

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

FI3104-01 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

## Tarea N°5: Ecuación de Poisson y método de sobre-relajación

Bruno Scheihing, RUT: 18.954.350-6

27 de Octubre de 2015

### Resumen

En la presente tarea se buscó resolver la ecuación de Poisson bidimensional en un rectángulo de  $10 [cm] \times 15 [cm]$ , conteniendo una densidad de carga distribuida según una geometría particular, y además una condición de borde derivativa en su interior. Para esto se implementó el método de sobre-relajación, con el objetivo adicional de estudiar la velocidad de convergencia a la solución. La ecuación fue resuelta exitosamente, obteniendo como resultado una solución para el potencial electrostático que satisface todas las condiciones de borde, pero es discontinua en la zona donde se definió una condición de borde derivativa, como consecuencia de la misma y de las demás condiciones de borde. Finalmente, se encontró que la velocidad de convergencia del método de sobre-relajación es creciente con el parámetro  $w$ , y la curva del número de iteraciones en función de  $w$  probablemente puede ser bien ajustada por una exponencial negativa o alguna función de la forma  $1/w^\alpha$ , con  $\alpha > 0$ .

## 1. Introducción

La ecuación de Poisson describe el comportamiento del potencial electrostático en el espacio. En el presente informe, se buscará resolver dicha ecuación en su forma bidimensional:

$$\nabla^2 V(x, y) = -\rho(x, y)$$

Dentro de un rectángulo de  $10 [cm] \times 15 [cm]$ , conectado a tierra en el perímetro (es decir, en los bordes del rectángulo  $V = 0$ ). Acordemente, definiremos las variables  $x \in [-5, 5]$ ,  $y \in [-7, 5]$ , ambas en unidades de centímetros, que describen cualquier punto en la zona a estudiar.

Dentro del rectángulo hay una región rectangular de  $5 [cm] \times 7 [cm]$ , que es concéntrica al rectángulo mayor. Dentro de esta región hay una carga de  $1 [C]$ , distribuida uniformemente sobre el área de una letra, que en este caso corresponderá a la inicial del autor (B).

Además, a una distancia de  $2 [cm]$  del límite inferior del rectángulo (es decir, en  $y = -5,5 [cm]$ ) hay una línea horizontal de largo  $6 [cm]$  centrada en  $x = 0$ , que cumple con la condición de borde derivativa:

$$\frac{dV}{dy} = 1$$

Se integrará usando un reticulado de  $h = 0,2 [cm]$ , usando el método de sobre-relajación sucesiva. Se estudiará la velocidad de convergencia a la solución para diferentes valores del parámetro  $w$  en el método de sobre-relajación.

Para evaluar la velocidad de convergencia se resolverá la ecuación de Poisson usando el método de relajación habitual, con un número suficientemente grande de iteraciones, y luego se estudiará cuántas iteraciones requiere el método de sobre-relajación para converger, para diferentes valores de  $w$ . Se pedirá que la suma de las diferencias al cuadrado entre las soluciones esté suficientemente cerca de cero, definiendo el valor umbral empíricamente, mediante experimentación.

## 2. Procedimiento

Se define un reticulado de  $h = 0,2 [cm]$  sobre el rectángulo a estudiar, resultando en 51 puntos según  $x$  y 76 puntos según  $y$ . En la implementación adjunta se definen dos arreglos sobre el reticulado, representando la densidad de carga en cada punto y el potencial electrostático.

Dentro de la región rectangular centrada ( $5 [cm] \times 7 [cm]$ ) se dibuja una letra “B” con densidad uniforme  $\rho \approx 0,04425 [C/cm^2]$ . Esta letra está completamente contenida dentro del rectángulo, pero no toca todo el contorno. Las líneas que la dibujan son de  $1 [cm]$  de ancho, y tiene forma de un “8” recto.

