PUC-RS

Material originalmente criado para a disciplina de

Introdução a Lógica Aplicada à Computação

(4610-A)

Prof. Daniel Callegari

Revisão C

Objetivos

1. Manipular os principais conceitos da lógica proposicional, em particular as noções de sintaxe, semântica, relação de conseqüência lógica, prova e teorema;

2. Utilizar os principais conceitos da lógica de primeira ordem, em particular as noções de sintaxe, semântica, relação de conseqüência lógica, prova e teorema.

Ementa

Cálculo proposicional. Lógica de 1ª ordem. Semântica de Tarski. Dedução Natural. Completude e correção de sistemas dedutivos. Cálculo de seqüentes, método axiomático de prova. Forma clausal e resolução.

Bibliografia

1. NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica**. Coleção Schaum, Mcgraw-Hill, Inc., 1991.

2. BARWISE, J. & ETCHEMENDY, J. **The Language of First-Order Logic**. CLSI Lecture Notes, n.34. 1992.

3. GABBAY, D. M. **Elementary Logics: a Procedural Perspective**. Prentice-Hall, 1998.

4. MORTARI, Cesar A. **Introdução à Lógica**. UNESP, São Paulo, 2001.

Introdução à Lógica

Segundo [COP 78]:

O estudo da lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto.

O raciocínio é um gênero especial de pensamento no qual se realizam inferências ou se derivam conclusões a partir de premissas.

Para o lógico a interrogação é sempre esta: a conclusão a que se chegou deriva das premissas usadas ou pressupostas?

Se as premissas fornecem bases ou boas provas para a conclusão, se a afirmação da verdade das premissas garante a afirmação de que a conclusão também é verdadeira, então o raciocínio é correto. No caso contrário, é incorreto.

Costuma-se usar a palavra "**proposição**" para designar o significado de uma sentença ou oração declarativa. Exemplo: "João ama Maria" é o mesmo que "Maria é amada por João".

A **inferência** é um processo pelo qual se chega a uma proposição, afirmada na base de uma ou outras mais proposições aceitas como ponto de partida do processo.

Elementos de um raciocínio

São elementos de um raciocínio:

Premissas ou antecedente - é a parte motora do raciocínio e que por isso o precede.

Conclusão ou conseqüente - é a parte movida ou causada (isto é, aquela que provém do antecedente). Trata-se do desfecho e objetivo de todo raciocínio.

Três tipos de raciocínio comuns

Dedução - Um raciocínio dedutivo é aquele cujo conseqüente é inferido em função da conexão existente entre os conceitos que o compõe; movendo-se sempre no sentido do GERAL para o PARTICULAR.

Indução - É aquele que parte do PARTICULAR para o GERAL. É o tipo de raciocínio de que se utiliza mais a ciência. Apresenta-se sempre como uma generalização a partir de dados ou fatos da experiência (em número suficiente). Está, sobretudo, fundada na relação de causa e efeito.

Analogia - Forma imperfeita de indução baseada na expectativa da repetição de determinadas circunstâncias anteriores. Assim, uma argumentação analógica move-se do PARTICULAR para o PARTICULAR ou mesmo do PARTICULAR para o GERAL, segundo critérios de "semelhança", e, como tal, tem poucas possibilidades de acerto. A diferença fundamental entre o raciocínio analógico e o indutivo reside na presença (indução) ou ausência (analogia) de casos suficientes para que a conclusão seja validada.

Conforme [KLI 97]:

A Lógica Simbólica é dividida em:
- Lógica Proposicional
- Lógica de Predicados

A Lógica Proposicional é um sistema formal para representação do conhecimento em termos de expressões declarativas que expressam proposições, usando letras e símbolos (os quais representam as proposições) e os conectivos lógicos entre elas. A validade depende do padrão das proposições como pequenas unidades de raciocínio. Preocupa-se com a forma, não com o significado (sintaxe, não semântica).

Na Lógica de Predicados, é a estrutura interna da proposição que determina a validade de uma inferência. Usa-se quantificadores (*todos, nenhum, ...*).

(apenas como curiosidade / área de Inteligência Artificial)

Conforme [GIA 98]:

A Lógica Proposicional possui limitações: o principal problema é que ela só consegue lidar com declarações completas. Não consegue, por exemplo, provar a validade de um silogismo como:

Todos os seres humanos são mortais
Todas as mulheres são seres humanos
Portanto, todas as mulheres são mortais

Para isto, usamos a Lógica de Predicados. Na sua forma mais simples, é a Lógica de Primeira Ordem. A Lógica Proposicional é um *subset* da Lógica de Predicados.

Mas a Lógica de Predicados também possui limitantes: não consegue representar, por exemplo, a seguinte declaração:

A maioria dos alunos passou por média.

