

Цифровой анализ изображений

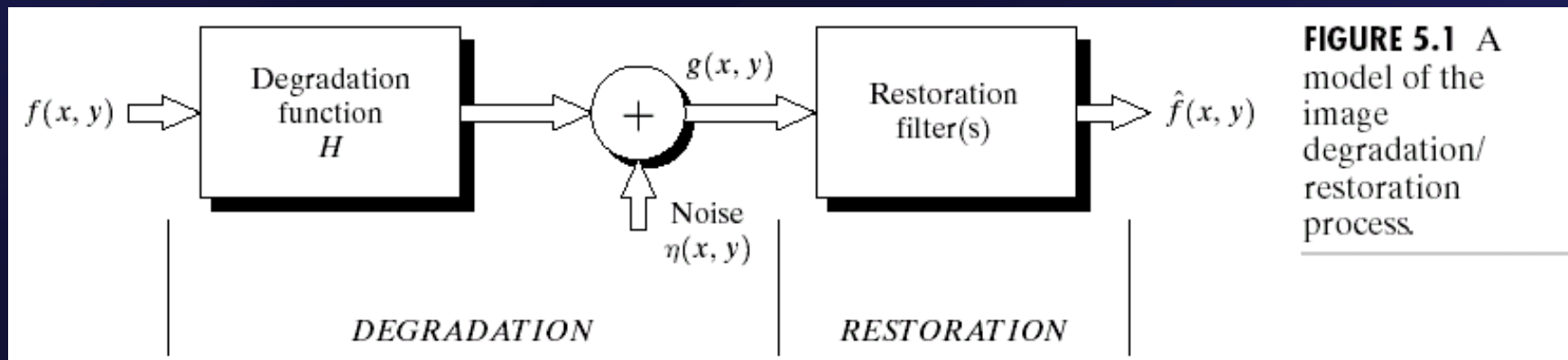
лекция 6

Улучшение изображений

Восстановление изображений

Восстановление изображений

- Цель восстановления изображений является восстановление деградированных / искаженных изображений до его исходного состояния и качества.
- Изменение это Улучшение изображения
 - » Восстановление и ухудшение изображения предполагает, что модель известна или может быть оценена.
 - » Оригинальное содержание и качество \neq Хорошо выглядят



Модель деградации изображения

- Модель деградации пространственно инвариантно

$$g(x, y) = \sum \sum h(x, y, m, n) f(m, n) + \eta(x, y)$$

- Пространственно-инвариантной модели деградации

$$g(x, y) = \sum \sum h(x - m, y - n) f(m, n) + \eta(x, y)$$

- » Представление частотной области

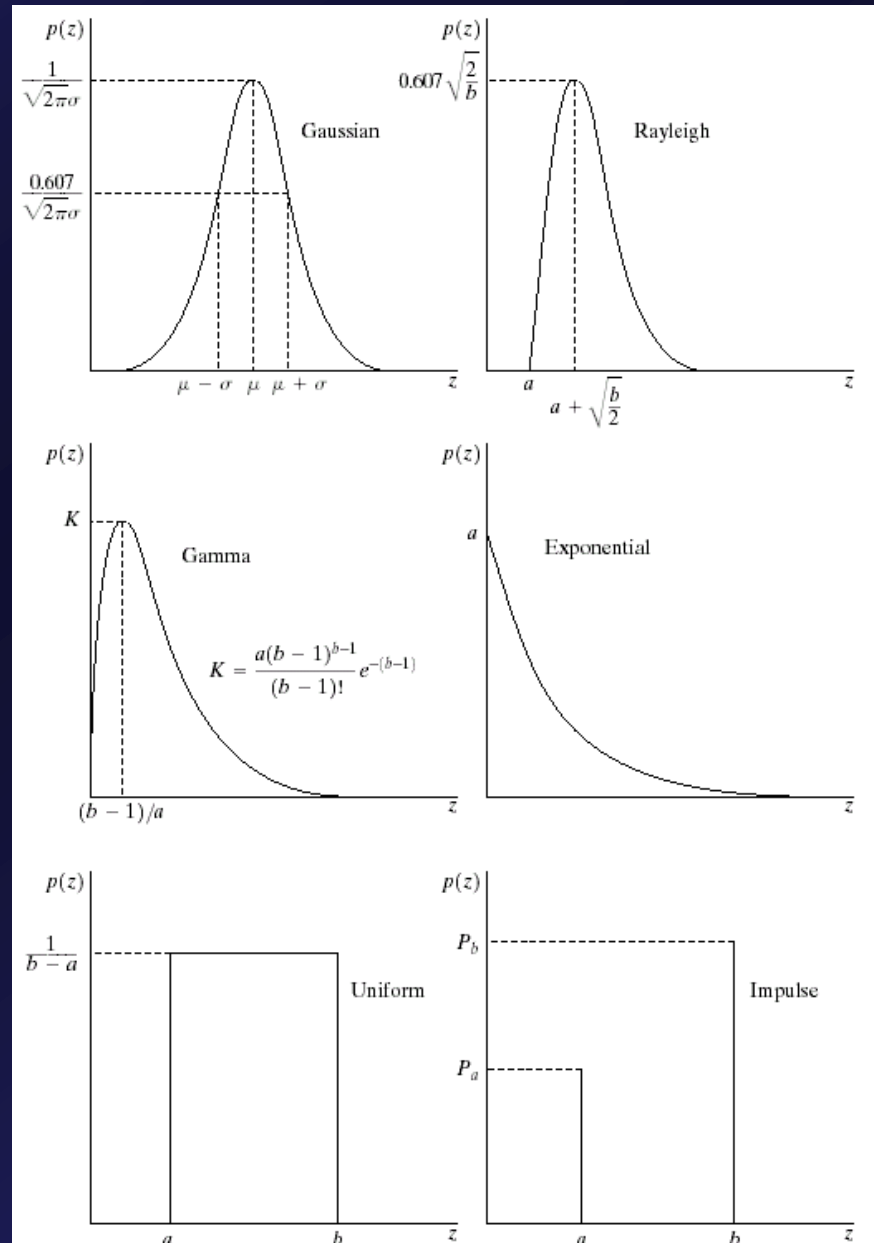
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

Шумы изображения

- Легкие искажения
- Электронные шумы
- Искажения поверхности отражения
- Искажения оптического пути

Модель шума

- Большинство типов шума моделируются как функции плотности вероятности известных
- Модель шума основана на понимании физики источников шума.
 - » Гауссовский: плохое освещение
 - » Рэля диапазон изображения
 - » Гамма, exp: лазерная томография
 - » Импульс: неисправен выключатель во время съемки,
 - » Равномерное является наименее используется.
- Параметры могут быть оценены на основе гистограммы на небольшой плоской области изображения



Шумы

- $I(x,y)$: пиксель изображения
- $n(x,y)$: пиксель шума (x,y)

$$I'(x, y) = I(x, y) + n(x, y)$$



Гауссовский шум

- Математическая простота, характерная для работы с моделями гауссова шума (также называемого нормальным шумом) как в пространствен- пространственной, так и в частотной области, обусловила широкое распространение этих моделей на практике.

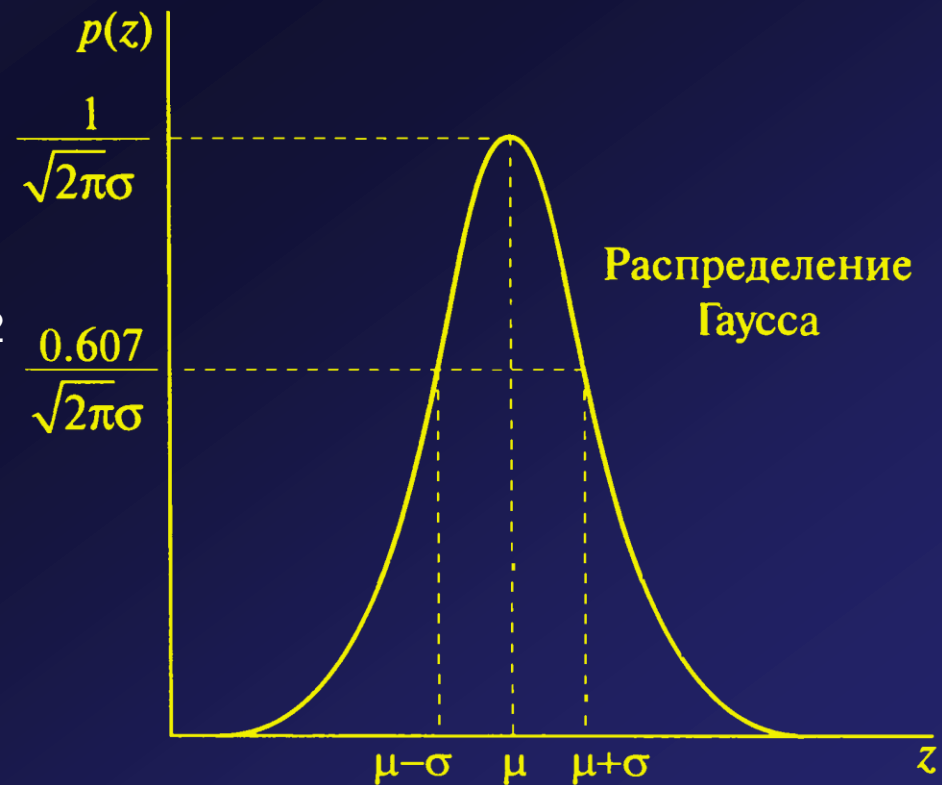
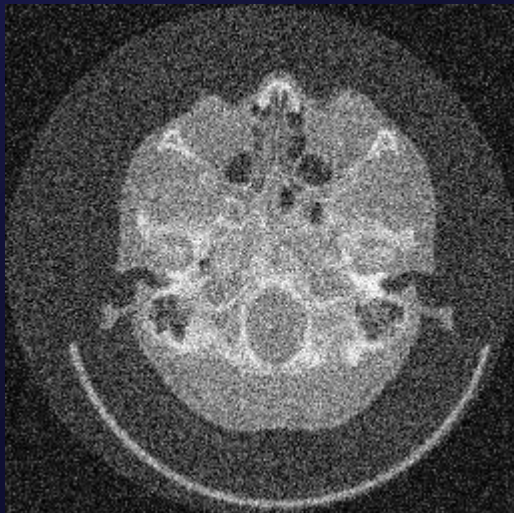
Плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Распределение

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^z p_z(v) dv$$

$$m=a, \sigma^2=b^2$$



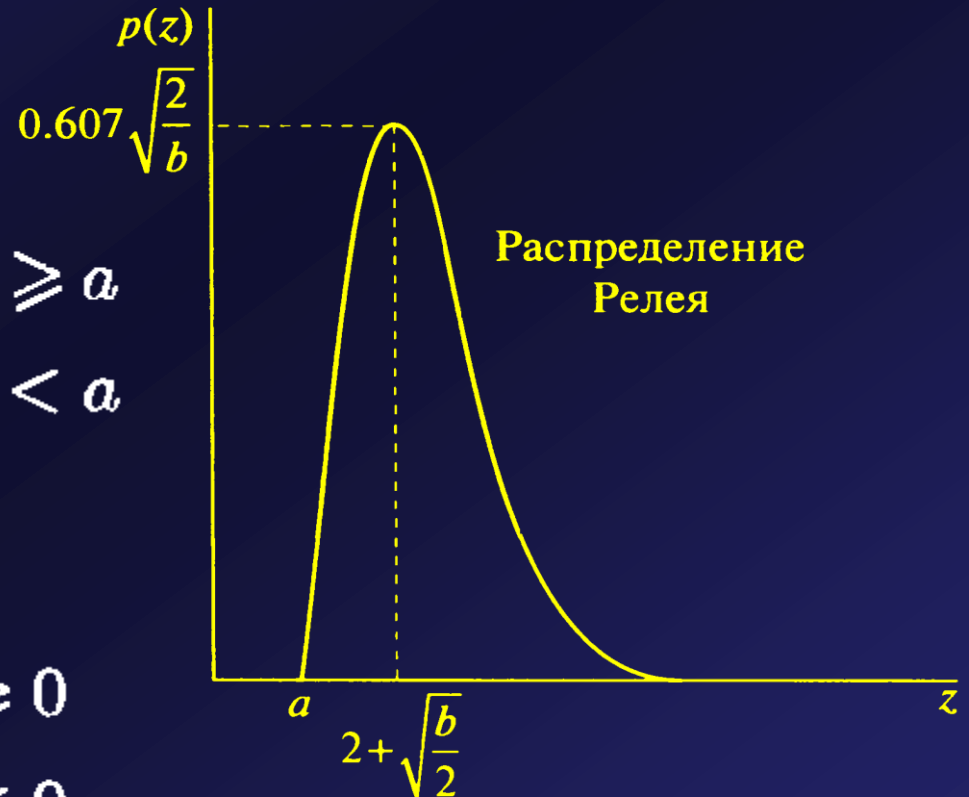
Шум Релея

Плотность

$$p_z(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b}, & z \geq a \\ 0, & z < a \end{cases}$$

