

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

FI3104-01 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Tarea N°3: Oscilador de van der Pol y Atractor de Lorenz

Bruno Scheihing, RUT: 18.954.350-6

8 de Octubre de 2015

Resumen

En la presente tarea se buscó resolver numéricamente dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La primera es el oscilador de van der Pol, y la segunda el sistema de Lorenz, para los parámetros que entregan su solución más famosa: el Atractor de Lorenz. Se resuelve el oscilador de van der Pol, con un parámetro $\mu^* = 1,350$, implementando un método de Runge-Kutta orden 3, obteniendo resultados satisfactorios. Para dos condiciones iniciales diferentes el sistema se estabiliza relativamente rápido y converge al mismo estado estacionario. El recorrido en el espacio $(y, dy/ds)$ es consistente con esto. El sistema de Lorenz fue resuelto usando el integrador **dopri5** de **scipy.integrate**, para parámetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$, obteniendo como solución al Atractor de Lorenz.

1. Introducción

El oscilador de van der Pol es una ecuación diferencial de segundo orden propuesta por Balthasar van der Pol para modelar la dinámica de ciertos circuitos eléctricos. La ecuación se escribe como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2) \frac{dx}{dt}$$

donde k es el análogo a una constante elástica y μ da cuenta del amortiguamiento. Notar que si $|x| > a$, entonces μ actúa disipando energía. En cambio, si $|x| < a$ entonces el “roce” inyecta energía. Esto se produce por el signo relativo entre los coeficientes de d^2x/dt^2 y dx/dt . Desde aquí se intuye que la solución estable probablemente tenga a $x(t)$ oscilando con una amplitud algo mayor que a , en torno a cero.

Haciendo el cambio de variables en el argumento a $s = \sqrt{k}t$, y la función $y(s) = x(t)/a$, se obtiene, reemplazando en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} ak \frac{d^2y}{ds^2}(s) &= -kay(s) - \mu(a^2y^2(s) - a^2) \cdot \sqrt{k}a \frac{dy}{ds}(s) \\ \implies \frac{d^2y}{ds^2}(s) &= -y(s) - \mu^*(y^2(s) - 1) \frac{dy}{ds}(s) \end{aligned}$$

con $\mu^* = \mu a^2 / \sqrt{k}$. Se resolverá esta ecuación implementando un método de Runge-Kutta orden 3, fijando el valor del parámetro $\mu^* = 1,350$, para dos pares de condiciones iniciales:

$$1 : y(0) = 0,1 ; dy/ds(0) = 0 \quad , \quad 2 : y(0) = 4,0 ; dy/ds(0) = 0$$

Con esto se estudiará la evolución temporal del sistema (en este caso en función del parámetro s) y su comportamiento en el espacio $(y, dy/ds)$.

El sistema de Lorenz es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, desarrollado por Edward Lorenz en 1963 como un modelo simplificado de la convección atmosférica, aunque también se usa para modelar otros fenómenos. El sistema de ecuaciones es el que sigue:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

La solución más famosa se obtiene usando $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Se resolverá el sistema usando estos parámetros y una condición inicial de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ (por simplicidad). Para hacer la integración se usarán métodos disponibles en **scipy.integrate**. El objetivo de esto es graficar la trayectoria en 3D de la solución.

2. Procedimiento

2.1. Oscilador de van der Pol

Para resolver el oscilador de van der Pol se usará un método de Runge-Kutta orden 3. Dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y})$$

y el valor \vec{y}_n para el instante t_n , el método consiste en calcular \vec{y}_{n+1} como:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}(\vec{K}_1 + 4\vec{K}_2 + \vec{K}_3)$$

con $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3$ dados por:

$$\vec{K}_1 = h\vec{f}(t_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{f}(t_n + h/2, \vec{y}_n + \vec{K}_1/2)$$

$$\vec{K}_3 = h\vec{f}(t_n + h, \vec{y}_n - \vec{K}_1 + 2\vec{K}_2)$$

donde h es el paso de tiempo a usar. Si N es el número de instantes de tiempo en los que se calculará \vec{y} a partir de las condiciones iniciales, sobre un intervalo de tamaño T , entonces $h = T/N$.

