

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

FI3104-01 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Tarea N°2: Dinámica de rebotes sobre un suelo oscilando sinusoidalmente

Bruno Scheihing

1 de Octubre de 2015

Resumen

En la presente tarea se explora el comportamiento de una masa puntual, en presencia de gravedad, rebotando sobre una superficie que oscila verticalmente, con la forma $A \sin(\omega t)$. Las colisiones partícula - suelo están caracterizadas por un coeficiente de restitución η . Se adimensionaliza el sistema ($A = 1$, $g = 1$, $m = 1$). Se implementa un algoritmo, basado en el método de la bisección, que permite detectar los tiempos de colisión entre el suelo y la partícula, y calcular mediante una regla de choque inelástico el nuevo valor de la velocidad de la partícula. Al final del informe se muestra un diagrama de bifurcación para las velocidades de la partícula justo después de un choque, cuando ya se ha dado suficiente tiempo para que el sistema relaje, obteniendo regímenes estables con períodos de 1, 2, ó 4 botes para $1,66 \leq \omega \leq 1,74$. Para valores de ω mayores empieza a aparecer una dinámica caótica.

1. Introducción

Se considera una partícula de masa m moviéndose verticalmente, en presencia de un campo gravitatorio uniforme, rebotando contra un suelo que oscila sinusoidalmente con amplitud A y frecuencia ω . El choque contra el suelo es inelástico, y se modela mediante:

$$v'_p(t^*) = (1 + \eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*)$$

donde t^* es el instante en que la partícula choca con el suelo, v_p y v'_p son las velocidades de la partícula justo antes y justo después del bote, v_s es la velocidad del suelo en ese instante y η es un coeficiente de restitución, que está entre 0 y 1.

Se busca estudiar la dinámica de la partícula. Para simplificar el análisis, se fijan $m = 1$, $g = 1$ y $A = 1$. Con esto, todas las cantidades serán adimensionales, por lo que los gráficos no llevarán unidades.

En primer lugar se buscará escribir una rutina que calcule, a partir de y_n, v'_n (posición y velocidad justo después del bote n), los valores de y_{n+1}, v'_{n+1} , para así poder estudiar la estabilidad de la velocidad v'_n en función de n . Esto se hará buscando el cero de la función diferencia entre la posición de la partícula y la posición del suelo.

Luego de realizar un par de pruebas generales y verificar el buen funcionamiento de la rutina recién mencionada, se procederá a estudiar el caso particular $\eta = 0,15$, con ω dentro del rango 1.66 - 1.79. El análisis se efectúa una vez que el sistema ya ha relajado, es decir, una vez que el movimiento de la partícula alcanzó un estado estacionario. Esto permitirá concluir si en ese intervalo se genera algún tipo de inestabilidad relacionada con valores particulares de ω .

2. Procedimiento

Primero se ha de implementar una rutina que calcule y_{n+1}, v'_{n+1} a partir de y_n, v'_n . Para esto, hay que calcular la trayectoria de tanto el suelo como de la partícula. Para la partícula es directo, y su movimiento en el intervalo temporal después del choque n ($t=0$) y antes del bote $n+1$ está dado por:

$$y_m(t) = y_n + v'_n t - \frac{1}{2} g t^2 = y_n + v'_n t - \frac{t^2}{2} \implies v_m(t) = v'_n t - t$$

En el desarrollo del experimento numérico se usará $y_0 = 0, v'_0 = 2$. Por otra parte, el suelo, en el intervalo temporal después del choque n y antes del bote $n+1$, se mueve según:

$$y_s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi) \implies v_s(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

con φ una fase que dependerá de la posición inicial del movimiento y_n y de la velocidad que hubiese llevado el suelo en ese momento, pues para cada posición y_n distinta de -1 o 1, hay dos fases φ no equivalentes que satisfacen $\sin(\varphi) = y_n$. Luego, para decidir si usar $\varphi = \arcsin(y_n)$ ó $\varphi = \pi - \arcsin(y_n)$, se utiliza el signo de la velocidad del suelo en el instante anterior al choque n . Notamos que $v_s(0)$ es positivo si $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, y negativo si $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$.