Распределение

$$F_z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-az}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$



$$m = \frac{1}{a}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

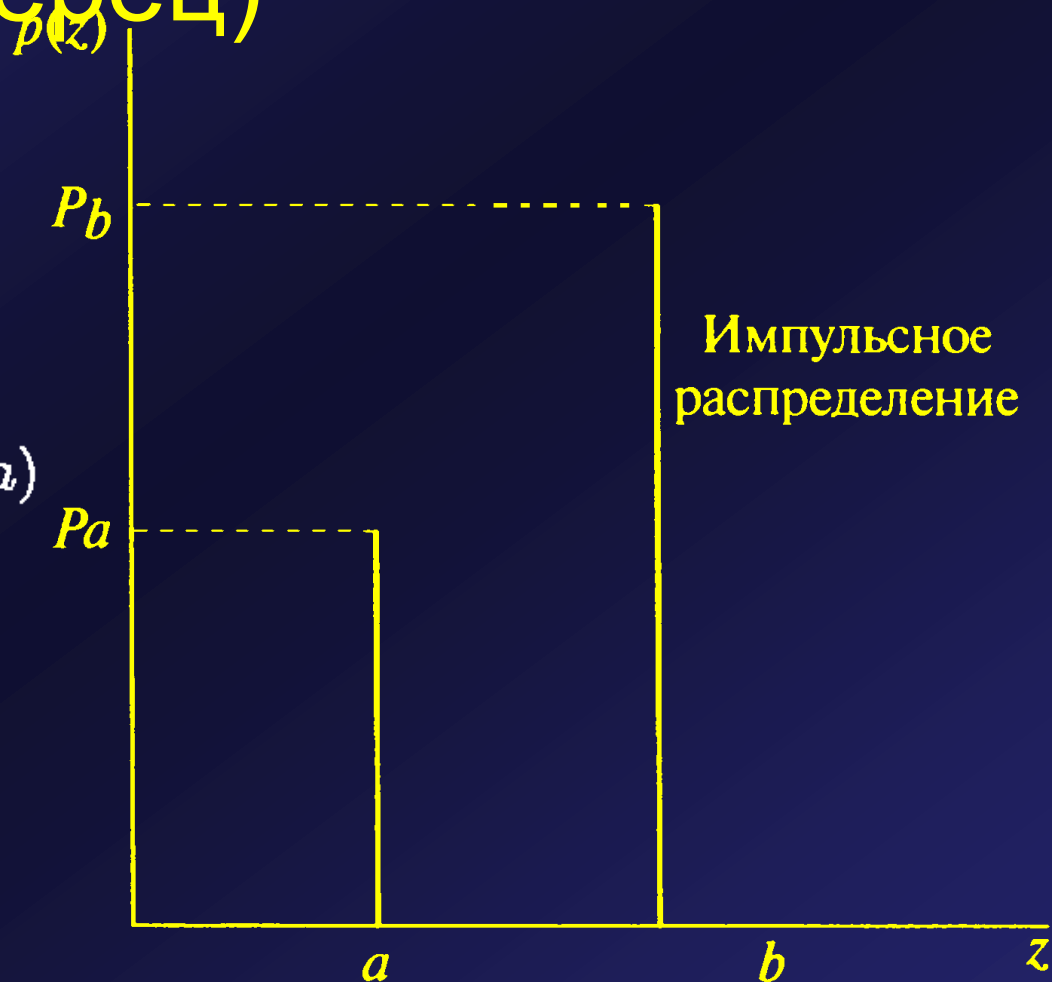
Импульсный шум (соль и перец)

Плотность

$$p_z(z) = \begin{cases} P_a, & z = a \\ P_b, & z = b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, (b > a)$$

Распределение

$$F_z = \begin{cases} 0, & z < a \\ P_a, & a \leq z \leq b \\ P_a + P_b, & z \geq b \end{cases}$$

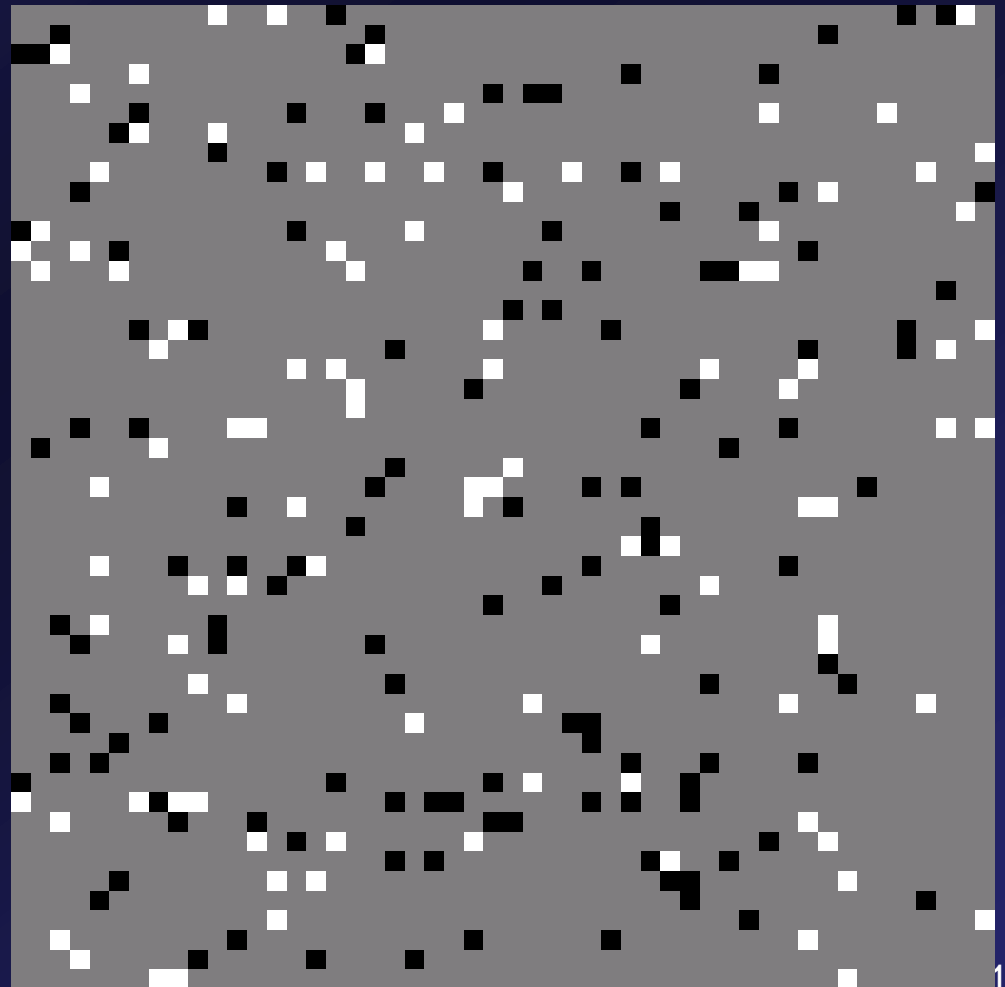


$$m = aP_a + bP_b$$

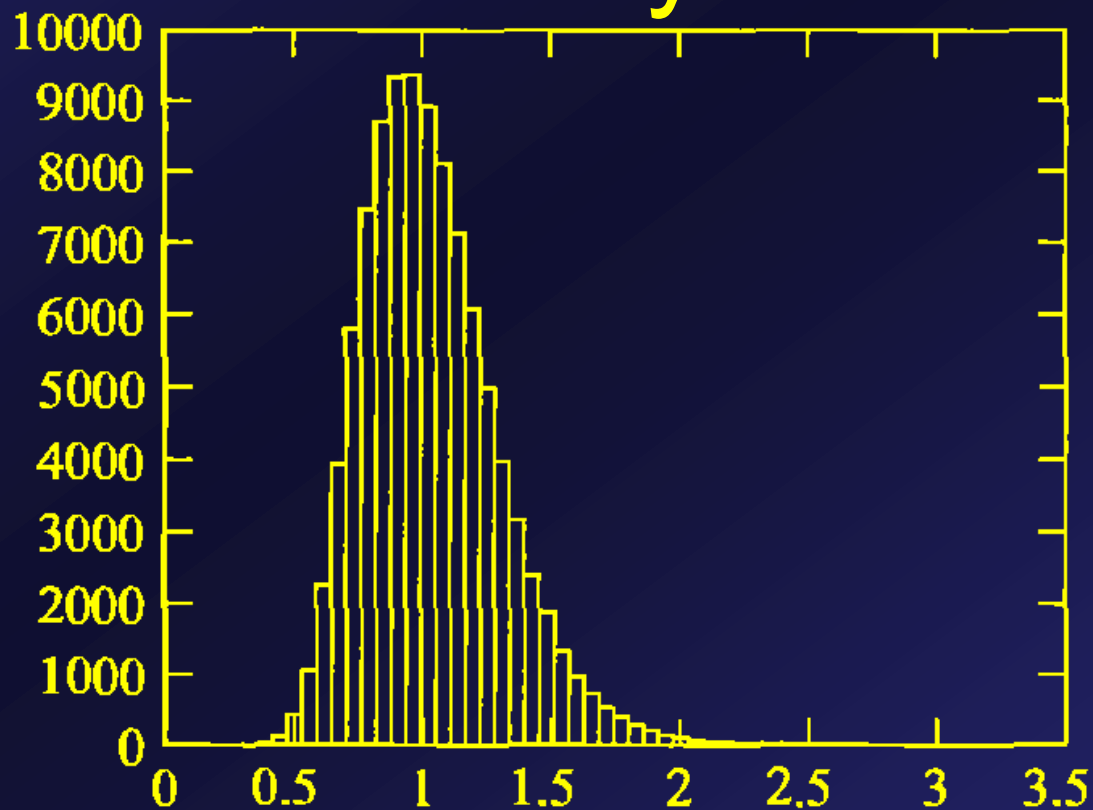
$$\sigma^2 = (a - m)^2 P_a + (b - m)^2 P_b$$

Импульсный шум (соль и перец)

Если $b > a$, то пиксель с яркостью b выглядит как светлая точка на изо- изображении. Пиксель с яркостью a выглядит, наоборот, как темная точка. Если ни одна из вероятностей не равна нулю, и в особенности если они приблизительно равны по величине, импульсный шум походит на крупитцы соли и перца. По этой причине импульсный шум называют также шумом типа «соль и перец».



Логарифмический шум



Плотность

$$p_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b z}} e^{-(z-a)^2 / 2b^2}, \quad z > 0$$

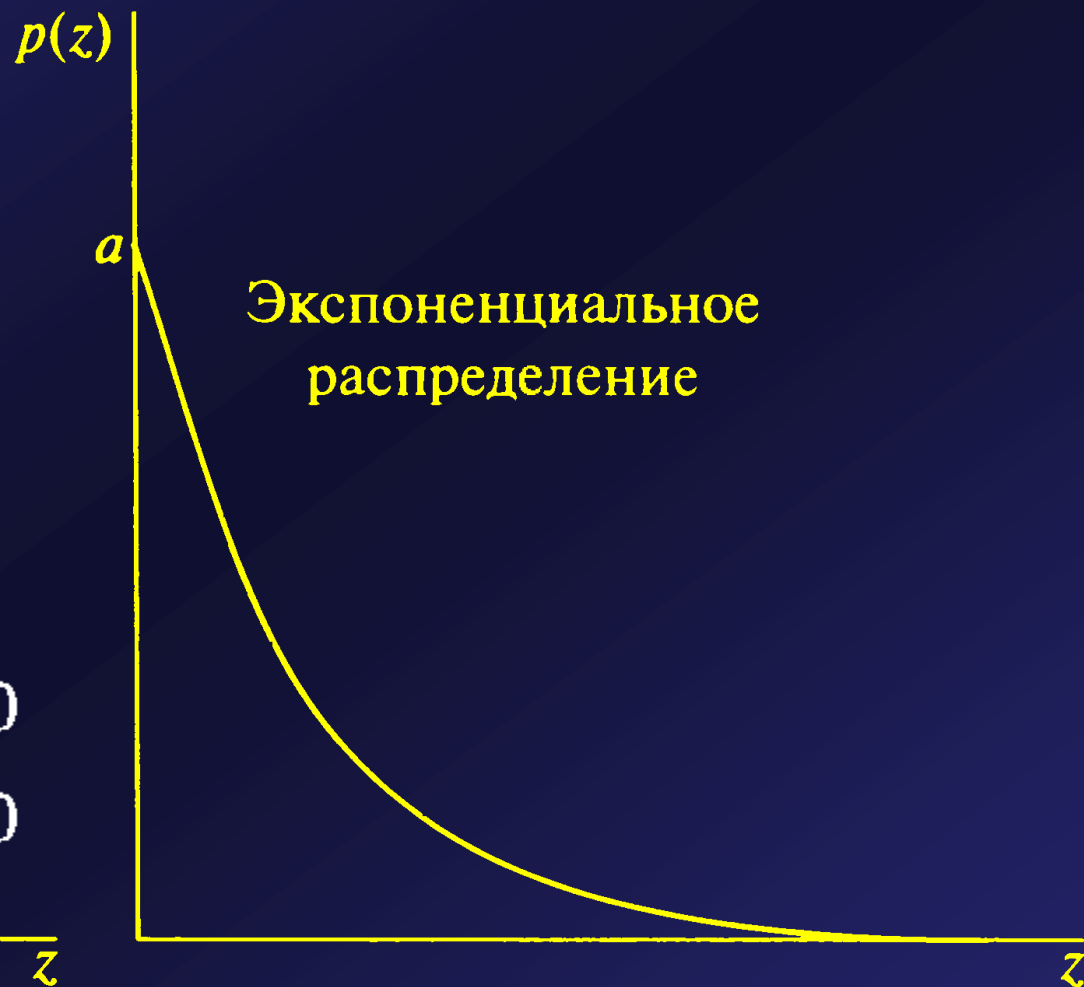
Распределение

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^z p_z(v) dv$$

$$m = e^{a+(b^2/2)},$$

$$\sigma^2 = \left[e^{b^2} - 1 \right] e^{2a+b^2}$$

Экспоненциальный шум



Плотность

$$p_z(z) = \begin{cases} ae^{-az}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Распределение

$$F_z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-az}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$$m = \frac{1}{a}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