Para definir la condición de borde derivativa (en la implementación adjunta) se guardan los puntos que la satisfacen en un diccionario, para luego poder consultar directamente si el punto tiene alguna condición de ese tipo o no.

La solución a la ecuación de Poisson en este rectángulo se obtiene usando el método de relajación o el de sobre-relajación sucesiva. En lo que sigue describiremos el algoritmo de sobre-relajación. Sea  $V_{i,j}$  el potencial electrostático en el punto  $(i, j)$ , y sea  $\rho_{i,j}$  la densidad de carga en ese punto. Dado un conjunto inicial de valores sobre cada posición  $(i, j)$  de la grilla, se van actualizando los puntos de la siguiente forma (que no deben satisfacer una condición de borde derivativa ni están adyacentes a uno que deba hacerlo):

$$V_{i,j} = (1 - w)V_{i,j} + \frac{w}{4}[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j}]$$

Donde  $w$  es un parámetro  $\in (0, 2)$  que determina el tipo de sobre-relajación que tendremos. En particular, si  $w = 1$  se recupera el método de relajación.

En el caso donde se está adyacente a un punto con condición de borde derivativa (y la línea donde se encuentra esta condición es horizontal), se itera de la siguiente forma: Si el punto con condición derivativa tiene un índice mayor que el punto a actualizar (i.e. la condición está en  $i, j + 1$ ), y la derivada direccional según el incremento de  $j$  está dada por  $g_{i,j}$ ,

$$V_{i,j} = (1 - w)V_{i,j} + \frac{w}{3}[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1} + hg_{i,j+1} + h^2\rho_{i,j}]$$

y si tiene un índice menor (i.e. la condición está en  $i, j - 1$ ),

$$V_{i,j} = (1 - w)V_{i,j} + \frac{w}{3}[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} - hg_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j}]$$

Los puntos sobre la línea con condición de borde derivativa se actualizan como:

$$V_{i,j} = V_{i,j-1} + hg_{i,j}$$

O bien como:

$$V_{i,j} = V_{i,j+1} - hg_{i,j}$$

Dado que no hay argumentos para decidir cuál utilizar (entre las dos últimas fórmulas), y estos valores no afectan al resto de la iteración (salvo por los puntos extremos de la línea), se dejará arbitrariamente como el valor resultante después de la última iteración, por lo que dependerá del costado a partir del cual se comience (o termine) la relajación.

Cabe destacar que lo anterior permite que la solución sea discontinua sobre la línea. Físicamente se puede interpretar esto como una pared (en el sentido de que no debería estar permitido que una carga de prueba la atravesase), que por alguna razón genera un campo eléctrico de  $1[C/cm]$  en la dirección positiva de  $y$ , a ambos lados de la misma. La continuidad del potencial dependerá entonces de las demás condiciones de borde del problema.

Para realizar la relajación, se definen dos regiones, una que está por “sobre” la línea y otra por “debajo”. El recorrido será desde los extremos hacia la línea, aunque vale notar que esto no debiese afectar al resultado final.

Para estudiar la convergencia del método de sobre-relajación para diferentes valores de  $w$ , se dejará relajar la solución con  $w = 1$  por 1000 iteraciones, obteniendo un arreglo  $V_{i,j}^{sol}$ , y luego se hará relajar la caja (desde las mismas condiciones iniciales) hasta que la configuración del potencial  $V_{i,j}^w$  esté suficientemente cerca. Dados  $V_{i,j}^{sol}$  y  $V_{i,j}^w$ , experimentalmente se determinó que:

$$\chi^2 = \sum_{i,j} (V_{i,j}^w - V_{i,j}^{sol})^2 < 15 [C^2]$$

es una condición suficiente para que la convergencia esté dentro de un margen razonable, en el sentido de que visualmente los gráficos asociados tengan un alto grado de similitud. Sin embargo, evidentemente este criterio admitirá ciertas discrepancias entre las soluciones, que de existir, serán comentadas más adelante.