Luego si el signo de la velocidad del suelo en el choque n era positiva, calcularemos φ como $\arcsin(y_n)$, y si era negativa como $\pi - \arcsin(y_n)$.

Una vez determinadas las trayectorias, se procede a buscar la siguiente intersección (después del choque que da inicio a la trayectoria de la masa) entre $y_m(t)$ e $y_s(t)$. Para ello se busca hacia adelante en el tiempo, desde $t = 0$ definido antes, hasta que la diferencia $y_m(t) - y_s(t)$ cambie de signo positivo a negativo. Experimentalmente se verificó que un paso $dt = 0,1$ es suficientemente pequeño. Esto se justifica porque para las frecuencias a trabajar, $0,1 \ll 2\pi/\omega$, lo que garantiza que a pasos de ese tamaño la variación en la altura del suelo sea baja.

Sin embargo, a valores mayores de ω , o más bajos de η , podría pasarse por alto un cambio de signo en la diferencia de las funciones. Para garantizar que se encuentre la primera intersección entre $y_m(t)$ e $y_s(t)$ para $t > 0$, se podría calcular el mínimo entre tiempos característicos de la oscilación del suelo (ej. medio período) y de la caída libre (ej. el tiempo en que pasaría por la misma altura de nuevo), y elegir un paso muy inferior a ellos. Si el programa resultara ser lento, se podría manejar el factor por el cual el paso está relacionado con los tiempos característicos, e intentar optimizar sobre este parámetro.

Una vez encontrados los límites del intervalo donde se encuentra el cero, se busca el valor t^* que hace que la diferencia entre $y_m(t^*)$ e $y_s(t^*)$ esté tan cerca de cero como se especifique. Para ello, se usa el método de la bisección: Si a, b son los límites del intervalo, se calcula el punto medio p , y se decide qué hacer según el signo de la expresión:

$$F = (y_m(p) - y_s(p)) \cdot (y_m(a) - y_s(a))$$

Si $F > 0$, entonces y_m tiene el mismo signo que y_s en el intervalo $[a, p]$, y debemos buscar en $[p, b]$. En caso contrario, buscaremos en $[a, p]$. Es decir, haremos los siguientes cambios para el siguiente paso (denotado con un subíndice *new*):

$$F > 0 \implies a_{new} = p \wedge p_{new} = (a_{new} + b)/2$$

$$F < 0 \implies b_{new} = p \wedge p_{new} = (b_{new} + a)/2$$

$$F = 0 \implies \text{encontramos el cero}$$

Se fija un número máximo de iteraciones para el proceso anterior (en este caso se fijó un número máximo de 40), y un valor máximo ϵ para la diferencia $|y_m(p) - y_s(p)|$ (se fijó $\epsilon = 0,0001$). Una vez que se baja de este valor, se considera que $t^* = p$.

Una vez encontrado t^* , se calcula y_{n+1} a partir de la posición del suelo en t^* y se determina v'_{n+1} a partir de la ecuación que modela los choques:

$$v'_{n+1} = (1 + \eta)v_s(t^*) - \eta v_m(t^*)$$

Para repetir el proceso y calcular y_{n+2} , v'_{n+2} , se necesita guardar el signo de la velocidad del suelo. Esto se logra dividiendo $v_s(t^*)/|v_s(t^*)|$.

Se estimará N_{relax} , el número de botes necesarios para que el sistema se estabilice, mediante el gráfico de v'_n v/s n . Si visualmente se observa convergencia de v'_n hacia algún valor, estando suficientemente cerca para un n finito, se concluirá que el sistema ya ha relajado.

Finalmente se presentará un gráfico de los valores estables de v'_n en función de ω . Esto se hará a partir de los valores que tome v'_n . Se espera obtener algún tipo de diagrama de bifurcación para los tipos de trayectoria que puede tomar la partícula en el sistema.

En esta última parte, al ir variando la frecuencia, conviene usar como condición inicial el estado estable de un ω cercano, pues así el período transiente hacia la nueva configuración “relajada” será más corto y se puede asegurar que $n \geq 2N_{relax}$ es suficientemente grande para haber llegado a una situación estable.