Эрланга (гамма распределение)

$p(z)$

K

Гамма
распределение

$$K = \frac{a(b-1)^{b-1}}{(b-1)!} e^{-(b-1)}$$

$(b-1)/a$

z

Плотность

$$p_z(z) = \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az}, \quad z \geq 0$$

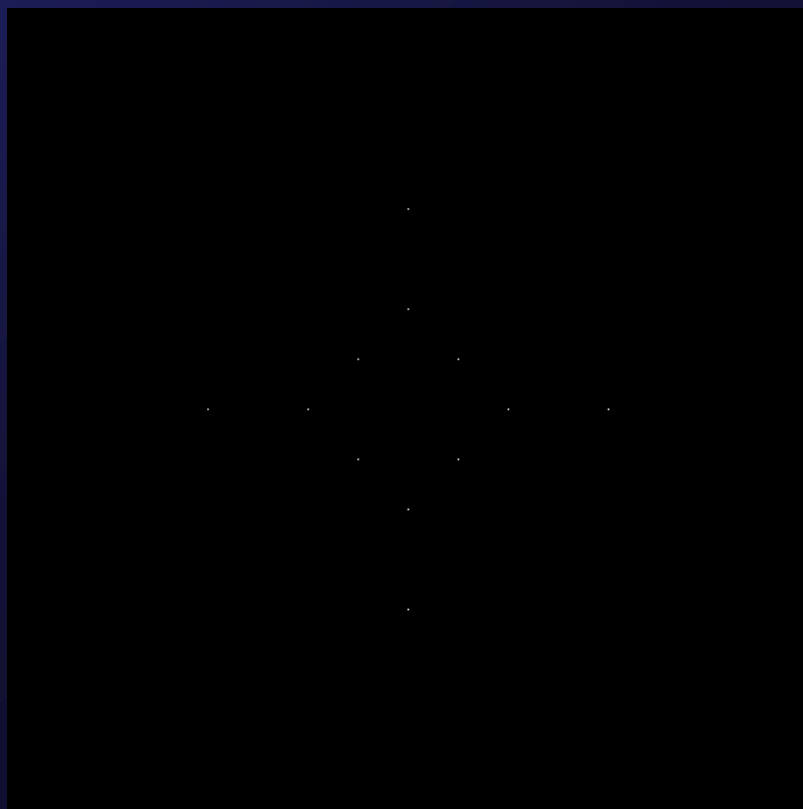
Распределение

$$F_z(z) = \left[1 - e^{-az} \sum_{n=0}^{b-1} \frac{(az)^n}{n!} \right], \quad z \geq 0$$

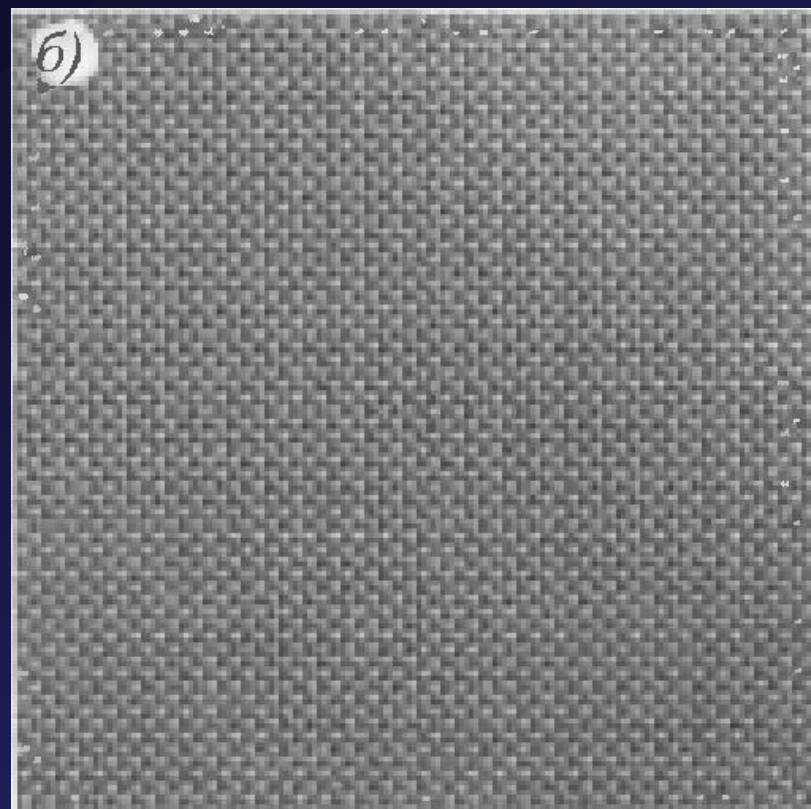
$$m = \frac{b}{a}, \quad \sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

Периодический шум

Спектр заданных импульсов

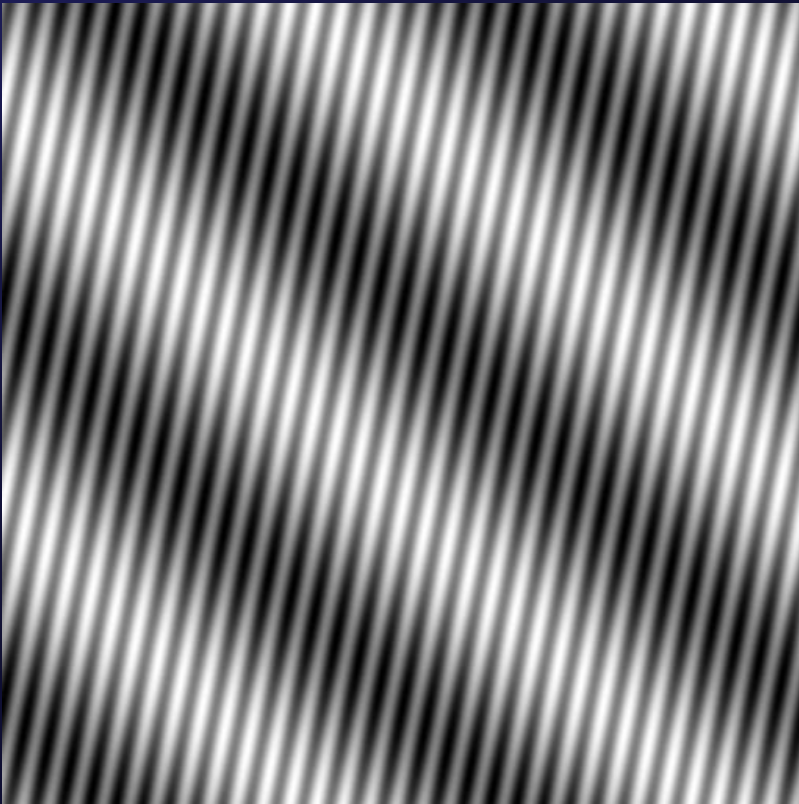


Соответствующий
синусовый шум

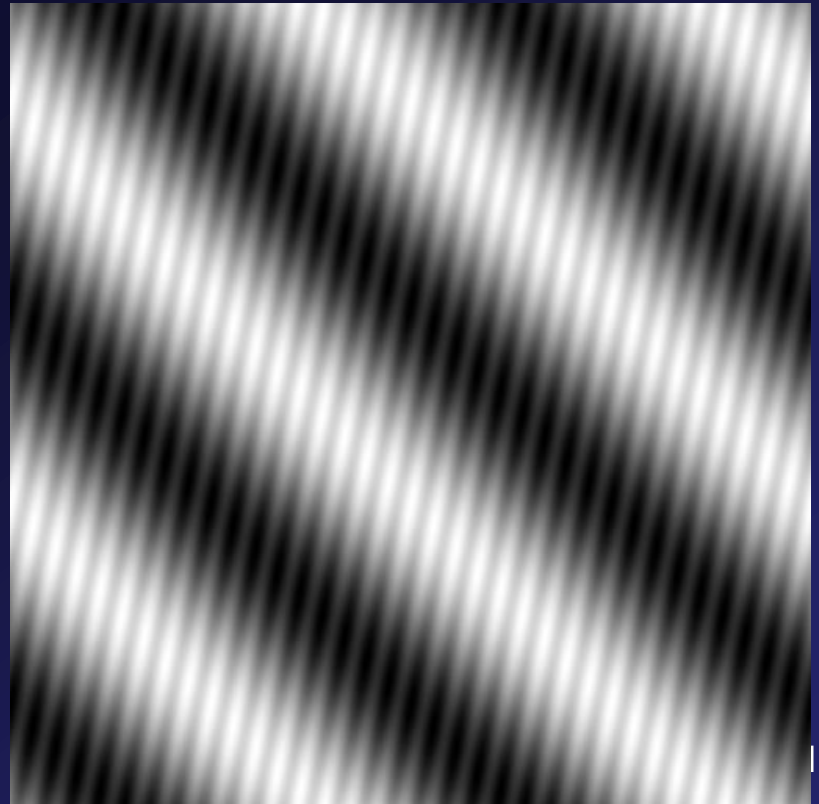


Периодический шум

Спектр заданных импульсов



Соответствующий
синусовый шум



Периодический шум

оценивание

Для оценивания гистограмма описывается центральными моментами

$$\mu_n = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - m)^n p(z_i), \quad m = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p(z_i).$$

Для нормированной гистограммы второй момент будет

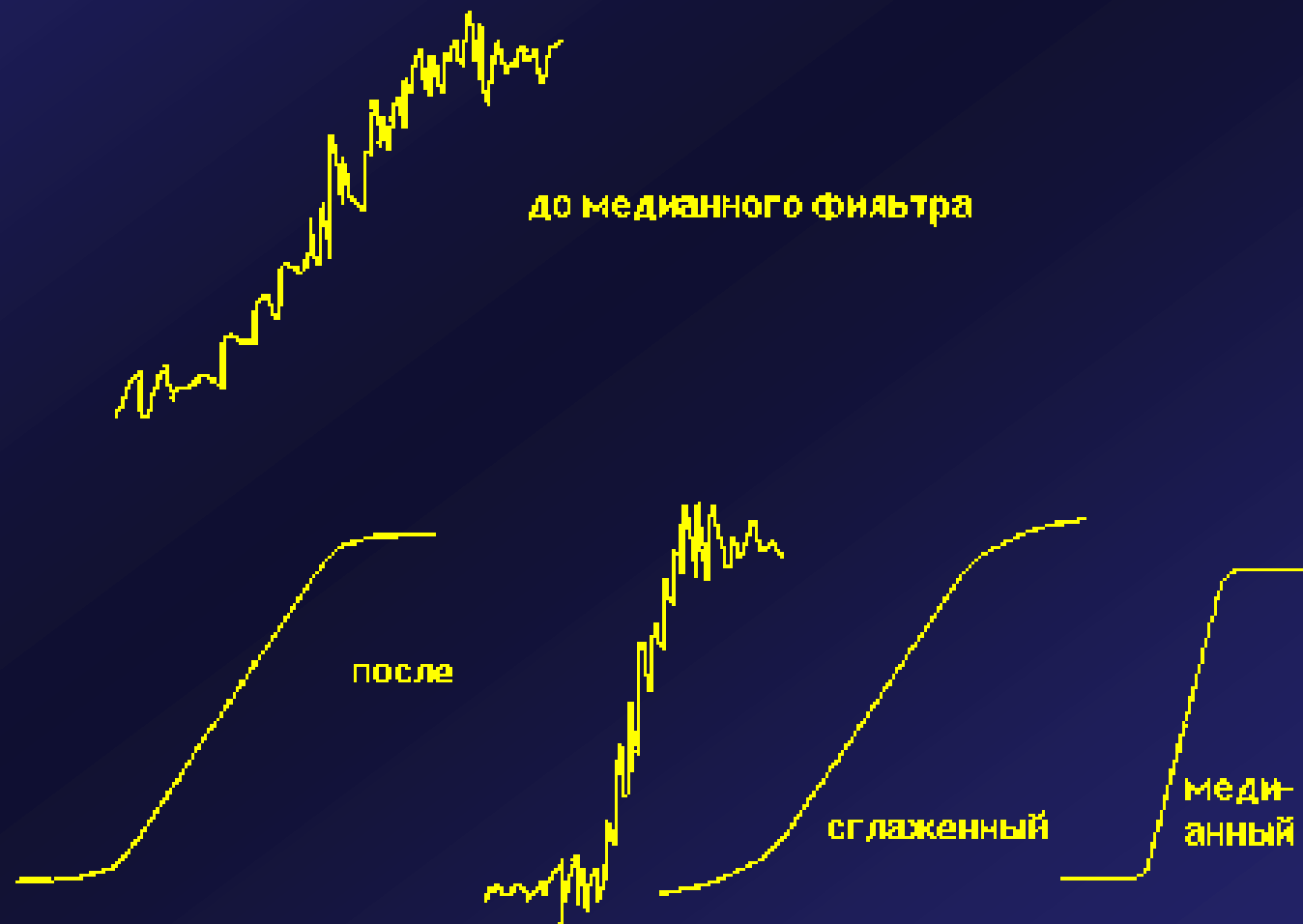
$$\mu_2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - m)^2 p(z_i)$$

