Matemática discreta e Lógica Matemática

AULA - Conjuntos, Funções, Indução e Grafos

Prof. Dr. Hércules A. Oliveira
UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa
Departamento Acadêmico de Matemática

Conjuntos

Definição 1

1. Um Conjunto é uma coleção de objetos não ordenada.

Definição 2

1. Os objetos são chamados de elementos. Diz-se que eles pertencem ao conjunto.

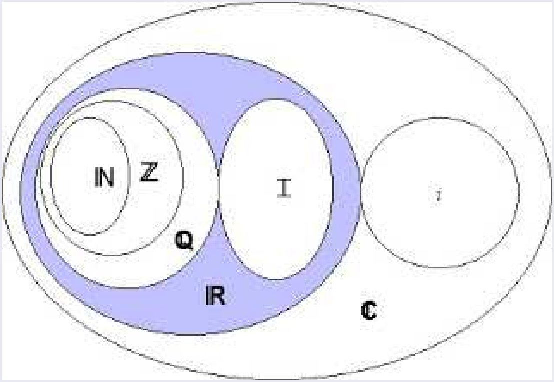
$$a \in A \tag{1}$$

Exemplo: $A = \{a, b, c, d\}$

Definição 3

1. Dois conjuntos são **Iguais** se e somente se eles tem os mesmos elementos.

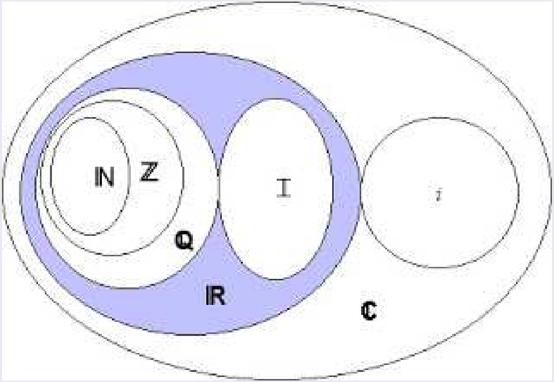
Diagrama de Venn



Definição 3

1. Dois conjuntos são **Iguais** se e somente se eles tem os mesmos elementos.

Diagrama de Venn



Definição 4

Definição 4

O conjunto A é um **Subconjunto** de B se e somente se todo elemento de A for também um elemento de B.

$$A \subseteq B \tag{2}$$

Definição 5

Considere **S** um conjunto. Se há exatamente n elementos distintos em **S**, em que n é um número inteiro não negativo, dizemos que **S** é um conjunto finito em que n é cardinal de **S**. O cardinal é representado por $|S|$.

Definição 6

Um conjunto é dito infinito se ele não é finito.

Definição 7

Dado um conjunto **S**, o conjunto das partes de **S** é o conjunto de todos os subconjunto do conjunto **S**. O conjunto de partes de **S** é indicado por P(S).

Produto Cartesiano

Definição 8

A n-upla ordenada $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é a coleção ordenada que tem a_1 como o primeiro elemento, e a_1 como o n-ésimo elemento.

Exemplo: Pares ordenados: $(a, b) = (x, y)$.

Definição 9

O Produto Cartesiano de A com B, indicado por

$$A \times B \tag{3}$$

é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \land b \in B\} \tag{4}$$

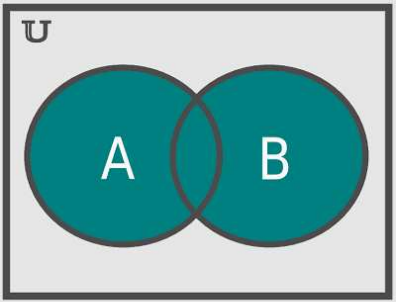
Operação com conjuntos

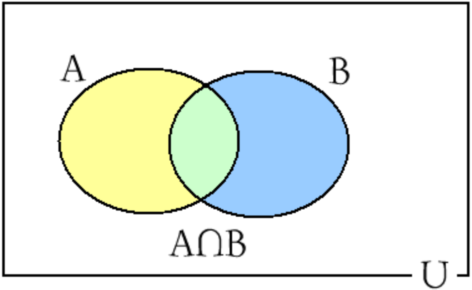
Definição 1

Sejam A e B conjuntos. A união dos conjuntos A e B, indicada por $A \cup B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A ou em B, ou em ambos.

Definição 1

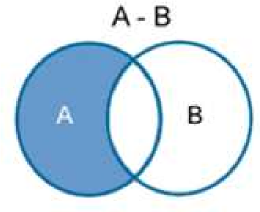
Sejam A e B conjuntos. A interseção dos conjuntos A e B, indicada por $A \cap B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A e em B, simultaneamente.

