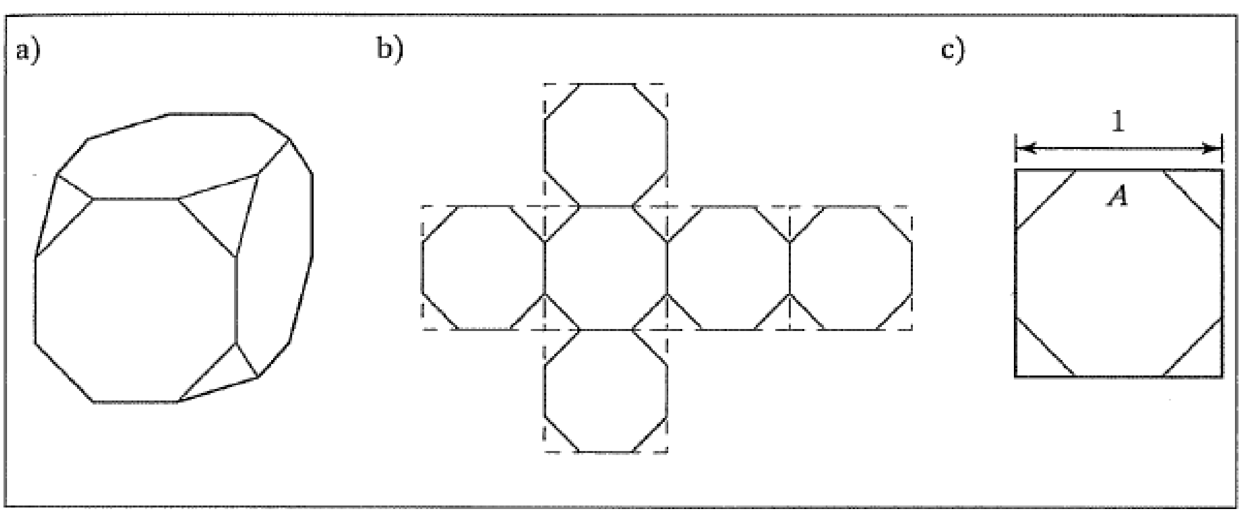
مدل دوازده وجهی را می توان از روی مدل بیست وجهی بدست آورد. با استفاده از دوگانی می دانیم که رأس k از دوازده وجهی در مرکز وجه k از بیست وجهی قرار می گیرد.



شکل ۸

اجسام ارشمیدسی

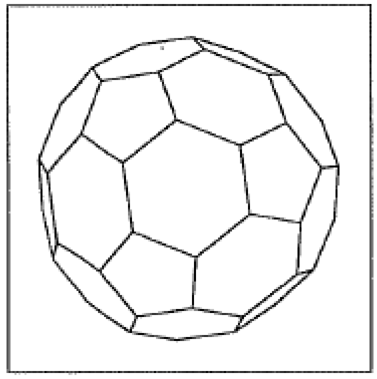
اجسام ارشمیدسی (یا نیمه منتظم) بیش از یک نوع وجه دارند. ولی هر چندضلعی هنوز منتظم است. فقط ۱۳ جسم ارشمیدسی اطراف هر رأس تعداد مشابهی چندضعلی از نوعهای مختلف وجود دارند (مثلاً ۸-۸-۳ برای مکعب لب بریده)



شکل ۹

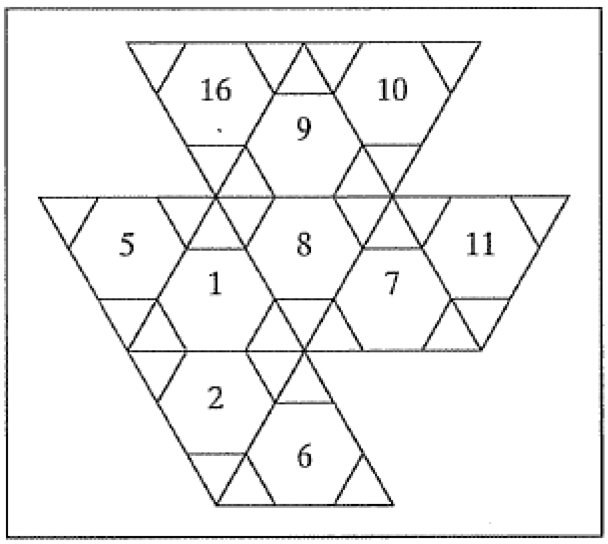
عمود مشابه اجسام افلاطونی محاسبه می شود.

از اشکال دیگر ارشمیدسی بیست وجهی سربریده (۵-۶-۶) است که شبیه به شکل یک توپ فوتبال است.



شکل ۱۰

مدل جزئی این توپ فوتبال در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



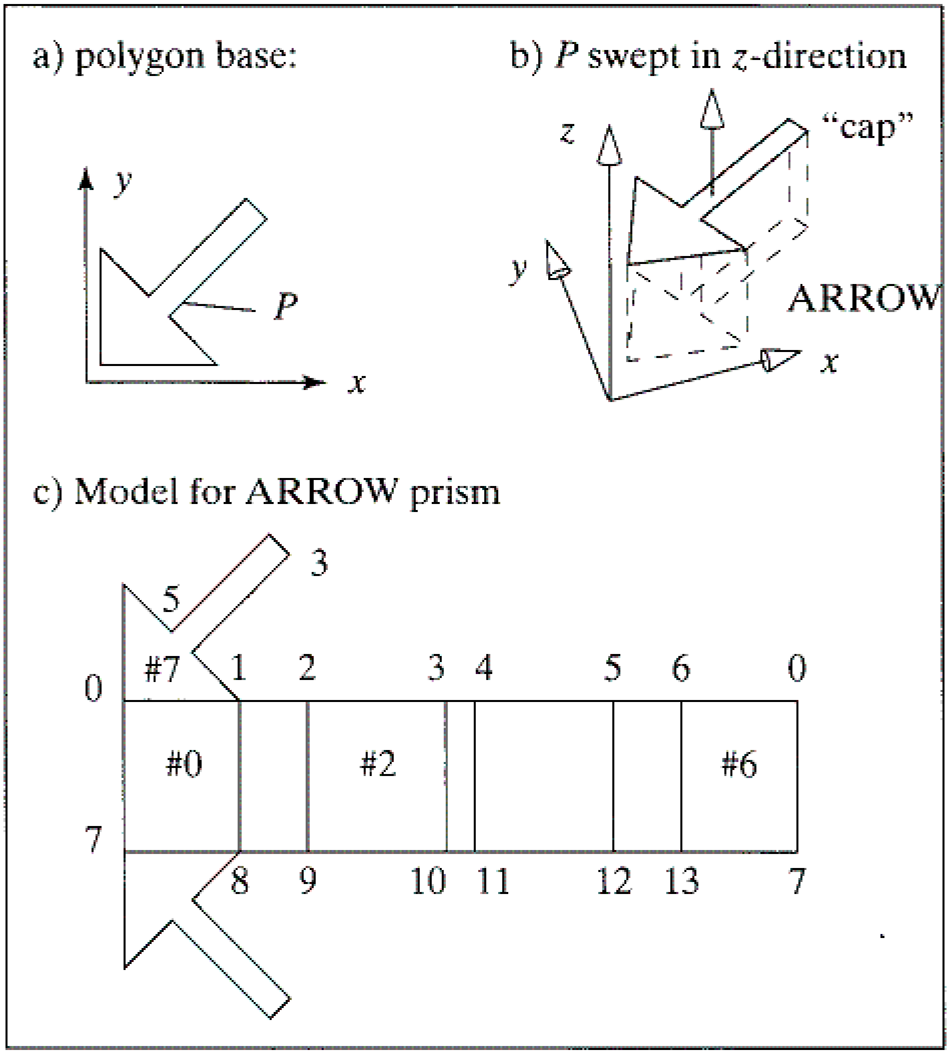
شکل ۱۱

اشکال بیرون زده

تعداد زیادی از اشکال را می توان با بیرون زدن یا جاروب کردن یک شکل دوبعدی در فضا ایجاد نمود. منشور نشان داده شده در شکل ۱ نمونه ای از جاروب یک چندضلعی در طول یک خط مستقیم می باشد.

ساخت شبکهٔ چندضلعی برای منشورها

فرض کنید که چندضلعی پایه دارای N رأس (xi,yi) باشد. رئوس کف را 0...N-1 شماره گذاری کرده و رئوس سر را از N...2N-1 شماره گذاری می کنیم. یک لبه رأس i از چندضلعی کف را به رأس i+N از چندضلعی سر وصل می کند. لیست رئوس عبارت خواهد بود از (xi,yi,0) و (xi,yi,H) برای i=0...N-1

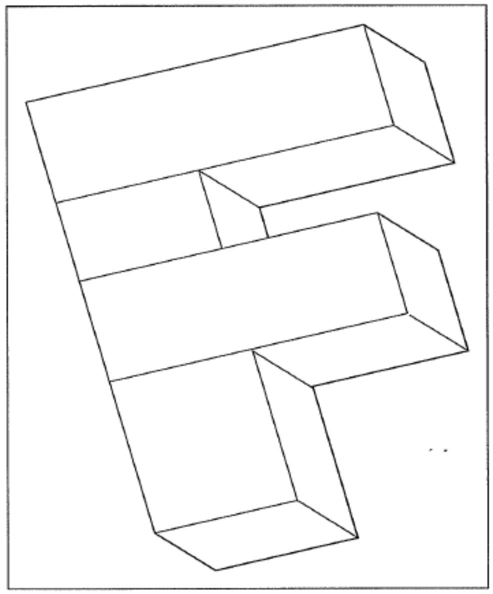


شکل ۱۲

برای دیوار jام (j=0…N-1) اندیس رئوس عبارت خواهد بود از j,j+N,next(j)+N, next(j)، که next(j)= (j+1) mod N. هر وجه هنگامی که در حال ساخته شدن است در لیست وجه گذارده می شود. در انتها نیز چندضلعی پایه و چندضلعی سر در لیست وجه قرار داده می شوند. عمود هر رأس توسط روش نیول بدست می آید.

آرایه ای از منشورهای بیرون زده (آجرکاری)

برخی از نرم افزارها همانند OpenGL برای نمایش چندضلعیهای محدب مناسب هستند.در این حالت، می توان شکل را به مجموعه ای از چندضلعیهای محدب تقسیم کرد و هر کدام را جدا بیرون زد. جداره های مشترک دوبار رسم شده و نهایتاً دیده نمی شوند.