Моменты характеризуют доминирующую форму гистограммы и по ним можно ее определить (например по среднему и дисперсии)

Фильтрация шумов

Имя фильтра	Уравнение
Арифметическое среднее	$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$
Геометрическое среднее	$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$
Гармоническое среднее	$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$
Контрагармоническое среднее	$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$
Медиана	$\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$
Максимум	$\hat{f}(x, y) = \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$
Минимум	$\hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$
Срединная точка	$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$
α -усеченное среднее	$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn-d} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$

Примеры обработки сигнала фильтром



Примеры обработки сигнала фильтром

а)



б)



в)



г)



д)



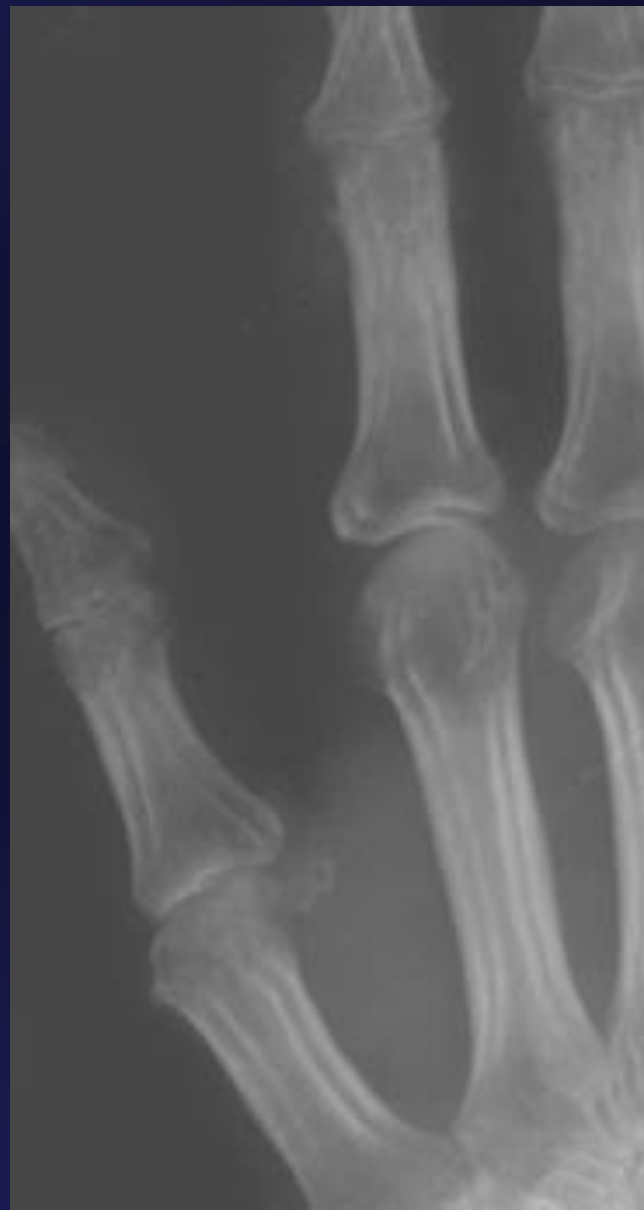
е)



Примеры фильтрации изображения гистологического препарата: а) исходное изображение, б) изображение с промоделированным импульсным шумом, в) обработка с преобразованием Фурье, г) Подчеркивание границ, д) медианная фильтрация, е) Пороговый метод подавления шума.

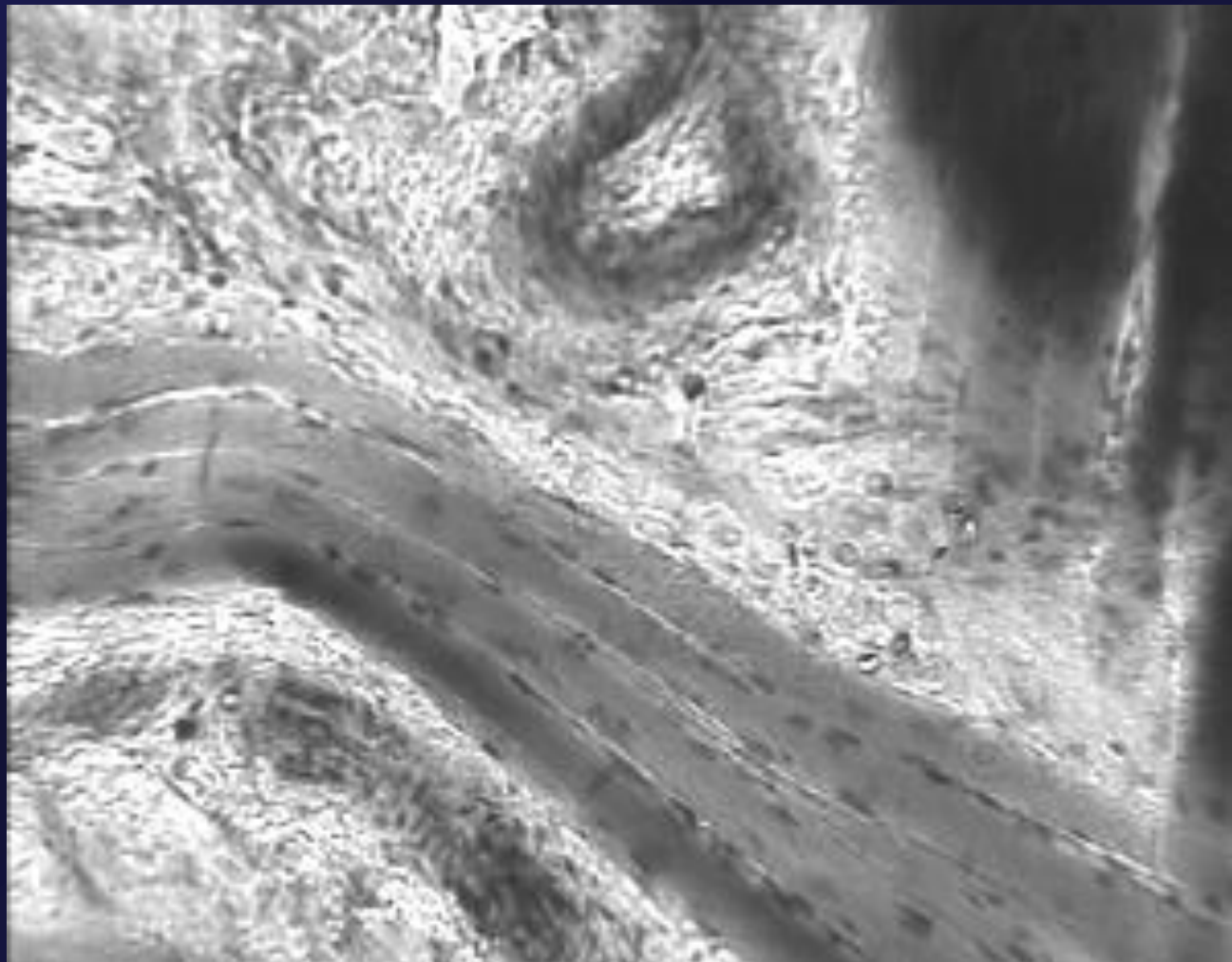
Примеры шумов на мед. изображениях

нечеткие
границы в
рентгеновском
снимке

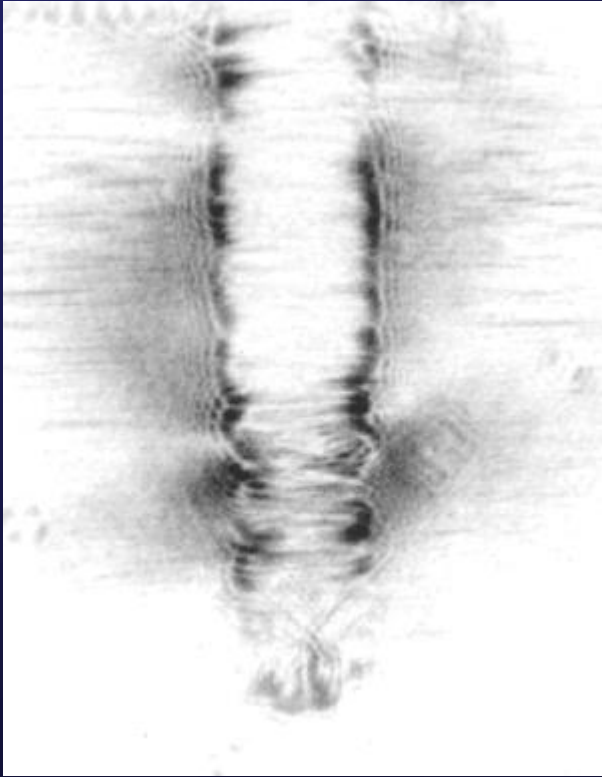


Примеры шумов на мед. изображениях

Гистологическ
ий препарат в
верхнем
левом угле
артефакт —
следы ноже
микротом.

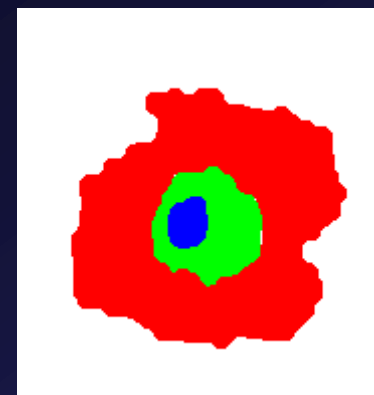
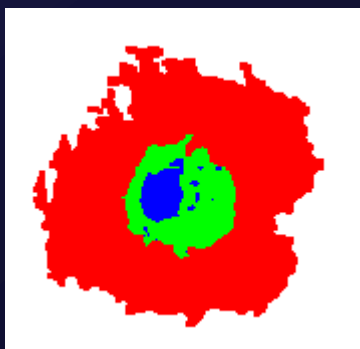
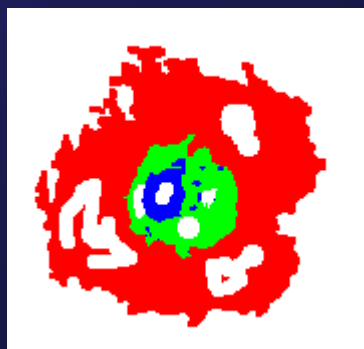


Примеры шумов на мед. изображениях



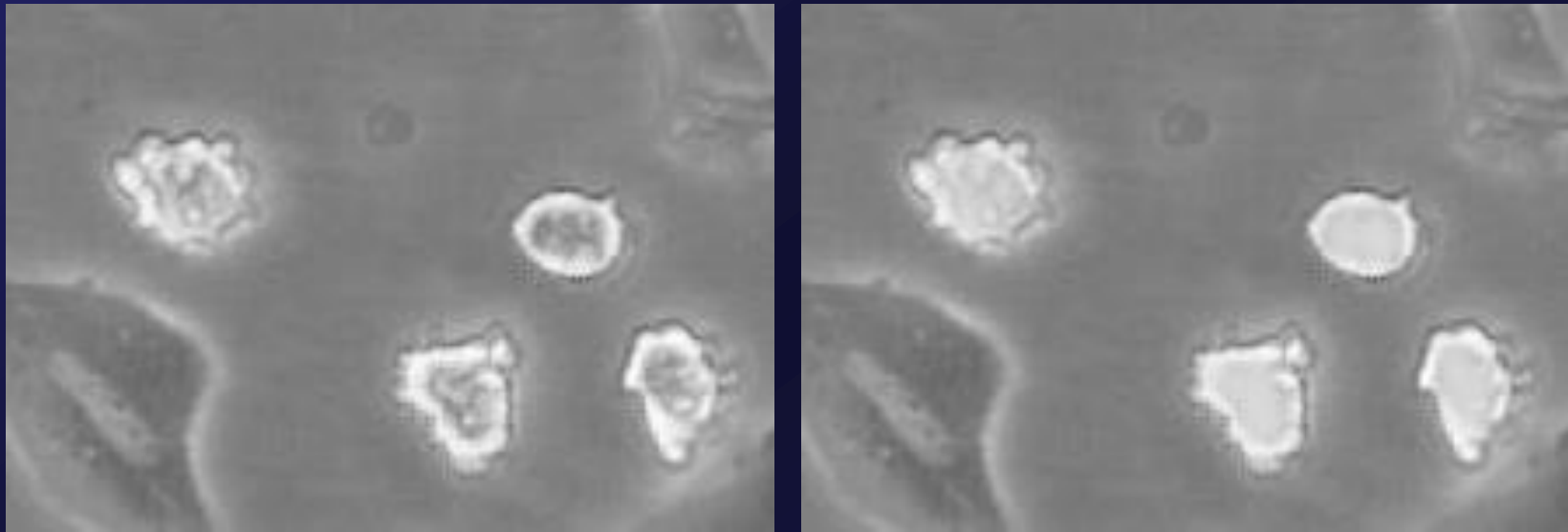
тепловое изображение раздражения после использования
стоматологического шпихта: а) с правильными порогами
ввода, б) с неправильными порогами ввода