Para resolver el oscilador de van der Pol, al ser una ecuación diferencial de segundo orden, se hace la siguiente vectorización (usando s como la variable t descrita antes en esta sección):

$$\vec{y} = (y, dy/ds) \quad ; \quad \vec{f} = (dy/ds, -y - \mu^*(y^2 - 1)dy/ds)$$

Se calculará $y(s)$ y $dy/ds(s)$ simultáneamente, usando el método de Runge-Kutta orden 3 descrito antes, a partir de $s = 0$ con $s \in [0, 20\pi]$. En la implementación adjunta se usa $N = 40000$, por lo que el paso h será de $(\pi/2) \cdot 10^{-3}$. El parámetro μ^* y las diferentes condiciones iniciales fueron especificadas en *Introducción*.

Los resultados de la integración serán presentados en gráficos $y(s)$, es decir, la función versus su argumento, y también con la trayectoria en el espacio $y, dy/ds$.

2.2. Atractor de Lorenz

El sistema de Lorenz será resuelto usando el integrador **dopri5** (Dormand-Prince) de la librería **scipy.integrate**, que es un método Runge-Kutta de orden 4(5) (esto quiere decir que dependiendo del sistema a resolver, el integrador elegirá usar métodos de orden 4 si la función se mantiene suave y orden 5 si detecta que el error va creciendo). Para esto se debe definir la función a integrar (directamente desde el sistema antes descrito, con los parámetros ya incluidos en su construcción por simplicidad), las condiciones iniciales (ya explicitadas en *Introducción*), y la cantidad de tiempo a estudiar.

Se registrarán los datos de la integración del sistema durante un tiempo $T = 100$ con un número de datos $N = 10000$. Es decir, se guardará el resultado de la integración mediante **dopri5** cada $dt = 0,01$. Para la integración se especificarán como parámetros la tolerancia absoluta y la tolerancia relativa, con valores de, respectivamente, 10^{-6} y 10^{-4} .

El resultado de la integración será presentado como la trayectoria en el espacio (x, y, z) , recorrido paramétricamente por t .

3. Resultados

3.1. Oscilador de van der Pol

Los resultados para la integración de la ecuación que describe el oscilador de van der Pol se muestran en Figura 1 y Figura 2.

Se observa, desde la parte (A) de ambas figuras, que para ambos pares de condiciones iniciales la solución converge hacia la misma forma funcional, siendo prácticamente indistinguibles a partir de $s = 10$ (esto es, una vez terminado el período transiente), salvo por un leve desfase temporal.

El estado estacionario de estas soluciones tiene una amplitud de aproximadamente 2 para $y(s)$.

La trayectoria de $(y(s), dy/ds(s))$ en su espacio asociado es cíclica, salvo por el período transiente en que el sistema se desplaza desde las condiciones iniciales hasta su solución estacionaria. Comparando con el gráfico $y(s)$, se deduce que este período transiente corresponde al mismo que fue observado antes en la parte (A) de las figuras.

Además, se observa que los gráficos (A) y (B) dentro de las Figuras 1 y 2 son consistentes entre sí, pues los máximos y mínimos de $y(s)$ ocurren cuando $dy/ds(s) = 0$ (ver gráficos (B)), y los máximos o mínimos de $dy/ds(s)$ se observan en los puntos donde la función $y(s)$ pareciera ser más “empinada”, en torno a $y(s) = \pm 1$.