شکل ۱۳

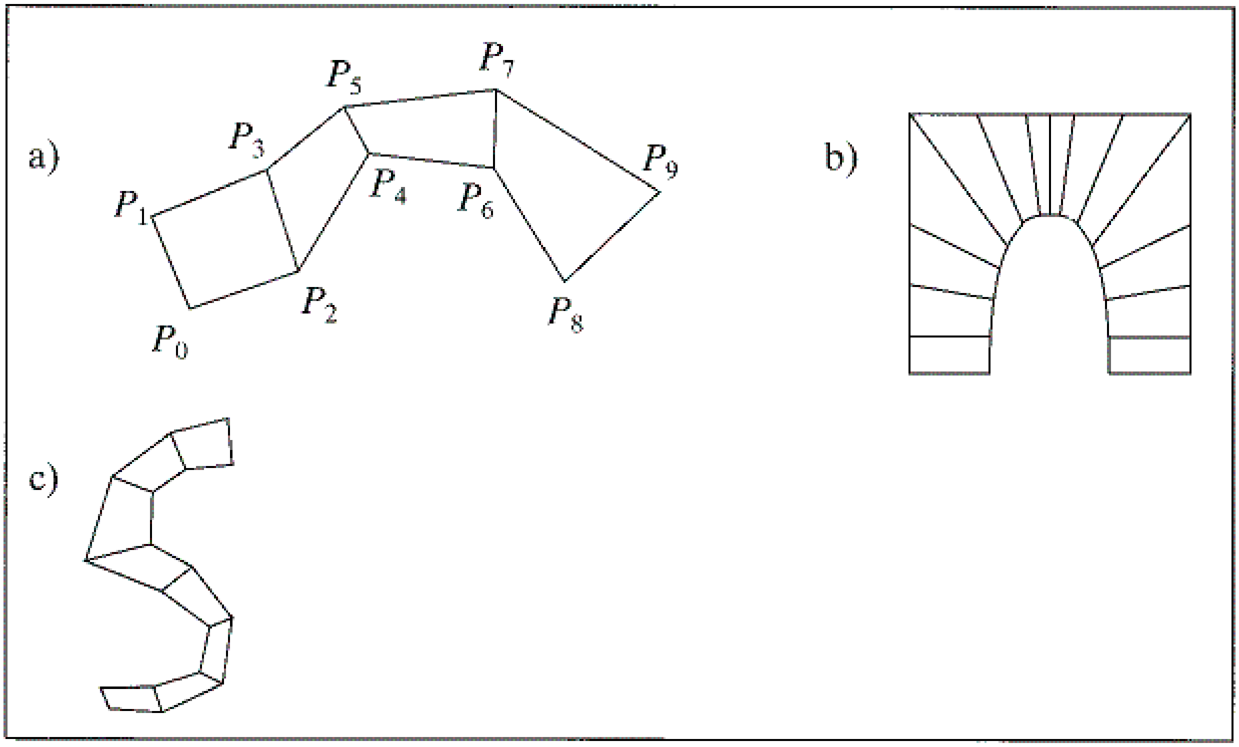
می توان روالی در کلاس Mesh برای ایجاد آرایهٔ منشورها ایجاد کرد، همانند:

```
void  Mesh::makePrismArray()
```

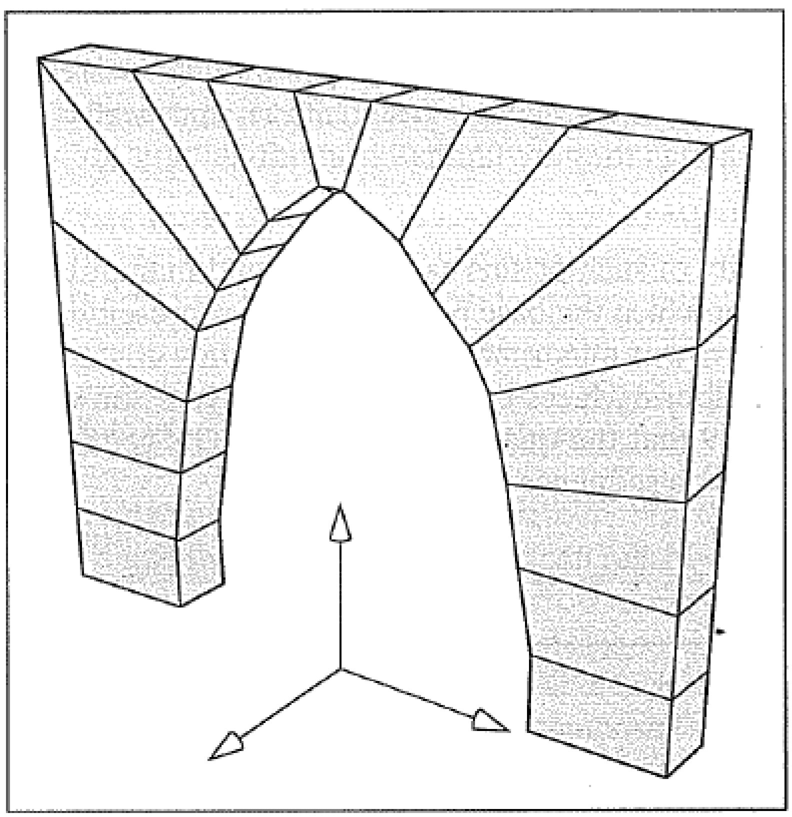
ورودی آرایه ای از چندضلعیهای پایه (در صفحهٔ xy) و بردار d

چندضلعی پایه با Quad-strip

خانواده ای جالب و ساده تر از چنین منشورهائی را می توان بصورت ساده تر و کارآتری بوجود آورد. در این منشورها چندضلعیهای پایه را می توان بصورت یک دنبالهٔ چهارضلعیها (quad-strip) بیان نمود. در این حالت دیگر وجوه مشترک دوبار رسم نمی شوند.



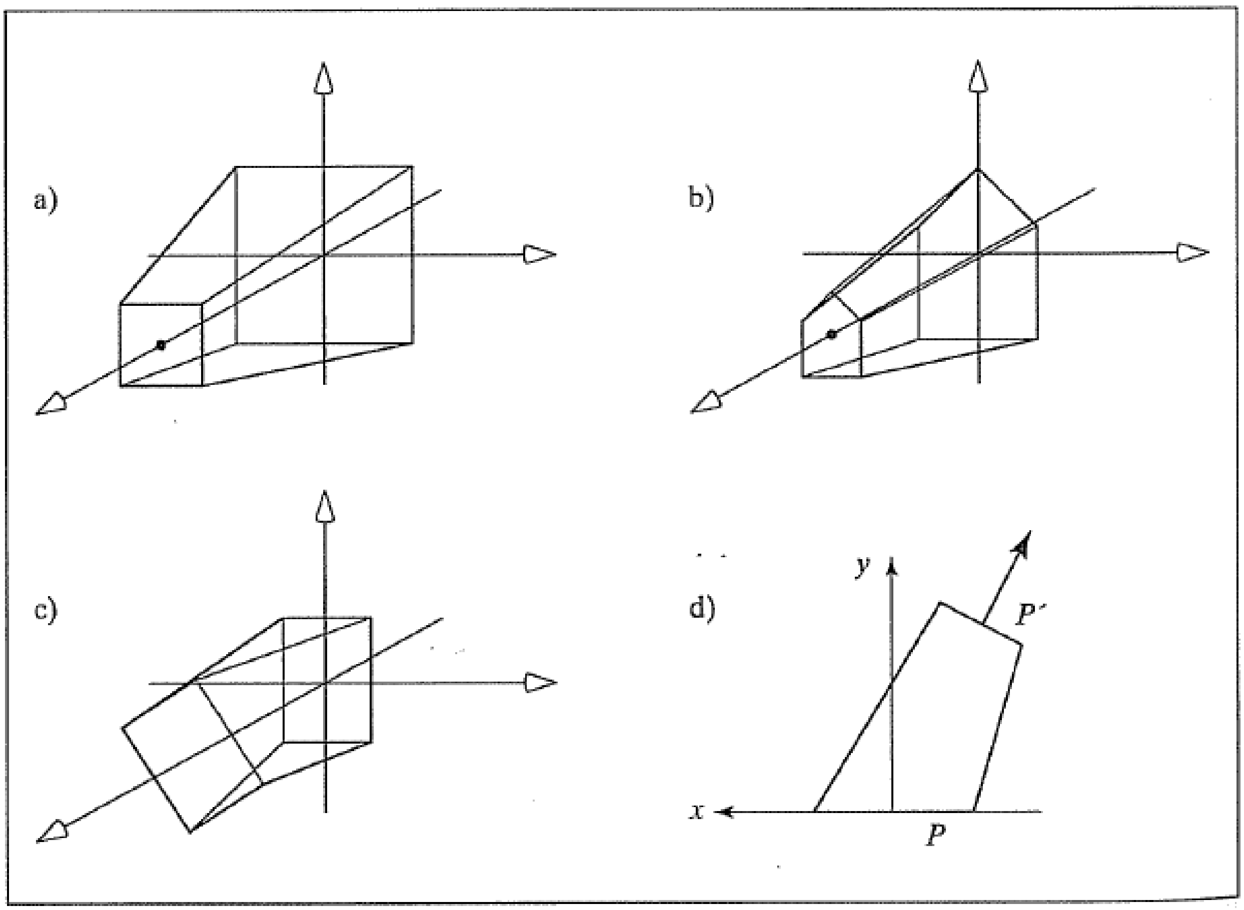
شکل ١٤



شکل ١٥

خروج با پیچش

تاکنون فقط از انتقال چندضلعی پایه برای تعریف چندضلعی سر استفاده شد. می توان این کار را تعمیم داد وچندضلعی سر را با تغییر اندازه یا دوران یا تبدیل دلخواه چندضعلی پایه بدست آورد. در این حالت اگر چند ضلعی پایه عبارت باشد از $P=\{p_0,p_1,\ldots,p_{N-1}\}$ چندضلعی سر عبارت خواهد بود از $P'=\{Mp_0,Mp_1,\ldots,MP_{N-1}\}$ که M یک تبدیل مستوی می باشد.