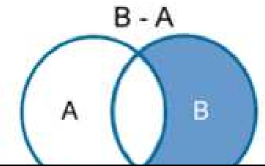

U
A
B


A
B
A∩B
U

Definição 4

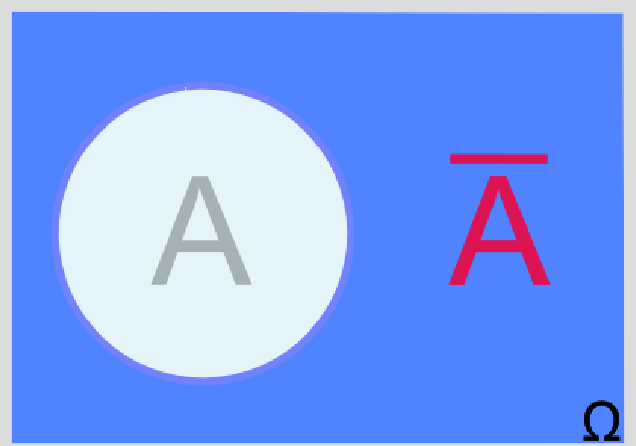
Sejam A e B conjuntos. A diferença entre A e B, indicada por $A - B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A, mas não estão em B. Complemento.





Definição 5

Considere **U** como o conjunto universo. O complemento do conjunto A, indicado por $\bar{A}$, é o complemento de A em relação a U. $U - A$



Definição 6

A união de uma coleção de conjuntos é o conjunto que contém aqueles elementos que são membros de, pelo menos, um dos conjuntos da coleção.

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{5}$$

Definição 7

A interseção de uma coleção de conjuntos é o conjunto que contém aqueles elementos que são membros de todos os conjuntos da coleção.

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \tag{6}$$

Funções

Definição 1

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função f de A para B é uma determinação exatamente um elemento de B em A. Escrevemos $f(a) = b$ se b for o único elemento de B determinado pela função f para o elemento a de A. Se f é uma função de A para B, escrevemos $f : A \to B$.

Função - mapeamento ou transformação.

Definição 2

Se f é uma função de A para B, dizemos que A é o domínio de f e B é o contradomínio de f. Se $f(a) = b$, dizemos que b é a imagem de a e a é a imagem inversa de b.Além disso, se f é uma função de A para B, dizemos que f mapeia A para B.

Funções

Definição 3

Sejam f_1 e f_2 funções de A para $\mathbb{R}$. Então, $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ também são funções de A para $\mathbb{R}$ definidas por

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{7}$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x). \tag{8}$$

Exemplo

Considere f_1 e f_2 funções de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, tal que $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x - x^2$. Quais são as funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$?

Princípios da Indução Matemática

Para demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros n, em que $P(n)$ é uma função proposicional, completamos dois passos:

Passo base

Verificamos que $P(1)$ é verdadeira.

Passo de Indução

Mostramos que a proposição condicional $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos k.

Exemplo

Mostre que se n for um número inteiro positivo, então

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{9}$$

Solução

$P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Mostrar que $P(1)$ é verdadeira e que $P(k)$ implica em $P(k+1)$.

$P(1)$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}. \tag{10}$$

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{11}$$

Exemplo

$P(k+1)$

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \tag{12}$$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{13}$$

$P(k+1)$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \tag{14}$$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \tag{15}$$

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{16}$$

Exemplo

Conjecture uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares. Então, demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

Soma

$$1 = 1 \tag{17}$$
$$1 + 3 = 4 \tag{18}$$
$$1 + 3 + 5 = 9 \tag{19}$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \tag{20}$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. \tag{21}$$

Exemplo

Conjecture uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares. Então, demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

Conjectura

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{22}$$

P(1)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{23}$$

$$(1)^2 = 1 \tag{24}$$

Exemplo

Conjecture uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares. Então, demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

P(k)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{25}$$

P(k+1)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 \tag{26}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{27}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{28}$$

Exemplo

Conjecture uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares. Então, demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

P(k)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{25}$$

P(k+1)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 \tag{26}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{27}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{28}$$

Exemplo

Conjecture uma fórmula para a soma dos primeiros n números inteiros positivos e ímpares. Então, demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

P(k)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{25}$$

P(k+1)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 \tag{26}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{27}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{28}$$

Exemplo

P(k)

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=(k)^2 \tag{29}$$

somando $2k+1$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1) \tag{30}$$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1 \tag{31}$$

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2 \tag{32}$$

Então, como $P(1)$ é verdadeira e $P(k)\to P(k+1)$, a soma dos números inteiros ímpares é n^2.

Exemplo

P(k)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = (k)^2 \tag{29}$$

somando $2k + 1$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) \tag{30}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 \tag{31}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{32}$$

Então, como $P(1)$ é verdadeira e $P(k) \rightarrow P(k+1)$, a soma dos números inteiros ímpares é n^2.