3. Resultados

La Figura 1 muestra la evolución en el tiempo de la partícula rebotando sobre el piso, para $\omega = 1,66$ y $\eta = 0,15$. Se observa que los botes ocurren en los puntos de intersección de las parábolas que describe la partícula con la senoide que describe el piso.

Figura 2 muestra el comportamiento de la velocidad v'_n con que sale la partícula después del rebote, en función del número de rebotes que ocurrieron antes, para $\omega = 1,66$ y $\eta = 0,15$. Se observa que se llega a un estado estable a partir de $n = 50$, por lo que se estimará $N_{relax} \sim 50$. En el Anexo 1 se presentan gráficos análogos al expuesto en Figura 2, para diferentes valores de ω , desde

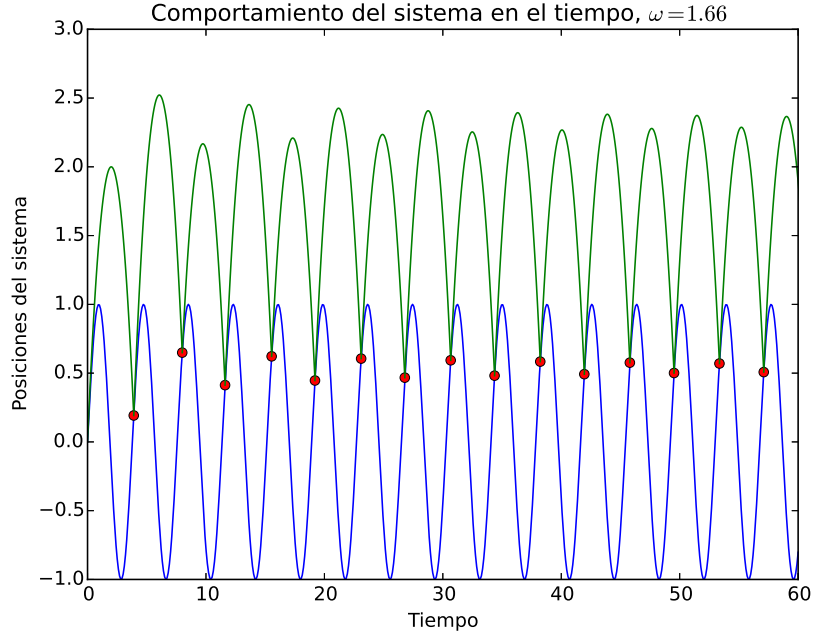


Figura 1: Posición del suelo (azul), partícula (verde), y de los choques que ocurren entre los dos anteriores (rojo). En este gráfico, $\omega = 1,66$ y $\eta = 0,15$

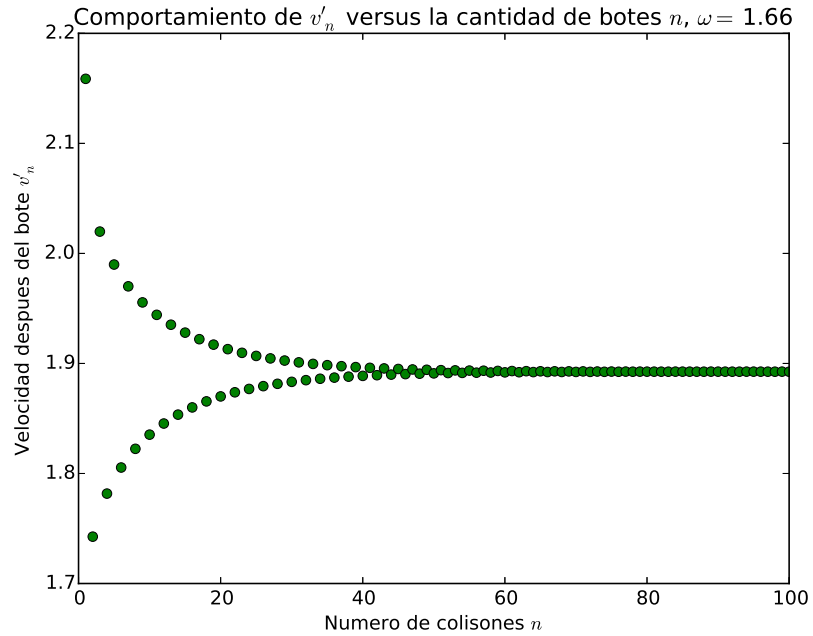


Figura 2: Velocidad v'_n de la partícula después del bote n -ésimo en función de la cantidad de rebotes n , para $\omega = 1,66$ y $\eta = 0,15$