شکل ۱٦

در شکل ۱٦ الف و ب تبدیل عبارت است یک تغییر اندازه و یک انتقال همانند:

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

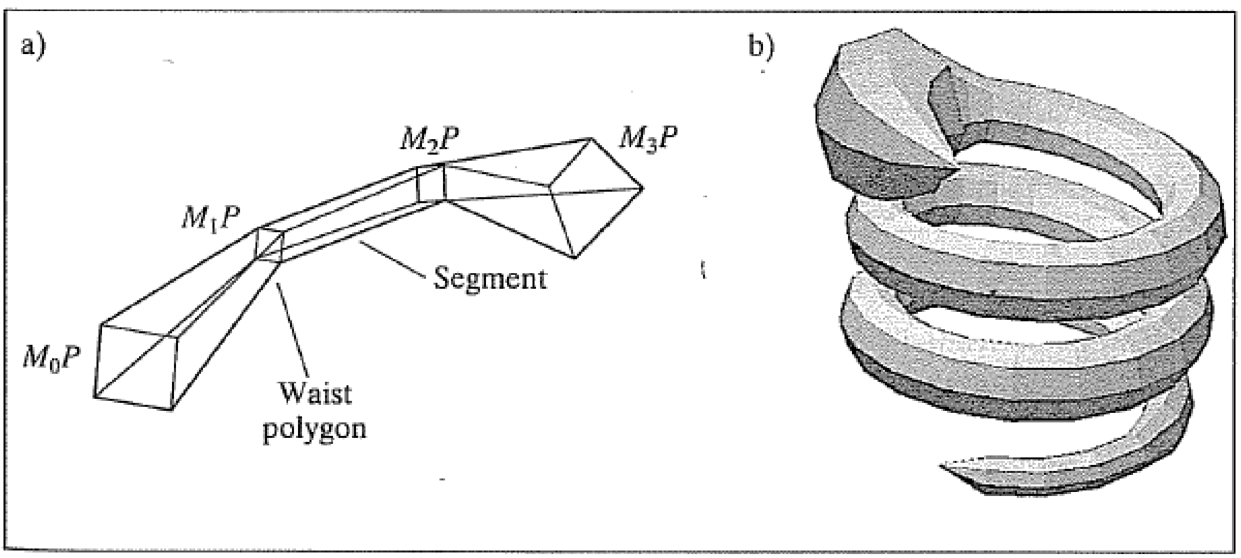
شکل ۱٦ c از دوران چندضلعی پایه و انتقال آن بوجود آمده است با استفاده از تبدیل:

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ساخت چنین منشورهائی به همان سادگی منشورهائی است که فقط از انتقال استفاده می کنند. لیست وجوه یکسان است ولی مکان رئوس و مقادیر عمودها متفاوت خواهد بود.

.بیرون زدگی بخش بندی شده – لوله ها و مارها

دنباله ای از بیرون زدگیها، هر یک با تبدیلهای خودش و چسباندن آنها به یکدیگر تشکیل یک لوله[3] می دهد. شکل ۱۷ الف یک لوله را که از سه بار بیرون زدگی مربع P هر بار با تبدیلهای متفاوت حاصل شده است را نشان می دهد. بخش اوّل از چندضلعیهای انتهائی M_0P و M_1P درست شده که ماتریس تبدیل M_0 ابتدای لوله را مکان و جهت دهی می نماید. چندضلعیهای تبدیل یافته را کمر لوله می گویند. اگر مربع دارای رئوس p_0، p_1، p_2، و p_3 باشد، در این شکل لیست لبهٔ شبکه دارای ۱۶ رأس M_0p_0، M_0p_1، و M_0p_2، M_0p_3، M_1p_0، M_1p_1، M_1p_2، M_1p_3، ...، M_3p_0، M_3p_1، و M_3p_2، و M_3p_3 می باشد. شکل ۱۷ب یک مار[4] را نشان می دهد. علت این نامگذاری آن است که ماتریسهای تبدیل Mi باعث می شوند که لوله بزرگ و کوچک شده و بدن و سر یک مار را نمایش دهند.



شکل ۱۷ یک لوله (الف) و یک مار (ب) که از بیرون زدگي متوالي یک چندضلعي بوجود آمده اند.

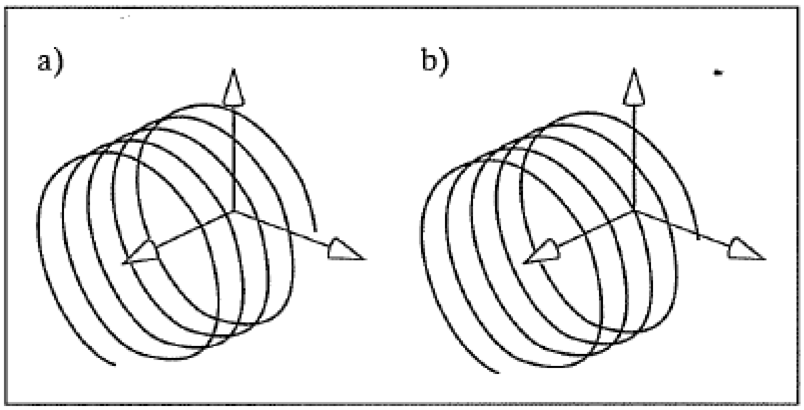
[3] Tube
[4] Snake

لوله های مبتنی بر منحنیهای سه بعدی

می توان تصور کرد که لوله حول یک منحنی شکل گرفته که ستون فقرات آن نامیده می شود. منحنی را بصورت پارامتری C(t) نشان می دهیم. برای مثال برای هلیکس شکل پارامتری عبارت است از:

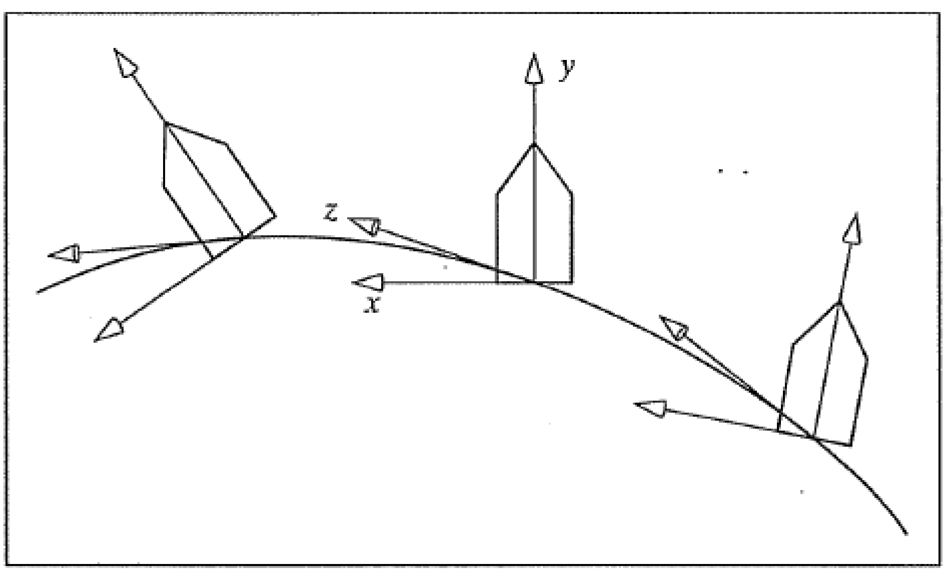
$$C(t)=(\cos(t), \sin(t), bt)$$

که b یک ثابت دلخواه است که میزان فشردگی حلقه های هلیکس را معین می کند.



شکل ۱۸

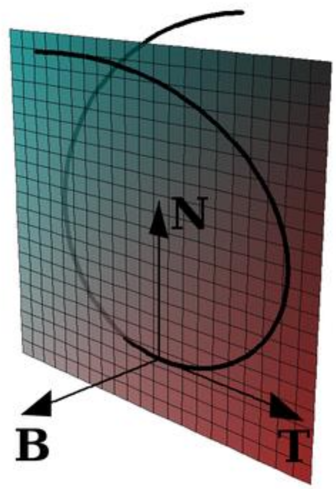
برای ساخت چندضلعیهای کمر از C(t) در مقادیری از $\{t_0,t_1,t_2,...\}$ t نمونه برداری می کنیم، و چندضلعی تبدیل یافته را در صفحهٔ عمود به منحنی در هر نقطهٔ $C(t_i)$ می سازیم چنانکه در شکل ۱۹ نشان داده شده است.



شکل ۱۹ دستگاههاي مختصات محلي که در طول منحني ستون فقرات ساخته شده اند.

می توان تصور کرد که یک دستگاه مختصات محلی در هر نقطهٔ نمونه برداری شده ستون فقرات قرار داده شده است. محور z در طول منحنی و x و y عمود به آن و همدیگر. چندضلعی کمر در صفحهٔ xy دستگاه محلی قرار می گیرد.

ساده تر خواهد بود اگر اجازه دهیم خود منحنی C(t) دستگاه مختصات محلی را مشخص کند. می توان ازدستگاه مختصات فرنت[5] استفاده نمود. در هر مقدار t_i مطلوب بردار $T(t_i)$ که مماس به منحنی است محاسبه می شود. سپس دو بردار N(ti) و B(ti) که عمود بر T(ti) و عمود بر یکدیگر هستند محاسبه می شوند. این سه بردار دستگاه مختصات فرنت را در ti می سازند.



شکل ۲۰ بردارهای T، N و B [Wikipedia 2013].

هنگامی که دستگاه فرنت ساخته شد، یافتن ماتریس تبدیل M که چندضلعی پایهٔ لوله را به مکان و جهت دلخواه در این دستگاه تبدیل می کند ساده خواهد بود. آن تبدیلی خواهد بود که دستگاه مختصات جهان را به این دستگاه تبدیل می کند. ماتریس تبدیل Mi باید i، j، k را به ترتیب به بردارهای N(ti)، B(ti) و T(ti) تبدیل کند و مبدأ جهان را به نقطهٔ ستون فقرات C(ti) ببرد. بر طبق خواص ماتریسهای عمود خاص می دانیم که ماتریس تبدیل عبارت خواهد بود از:

$$M_i = (\mathbf{N}(t_i) \mid \mathbf{B}(t_i) \mid \mathbf{T}(t_i) \mid C(t_i))$$

تشکیل دستگاه مختصات فرنت

اگر فرمولی که برای C(t) داریم مشتق پذیر باشد، می توانیم مشتق آن را محاسبه کرده و بردار مماس به منحنی را در هر نقطه بدست آوریم.

$$\dot{C}(t) = (\dot{C}_x(t), \dot{C}_y(t), \dot{C}_z(t))$$

[5] Frenet frame

تقسیم به طول برای یکه کردن آن. برای هلیکس

$$\mathbf{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(-\sin(t),\cos(t),b)$$

بردارهای دیگر بصورت زیر بدست می آیند.

$$\mathbf{B}(t)=\frac{\dot{\mathbf{C}}(t)\times\ddot{\mathbf{C}}(t)}{\left|\dot{\mathbf{C}}(t)\times\ddot{\mathbf{C}}(t)\right|}=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(b\sin(t),-b\cos(t),1)$$

$$\mathbf{N}(t)=\mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)=(-\cos(t),-\sin(t),0)$$