O quantificador "a maioria de" não pode ser expressado usando-se os quantificadores universal e o existencial. Seria necessário prover alguns predicados que pudessem "contar" (como na Lógica Fuzzy). Outra limitação seria expressar coisas que são verdadeiras às vezes, mas nem sempre (Fuzzy Logic também resolve isto, por exemplo). Introduzir "contagem" na lógica complicaria muito e levaria muito mais para o lado da matemática (na verdade a álgebra é uma lógica formal para números).

Métodos de Inferência (para Sistemas Especialistas)

Dedução	Raciocínio lógico no qual conclusões são geradas a partir de suas premissas.
Indução	Inferência do caso específico para o geral.
Intuição	Não existe teoria provada. A resposta apenas aparece, possivelmente por reconhecimento inconsciente de um padrão. (Nenhum sistema especialista resolve ainda, mas redes neurais prometem!)
Heurística	Regras simplesmente definidas, baseadas na experiência.
Gerar e Testar	Tentativa e erro. Muito usado quando se busca eficiência.
Abdução	Raciocínio reverso a partir de uma conclusão verdadeira até as premissas que possam ter causado a conclusão.
Default	Na falta de conhecimento específico, assume conhecimento geral ou comum como padrão.
Autoepistêmico	Auto-conhecimento.
Não-monotônico	Conhecimento prévio pode estar incorreto quando novas evidências são obtidas.
Analogia	Inferir uma conclusão baseada em semelhanças com outra situação;
Senso Comum	Pode ser visto como uma combinação dos anteriores.

Extraído e adaptado de [MOR 01]:

Raciocínio e Inferência

Leia o seguinte problema:

Há não muito tempo atrás, num país distante, havia um velho rei que tinha três filhas, inteligentíssimas e de indescritível beleza, chamadas Guilhermina, Genoveva e Griselda. Sentindo-se perto de partir desta para melhor; e sem saber qual das filhas designar como sua sucessora, o velho rei resolveu submetê-las a um teste. A vencedora não apenas seria a nova soberana, como ainda receberia a senha da conta secreta do rei (num banco suíço), além de um fim de semana, com despesas pagas, na Disneylândia. Chamando as filhas à sua presença, o rei mostrou-lhes cinco pares de brincos, idênticos em tudo com exceção das pedras neles engastadas: três eram de esmeralda, e dois de rubi. O rei vendou então os olhos das moças e, escolhendo ao acaso, colocou em cada uma delas um par de brincos. O teste consistia no seguinte: aquela que pudesse dizer, sem sombra de dúvida, qual o tipo de pedra que havia em seus brincos herdaria o reino (e a conta na Suíça etc.).

A primeira que desejou tentar foi Guilhermina, de quem foi removida a venda dos olhos. Guilhermina examinou os brincos de suas irmãs, mas não foi capaz de dizer que tipo de pedra estava nos seus (e retirou-se, furiosa).

A segunda que desejou tentar foi Genoveva. Contudo, após examinar os brincos de Griselda, Genoveva se deu conta de que também não sabia determinar se seus brincos eram de esmeralda ou rubi e, da mesma furiosa forma que sua irmã, saiu batendo a porta.

Quanto a Griselda, antes mesmo que o rei lhe tirasse a venda dos olhos, anunciou corretamente, alto e bom som, o tipo de pedra de seus brincos, dizendo ainda o porquê de sua afirmação.

Assim, ela herdou o reino, a conta na Suíça e, na viagem á Disneylândia, conheceu um jovem cirurgião plástico, com quem se casou e foi feliz para sempre.

Agora, um probleminha para resolver:

Que brincos tinha Griselda, de esmeralda ou de rubi?. Justifique sua resposta.

Resolução

Espero que você tenha feito o esforço e descoberto que os brincos de Griselda eram de esmeralda. Contudo, responder ao exercício dizendo apenas que os brincos eram de esmeralda não é suficiente: você pode ter tido um palpite feliz, acertando simplesmente por sorte. Para me convencer de que você sabe mesmo a resposta, você tem de expor as razões que o/a levaram a concluir que os brincos eram de esmeralda; você tem de justificar essa sua afirmação. Note que as princesas também estavam obrigadas a fazer isto: o velho rei não estava interessado em que uma delas acertasse a resposta por acaso.