Примеры шумов на мед. изображениях



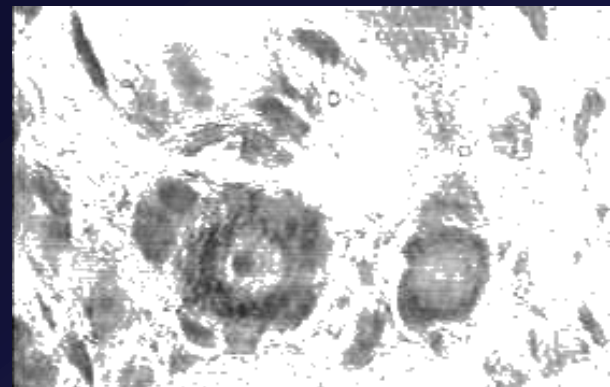
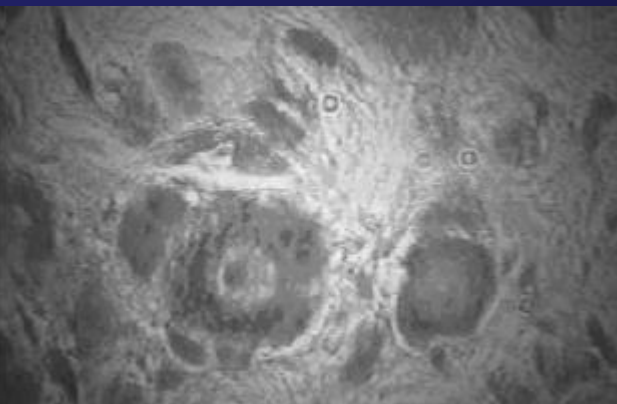
Геометрические и топологические искажения

Примеры шумов на мед. изображениях



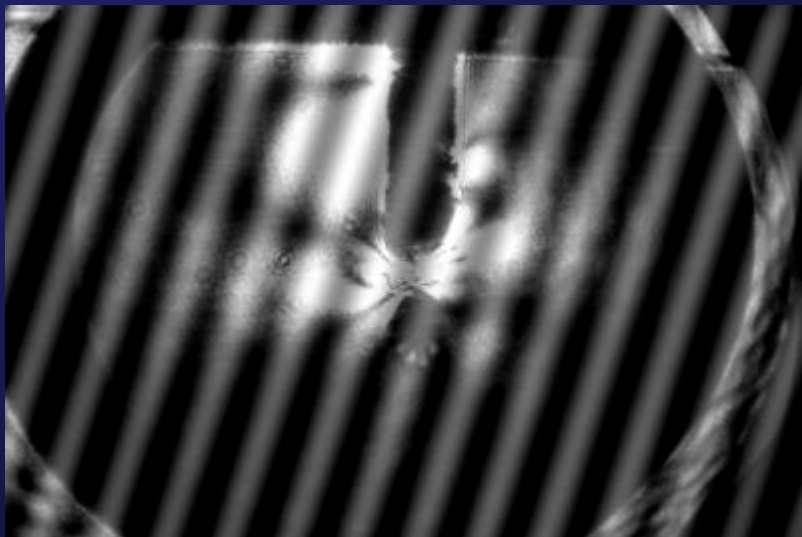
Заполнение впадин по яркости на изображении клеток
полученных методом темного поля

Примеры шумов на мед. изображениях



Определение фона на изображении нервной ткани а) исходное изображение, б) полученный фон изображения в) изображение после теневой коррекции.

Примеры шумов на мед. изображениях



Синусоидальные шумы, возникающие от помех в электрической сети на тепловом изображении стоматологического штифта и скорректированное изображение частотной фильтрацией

Примеры шумов на мед. изображениях



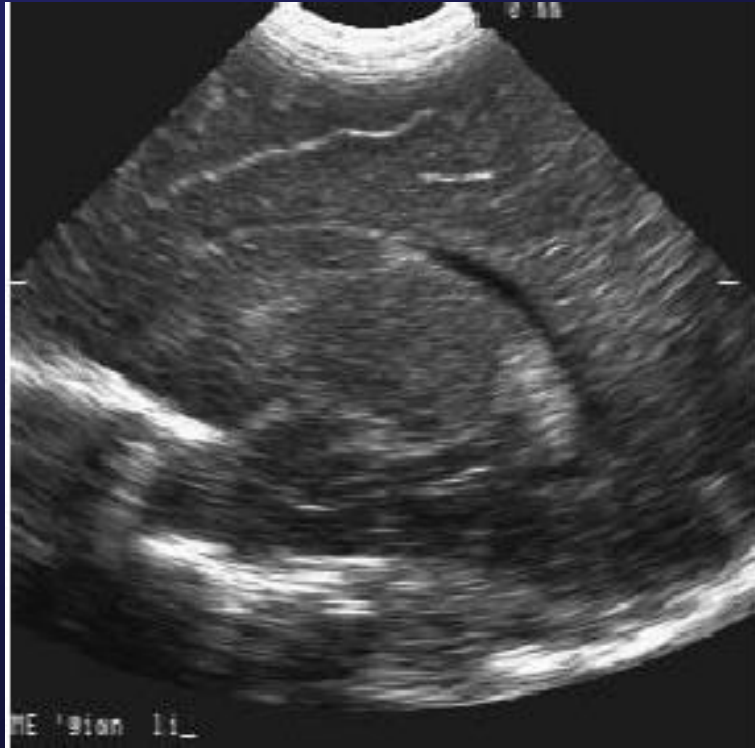
а)



б)

Пример вейвлет-фильтрации ультразвукового изображения. а) оригинальное изображение с шумами имеющими структуру дуг, б) профильтрованное изображение.

Примеры шумов на мед. изображениях



а)



б)

Пример вейвлет-фильтрации ультразвукового изображения. а) оригинальное изображение с шумами имеющими структуру дуг, б) профильтрованное изображение.

Производная и среднее изображения

Определения

- Производные: Скорость изменения
 - » Скорость является изменением расстояния
 - » Ускорение является изменением скорости
- Среднее
 - » деление суммы значений N в N

Производная

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x) = f_x$$

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ speed} \quad a = \frac{dv}{dt} \text{ acceleration}$$

Пример

$$y = x^2 + x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4x^3$$

$$y = \sin x + e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + (-1)e^{-x}$$

Дискретная производная

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x - 1)}{1} = f'(x)$$

$$\frac{df}{dx} = f(x) - f(x - 1) = f'(x)$$

Дискретная производная

Конечные разности

$$\frac{df}{dx} = f(x) - f(x-1) = f'(x)$$

Разница слева

$$\frac{df}{dx} = f(x) - f(x+1) = f'(x)$$

Разница справа

$$\frac{df}{dx} = f(x+1) - f(x-1) = f'(x)$$

Равномерная разница

Пример

$f(x) =$	10	15	10	10	25	20	20	20
$f'(x) =$	0	5	-5	0	15	-5	0	0
$f''(x) =$	0	5	-10	5	15	20	5	0

Маска производной

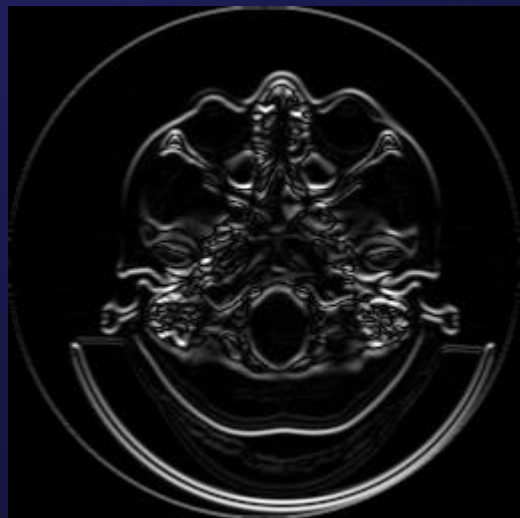
слева $[-1 \ 1]$

справа $[1 \ -1]$

взвешенная $[-1 \ 0 \ 1]$

Пример

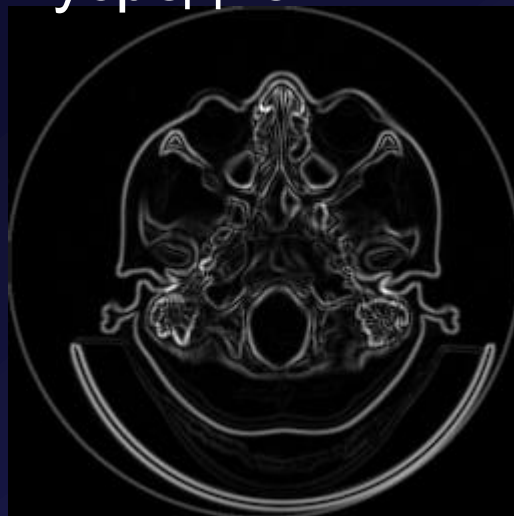
вертикальный



горизонтальный



усредненный



Производная в двумерном пространстве

функция

$$f(x, y)$$

Вектор градиента

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Амплитуда градиента

$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Направление градиента

$$\theta = \tan^{-1} \frac{f_x}{f_y}$$

Производная изображения

Маска производной $f_x \Rightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $f_y \Rightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$I_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Производная изображения

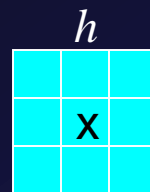
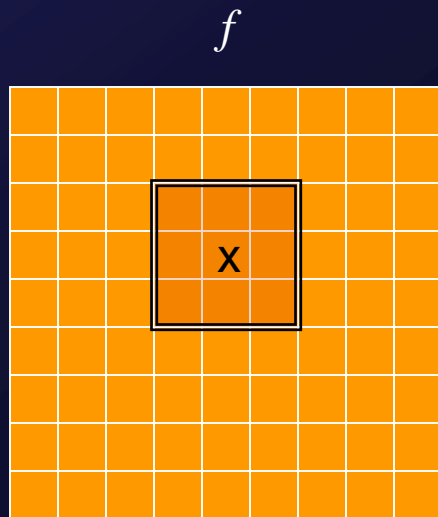
$$I = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$I_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

КОНВОЛЮЦИЯ

обновление

$$\begin{aligned} f * h = & f(x-1, y-1)h(-1,-1) + f(x, y-1)h(0,-1) + f(x+1, y-1)h(1,-1) + \\ & f(x-1, y)h(-1,0) + f(x, y)h(0,0) + f(x+1, y)h(1,0) \\ & f(x-1, y+1)h(-1,1) + f(x, y+1)h(0,1) + f(x+1, y+1)h(1,1) \end{aligned}$$



$$f * h = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 f(x-i, y-i)h(i, j)$$

Усреднение

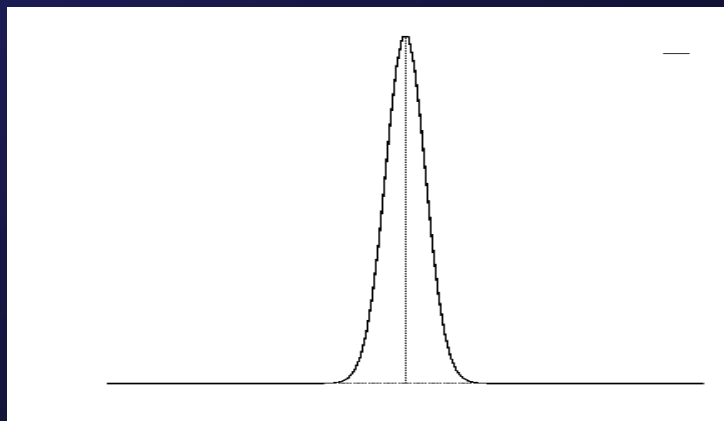
- Среднее

$$I = \frac{I_1 + I_2 + \dots I_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n}$$

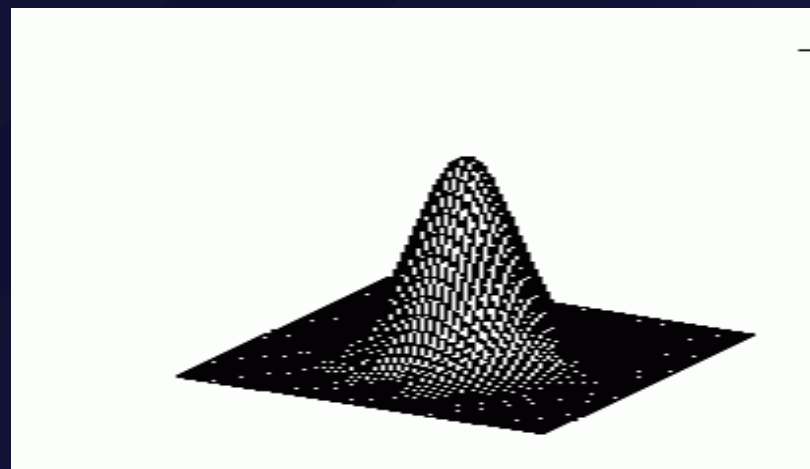
- Взвешенное среднее

$$I = \frac{w_1 I_1 + w_2 I_2 + \dots + w_n I_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i I_i}{n}$$

Фильтр Гаусса



$$g(x) = e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$



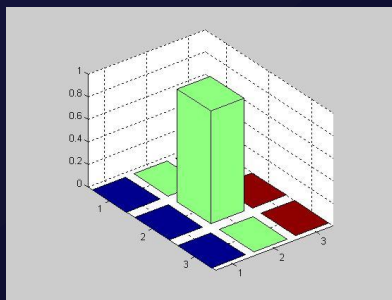
$$g(x, y) = e^{\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} .011 & .13 & .6 & 1 & .6 & .13 & .011 \end{bmatrix}$$

Свойства Гаусса

- Наиболее распространенные естественной моделью
- Гладкая функция, она имеет бесконечное число производных
- Преобразование Фурье гауссовых является гауссовым.
- Свертывание гауссианом с самим собой является гауссовским.
- Есть матрицы, которые выполняют Гауссовскую фильтрацию.