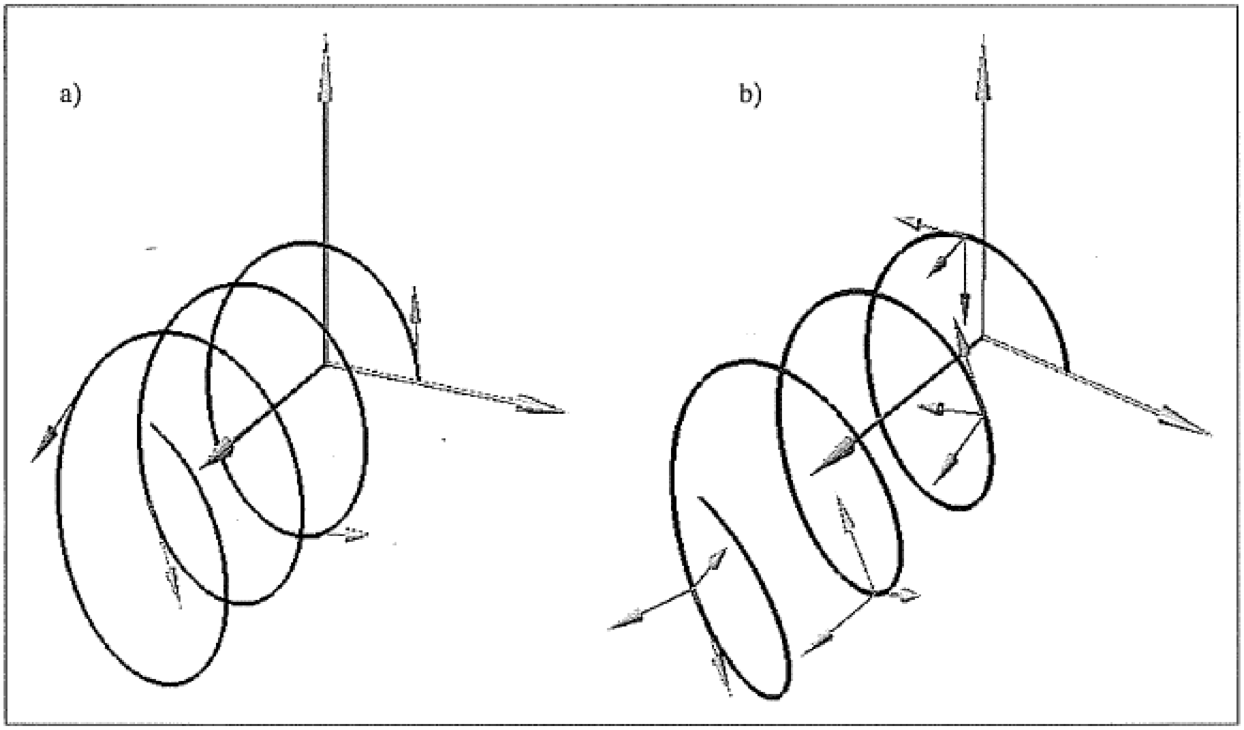
البته بردارهای N و B را با این نگرش نیز می توان بدست آورد که اگر مؤلفه های بردار T عبارت باشند از a، b، و c (که هر یک تابعی از t هستند) آنگاه بردار

$$N(t)=(-b,a,0)$$

بر بردار T(t) عمود است. از ضرب خارجی N(t) در T(t) نیز بردار B(t) بدست خواهد آمد.

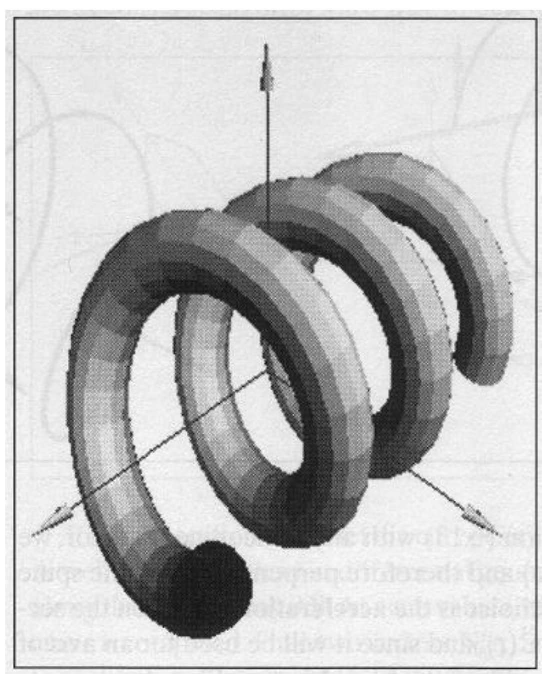
اگر C(t) پیچیده باشد مشتقها را تقریب می زنیم:

$$\dot{C}(t)=\frac{C(t+\varepsilon)-C(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$
$$\ddot{C}(t)=\frac{C(t-\varepsilon)-2C(t)+C(t+\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$



شکل ۲۱ (a) مماسهاي به یک هلیکس. (b) دستگاه مختصات فرنت در نقاط مختلف t در طول هلیکس.

شکل ۲۲ نتیجهٔ پیچاندن یک ده ضلعی حول یک هلیکس از طریق دستگاه مختصات فرنت نشان می دهد.



شکل ۲۲ یک لوله که حول یک هلیکس پیچانده شده است.

چنبره های تورسی

یک چنبرهٔ تورسی[6] هنگامی که یک چنبره حول یک تورس بپیچد شکل می گیرد. یک چنبرهٔ تورسی بصورت زیر داده می شود:

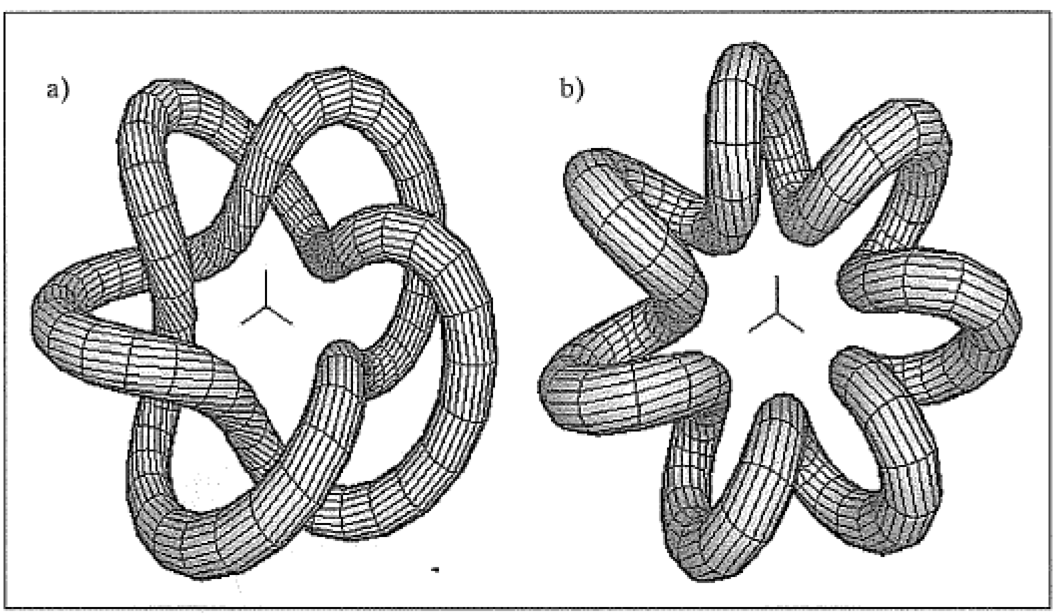
$$C(t) = \big((a + b\cos(qt))\cos(pt), (a + b\cos(qt))\sin(pt), c\sin(qt)\big)$$

برای مقداری از ثابتهای a، b، p، و q. شکل ۱۹ a پارامترهای p و q برابر ۲ و ۵، و در قسمت b آنها برابر ۱ و ۷ انتخاب شده اند.

شکل ۲٤ یک پوستهٔ صدف دریائی را نشان می دهد که از پیچاندن یک لوله با شعاع بزرگ شونده حول یک هلیکس شکل گرفته است. برای انجام آن، ماتریس انتقال دستگاه مختصات جهان به مختصات فرنت در یک ماتریس تغییر اندازه ضرب می شود.

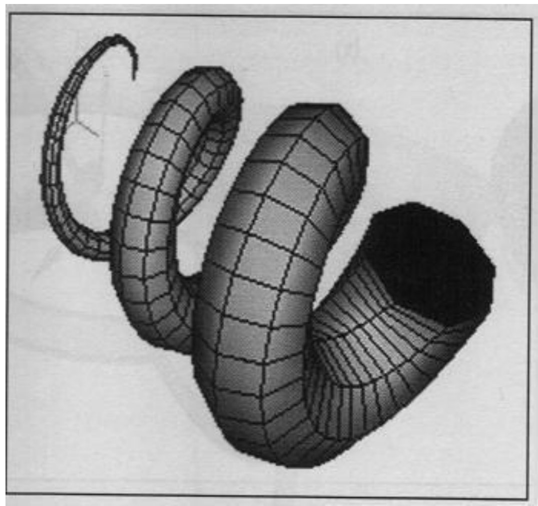
$$M' = M\begin{pmatrix} g(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که ضریب تغییر اندازه وابسته به t است. در اینجا g(t)=t.