Uma justificação de que os brincos de Griselda são de esmeralda pode ser algo como o que se segue:

> *Existem apenas dois pares de brincos de rubi; logo, se tanto Genoveva quanto Griselda estivessem com brincos de rubi, Guilhermina, a primeira, saberia que os seus são de esmeralda. Guilhermina, contudo, não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos. Logo, ou Genoveva e Griselda tinham ambas brincos de esmeralda, ou uma tinha brincos de rubi e a outra, de esmeralda. Mas disso se segue agora que, se Griselda tivesse brincos de rubi, Genoveva, a segunda, teria visto isso, e saberia que os seus são de esmeralda. Genoveva, contudo, também não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos. Logo, Griselda não tinha brincos de rubi, ou seja, seus brincos eram de esmeralda.*

Note que a justificativa acima não é um processo mental de raciocínio, mas consiste em várias sentenças em português, que podem ser compreendidas por outras pessoas. Ela provavelmente também não é uma descrição de como você chegou a saber qual o tipo de pedra nos brincos de Griselda, mas é uma espécie de "reconstrução racional" desse processo: uma listagem das razões que o/a levam a crer que os brincos são de esmeralda, mostrando como essa conclusão decorre dos dados do problema.

Definição (informal): Um argumento é **válido** se qualquer circunstância que torna suas premissas verdadeiras faz com que sua conclusão seja automaticamente verdadeira.

Por exemplo:

Argumento Válido:	Argumento Inválido:
Todo gato é mamífero	*Todo gato é mamífero*
Miau é um gato	*Lulu é mamífero*
Portanto, Miau é mamífero	*Portanto, Lulu é gato*

Definição: Um argumento é **correto** se for válido e, além disso, tiver premissas verdadeiras.

Por exemplo:

Argumento (válido e) correto:	Argumento (válido mas) incorreto:
Todo gato é mamífero	*Todo marciano é cor-de-rosa*
Miau é um gato	*Rrringlath é um marciano*
Portanto, Miau é mamífero	*Portanto, Rrringlath é cor-de-rosa*

Com relação ao último argumento, obviamente as premissas e a conclusão são falsas (não existem marcianos, tanto quanto se saiba, e, logo, não existem marcianos cor-de-rosa). Contudo, se as premissas FOSSEM verdadeiras, a conclusão também o seria. A conclusão é conseqüência lógica das premissas (o argumento é válido), porém é incorreto.

Apesar disto, <u>para a lógica interessa apenas se um argumento é válido</u>. É óbvio que no dia-a-dia, se quisermos empregar argumentos que realmente justifiquem sua conclusão (argumentos corretos) a questão da verdade das premissas também é de maior importância. Mas determinar, para cada argumento, se suas premissas são verdadeiras ou não, não é uma questão de lógica. A lógica não se ocupa de conteúdos, mas apenas da forma, e, por isto, é chamada de Lógica Formal.

Para exemplificar um caso análogo, sabemos que na matemática para mostrar que uma proposição é verdadeira (um teorema) não se recorre à experiência ou à observação, como em várias outras ciências. Na matemática a verdade de uma proposição é estabelecida por meio de uma demonstração dela, isto é, uma seqüência argumentativa (dedutiva) mostrando que ela se segue logicamente de outras proposições aceitas (ou já mostradas verdadeiras).

Por fim estima-se que a lógica tem ou terá a mesma importância, para a Inteligência Artificial, que a matemática tem para a física teórica.

Lógica

Lógica é o estudo das formas de argumento.

Argumento é uma seqüência de enunciados na qual um deles é a conclusão e os demais são premissas.

Exemplo:

(Premissa)	*Todos os Homens são mortais*	Argumento
(Premissa)	*Sócrates é um Homem*	
(Conclusão)	*Portanto, Sócrates é mortal*	

As premissas são <u>enunciados</u> ou <u>proposições</u> -> {v / f}
Nota: Não podem ser interrogações, comandos ou exclamações.
Servem para provar ou fornecer evidência para a conclusão.

Definição: SILOGISMO

Silogismo é o argumento que consiste de três proposições:
- premissa maior
- premissa menor
- conclusão

Admitida a coerência das premissas, a conclusão se infere (deduz-se) da maior por intermédio da menor (o exemplo acima é um silogismo).

Os argumentos possuem uma "forma comum". Veja os exemplos abaixo:

Hoje é segunda-feira ou terça-feira.
Hoje não é segunda-feira.
Portanto, hoje é terça-feira.

Rembrandt pintou a Mona Lisa ou Michelangelo a pintou.
Não foi Rembrandt quem a pintou.
Portanto, Michelangelo pintou a Mona Lisa.

Ambos são da forma:
P ou Q
Não é o caso que P
Portanto, Q

Esta forma é conhecida como SILOGISMO DISJUNTIVO.

Conectivos ou Operadores Lógicos

O primeiro conectivo na verdade é um modificador: a negação.

$\neg$	negação	"*Não é o caso que ...*"

vejamos os demais:

$\wedge$	conjunção	"*... e ...*"
$\vee$	disjunção	"*... ou ...*"
$\rightarrow$	implicação	"*se ... então ...*"
$\leftrightarrow$	equivalência	"*... se e somente se ...*"

Vamos a um pouco de formalismo...

