Matemática discreta e Lógica Matemática

AULA 2 - Equivalências Proposicionais

Prof. Dr. Hércules A. Oliveira
UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa
Departamento Acadêmico de Matemática

Equivalências Lógicas

Proposições compostas - Definição 1

1. Uma proposição composta que é verdadeira, qualquer que sejam os valores-verdade das proposições que ocorrem nela, é chamada de *Tautologia*.
2. Uma proposição composta que é sempre falsa, qualquer que seja o valor-verdade das proposições que a compõem, é chamada de *Contradição*.
3. Uma proposição composta que não é *Tautologia* nem *Contradição* é chamada cd *Contingência*.

Exemplo 1

1. Podemos construir exemplos de tautologias e contradições usando apenas uma variável proposicional. Considere a tabela-verdade de $p \vee \neg p$ e $p \wedge \neg p$, abaixo.
2. $p \vee \neg p$ é sempre verdade - é uma tautologia.
3. e $p \wedge \neg p$ é sempre falsa - é uma contradição.

Tabela-Verdade

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Exemplo 1

1. Podemos construir exemplos de tautologias e contradições usando apenas uma variável proposicional. Considere a tabela-verdade de $p \vee \neg p$ e $p \wedge \neg p$, abaixo.
2. $p \vee \neg p$ é sempre verdade - é uma tautologia.
3. e $p \wedge \neg p$ é sempre falsa - é uma contradição.

Tabela-Verdade

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Exemplo 1

1. Podemos construir exemplos de tautologias e contradições usando apenas uma variável proposicional. Considere a tabela-verdade de $p \vee \neg p$ e $p \wedge \neg p$, abaixo.
2. $p \vee \neg p$ é sempre verdade - é uma tautologia.
3. e $p \wedge \neg p$ é sempre falsa - é uma contradição.

Tabela-Verdade

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Exemplo 1

1. Podemos construir exemplos de tautologias e contradições usando apenas uma variável proposicional. Considere a tabela-verdade de $p \vee \neg p$ e $p \wedge \neg p$, abaixo.
2. $p \vee \neg p$ é sempre verdade - é uma tautologia.
3. e $p \wedge \neg p$ é sempre falsa - é uma contradição.

Tabela-Verdade

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Equivalências Lógicas

Definição 2

1. As proposições compostas p e q são chamadas de *logicamente equivalentes* se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.
   - A notação $p \equiv q$ indica que p e q são logicamente equivalentes.
   - Proposições compostas que têm o mesmo valor-verdade em todos os possíveis casos são chamadas de *logicamente equivalentes*.

Exemplo

Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Equivalências Lógicas

Definição 2

1. As proposições compostas p e q são chamadas de *logicamente equivalentes* se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.
   - A notação $p \equiv q$ indica que p e q são logicamente equivalentes.
   - Proposições compostas que têm o mesmo valor-verdade em todos os possíveis casos são chamadas de *logicamente equivalentes*.

Exemplo

Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Tabela-Verdade

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Lei de Morgan

1. As Leis mostram como negar conjunções e como negar disjunções.
2. A negação de uma disjunção é formada tomando a conjunção das negações das proposições componentes.

Tabela-Verdade

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \end{array}}$$

$\longrightarrow$ Exemplo: Use a Lei de De Morgan para expressar as negações de: Miguel tem um celular e um laptop.

Lei de Morgan

1. As Leis mostram como negar conjunções e como negar disjunções.
2. A negação de uma disjunção é formada tomando a conjunção das negações das proposições componentes.

Tabela-Verdade

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \end{array}}$$

$\longrightarrow$ Exemplo: Use a Lei de De Morgan para expressar as negações de: Miguel tem um celular e um laptop.

Traduzindo sentenças

$p \wedge q$

Miguel tem um celular p Miguel tem um laptop q

negação

1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
2. Miguel não tem um celular ou não tem um laptop.

Traduzindo sentenças

$p \wedge q$

Miguel tem um celular p Miguel tem um laptop q

negação

1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
2. Miguel não tem um celular ou não tem um laptop.

Exmeplo

1. Mostre que $p \to q$ e $\neg p \vee q$ são logicamente equivalentes.
2. Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exmeplo

1. Mostre que $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ são logicamente equivalentes.
2. Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

1. **V** indica uma proposição composta que é sempre verdadeira, uma tautologia.
2. **F** indica uma proposição composta que é sempre falsa, uma contradição.

Equivalências	Nome
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$	Propriedade dos elementos neutros
$p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Propriedade dos elementos neutros

Definição

Extensão da Lei De Morgan

1. $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$
2. $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$

Lógica Formal

Definição 1

Seja p uma proposição. A *negação de p*, indicada por $\neg p$ (e também por $\bar{p}$), é a sentença
"Não é o caso de p".

• A proposição $\neg p$ é lida "*não p*" (não é p).
• O valor-verdade da negação de p, $\neg p$, é o oposto do valor-verdade de p.

Exemplo

1. p: Hoje é quarta.
2. A negação $\neg p$: Não é o caso de hoje ser quarta.
   Hoje não é quarta.

Tabela-Verdade

Síntese das proposições

“Quando”

p	$\neg p$
V	F
F	V

Operadores lógicos: Conectivos

Definição 2

1. Sejam p e q Proposições. A *conjunção* de p e q, indicada por $p \wedge q$, é a proposição "p e q".
2. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambas são verdadeiras, e falsa caso contrário.

O conectivo lógico e é representado pelo símbolo $\wedge$ e as proposições são representadas por letras.