Пример фильтрации



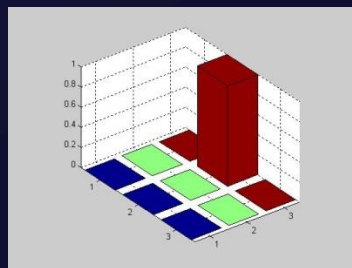
*

0	0	0
0	1	0
0	0	0

=



Пример фильтрации



*

0	0	0
0	0	1
0	0	0

=



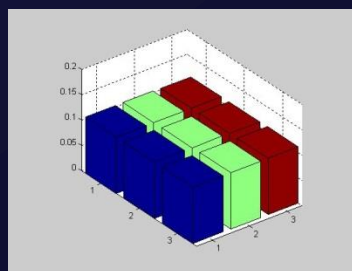
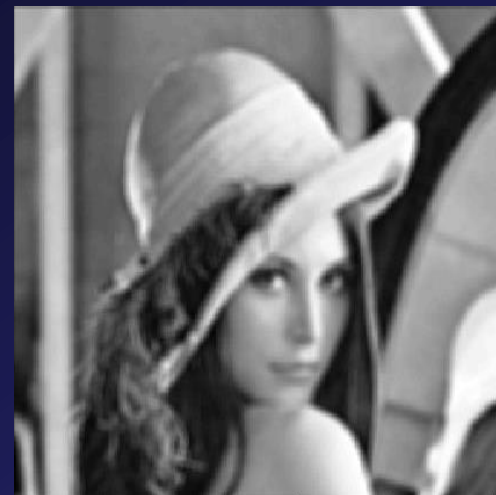
Пример фильтрации



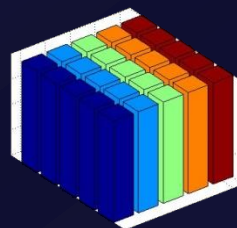
$\ast \frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

=



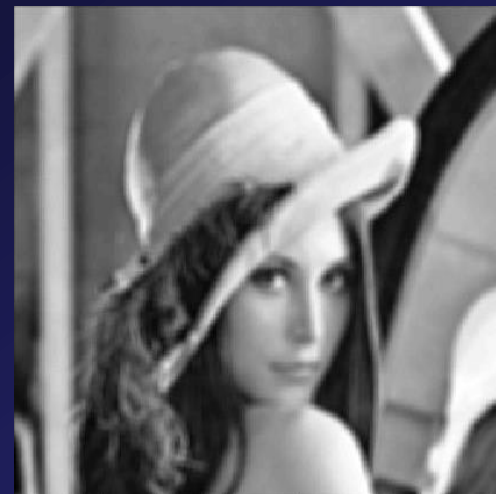
Пример фильтрации



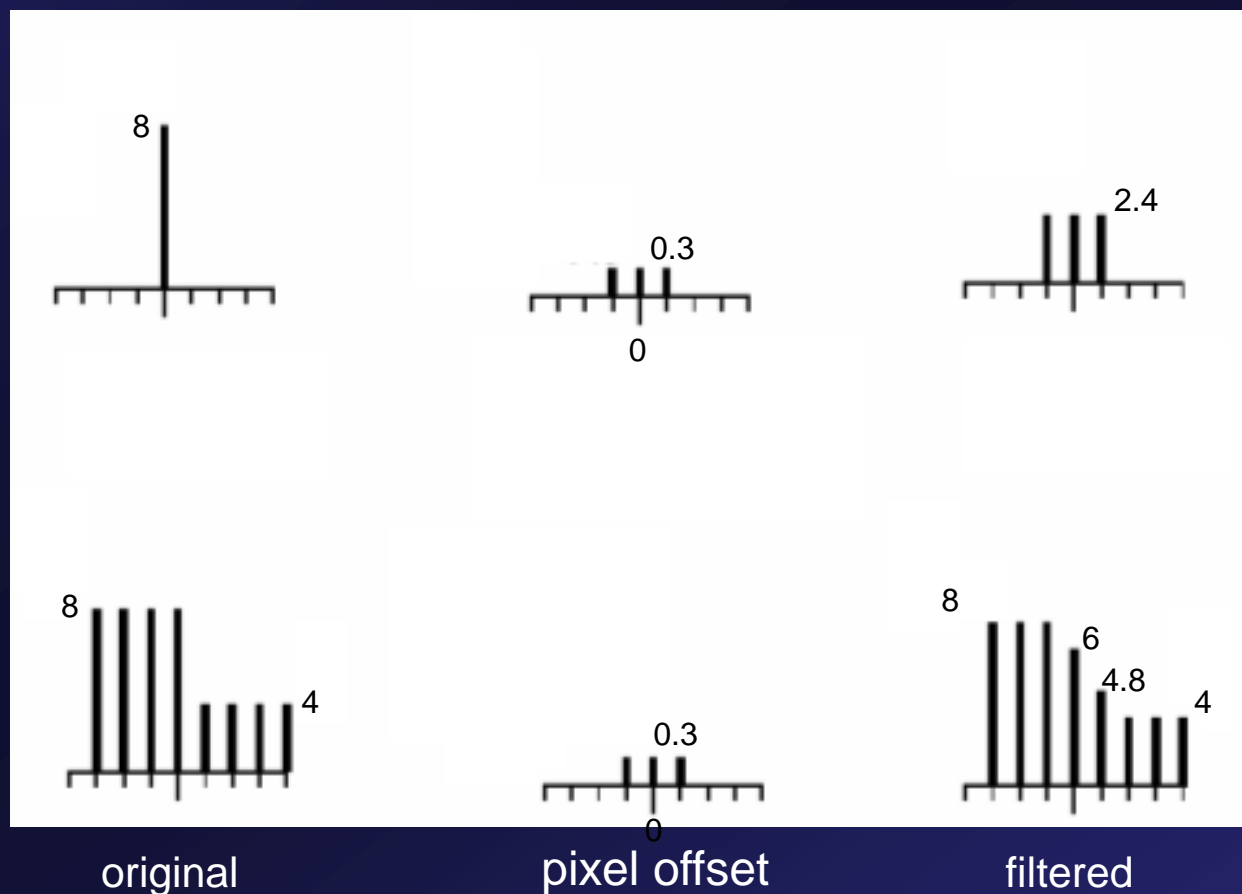
$\ast \frac{1}{25}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$=$



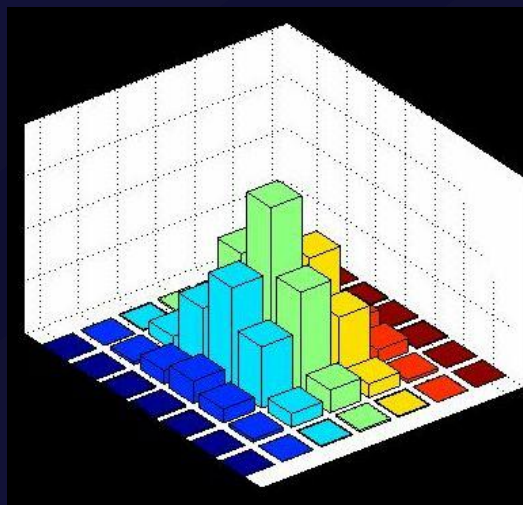
Примеры сглаживания



Гауссовская фильтрация



*



=



Фильтр Гаусса и сглаживание

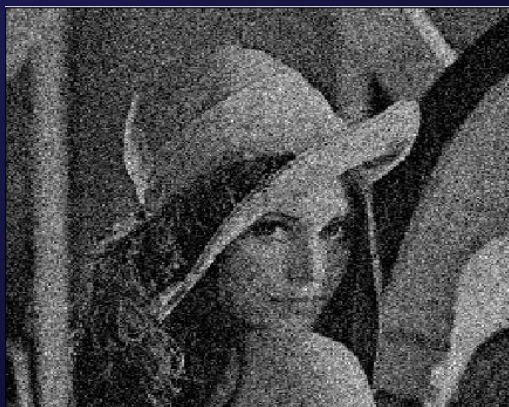


Фильтр Гаусса



Сглаживание усреднением

Фильтры против шуммов



Гауссовский шум



усреднение



Гауссовское сглаживание

Фильтры против шумов



Шум – соль и перец



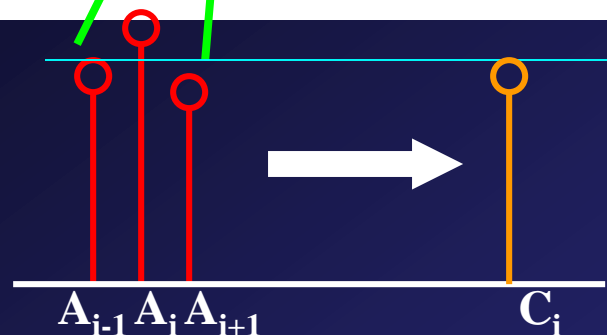
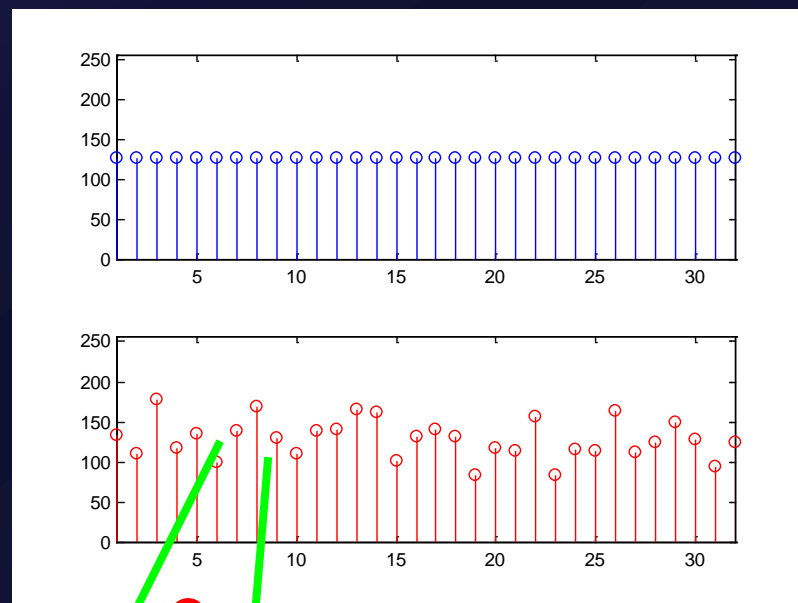
После усреднения