Lógica é um Sistema Formal

Sistema formal <L, A, R, $\vdash$>

L Linguagem (formal) = conjunto de sentenças.

A Axiomas = sentenças assumidas como verdadeiro, incondicionalmente (pode ser vazio)

R Regras de Inferência = regras para obter uma sentença a partir de outras sentenças.

$\vdash$ Relação de Derivabilidade = associação entre conjuntos de sentenças com conjuntos de sentenças (subconjuntos de L).

Exemplo:

Para uma linguagem L cujas únicas sentenças são P, Q e R:
L = {P, Q, R}

Ao escrevermos $\{P, Q\} \vdash R$, estamos dizendo que:
- R é derivável de P e Q;
- é possível obter R a partir da aplicação das regras de inferência em P e Q;

Assim, "$\vdash$" na lógica indica que uma sentença pode ser provada a partir de outras sentenças.

Sintaxe da Lógica Proposicional

A lógica proposicional utiliza-se de fórmulas. As fórmulas devem ser WFFs (*well-formed formulas*, ou FBF, fórmulas bem-formadas, em português). Estas fórmulas são construídas indutivamente a partir das seguintes regras:

1) Todo símbolo proposicional (P, Q, R, ...) é uma fórmula (uma wff);

2) Se α é uma wff, então $(\neg\alpha)$ também é uma wff;

3) Se α e β são wffs, então também o são
$(\alpha \wedge \beta)$
$(\alpha \vee \beta)$
$(\alpha \rightarrow \beta)$

4) Nada mais é wff.

Nota: o conectivo $\leftrightarrow$ pode ser obtido pela seguinte tautologia:
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Exemplos:

$(P \rightarrow Q) \wedge R$ é uma wff.

$) (P \wedge)) \rightarrow R$ não é uma wff.

Axiomas

Como vimos, os axiomas são sentenças assumidas como verdadeiro, incondicionalmente (podendo este conjunto de sentenças ser vazio).

No sistema de Dedução Natural, o conjunto de axiomas é vazio. Para "compensar" isto, usaremos hipóteses, as quais serão vistas mais adiante.

Regras de Inferência

São regras de Dedução Natural. Para cada conectivo, há uma regra de introdução e uma de eliminação.

Quando se diz:

$\beta \vdash \alpha$

significa

"existe uma prova que leva de β em α, aplicando-se regras de inferência".

Quando se diz:

$\beta \rightarrow \alpha$

indica que

"β implica em α, não havendo provas para isto. Mas sabe-se que é uma verdade".

Exemplo:

$\vdash \; P \rightarrow \neg\neg P$

Neste caso, "$\vdash$" indica que é sempre verdade, ou seja, não depende de premissas para P derivar em $\neg\neg$P.

Dedução Natural

É um método de prova.

1) Lista-se as premissas em cada linha e identifica-se cada uma com P (de Premissa).
2) Deduz-se uma nova linha usando as anteriores e indicando a regra usada.

As regras de inferência são de dois tipos: Hipotéticas e Não-Hipotéticas.

Sabemos que são cinco operadores lógicos: $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
Para cada operador temos duas regras (uma de introdução e outra de eliminação).
Isto nos dá um total de 10 regras, sendo 8 Não-Hipotéticas e 2 Hipotéticas.

As regras de inferência geram (a partir de derivação ou prova) formas de raciocínio válidas.

Regras Não-Hipotéticas de Inferência (Regras R1 a R8)

Considere a seguinte forma de argumento:

C, S → A, C → S ⊢ A

Esta fórmula é válida porque pode ser derivável pelas regras de inferência. Vejamos:

Primeiro colocamos as premissas, uma em cada linha numerada:

1	C	Premissa
2	S → A	P
3	C → S	P

Depois, a partir das premissas, aplicaremos regras de inferência para chegarmos (ou não) na conclusão. Assim, para escrever a linha 4, usamos o seguinte pensamento:

"De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o conseqüente". Esta regra é denominada MODUS PONENS (MP). É a regra da **ELIMINAÇÃO DO CONDICIONAL**, nossa primeira regra [R1]. Neste caso, como sabemos que "C" é verdadeiro e sabemos que "C → S" é verdadeiro (afinal, são premissas do argumento), então, por conseqüência, temos (inferimos que) "S" é verdadeiro.

∴4	S	1,3 MP
∴5	A	2,4 MP

A linha 5 segue a mesma idéia, ou seja, usa a mesma regra de inferência, porém combinando um conhecimento prévio do argumento (uma premissa) com um conhecimento que deduzimos a partir delas (a linha 4).