شکل ۲۳

[6] Toroidal spiral

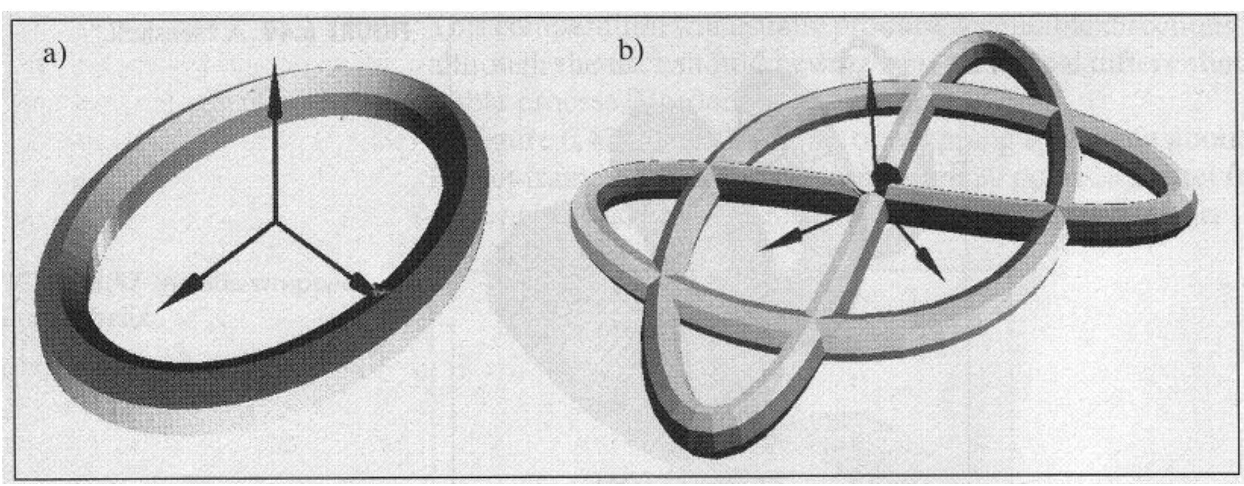


شکل ۲٤

شکل ۲۵a یک شش ضلعی را که حول یک ستون فقرات بیضوی پیچانده شده نشان می دهد. که شکلی همانند یک تورس بیضوی ایجاد می کند. در قسمت b منحنی ستون فقرات عبارت است از:

$$C(t) = (r\cos(Mt + \phi), 0, r\sin(Nt))$$

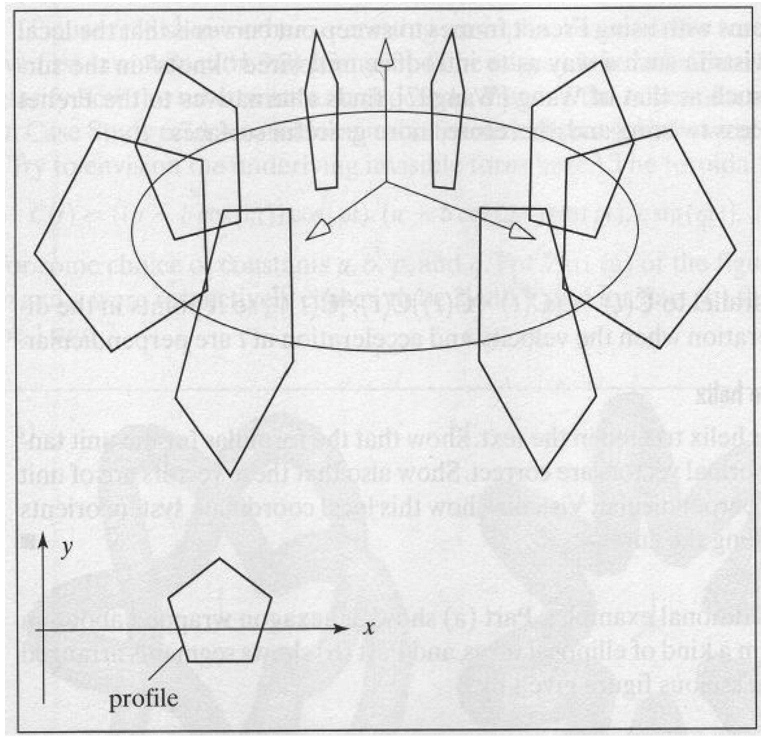
با M=2، N=2، و ϕ=0.



شکل ۲۵

شکل ۲٦ یک چندضلعی را نشان می دهد که بر روی محور x در فاصله ای از مبدأ قرار گرفته است که به آن نیمرخ[7] گفته می شود. در صورت دوران این چندضلعی حول محور y شکلی شبیه به تورس بوجود می آید.

[7] profile



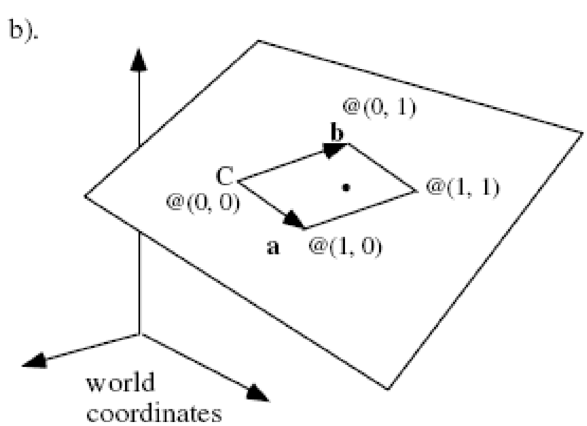
شکل ۲۶

تقریب اشیاء نرم

تا کنون اشیاء خود بصورت چندوجهی بودند. اشیاء نرم همانند کره، استوانه، و مخروط را می توان با شبکه های چندضلعی مدل نمود.

نمایش سطوح

یک تکه سطح صاف:



$$P(u,v) = C + au + bv$$
$$u,v \in [0,1]$$

$$P(0,0) = C;$$
$$P(1,0) = C + \mathbf{a};$$
$$P(0,1) = C + \mathbf{b};$$
$$P(1,1) = C + \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

برای نمایش سطوح عمومی تر:

$$P(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$

u و v محدود به بازه ای هستند معمولاً ۰ و ۱. توابع مختلف برای X، Y، و Z سطوح مختلف را بوجود می آورند. منحنی سه بعدی به یک پارامتر احتیاج داشت، ولی سطح سه بعدی به دو پارامتر احتیاج دارد. اگر u تغییر کرده در حالی که v ثابت است منحنی دورهٔ–v (v-contour) بوجود می آید. اگر v تغییر کرده در حالی که u ثابت است منحنی دورهٔ–u (u-contour) بوجود می آید.

نمایش ضمنی سطوح

شکل ضمنی برای منحنیهای دوبعدی F(x,y)=0 و شکل ضمنی برای سطوح F(x,y,z)=0 می باشد. برای نقاط روی سطح مقدار F برابر صفر است.

مثال: برای صفحه ای که از نقطهٔ B عبور کرده و دارای عمود n است:

$$n_x.x + n_y.y + n_z.z = D$$
$$D = n.B$$

شکل ضمنی:

$$F(x,y,z) = n_x.x + n_y.y + n_z.z - D$$

گاهی راحتتر است که F را به عنوان تابعی از نقطهٔ P بدانیم F(P)=0. برای صفحه F(P)=n.(P-B)=0. همیشه نمی توان از روی شکل پارامتری شکل F(x,y,z) یا F(P) را بدست آورد، ولی می توان X(u,v)، Y(u,v)، و Z(u,v) را به جای x، y، و z گذاشت و چک کرد که برای همهٔ مقادیر u و v مقدار F برابر صفر می شود.

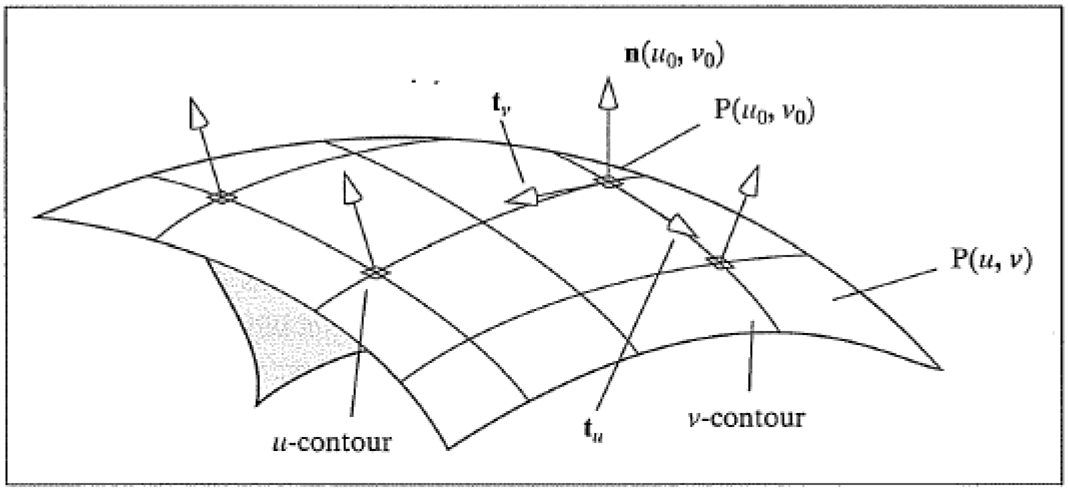
هنگامی که بتوان داخل و خارج یک سطح را تعریف نمود داریم:

داخل سطح اگر: F(x,y,z)<0

روی سطح اگر: F(x,y,z)=0

خارج سطح اگر: F(x,y,z)>0

بدست آوردن عمود به سطح



شکل ۲۷

مشتقات جزئی P(u,v) در یک نقطه به سطح در آن نقطه مماس هستند و ضرب خارجی بردارهای مماس بر سطح در آن نقطه عمود است.

$$n(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}\right)\Bigg|_{u=u_0 v=v_0}$$

مثال: برای صفحهٔ صاف

$$P(u,v)=C+au+bv$$
$$u,v\in[0,1]$$

$$\frac{\partial P}{\partial u}=a \quad \frac{\partial P}{\partial v}=b$$

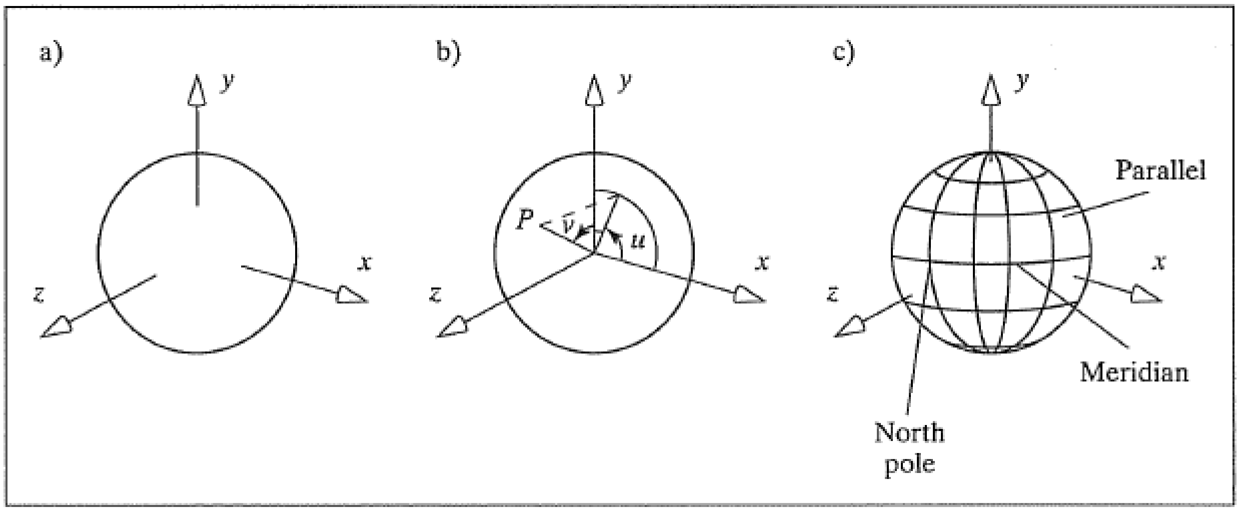
$$n(u,v)=a\times b$$

در صورتی که شکل ضمنی یک سطح را داشته باشیم، بردار عمود به سطح در نقطهٔ (x,y,z) با استفاده از گرادیان بدست می آید.

$$n(x_0,y_0,z_0)=\nabla F\,|_{x=x_0,y=y_0,z=z_0}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg|_{x=x_0,y=y_0,z=z_0}$$

کرهٔ ژنریک

کرهٔ زنریک کره ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد.