Гауссовское сглаживание

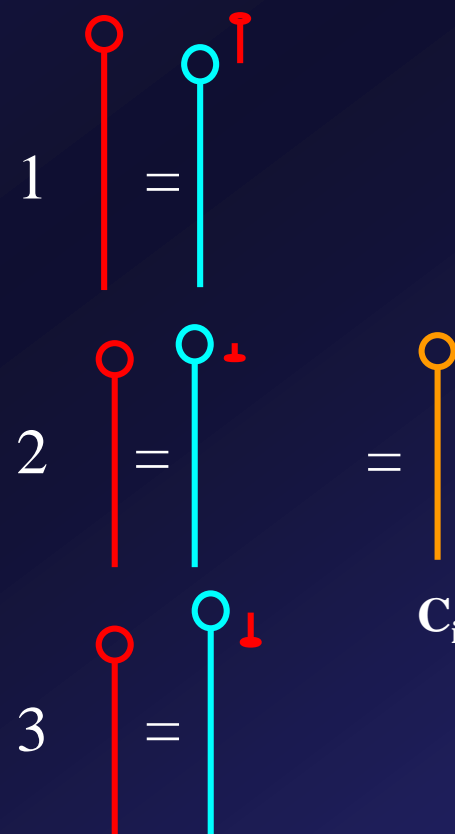
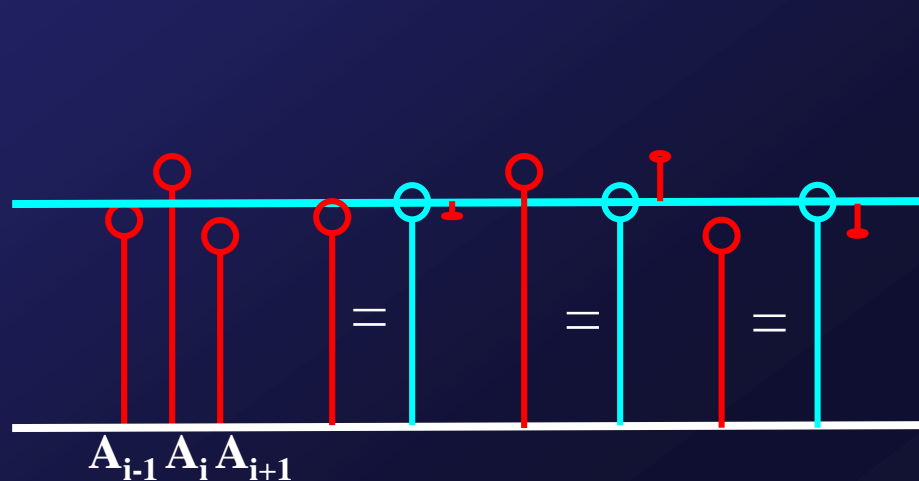
Удаление шума - медиана

- Как мы уменьшить шум без усреднения?
- Рассмотрим однородную 1-D изображения A и добавить шум.
- Сосредоточьтесь на окружение пикселя.
- Нелинейный оператор?



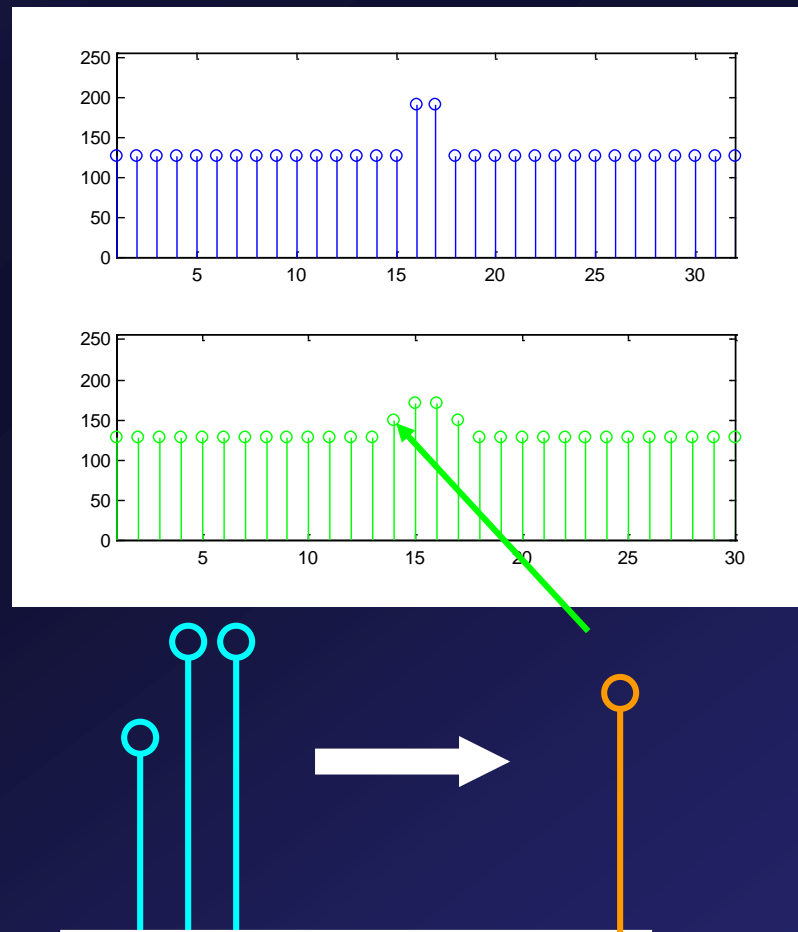
Median filter!

Удаление шума - медиана



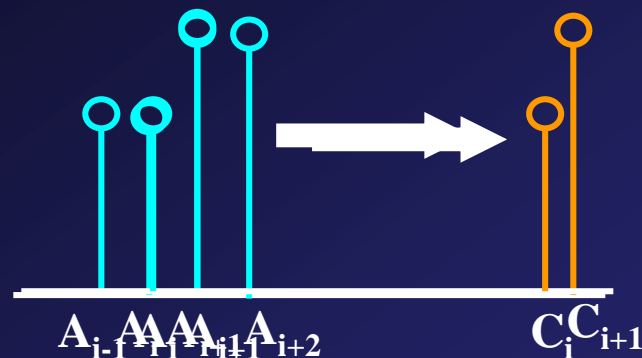
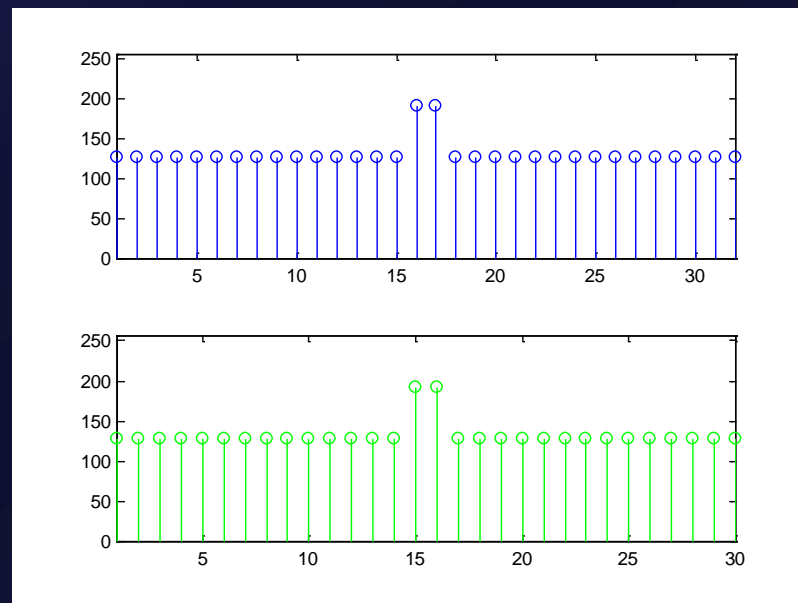
Удаление шума - медиана

- Рассмотрим однородную 1-D изображения A с ступенчатой функции.
- Функция Шаг соответствует прекрасную изображения детали сухой как край.
- Фильтр низких частот 'размывает' край.



Удаление шума - медиана

- Рассмотрим однородную 1-D изображения A с ступенчатой функции.
- Функция Шаг соответствует прекрасную изображения детали сухой как край.
- Фильтр низких частот 'размывает' край.



Медиана, окружение

- Все пиксели могут быть заменены окрестности медиан путем свертки 1-D изображения A с медианным фильтром B дать улучшенное изображение C .

$$C = A * B$$

$$B = [B_1 \quad B_2 \quad B_3]$$

$$C_i = \text{median}\{A_{i-1} \times B_1, A_i \times B_2, A_{i+1} \times B_3\}$$

$$B = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$C_i = \text{median}\{A_{i-1}, A_i, A_{i+1}\}$$

Оператор Медианы

- Выполняется в двухмерном пространстве.

$$C_{k,l} = \operatorname{median}_{i=k:k+M-1, j=l:l+N-1} \{A_{i,j} \times B_{i-k+1, j-l+1}\}$$
$$B_{i,j} = 1 \text{ for all } i,j$$

Уменьшение шумов

Original



нискочастотный

Low-pass



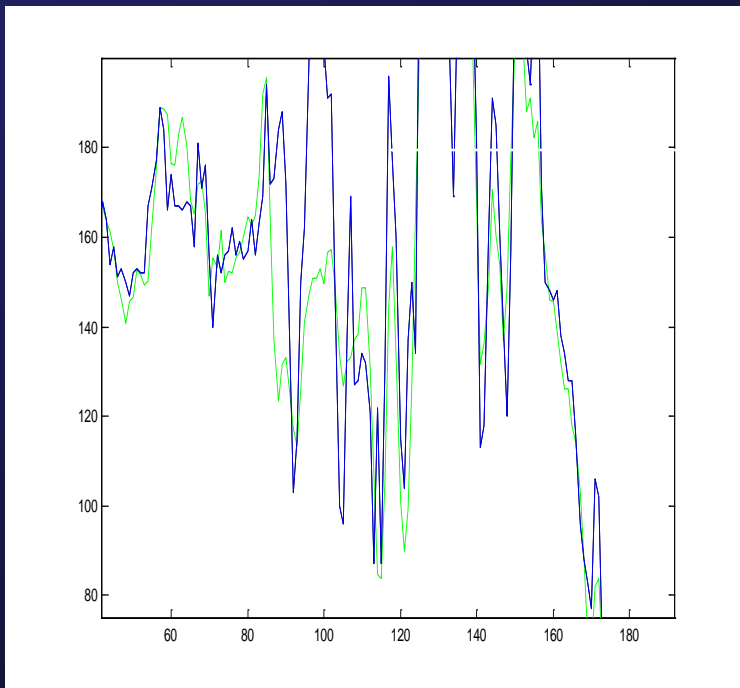
медиана

Median

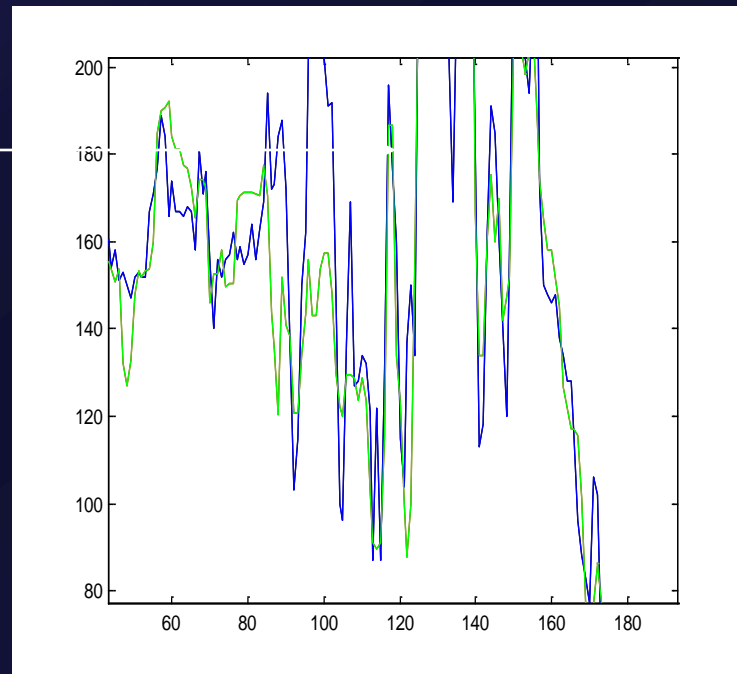


Уменьшение шумов

Low-pass



Median



- Низкочастотный: мелкие детали сглажены путем усреднения
- Медиана: мелкие детали удалены после фильтрации

LSI модель

- Motion Blur
- Из-за камеры панорамирования или быстром движении

$$h(i, j) = \begin{cases} 1 & ai + bj = 0, i_{\min} \leq i \leq i_{\max} \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

- Атмосферной турбулентности размытие
- Из-за долгого времени экспозиции через атмосферу

$$h(i, j) = K \cdot \exp\left(-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2}\right)$$

» Hufnagel and Stanley

$$h(i, j) = \exp\left(-k \cdot (i^2 + j^2)^{5/6}\right)$$

- Uniform out-of-focus blur:

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & i^2 + j^2 \leq R^2 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

- Uniform 2D Blur

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & -L/2 \leq i, j \leq L/2 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

Турбулентность Размытие Примеры

$$h(i, j) = \exp\left(-k \cdot (i^2 + j^2)^{5/6}\right)$$

a	b
c	d

FIGURE 5.25

Illustration of the
atmospheric
turbulence model.

(a) Negligible
turbulence.

(b) Severe
turbulence,
 $k = 0.0025$.

(c) Mild
turbulence,
 $k = 0.001$.

(d) Low
turbulence,
 $k = 0.00025$.
(Original image
courtesy of
NASA.)