Em resumo, fica assim:

1	**C**	Premissa
2	**S → A**	P
3	**C → S**	P
∴4	S	1,3 MP
∴5	A	2,4 MP

Os "∴" indicam uma conclusão lógica. Note também que, ao lado direito de cada linha, sempre devemos indicar como ela foi obtida. Este é o processo de dedução natural.

Agora vejamos as outras regras...

[R2] ELIMINAÇÃO DA NEGAÇÃO (¬E)
"De uma wff da forma $\neg\neg\alpha$, podemos inferir α."

Exemplo:

(¬P → ¬¬Q) , ¬¬¬P ⊢ Q

1	**¬P → ¬¬Q**	Premissa
2	**¬¬¬P**	P
3	¬P	2 ¬E
∴4	¬¬Q	1,3 MP
∴5	Q	4 ¬E

[R3] INTRODUÇÃO DA CONJUNÇÃO ($\wedge$I)
"De quaisquer wffs α e β, podemos inferir $\alpha \wedge \beta$."

[R4] ELIMINAÇÃO DA CONJUNÇÃO ($\wedge$E)
"De uma conjunção podemos inferir qualquer um dos conjunctos."

Exemplo:

$P \rightarrow (Q \wedge R)$, P $\vdash$ $P \wedge Q$

1	**$P \rightarrow (Q \wedge R)$**	P
2	**P**	P
$\therefore$3	$Q \wedge R$	1,2 MP
$\therefore$4	Q	3 $\wedge$E
$\therefore$5	$P \wedge Q$	2,4 $\wedge$I

[R5] INTRODUÇÃO DA DISJUNÇÃO ($\vee$I)
"De uma wff α, podemos inferir a disjunção de α com qualquer wff."

Exemplo:

P $\vdash$ $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

1	**P**	P
$\therefore$2	$P \vee Q$	1 $\vee$I
$\therefore$3	$P \vee R$	1 $\vee$I
$\therefore$4	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	2,3 $\wedge$I

Exemplo:

P , $\neg\neg(P \rightarrow Q)$ $\vdash$ $(R \wedge S) \vee Q$

1	**P**	P
2	**$\neg\neg(P \rightarrow Q)$**	P
$\therefore$3	$P \rightarrow Q$	2 $\neg$E
$\therefore$4	Q	1,3 MP
$\therefore$5	$(R \wedge S) \vee Q$	4 $\wedge$I

[R6] ELIMINAÇÃO DA DISJUNÇÃO ($\vee$E)
"Da existência de todas as wffs das formas $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \gamma)$ e $(\beta \rightarrow \gamma)$, podemos inferir a wff γ."

Exemplo:

$S \vee D$, $S \rightarrow F$, $D \rightarrow F$ $\vdash$ F

1	**$S \vee D$**	P	Hoje é sábado ou domingo.
2	**$S \rightarrow F$**	P	Se é sábado, então é fim de semana.
3	**$D \rightarrow F$**	P	Se é domingo, então é fim de semana.
$\therefore$4	F	1,2,3 $\vee$E	Então hoje é fim de semana.

[R7] INTRODUÇÃO DO BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$I)
"De quaisquer wffs da forma $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\beta \rightarrow \alpha)$, podemos inferir $(\alpha \leftrightarrow \beta)$."

[R8] ELIMINAÇÃO DO BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$E)
"De quaisquer wffs da forma $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, podemos inferir $(\alpha \rightarrow \beta)$ ou $(\beta \rightarrow \alpha)$."

Resumo das Regras Não-Hipotéticas (R1 – R8)

[R1] (MP) $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}$

[R2] ($\neg$E) $\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$

[R3] ($\wedge$I) $\dfrac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}$

[R4] ($\wedge$E) $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$

[R5] ($\vee$I) $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$

[R6] ($\vee$E) $\dfrac{\alpha \vee \beta \qquad \alpha \rightarrow \gamma \qquad \beta \rightarrow \gamma}{\gamma}$

[R7] ($\leftrightarrow$I) $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta}$

[R8] ($\leftrightarrow$E) $\dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$

Exercício de Regras Não-Hipotéticas: Prove cada um dos argumentos abaixo:

1) $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R),\quad \neg P,\quad Q \quad \vdash \quad R$

2) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)\ ,\ O \rightarrow S\ ,\ Q \rightarrow S\ ,\ P \rightarrow T\ ,\ R \rightarrow T \quad \vdash \quad S \wedge T$

3) $P \vee P\ ,\quad P \rightarrow (Q \wedge R) \quad \vdash \quad R$

4) $F \leftrightarrow (S \vee D)\ ,\ S \quad \vdash \quad F$

5) $P \rightarrow Q\ ,\quad (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \quad \vdash \quad P \leftrightarrow Q$

Regras Hipotéticas de Inferência (Regras R9 e R10)

Vejamos as regras de introdução do condicional e de introdução da negação, as quais usam o raciocínio hipotético.