شکل ۲۸

شکل ضمنی:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$F(P) = |P|^2 - 1$$

شکل پارامتری:

$$P(u, v) = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), \sin(v))$$

$$u \in [0, 2\pi] \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

همانگونه که انتظار داریم در هر نقطه عمود در امتداد شعاع است (از مبدأ به آن نقطه).

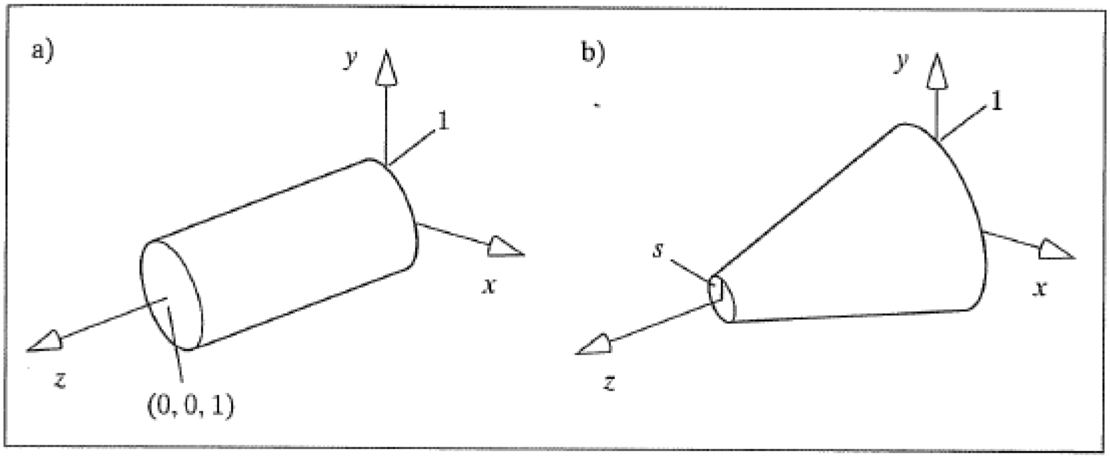
گرادیان: 2(x,y,z)

پارامتری: cos(v)p(u,v)- که اگر عادی شود داریم p(u,v)

که هر دور روش انتظار ما را تأئید می کنند.

استوانهٔ ژنریک

استوانه ای که قاعدهٔ آن در صفحهٔ xy و شعاع آن واحد بوده و محور استوانه در امداد محور z بوده و ارتفاع آن واحد است. بطور کلی تر استوانهٔ له شده را خواهیم داشت که سر آن دارای شعاع s است.



شکل ۲۹

شکل ضمنی:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - (1 + (s - 1)z)^2 \qquad \text{for } 0 < z < 1$$

شکل پارامتری:

$$P(u, v) = ((1 + (s - 1)v)\cos(u), \qquad (1 + (s - 1)v)\sin(u), v)$$

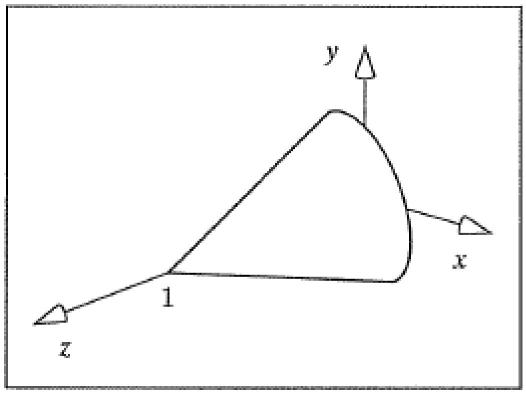
عمود به سطح جانبی استوانه

$$\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, -(s - 1)(1 + (s - 1)z))$$

$$\mathbf{n}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 1 - s).$$

مخروط ژنریک

مخروط ژنریک مخروطی است که قاعدهٔ آن در صفحهٔ xy بوده و شعاع آن واحد است. محور مخروط بر روی محور z تراز شده و ارتفاع آن واحد است.



شکل ۳۰

شکل ضمنی:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - (1-z)^2 = 0 \quad \textit{for } 0 < z < 1$$

شکل پارامتری:

$$P(u,v) = ((1-v)\cos(u), (1-v)\sin(u), v)$$

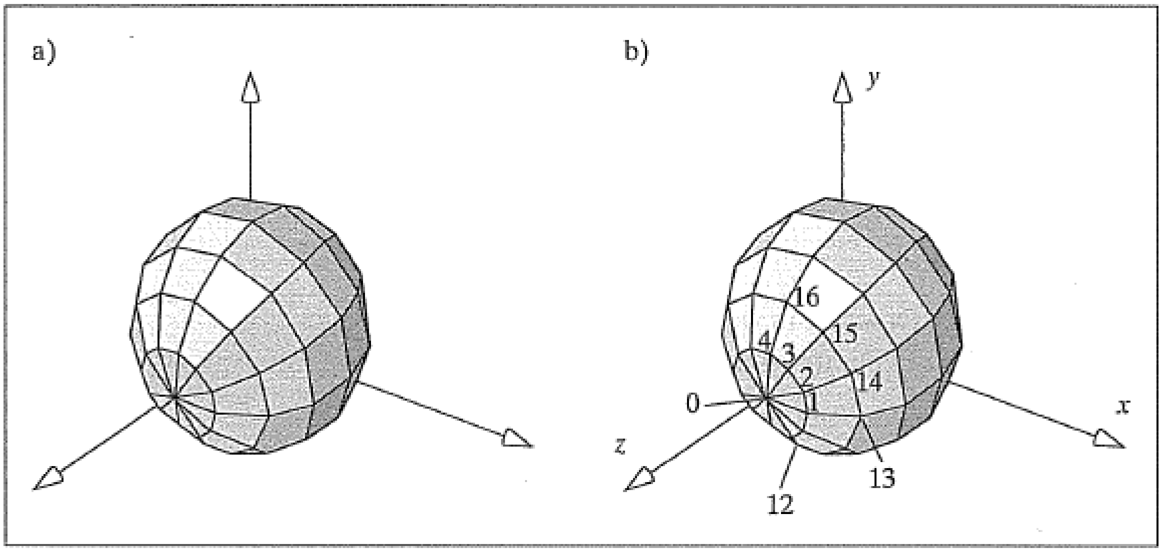
عمود:

$$n(x,y,z) = (x, y, 1-z)$$
$$n(u,v) = (\cos(u), \sin(u), 1)$$

بطور خلاصه:

Surface	$\mathbf{n}(u, v)$ at $\mathbf{p}(u, v)$	$\nabla F(x, y, z)$
Sphere	$\mathbf{p}(u, v)$	(x, y, z)
Tapered cylinder	$(\cos(u), \sin(u), 1 - s)$	$(x, y, -(s-1)(1+(s-1)z))$
Cylinder	$(\cos(u), \sin(u), 0)$	$(x, y, 0)$
Cone	$(\cos(u), \sin(u), 1)$	$(x, y, 1 - z)$

ساخت شبکهٔ چندضلعی برای یک سطح انحنادار



شکل ۳۱

تقسیم به nSlices قسمت حول استوا و nStacks+1 قسمت از قطب جنوب تا قطب شمال. به nSlices مقدار برای u نیاز داریم.

$$u_i = 2\pi i / nSlices, \quad i = 0,1,\ldots, nSlices - 1$$

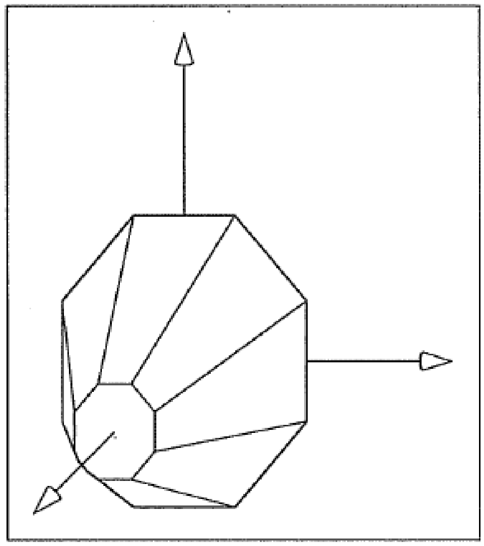
نیمی از استکها زیر استوا و نیمی بالای استوا. بنابر این به nStacks+1 مقدار برای v نیاز داریم.

$$v_j = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi . j}{nStacks} \quad j = 0,1,\ldots, nStacks$$

مقادیر بدست آمده را می توانیم در آرایهٔ []pt قرار دهیم. عمود [norm[k عمود به کره در نقطهٔ [pt[k خواهد بود. چندضلعیهای نزدیک قطبها بصورت مثلث بوده و سایر آنها چهارضلعی می باشند.

Number of vertices:	3	3	3	...
Vertex indices:	0 1 2	0 2 3	0 3 4	...
Normal indices:	0 1 2	0 2 3	0 3 4	...

استوانه به طریق مشابه عمل می شود.