Exemplo

P(k)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = (k)^2 \tag{29}$$

somando $2k+1$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) \tag{30}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 \tag{31}$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2 \tag{32}$$

Então, como $P(1)$ é verdadeira e $P(k) \rightarrow P(k+1)$, a soma dos números inteiros ímpares é n^2.

Exemplo

P(n)

Use a indução matemática para mostrar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \tag{33}$$

P(0)

$$2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 \tag{34}$$

P(k)

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \tag{35}$$

Exemplo

P(k+1)

Use a indução matemática para mostrar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1 \tag{36}$$

P(k+1)

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{(k+2)} - 1 \tag{37}$$

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+2)} - 1 \tag{38}$$

Exemplo

P(k+1)

Use a indução matemática para mostrar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \tag{39}$$

P(k+1)

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2(2^{k+1}) - 1 \tag{40}$$

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \tag{41}$$

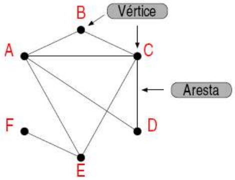
Grafos

Definição 1

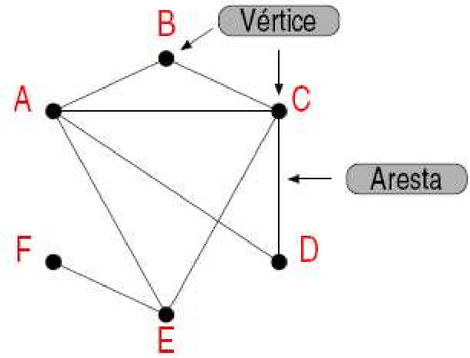
Um **Grafo** $G = (V, E)$ consiste em V, um conjunto não vazio de *vértices* (ou nós), e E, um conjunto de *arestas*. Cada aresta tem um ou dois vértices associados a ela, chamados de suas *extremidades*. Dizemos que uma aresta *liga* ou *conecta* suas extremidades.

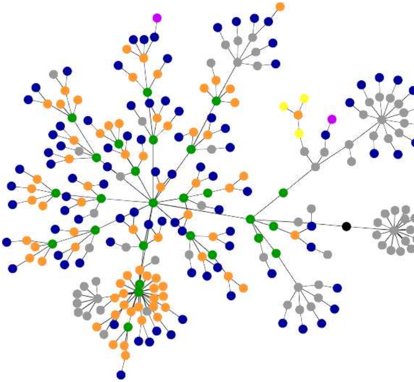
OBS:

O conjunto de vértices V de G pode ser infinito. Este é chamado de **Grafo infinito**. Caso contrário é um **Grafo finito**.



Grafos

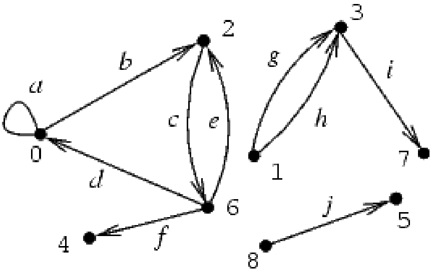




Grafos

Definição 2

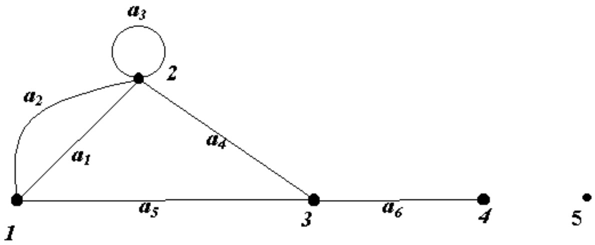
Um **Grafo orientado** (ou dígrafo) (V, E) consiste em V, um conjunto não vazio de *vértices* (ou nós), e E, um conjunto de *arestas*. E cada aresta orientada está associada a um par ordenado de vértices. É dito que aresta orientada associada ao par ordenado (u, v) começa em u e termina em v.



Grafos

Tipos

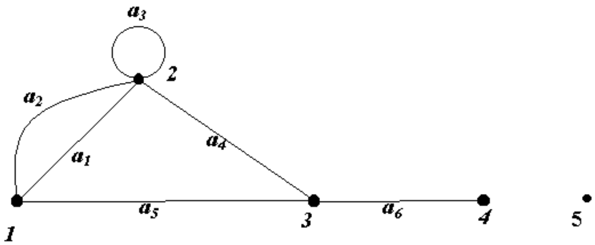
Grafo Simples: cada aresta conecta dois vértices diferentes u, v.
Multigrafos: **arestas multiplas:** várias arestas conectadas ao mesmo vértices. **Multiplicidade** m.
Laços: Arestas que conectam um vértices a sí mesmo.



Grafos

Tipos

Grafo Simples: cada aresta conecta dois vértices diferentes $\{u, v\}$.
Multigrafos: arestas multiplas: várias arestas conectadas ao mesmo vértices. **Multiplicidade** m.
Laços: Arestas que conectam um vértices a sí mesmo.



FIM