O raciocínio hipotético é um raciocínio baseado em hipóteses, uma suposição feita "em consideração ao argumento" a fim de mostrar que uma conclusão particular segue daquela suposição [NOL 91].

Nota: as hipóteses não são declaradas como verdadeiras (ao contrário das premissas e das conclusões derivadas pelas regras não-hipotéticas)! São "artifícios lógicos" usados como um tipo especial de estratégia de prova.

Por isto, elas devem ser descartadas ao aplicarmos a regra que exigiu a sua introdução. Além disso, toda hipótese deve ter sido descartada ao final da prova para que esta tenha validade.

Hipóteses possuem escopo. Se mais de uma for usada de forma aninhada (uma dentro da outra), a segunda deve ser descartada antes da primeira (como uma pilha).

Exemplo:

Você quer convencer um atleta machucado a não continuar correndo no momento porque ele está machucado. Você diz "*Se você continuar correndo, não estará apto a disputar a corrida*". Ele olha para você, e você sente que tem que dar toda a explicação:

Seu tornozelo está muito inchado.

Se o seu tornozelo está muito inchado e você continuar correndo, então ele não ira sarar em uma semana.

Se o seu tornozelo não sarar em uma semana, então você não estará apto a disputar a corrida.

Portanto, se você continuar correndo agora, então você não estará apto a disputar a corrida.

$$\mathbf{I},\quad (\mathbf{I} \wedge \mathbf{C}) \rightarrow \neg\mathbf{S},\quad \neg\mathbf{S} \rightarrow \neg\mathbf{A} \quad \vdash \quad \mathbf{C} \rightarrow \neg\mathbf{A}$$

1	$\mathbf{I}$	P	
2	$(\mathbf{I} \wedge \mathbf{C}) \rightarrow \neg\mathbf{S}$	P	
3	$\neg\mathbf{S} \rightarrow \neg\mathbf{A}$	P	
4	| [C]	Hip.	("Suponha que você continue correndo...")
5	| $I \wedge C$	1,4 $\wedge$I	
6	| $\neg S$	2,5 MP	
7	| $\neg A$	3,6 MP	(fim da barra: descarta-se a hipótese)
8	$C \rightarrow \neg A$	***4-7 PC***	

Usamos a técnica de "colocar o antecedente como hipótese" para convencer o corredor a não continuar correndo no momento.

As premissas, sem dúvida, são verdadeiras. Uma vez admitidas estas suposições, o argumento hipotético mostra que: se a hipótese 'você continue correndo' é verdadeira, então a conclusão do argumento hipotético deve também ser verdadeira.

Nota: a correção do argumento não depende da veracidade da hipótese; mas depende, sim, das suposições anteriores (premissas). A hipótese é introduzida somente para mostrar que, dadas as suposições, ela implica a conclusão.

A regra "PC" acima significa "Prova do Condicional". É a regra de **INTRODUÇÃO DO CONDICIONAL ($\rightarrow$I)** ou **PROVA DO CONDICIONAL (PC)**.

PC é a estratégia fundamental para a prova de condicionais. A aplicação de ($\vee$E) requer duas premissas que sejam condicionais. Logo, a regra PC é usada como condição prévia para ($\vee$E).

Quando há uma premissa disjuntiva ($\alpha \vee \beta$), provamos os dois condicionais e, após, aplicamos a regra ($\vee$E).

[R9] INTRODUÇÃO DO CONDICIONAL ($\rightarrow$I) ou (PC)
"Dada uma derivação de uma wff β a partir de uma hipótese α, podemos descartar a hipótese e inferir $\alpha \rightarrow \beta$."

Exemplo:

$\mathbf{P \vee Q \quad \vdash \quad Q \vee P}$

1	$\mathbf{P \vee Q}$	P
2	| [P]	Hip.
3	| $Q \vee P$	2 $\vee$I
4	$P \rightarrow (Q \vee P)$	2-3 PC
5	| [Q]	Hip.
6	| $Q \vee P$	5 $\vee$I
7	$P \rightarrow (Q \vee P)$	5-6 PC
8	$Q \vee P$	1,4,7 $\vee$E

[R10] INTRODUÇÃO DA NEGAÇÃO ($\neg$I) ou (RAA)
"Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese α, podemos descartar a hipótese e inferir $\neg\alpha$."

Definição: Uma CONTRADIÇÃO ($\perp$) é qualquer fórmula da forma ($\alpha \wedge \neg\alpha$)
Uma contradição nunca é verdadeira.

Para usar a regra de introdução da negação, usamos a técnica da "redução ao absurdo" (RAA) ou "prova indireta".