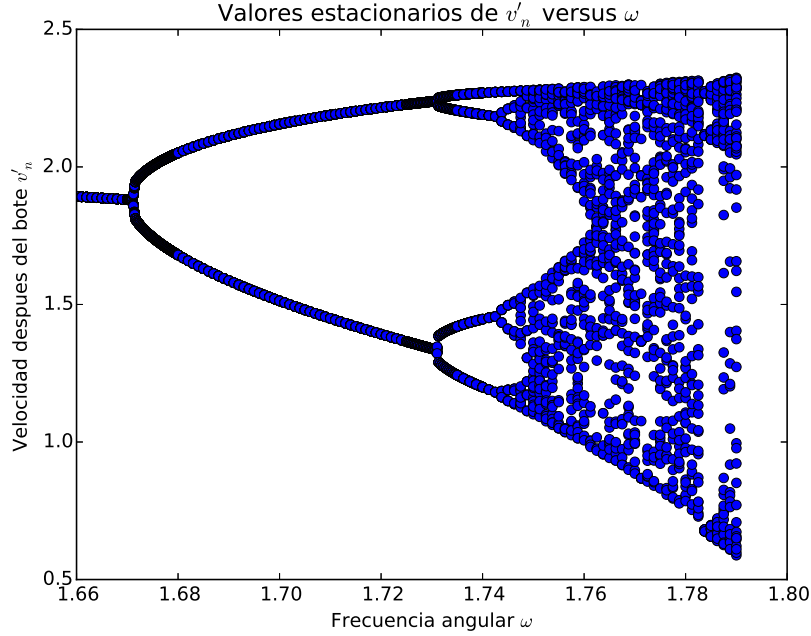


Figura 3: Diagrama de bifurcación de v'_n en función de ω . A medida que aumenta ω , se genera una mayor cantidad de velocidades permitidas en una situación presumiblemente estable.

donde se observa que el valor de N_{relax} estimado es suficientemente grande para que el sistema se estabilice.

Al hacer el gráfico de los valores de v'_n para n suficientemente grande (es decir, $n \geq 2 \cdot N_{relax}$), se obtiene lo presentado en Figura 3. Se considera un rango de ω entre 1.66 y 1.79. Se observa un diagrama de bifurcación para las velocidades v'_n de rebote estables bajo el forzamiento impuesto. Las bifurcaciones mejor definidas se ubican en torno a $\omega = 1,67$ y a $\omega = 1,73$. Debido a esto, se graficó una mayor cantidad de valores de ω en torno a estos puntos.

Sin embargo, las siguientes bifurcaciones que presenta el gráfico (a mayores valores de ω) empiezan a superponerse entre sí, y a adquirir un mayor rango de valores. Esto significa que la partícula tiene un mayor rango de velocidades posibles v'_n al rebotar. Es decir, su trayectoria, de ser periódica, será más compleja que a valores inferiores de ω .

4. Conclusiones

Como muestra la Figura 1, se detectaron exitosamente las colisiones entre suelo y partícula, obteniendo una sucesión de rebotes como evolución temporal. Esto valida el algoritmo implementado para encontrar los ceros de la función diferencia entre las posiciones de la partícula y del suelo.

Si se mira en detalle el comportamiento de las posiciones de los choques en Figura 1, ya se puede intuir una relajación del sistema hacia un régimen estable, pues los puntos rojos (los botes) parecieran ir convergiendo a una altura

específica, lo que a su vez significa que la velocidad de salida v'_p también lo hace.

Se encontró que $N_{relax} \sim 50$ para $\omega = 1,66$, como se ve desde Figura 2. Al probar con otros valores de ω hasta 1.7 se encontró que el sistema se estabilizaba bastante más rápido, probablemente porque la velocidad inicial entregada a la partícula colocó al sistema en una configuración más cercana a la estable. Aquí se hace evidente que la situación estable puede tener más de un valor de v'_p asociado.