شکل ۳۲

سطوح غلتانده[8]

یک سطح غلنانده سطحی است که برای آن در هر نقطه این امکان وجود دارد که خط مستقیمی یافت که از آن نقطه عبور کرده و به تمامی داخل سطح قرار گیرد. مخروط و استوانهٔ له شده مثالهائی از سطوح غلتانده هستند ولی کره این گونه نیست. این سطوح با جاروب یک خط مستقیم در یک مسیر خاص بوجود می آیند. چون از خط درست شده اند درون آن چیزی شبیه به معادلهٔ پارامتری خط وجود دارد:

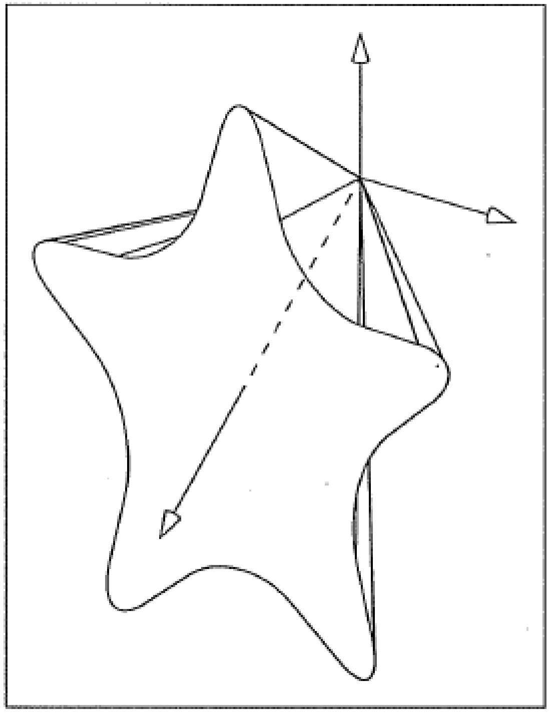
$$P(v) = (1-v)P_0 + vP_1$$

در سطوح غلتانده P_0 و P_1 خود تابعی از پارامتر دیگری مثل u هستند.

مخروطها

$P_0(u)$ یک نقطهٔ تنها است (رأس مخروط)، $P_1(u)$ هر معادله ای می تواند داشته باشد. برای مخروط مدور $P_1(u)$ یک دایره است.

[8] Ruled surfaces



شکل ۳۳

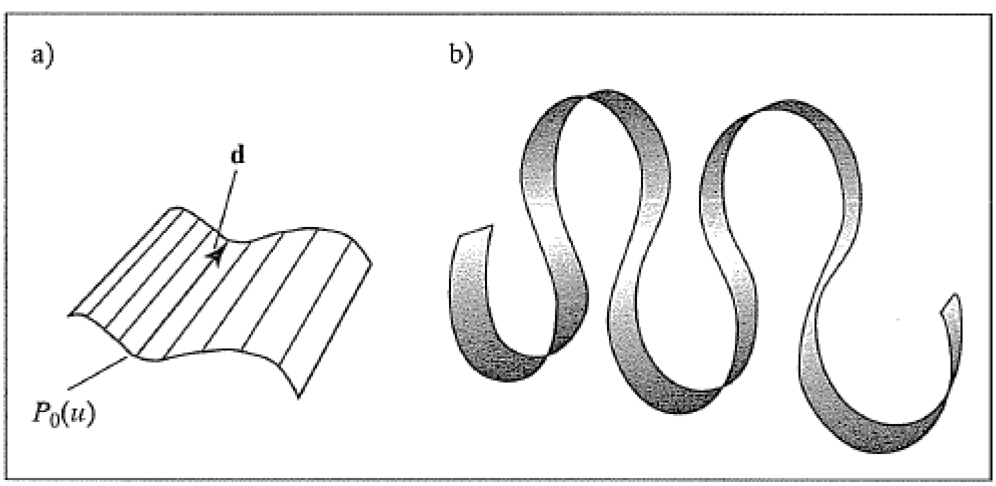
برای شکلی مشابه شکل ۳۳:

$$P_1(u) = (r(u)\cos(u), r(u)\sin(u), 1)$$

$$r(u) = 0.5 + 0.2\cos(5u)$$

استوانه ها

در استوانه $p_1(u)$ انتقال یافتهٔ $p_0(u)$ است. $P_1(u)=p_0(u)+d$



شکل ٣٤

به طریق دیگر:

$$P(u,v) = P_0(u) + dv$$

اگر $p_0(u)$ دایره باشد استوانهٔ مدور خواهیم داشت. اگر d به صفحهٔ شامل p_0 عمود باشد، استوانهٔ قائم خواهیم داشت.

تکه های دوخطی

یک تکه دوخطی هنگامی شکل می گیرد که $P0(u)$ و $P1(u)$ هر دو یک خط باشند که روی بازه مشترکی تعریف شده باشند.

اگر دو انتهای $P0(u)$ نقاط P00 و P01 باشند:

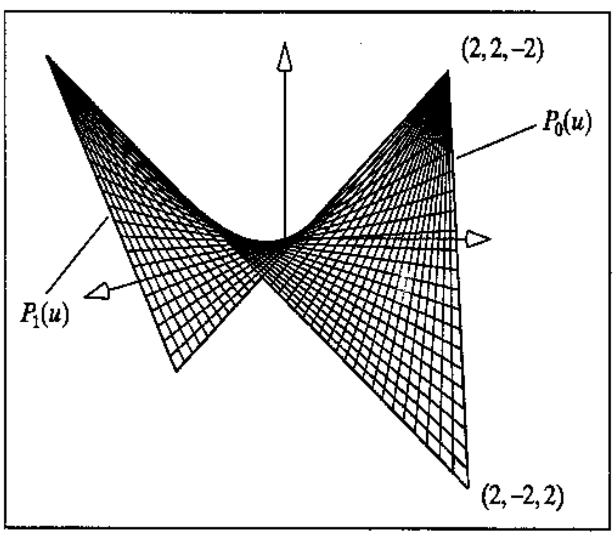
$$P_0(u) = (1-u)P_{00} + uP_{01}$$

بطور مشابه اگر دو انتهای $P1(u)$ نقاط P10 و P11 باشند:

$$P_1(u) = (1-u)P_{10} + uP_{11}$$

بنابر این:

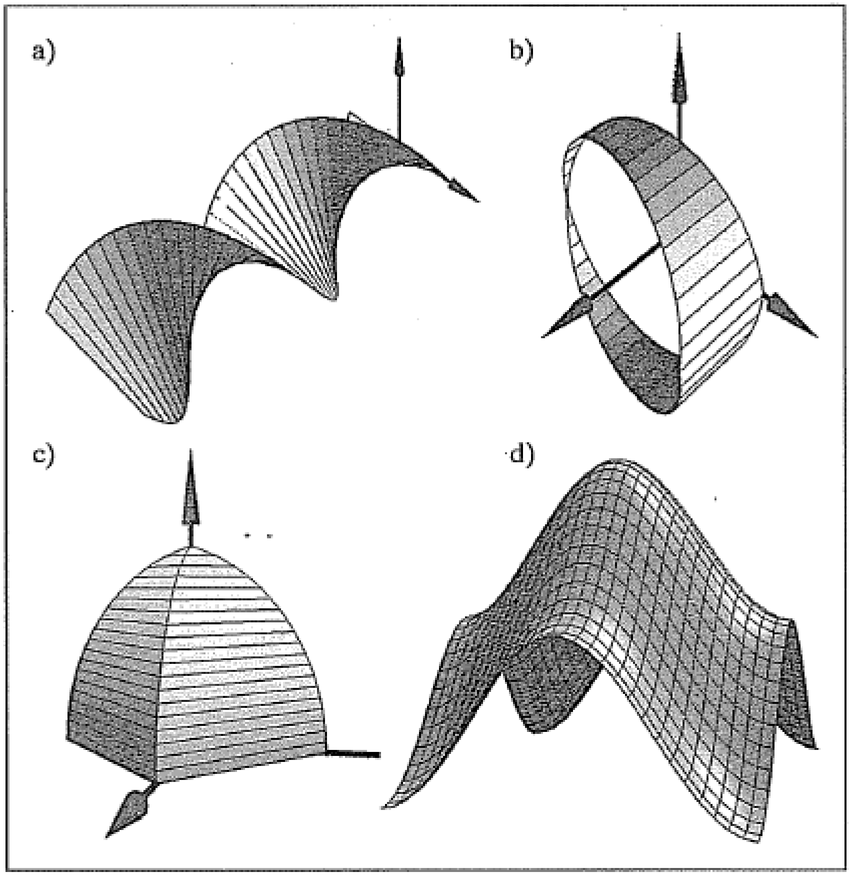
$$P(u,v) = (1-v)[(1-u)P_{00} + uP_{01}] + v[(1-u)P_{10} + uP_{11}]$$



شکل ٣٥ یک تکهٔ دوخطي

سطوح غلتاندهٔ دیگر

در شکل a۳٦، $p_0(u)$ و $p_1(u)$ هر دو هلیکس هستند. در b یک نوار موبیوس داریم. C شکلی است که از چهار سطح غلتانده بوجود آمده است.



شکل ۳٦

سطوح مدور

یک سطح مدور از یک جاروب دورانی یک منحنی نیمرخ C حول یک محور بوجود می آید. فرض می کنیم نیمرخ در صفحهٔ xz و نمایش بصورت پارامتری آن بصورت زیر باشد:

$$C(v)=(X(v),Z(v))$$

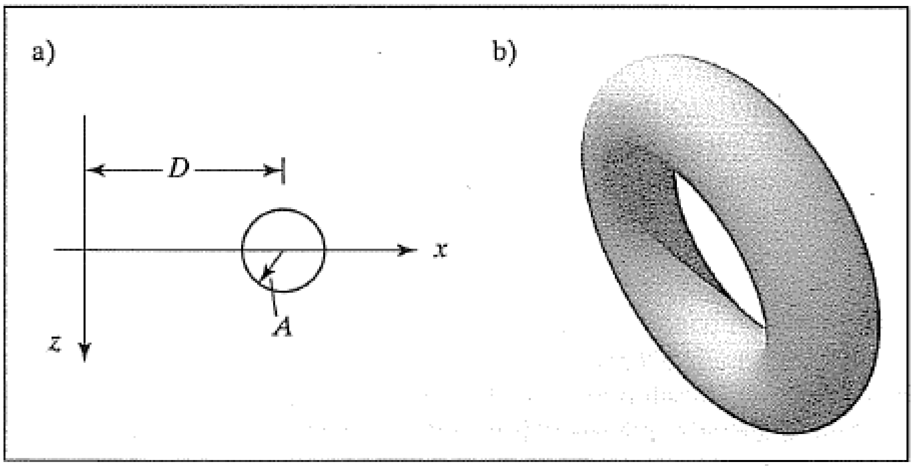
دوران حول محور z تحت کنترل پارامتر u. u نمایانگر زاویهٔ دوران می باشد. مکانهای مختلف منحنی حول محور z را نصف النهار گویند. جاروب منحنی بطور کامل یک دایرهٔ کامل بوجود می آورد. دوره های با v ثابت دوایری هستند که مدارهای سطح نامیده می شوند. مدار در v دارای شعاع X(v) بوده و در ارتفاع Z(v) بالای صفحهٔ xy قرار دارد. یک نقطهٔ عمومی روی سطح:

$$P(u,v) = (X(v)\cos(u), X(v)\sin(u), Z(v))$$

کره، استوانه، و مخروط ژنریک حالات خاص سطوح مدور هستند. عمود:

$$n(u,v) = X(v)(\dot{Z}(v)\cos(u), \dot{Z}(v)\sin(u), -X(v))$$

مثال: تورس

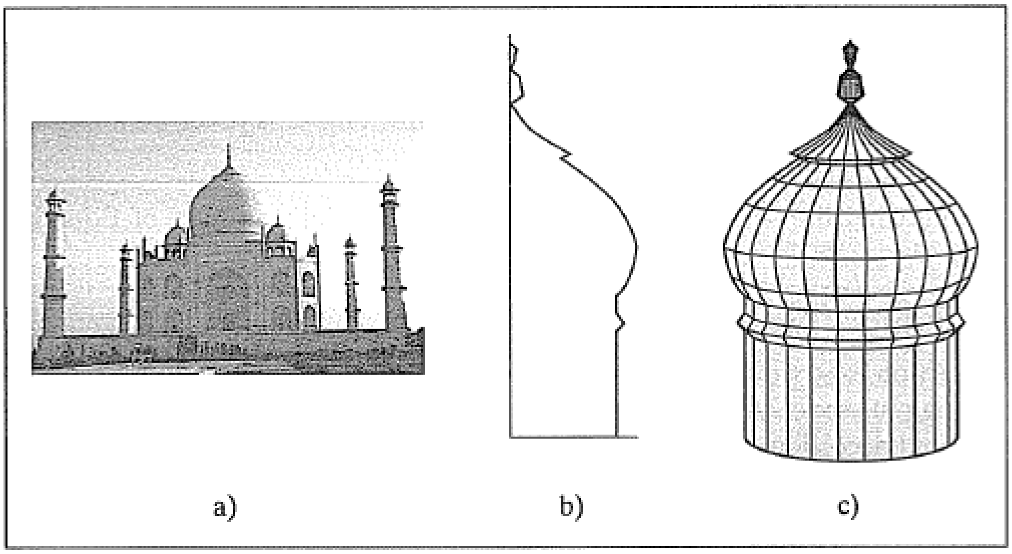


شکل ۳۷

$$P(u,v) = ((D + A\cos(v))\cos(u), (D + A\cos(v))\sin(u), A\sin(v))$$

برای ساختن شبکه برای سطوح مدور مجموعه ای از مقادیر ui، vi انتخاب کرده و رأس $P(u_i,v_i)$ و عمود $n(u_i,v_i)$ را بدست می آوریم. سپس رئوس و عمودهای هر وجه را مشخص می کنیم.

مثال:



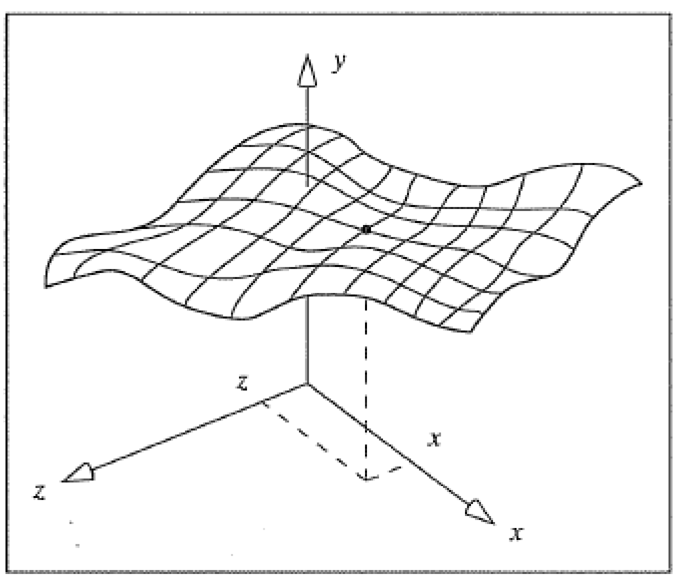
شکل ۳۸

شکل ۳۸ یکی از گنبد های تاج محل با استفاده از دوران یک مجموعه از نقاط بجای معادلهٔ منحنی برای نیمرخ ساخته شده است. برای ساخت سطح مدور هنگامی که نیمرخ نقاط گسسته است:

$$P_{i,j} = (X_j \cos(u_i), X_j \sin(u_i), Z_j)$$

سطوح بر اساس توابع صریح از دو متغیر

برخی از سطوح دارای یک مقدار در یکی از ابعاد هستند. مکانشان را می توان توسط تابع صریحی از دو متغیر مستقل بیان کرد. مثلاً مقدار تک ارتفاع بالای صفحهٔ xz برای هر نقطهٔ (x,z)



شکل ۳۹

مثال:

$$f(x,z)=e^{-ax^2-bz^2}$$

$$f(x,z)=\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

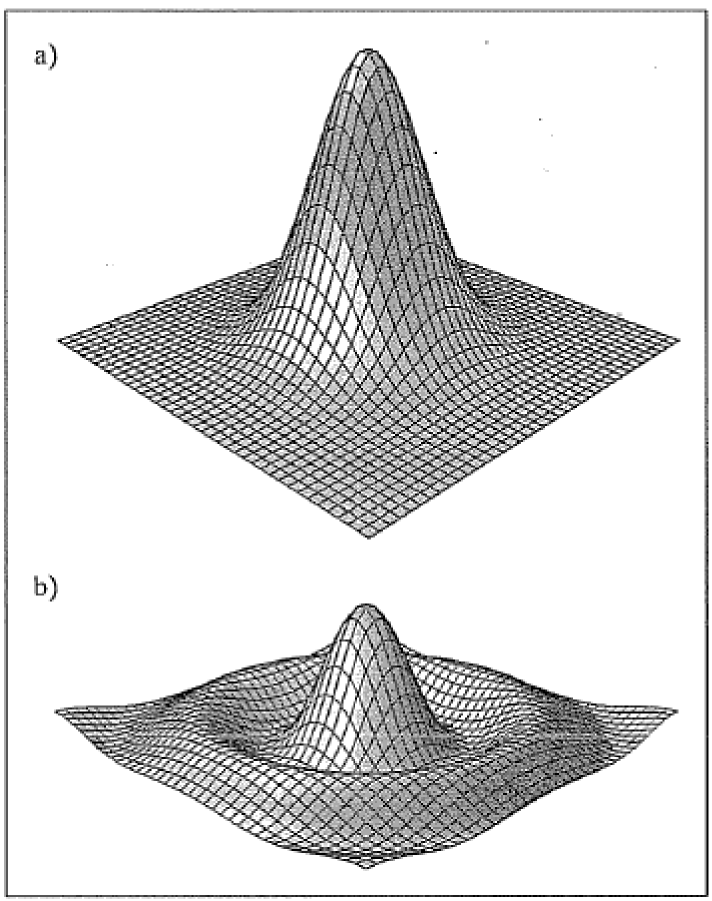
$$f(x,z)=e^{-2|x|-5|z|}\cos(4x-12z)$$

دایره این خاصیت را ندارد (بیش از یک مقدار برای y)

شکل پارامتری برای توابع تک مقداره

$$P(u,v)=(u,\ f(u,v),v)$$

مجدداً در نقاطی از منحنی نمونه برداری کرده و لیست رأس، لیست عمود و لیست وجه را می سازیم.



شکل ۴۰ نمایش دو تابع، الف) یک گوسي، ب) یک سینک.

```
int Mesh:: readmesh(char * fileName)
{
	fstream infile;
	infile.open(fileName, ios::in);
	if(infile.fail()) return -1; // error - can't open file
	if(infile.eof()) return -1;  // error - empty file
	infile >> numVerts >> numNorms >> numFaces;
	pt = new Point3[numVerts];
	norm = new Vector3[numNorms];
	face = new Face[numFaces];
	//check that enough memory was found:
	if( !pt || !norm || !face)return -1; // out of memory
	for(int p = 0; p < numVerts; p++) // read the vertices
		infile >> pt[p].x >> pt[p].y >> pt[p].z;
	for(int n = 0; n < numNorms; n++) // read the normals
		infile >> norm[n].x >> norm[n].y >> norm[n].z;
	for(int f = 0; f < numFaces; f++) // read the faces
	{
		infile >> face[f].nVerts;
		face[f].vert = new VertexId[face[f].nVerts];
		for(int i = 0; i < face[f].nVerts; i++)
			infile >> face[f].vert[i].vertIndex
			       >> face[f].vert[i].normIndex;
	}
	return 0; // success
}
```

شکل ۴۱ روال خواندن یک شبکهٔ چندضلعي از یک پرونده.

تمرین

۱– منحنی نیمرخ $C(v)=(X(v), Z(v))$ در صفحهٔ xz و یک محور دلخواه که از مبدأ عبور کرده و بوسیلهٔ بردار r مشخص شده را در نظر بگیرید. ماتریس $R_r(\theta)$ ماتریس دوران یک نقطه به اندازهٔ زاویهٔ θ حول محور r می باشد.

الف) نشان دهید که سطح مدور که با جاروب $C(v)$ حول r شکل می گیرد عبارت است از:

$$(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v), 1) = R_r(u)\begin{bmatrix} X(v) \\ 0 \\ Z(v) \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲– برای یک لوله اندیس رئوس وجه j ام را بیان نمائید.

۳– یک بیضی بوسیلهٔ (acos(v),bsin(v)) داده می شود. این بیضی را ابتدا به اندازهٔ D واحد در طول محور x جابجا می کنیم و سپس حول محور y دوران می دهیم. نمایش پارامتری این تورس بیضوی را بدست آورید. اگر همان بیضی انتقال یافته را حول محور x دوران دهیم نمایش پارامتری آن را بدست آورید.

۴– لیستهای رأس، عمود، و وجه را برای یک استوانهٔ سربریدهٔ ژنریک با nSlices=4 و nStacks=2 بنویسید.

۵– برنامه ای با استفاده از OpenGL بنویسید و توسط آن یک سطح غلتانده بدین صورت ترسیم نمائید که در آن $P_0(u) = (u, \sin(u), 0)$ و $P_1(u) = P_0(u) + (0,0,5)$ باشند. این شکل را در بازه ای که u از صفر تا 2π تغییر می کند ترسیم نمائید.

٦– یک برنامهٔ کلی بنویسید که توسط آن بتوان یک معادلهٔ ریاضی که بصورت f(x,z) داده می شود را ترسیم نمود. مقدار این معادله توسط یک روال محاسبه می شود که بسته به نوع آن معادله کد آن تغییر می کند ولی کد ترسیم معادله تغییری نخواهد کرد.

۷– روال writeMesh(char *filename) در کلاس Mesh را به گونه ای پیاده سازی نمائید که مشخصات یک شبکهٔ چندضلعی را طبق فرمتی که روال readmesh() به آن نیاز دارد در یک پرونده بنویسید.