Para provar uma conclusão negada por redução ao absurdo, colocamos como hipótese a conclusão sem o sinal de negação; daí derivamos uma contradição. Como conseqüência, verificamos que a hipótese é falsa, portanto a conclusão é verdadeira.

Exemplo:

$\mathbf{P \rightarrow Q\ ,\ \neg Q \quad \vdash \quad \neg P}$

1	$\mathbf{P \rightarrow Q}$	P
2	$\mathbf{\neg Q}$	P
3	| [P]	Hip.
4	| Q	1,3 MP
5	| $Q \wedge \neg Q$	2,4 $\wedge$I *
6	$\neg P$	3-5 RAA

* *Mas isto é um absurdo! A hipótese tem que estar errada (falsa)! Sendo assim, a negação dela é verdadeira.*

Se a hipótese leva a um absurdo (seja ele qual for), então podemos afirmar a negação dela.

Resumo das Regras Hipotéticas (R9 – R10)

[R9]
(→I)
(PC)

$$\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \\ \hline \alpha \rightarrow \beta \end{array}$$

[R10]
(¬I)
(RAA)

$$\begin{array}{c} [\alpha] \\ \vdots \\ \bot \\ \hline \neg\alpha \end{array}$$

Mandamentos do Raciocínio Hipotético

Adaptado de [MOR 01]

I. Introduzirás na derivação uma linha vertical toda vez que introduzires uma hipótese adicional; a cada hipótese corresponderá uma linha, e a cada linha uma hipótese, pois assim está escrito.

II. Não usarás uma fórmula que ocorre à direita de uma linha vertical depois de terminada essa linha, pois, caso contrário, tuas derivações, e as derivações de tuas derivações, serão falaciosas setenta e sete vezes.

III. Descartarás as hipóteses na ordem inversa em que foram introduzidas, e não usarás outra ordem para descartá-las.

IV. Não darás uma dedução por terminada enquanto não descartares todas as hipóteses adicionais.

V. Não farás mau uso das regras de inferência, nem terás outras regras além das que por teu mestre te forem dadas.

Algumas Estratégias para Prova

Extraído de [NOL 91]

Para um(a)...	Faça...
Fórmula atômica	Se nenhuma estratégia é imediata, coloca-se como hipótese a negação da conclusão para RAA. Se isto for bem-sucedido, então a conclusão pode ser obtida depois de RAA, por ¬E.
Fórmula negada	Coloca-se como hipótese a conclusão, sem o símbolo da negação, para RAA. Se resultar uma contradição, a conclusão pode ser obtida por RAA.
Conjunção	Prove cada um dos conjunctos, separadamente, e então faça a conjunção deles com ∧I.
Disjunção	Se uma premissa disjuntiva está presente, tenta-se provar os condicionais necessários para obter a conclusão por ∨E. Caso contrário, coloca-se como hipótese a negação da conclusão e tenta-se RAA. Algumas vezes, uma conclusão disjuntiva pode ser provada diretamente, provando-se um dos seus conjunctos e aplicando-se ∨I.
Condicional	Coloca-se como hipótese o seu antecedente e deriva-se o seu conseqüente por PC.
Bicondicional	Use PC duas vezes para provar os dois condicionais necessários para obter a conclusão por ↔I.

Nota: Estas estratégias não cobrem a totalidade das possibilidades. Existem outras que requerem mais habilidade e engenhosidade.

Regras Derivadas

São regras construídas a partir das regras básicas e que podem ser usadas diretamente em outras provas.

Algumas regras derivadas:

[D1] REPETIÇÃO (RE)
Pode-se repetir um argumento, desde que ele não tenha sido descartado pelo fim de uma hipótese.

[D2] MODUS TOLLENS (MT)
$P \rightarrow Q\ ,\ \neg Q \quad \vdash \quad \neg P$

[D3] ABSORÇÃO (ABS)
$P \rightarrow Q \quad \vdash \quad P \rightarrow (P \wedge Q)$

[D4] CONTRADIÇÃO (CONTRAD)
$P\ ,\ \neg P \quad \vdash \quad Q$

[D5] SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH)
$P \rightarrow Q\ ,\ Q \rightarrow R \quad \vdash \quad P \rightarrow R$

[D6] SILOGISMO DISJUNTIVO (SD)
$(P \vee Q)\ ,\ \neg Q \quad \vdash \quad P$

[D7] DILEMA CONSTRUTIVO (DC)
$(P \vee Q)\ ,\ P \rightarrow R\ ,\ Q \rightarrow S \quad \vdash \quad R \vee S$

Exemplo de prova de uma regra derivada:

$\mathbf{P \rightarrow Q\ ,\ \neg Q \quad \vdash \quad \neg P}$

1	$\mathbf{P \rightarrow Q}$	P
2	$\mathbf{\neg Q}$	P
3	| [P]	Hip.
4	| Q	1,3 MP
5	| $Q \wedge \neg Q$	2,4 $\wedge$I
6	$\neg P$	3-5 RAA

Agora que vimos que a regra derivada MT é válida, podemos usá-la em outras provas. O mesmo vale para as demais regras derivadas.