La Figura 3 muestra las velocidades de salida v'_n de la partícula para valores de $n \geq 2N_{relax}$. Esto muestra que para $\omega = 1,66$ existe un solo tipo de oscilación estable (en términos de los rebotes de la partícula), y al aumentar el valor de ω se obtiene una bifurcación. Esto significa que la partícula tiene una oscilación con un período de dos rebotes, uno a cada velocidad, para luego repetir el ciclo. Al llegar a $\omega \sim 1,73$ el diagrama se bifurca nuevamente y se obtiene un movimiento con período de 4 choques con el suelo.

Para $\omega \geq 1,75$, se puede considerar que es casi un régimen de dinámica caótica, o bien de un período de estabilización demasiado grande, puesto que v'_n comienza a tomar prácticamente todos los valores posibles entre las “ramas” de la bifurcación. Después de $\omega = 1,78$ pareciera que v'_n vuelve a agruparse hacia los extremos, pues aparece una región sin puntos registrados.

Se hizo la grilla más fina en las dos primeras bifurcaciones, aunque la resolución base usada para ω ya permite apreciar con claridad los diferentes estados estacionarios del sistema. El programa `experimento.py` toma una cantidad considerable de tiempo en ejecutar (del orden de 30 segundos en el computador donde se desarrolló), ya que en total el script hace rebotar la partícula 150 veces por cada uno de los 200 valores de ω graficados. Se podría disminuir el número de valores de ω a graficar sin comprometer el análisis.

5. Anexos

5.1. Anexo 1: Estabilidad de v'_n a diferentes valores de ω

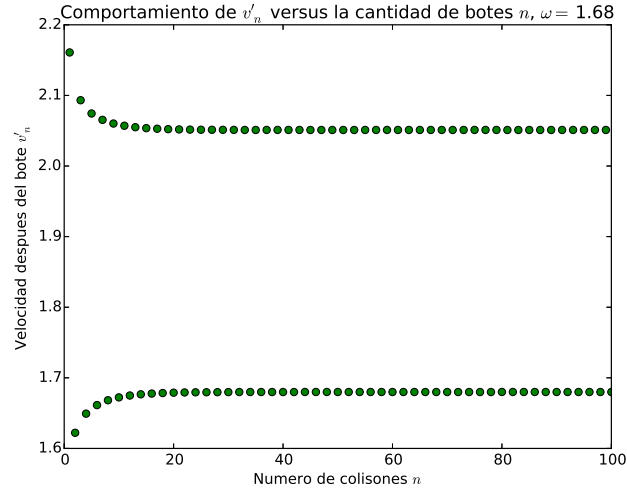


Figura 4: Velocidad v'_n de la partícula después del bote n -ésimo en función de la cantidad de rebotes n , para $\omega = 1,68$

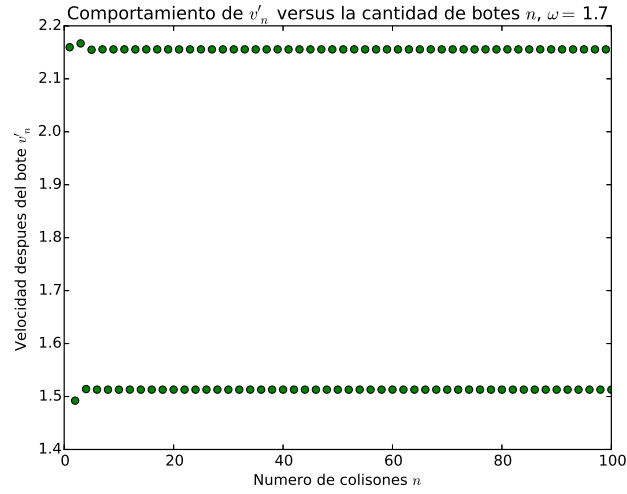


Figura 5: Velocidad v'_n de la partícula después del bote n -ésimo en función de la cantidad de rebotes n , para $\omega = 1,7$