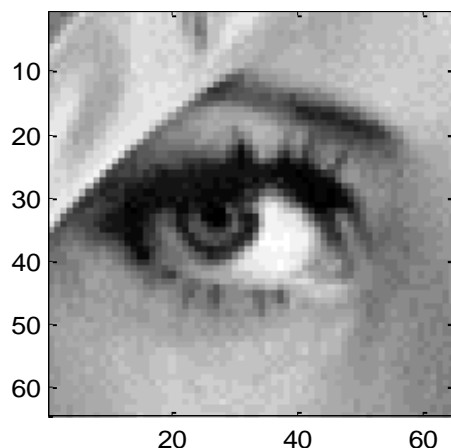


Motion Blur

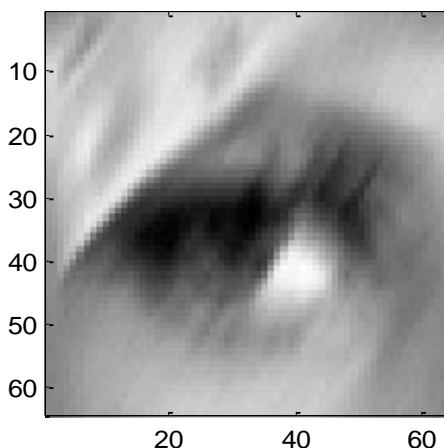
- из-за движения камеры панорамирования или быстром движении объекта.
- Линейные вдоль определенном направлении.

Blurdemo.m

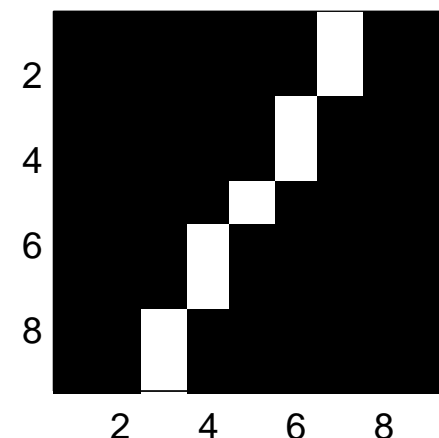
original image



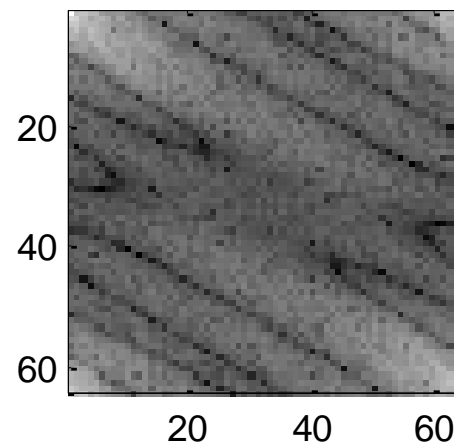
blurred image



blurring filter mask



blurring filter



Обратный фильтр

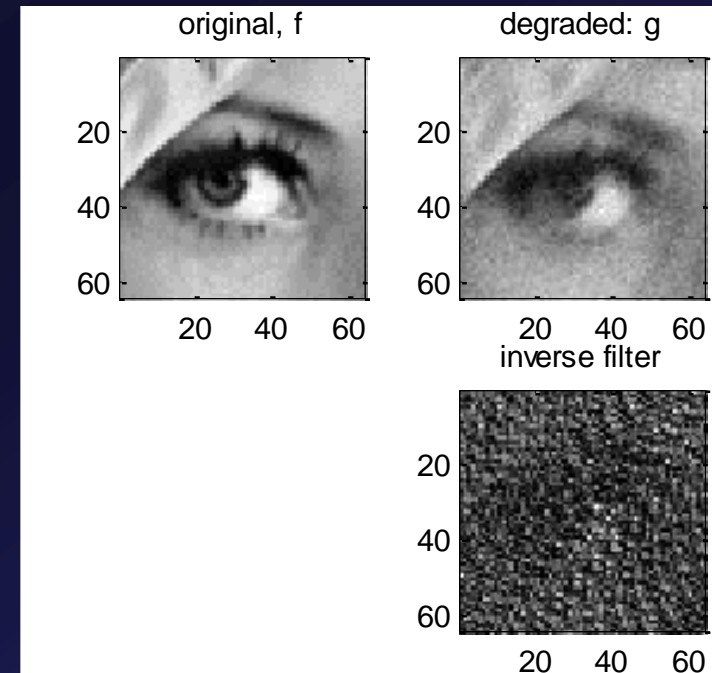
- Напомним, модель деградации:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

- Учитывая $H(U, V)$, они представляют собой небольшие
Непосредственно оценка исходного изображения на

$$F'(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

- В (U, V) , где $H(U, V) > 0$, шум $N(u, v)$ будет усиливаться срок!



Invfildemo.m

Фильтр Виннера

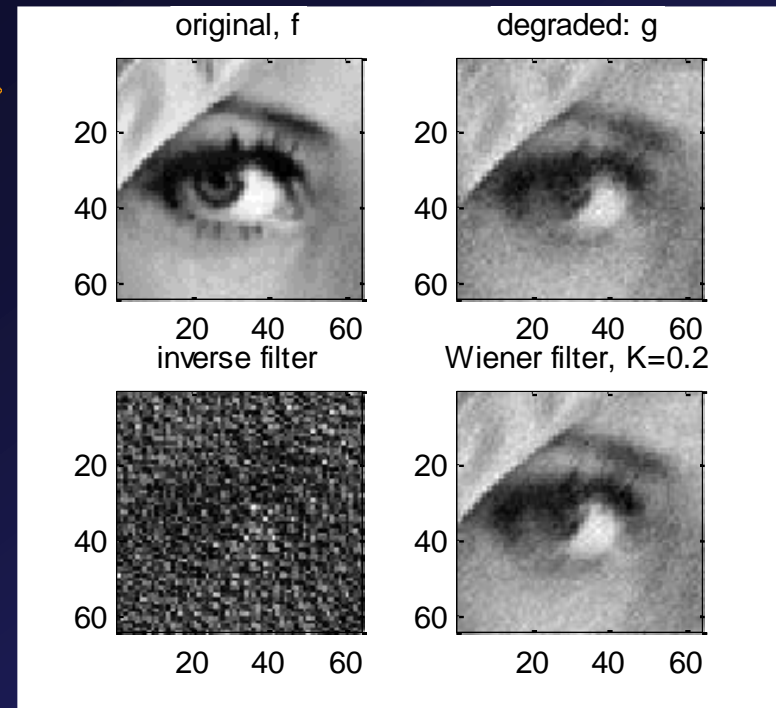
Минимальная среднеквадратичная
фильтр ошибке

- Предположим f и η которые
оба 2D случайные
последовательности, не
коррелируют друг с другом.
- Цель: свести к минимуму $E\{|f - \hat{f}|^2\}$
- Решение: Частота
селективный
масштабирование решения
обратной фильтра!

$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_{\eta}(u, v) / S_f(u, v)} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$

Белый шум, неизвестно $S_f(u, v)$:

$$\hat{F}(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \cdot \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$



Фильтр Виннера

Учитывая деградацию изображения g , фильтр Винера является оптимальным h_{win} такой, что $E\{\|f - h_{win}g\|^2\}$ сводится к минимуму. Предположим, что f и η некоррелированные нулевым средним стационарные 2D случайные последовательности с известными спектра мощности S_f и S_n . Таким образом,

$$E\{\|F(u, v)\|^2\} = S_f(u, v)$$

$$E\{\|N(u, v)\|^2\} = S_n(u, v)$$

$$\begin{aligned} E\{F(u, v)N^H(u, v)\} \\ = E\{F^H(u, v)N(u, v)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= E\{\|f - h_{win}g\|^2\} = E\{\|F(u, v) - H_{win}(u, v)G(u, v)\|^2\} \\ &= E\{\|F(u, v)\|^2\} - H_{win}(u, v) \cdot E\{F^H(u, v)G(u, v)\} \\ &\quad - H_{win}^H(u, v) \cdot E\{F(u, v)G^H(u, v)\} + \|H_{win}(u, v)\|^2 \cdot E\{\|G(u, v)\|^2\} \\ &= S_f(u, v) + \|H_{win}(u, v)\|^2 \cdot (\|H(u, v)\|^2 \cdot S_f(u, v) + S_n(u, v)) \\ &\quad - H_{win}(u, v) \cdot H(u, v) \cdot S_f(u, v) - H_{win}^H(u, v) \cdot H^H(u, v) \cdot S_f(u, v) \end{aligned}$$

$$\text{Set } \partial C / \partial H_{win}(u, v) = 0 \Rightarrow$$

$$H_{win}(u, v) = \frac{H^*(u, v)S_f(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 S_f(u, v) + S_n(u, v)}$$

Ограничение фильтром наименьших квадратов (CLS)

Для каждого пикселя, предположим, шум η имеет распределение Гаусса. Это приводит к функции правдоподобия:

$$L(f) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|g - h^{**}f\|^2 \right\}$$

Ограничение представляя предварительное распределение f будут введены:

$$p(f) \propto \exp \left\{ -\alpha \|q^{**}f\|^2 \right\}$$

Экспоненциальный форма pdf из f известен как распределения Гиббса.

Так как $L(f) \propto p(g/f)$, использование Байеса правило,

$$p(f | g) = p(g | f)p(f) / p(g)$$

с g дается, что максимально заднюю вероятность, что они должны свести к минимуму

$$\|g - h^{**}f\|^2 + \gamma \|q^{**}f\|^2$$

q является оператором на основе предварительного знания о f . Например, оператор Лапласа!

Интерпретация CLS

Предварительные знания:
Большинство изображений
гладкие $\Rightarrow \|q^{**}f\|$ должны быть
сведены к минимуму
Тем не менее, восстановленное
изображение $f'(x, y)$, пройдя
через тот же процесс
деградации h , должны быть
близки к данной
деградированных изображения
 g

Разница между g и $h(x, y) ** f'(x, y)$
ограничена количеством
аддитивного шума:

$$\|g - h ** f\|^2 = \|\eta\|^2$$

На практике, $\|\eta\|$ неизвестна и
должна быть оценена с дисперсией
шума

Решение, итеративный алгоритм

$$C_{CLS} = \|G(u, v) - H(u, v)F(u, v)\|^2 - \|N(u, v)\|^2 + \gamma \|Q(u, v)F(u, v)\|^2$$

Чтобы минимизировать C_{CLS} , установите $\partial C_{CLS} / \partial F = 0$.

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{\|H(u, v)\|^2 + \gamma \|Q(u, v)\|^2} G(u, v)$$

Значение γ однако, должна быть определена итеративно! Это должно быть выбрано таким как

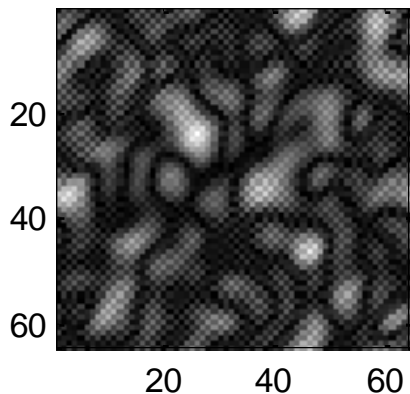
$$\left| \|G(u, v) - H(u, v)\hat{F}(u, v)\|^2 - \|N(u, v)\|^2 \right| = \left| \|R(u, v)\|^2 - \|N(u, v)\|^2 \right| < a$$

Итерационный алгоритм (Hunt)

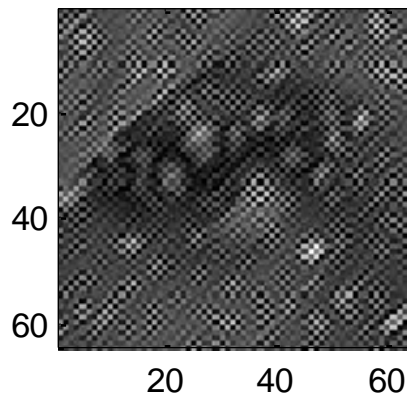
1. Установите начальное значение γ , $\hat{F}(u, v)$
2. *Найти и вычислить $R(u, v)$.*
3. Если $\|R\|^2 - \|N\|^2 < -a$, $\gamma = B_L$, вызывает увеличение γ , иначе $\|R\|^2 - \|N\|^2 > a$, $\gamma = B_u$, вызывает уменьшение γ , иначе установить итерацию.
4. $\gamma_{new} = (B_u + B_L)/2$, перейти к шагу 2.

CLS примеры

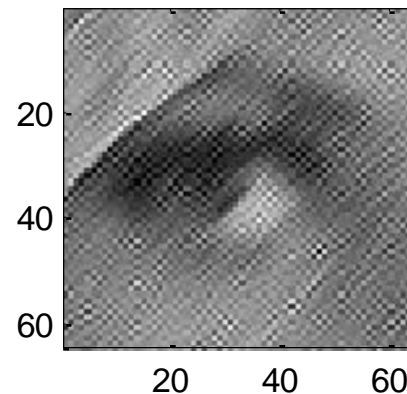
iteration 1, $\gamma=5.0005$



iteration 4, $\gamma=0.62594$



iteration 7, $\gamma=0.079117$



iteration 10, $\gamma=0.010765$ iteration 13, $\gamma=0.0022206$ iteration 15, $\gamma=0.0028309$