Operadores lógicos: Conectivos

Exemplo

Encontre a conjunção das proposições p e q, em que p é: Hoje é sexta-feira, e q é: Hoje está chovendo.
Resposta:
A conjunção $p \wedge q$ dessas proposições é a proposição: Hoje é sexta-feira e está chovendo.

Essa proposição é verdadeira em uma sexta chuvosa e falsa em qualquer outro caso.
Linux é um sistema operacional e Java é uma linguagem de programação.

Conjunção

Podemos então apresentar a tabela com os valores lógicos de $p \wedge q$ para todos os valores lógicos possíveis dos elementos p e q.
Cada linha da tabela representa um possível valor lógico associado a cada uma das letras de proposição e apresenta o valor lógico resultante da expressão composta.

Tabela-verdade

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Definição 3

1. Sejam p e q proposições. A *disjunção* de p e q, indicada por $p \vee q$, é a proposição "p ou q".
2. A disjunção $p \vee q$ é falsa se p e q são ambas falsas, e verdadeiras em qualquer outro caso.

O conectivo lógico ou é representado pelo símbolo $\vee$.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção Exclusiva

Definição 4

1. Sejam p e q proposições. A *disjunção exclusiva* (ou *ou exclusiva*) de p e q, indicada por $p \oplus q$.
2. A disjunção $p \oplus q$ é verdadeira quando exatamente uma das duas for verdadeira e falsa nos outros casos.

O conectivo lógico ou (apenas) é representado pelo símbolo $\oplus$.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposição Condicional

Definição 5

1. Sejam p e q proposições. A *proposição Condicional* $p \to q$ é a proposição "*se p, então q*".
2. A condição $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira em qualquer outro caso.

Na condição $p \to q$, p é chamada de *hipótese* (ou antecedentes, ou premissa) e q é chamada de *conclusão* (ou consequência, ou consequênte).

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição Condicional

Exemplo 1

1. Se eu for eleito, então os impostos vão diminuir.
2. p :Se eu for eleito $\rightarrow$ q: então os impostos vão diminuir.

Exemplo

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição Condicional

Exemplo 2

1. Seja p a proposição “Maria aprende matemática discreta” e q a proposição “Maria vai conseguir um bom emprego”.
2. Expresse $p \to q$ em português.
3. Se Maria aprender matemática discreta, então ela vai conseguir um bom emprego.
4. Maria vai conseguir um bom emprego quando aprender matemática discreta.

Proposição Condicional

Exemplo 3

1. Se hoje é sexta-feira, então $2+3=5$.
2. Se hoje é sexta-feira, então $2+3=6$.

Exemplo

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição Condicional

Exemplo 3

1. Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$.
2. Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$.

Exemplo - programação

```
x=0.d0
do i=1,10
if (i.lt.7) then
write(*,*) i,x
x=x+0.1d0
endif
enddo
```

Proposição Bicondicional

Definição 6

1. Sejam p e q proposições. A *proposição Condicional* $p \leftrightarrow q$ é a proposição "*se e somente se*".
2. A condição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsa caso contrário.

1. Bicondicionais são também chamadas de *bi-implicações*.
2. Note que: $p \leftrightarrow q$ é exatamente o mesmo que $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposição Bicondicional

Exemplo 1

1. p: Você pode tomar o avião.
2. q: Você comprou uma passagem.
3. $p \leftrightarrow q$: Você pode tomar o avião se e somente se comprou uma passagem.

Proposição Compostas

Tabela-Verdade

1. Construa a tabela-verdade para a proposição composta:
2. $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Proposição Compostas

Exemplos

1. $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	v	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

Relembrando

Tabela-Verdade

p	Proposição	variável
q	Proposição	variável
$\neg q$	não é o caso de q	negativa de q
$\wedge$	e	Conjunção
$\vee$	ou	Disjunção
$\oplus$	ou exclusiva	Disjunção exclusiva
$\rightarrow$	se, então	Condicional
$\leftrightarrow$	se e somente se	Bicondicional

Prioridades

Operadores Lógicos

Operador	Prioridade
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Traduzindo sentenças

Operadores Lógicos

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Separando

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Traduzindo sentenças

Separando

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se você é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Separando (uma condição apenas!!! $\to$)

1. a: Você pode acessar a internet a partir deste câmpus
2. c: você é um expert em Ciência da Computação
3. $\neg f$: você não é novato *(negação)*. f: você é novato.
4. Conectivos:
   - somente se (se, então)-($\to$)
   - ou ($\vee$)

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$a \to (c \vee \neg f)$

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$a \rightarrow (c \vee \neg f)$

Traduzindo sentenças

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina somente se estudar bastante.

Como fica

$p \leftrightarrow q$

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina e em cálculo se prestar atenção na aula ou estudar muito em casa.

Como fica

$p \wedge q \vee r$

Traduzindo sentenças

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina somente se estudar bastante.

Como fica

$p \leftrightarrow q$

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina e em cálculo se prestar atenção na aula ou estudar muito em casa.

Como fica

$p \wedge q \vee r$

Traduzindo sentenças

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina somente se estudar bastante.

Como fica

$p \leftrightarrow q$

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina e em cálculo se prestar atenção na aula ou estudar muito em casa.

Como fica

$p \wedge q \vee r$

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$a \to (c \vee \neg f)$

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$a \rightarrow (c \vee \neg f)$

Lógica de Bit

Bit (binary digit - dígito binário): 0 e 1.

Tabela-Verdade

Valor – Verdade	Bit
V	1
F	0

Lógica de Bit

Bit (binary digit - dígito binário): 0 e 1.

Tabela-Verdade

Valor – Verdade	Bit
V	1
F	0

FIM