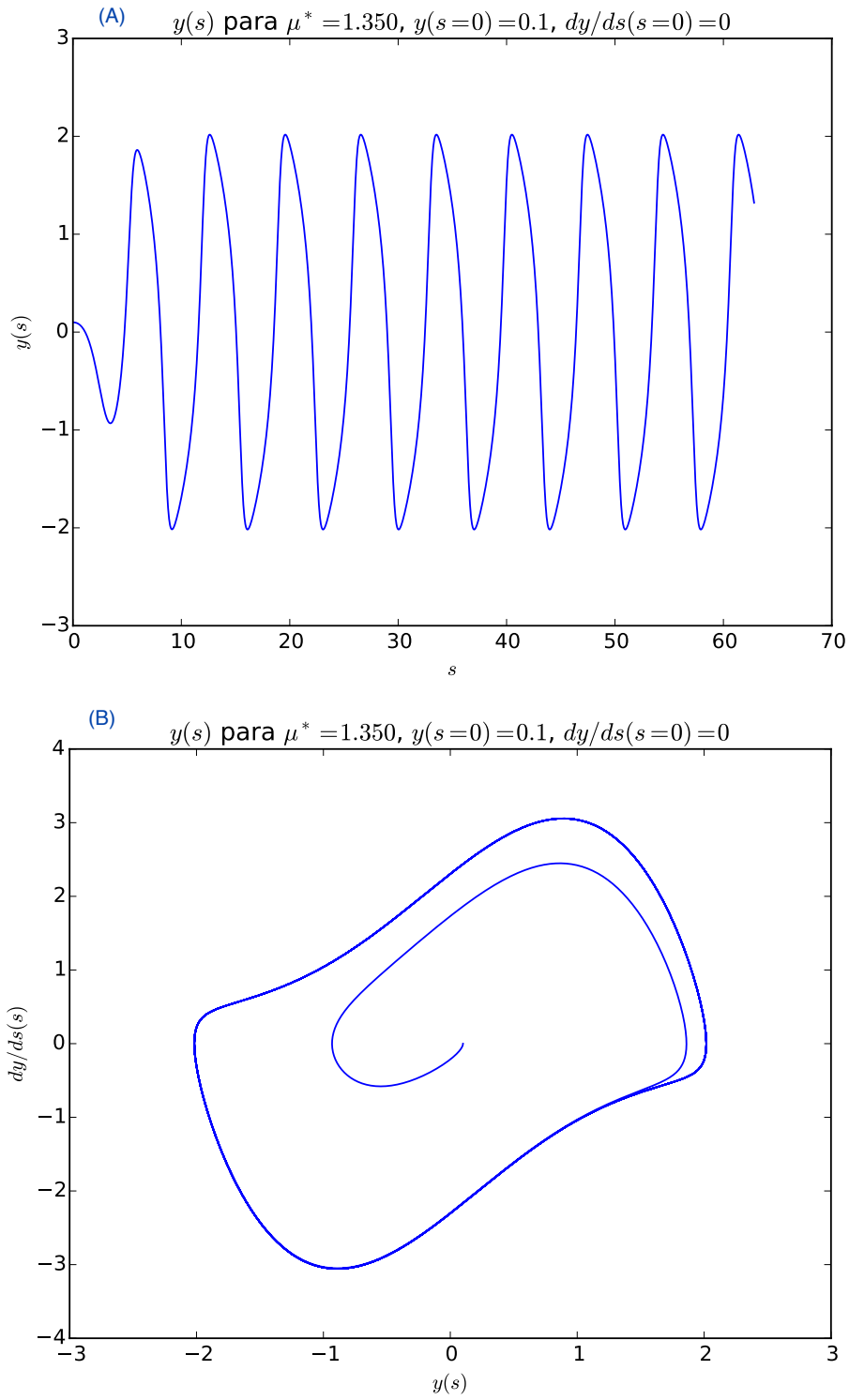


Figura 1: Solución al oscilador de van der Pol, $\mu^* = 1,350$, con condiciones iniciales $y|_{s=0} = 0,1$ e $dy/ds|_{s=0} = 0$. (A) gráfico de $y(s)$, (B) trayectoria en el espacio $(y, dy/ds)$.