Exemplo:

$\mathbf{P \rightarrow Q\ ,\ (P \wedge Q) \rightarrow R\ ,\ \neg R \quad \vdash \quad \neg P}$

1	$\mathbf{P \rightarrow Q}$	P
2	$\mathbf{(P \wedge Q) \rightarrow R}$	P
3	$\mathbf{\neg R}$	P
4	$P \rightarrow (P \wedge Q)$	1 ABS
5	$P \rightarrow R$	2,4 SH
6	$\neg P$	3,5 MT

Teoremas

Algumas wffs são prováveis sem quaisquer suposições não-hipotéticas (não há nada antes do "$\vdash$"). Estas wffs são chamadas de *teoremas* ou *leis* do cálculo proposicional. São sempre verdadeiros.

Como não temos premissas, para prová-los temos que introduzir hipóteses. Assim, a prova de um teorema se inicia com uma ou mais hipóteses que serão descartadas por PC ou RAA.

Alguns teoremas:

[T1] $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

[T2] $\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$

[T3] $\vdash P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

[T4] $\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$

[T5] $\vdash P \vee \neg P$

[T6] $\vdash (P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

Exemplo:

$\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$

1	| [P]	Hip.
2	| $P \vee Q$	1 $\vee$I
3	$P \rightarrow (P \vee Q)$	1-2 PC

Também pode-se provar teoremas usando outros teoremas:
Exemplo: Prova do teorema T6:

$\vdash (P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

1	$P \vee \neg P$	Introdução do Teorema T5 (IT T5)
2	$P \rightarrow (P \vee Q)$	IT T2
3	$\neg P \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	IT T2
4	$(P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$	1,2,3 DC

Nota: Quando usamos a regra de introdução de teorema (IT) não citamos linhas anteriores, pois a instância do teorema não é inferida de qualquer premissa dada.

Equivalências

Uma equivalência é um bicondicional que é um teorema.

Para provar uma equivalência, provamos os condicionais necessários para depois usarmos a regra [R7] INTRODUÇÃO DO BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$I).

Algumas equivalências:

[E1]	$\vdash \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	**Lei de De Morgan (DM)**
[E2]	$\vdash \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	**Lei de De Morgan (DM)**
[E3]	$\vdash (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$	**Comutação (COM)**
[E4]	$\vdash (P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$	**Comutação (COM)**
[E5]	$\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$	**Dupla Negação (DN)**
[E6]	$\vdash P \leftrightarrow (P \wedge P)$	**Tautologia (TAUT)**

Exemplo:

$$\vdash (P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

1	$[P \to Q]$	Hip. (para PC)	
2	$[P \wedge \neg Q]$	Hip. (para RAA)	
3	P	2 $\wedge$E	
4	Q	1,3 MP	
5	$\neg Q$	2 $\wedge$E	
6	$Q \wedge \neg Q$	4,5 $\wedge$I	
7	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2-6 RAA	
8	$(P \to Q) \to \neg(P \wedge \neg Q)$	1-7 PC	(provamos a ida)
9	$[\neg(P \wedge \neg Q)]$	Hip. (para PC)	
10	$[P]$	Hip. (para PC)	
11	$[\neg Q]$	Hip. (para RAA)	
12	$P \wedge \neg Q$	10,11 $\wedge$I	
13	$(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)$	9,12 $\wedge$I	
14	$\neg\neg Q$	11-13 RAA	
15	Q	14 $\neg$E	
16	$P \to Q$	10-15 PC	
17	$\neg(P \wedge \neg Q) \to (P \to Q)$	9-16 PC	(provamos a volta)
18	$(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$	8,17 $\leftrightarrow$I	

Referências Bibliográficas

[COP 78] COPI, Irving M. **Introdução à Lógica**. Ed. Mestre Jou, Brasil, 2ª Ed, 1978.

[GIA 98] GIARRATANO; RILEY. **Expert Systems Principles and Programming**.USA. PWS Pub. Company, 1998.

[KLI 97] KLIR, George J.; ST. CLAIR, Ute H.; YUAN, Bo. **Fuzzy Set Theory Foundations and Applications**. USA, Prentice Hall, 1997.

[MOR 01] MORTARI, Cesar A. **Introdução à Lógica**. UNESP, São Paulo, 2001.

[NOL 91] NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica**. Coleção Schaum, Mcgraw-Hill, Inc., 1991.