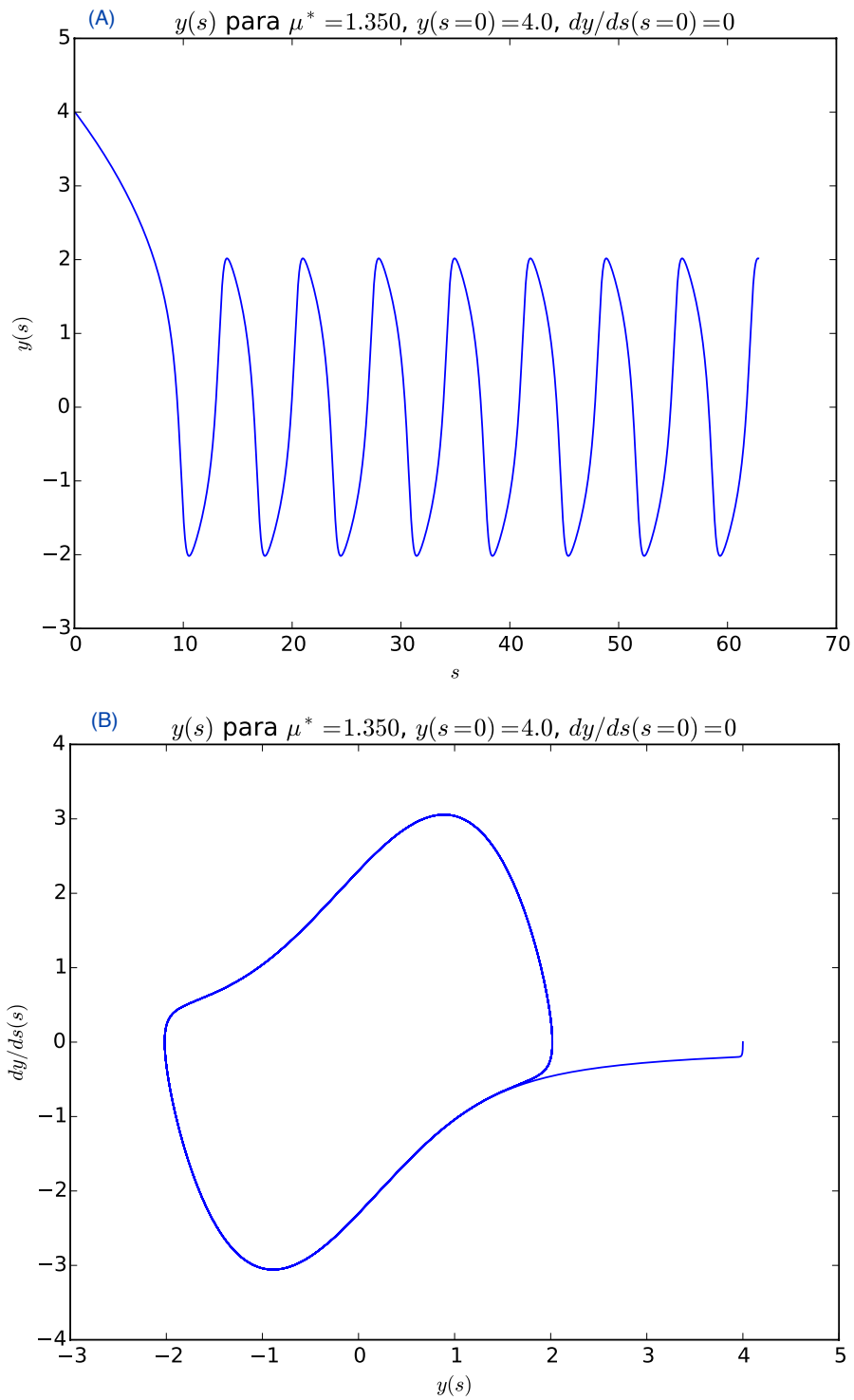


Figura 2: Solución al oscilador de van der Pol, $\mu^* = 1,350$, con condiciones iniciales $y|_{s=0} = 4,0$ e $dy/ds|_{s=0} = 0$. (A) gráfico de $y(s)$, (B) trayectoria en el espacio $(y, dy/ds)$.

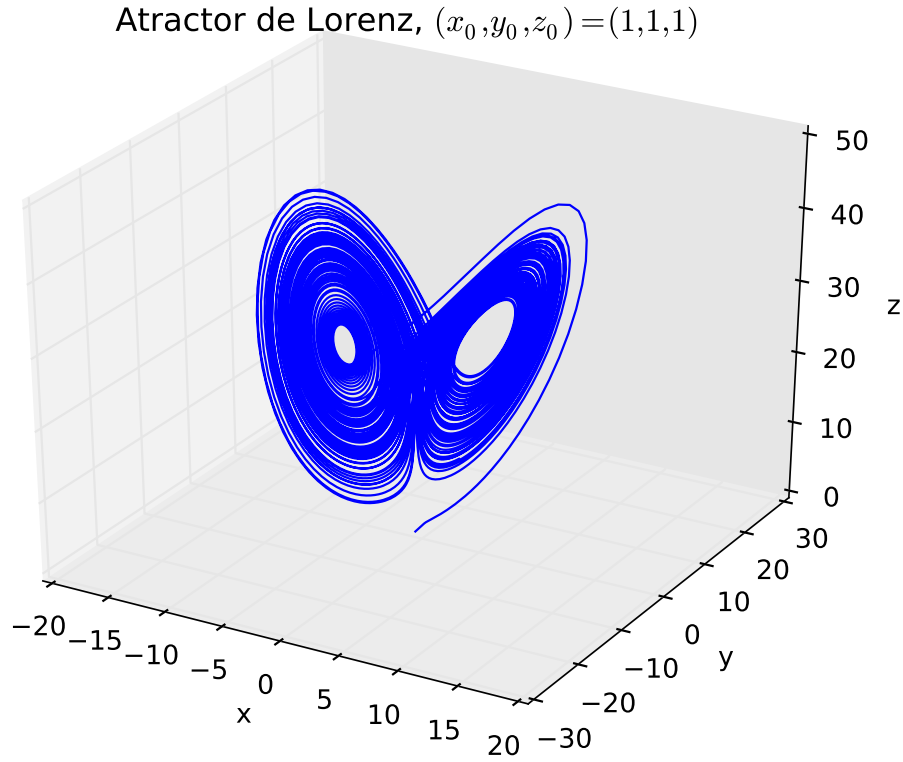


Figura 3: Solución al sistema de Lorenz, usando los parámetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$ para obtener el Atractor de Lorenz. Se usó el punto $(1, 1, 1)$ como condición inicial.

3.2. Atractor de Lorenz

La solución al sistema de Lorenz para los parámetros fijados se muestra en Figura 3. Se obtuvo la forma esperada para la trayectoria $(x(t), y(t), z(t))$, obteniendo como resultado el Atractor de Lorenz.

Se observa que la condición inicial $(1, 1, 1)$, aunque relativamente lejos en el eje z del resto de la trayectoria, no produce mayores perturbaciones y la solución se aproxima rápidamente a la zona “central” de la trayectoria.

4. Conclusiones

Ambas ecuaciones diferenciales fueron resueltas satisfactoriamente. El oscilador de van der Pol mostró una convergencia relativamente rápida hacia su estado estacionario, permitiendo observar 7 ó 8 períodos bien definidos. La am-

plitud de oscilación del oscilador, con el parámetro $\mu^* = 1,350$ es muy cercana a 2, lo que es consistente con la intuición planteada inicialmente: se esperaba una oscilación con amplitud mayor que a para $x(t)$, que en la variable $y(s)$ corresponde a una amplitud mayor que 1.

Más aún, desde las Figuras 1,2 (B), se observó que el módulo de la derivada de $y(s)$, $|dy/ds(s)|$, tiene máximos en torno a $y = \pm 1$. Esto refleja el cambio desde un régimen de inyección de energía ($|y| < 1$) hacia uno de disipación ($|y| > 1$), puesto que la “velocidad” ($dy/ds(s)$) del oscilador deja de aumentar y comienza a disminuir, lo que es consistente con la interpretación inicial para la ecuación.

Paralelamente, la solución del sistema de Lorenz para los parámetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$ tiene la forma esperada, correspondiendo al Atractor de Lorenz. Como se mencionó en *Resultados*, la condición inicial, aunque lejos de la mayor parte de la trayectoria, no afectó a las ecuaciones para que la solución fuera de la forma esperada.

A modo de comentario, que no fue estudiado en este informe: Al variar ligeramente las condiciones iniciales del sistema de Lorenz se obtiene una trayectoria que es visualmente similar. Sin embargo, para un tiempo suficientemente grande, las soluciones muestran ser significativamente diferentes. Esto es porque el sistema de Lorenz, con los parámetros usados, tiene soluciones caóticas, lo que es equivalente a decir que es altamente sensible a las condiciones iniciales.