Se estudiarán valores de  $w$  entre 0.2 y 1.8, equiespaciados por intervalos de tamaño 0.2.

Para disminuir el número de comparaciones a efectuar producto de la condición anterior, se permite al programa que relaje sin verificar la condición por  $\lceil \chi^2/100 \rceil$  pasos, donde lo anterior es una función techo. Notar que una vez que esta diferencia cuadrática tenga un valor menor que 100, se preguntará si la condición se cumple en cada uno de los pasos. Esto es optimizable eligiendo una función más adecuada de  $\chi^2$  para determinar el paso. Lo anterior fue elegido por simplicidad y porque en los primeros pasos  $\chi^2$  estará entre 1000 y 2000  $[C^2]$ , determinando que un divisor menor implicaría dar más pasos y quizá una pérdida de precisión en el número de iteraciones necesarias.

Los resultados se presentarán en forma de mapas de colores bidimensionales (tanto para verificar la correcta implementación de la distribución de carga como para estudiar el potencial) y de cortes transversales por la línea  $x = -0,5 [cm]$ . Las imágenes resultantes de esto llevarán en su nombre (de archivo) un número

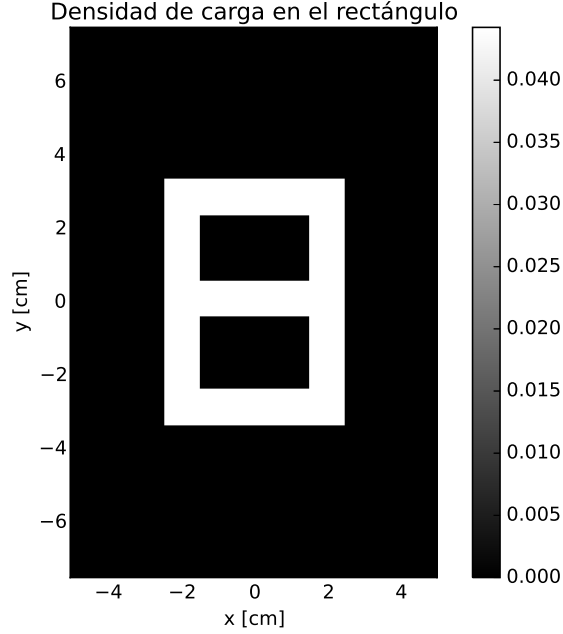


Figura 1: Distribución de densidad de carga superficial en el rectángulo

identificador igual a  $10w$ . También se presentarán los resultados que produce la distribución de carga por sí sola (esto es, sin imponer la condición derivativa), para efectos de comparación con los demás resultados obtenidos.

Por último, se presentará un gráfico con el número de iteraciones que toma la solución para converger, en función del parámetro  $w$  utilizado.

### 3. Resultados

La Figura 1 muestra que la densidad de carga fue implementada exitosamente, pues está en el lugar correcto y tiene el valor esperado.

Figura 2 muestra los resultados de la relajación si solo hay densidad de carga en la geometría y no se impone la condición de borde derivativa. Se aprecia claramente el efecto de la forma de la letra, pues el potencial resultante presenta simetrías similares y máximos donde hay mayor densidad de carga.

El caso donde hay una condición de borde derivativa, que es el tema principal de este informe, presenta una discontinuidad en  $y = -5,5 [cm]$ . Esto se puede ver claramente desde Figura 3, tanto en el perfil lateral del potencial como en el mapa de colores. Además, se observa que la condición de borde derivativa domina el comportamiento del potencial en la caja, y se aprecian escasamente los efectos de la densidad de carga colocada. Sin embargo, de cualquier manera puede apreciarse (desde el perfil lateral en Figura 3) un pequeño decrecimiento del portencial hacia  $y \sim 6 [cm]$ , indicando que hay un máximo poco antes, que es probablemente generado por la presencia de cargas.

Para apreciar de mejor forma este efecto se presenta la Figura 4, que co-

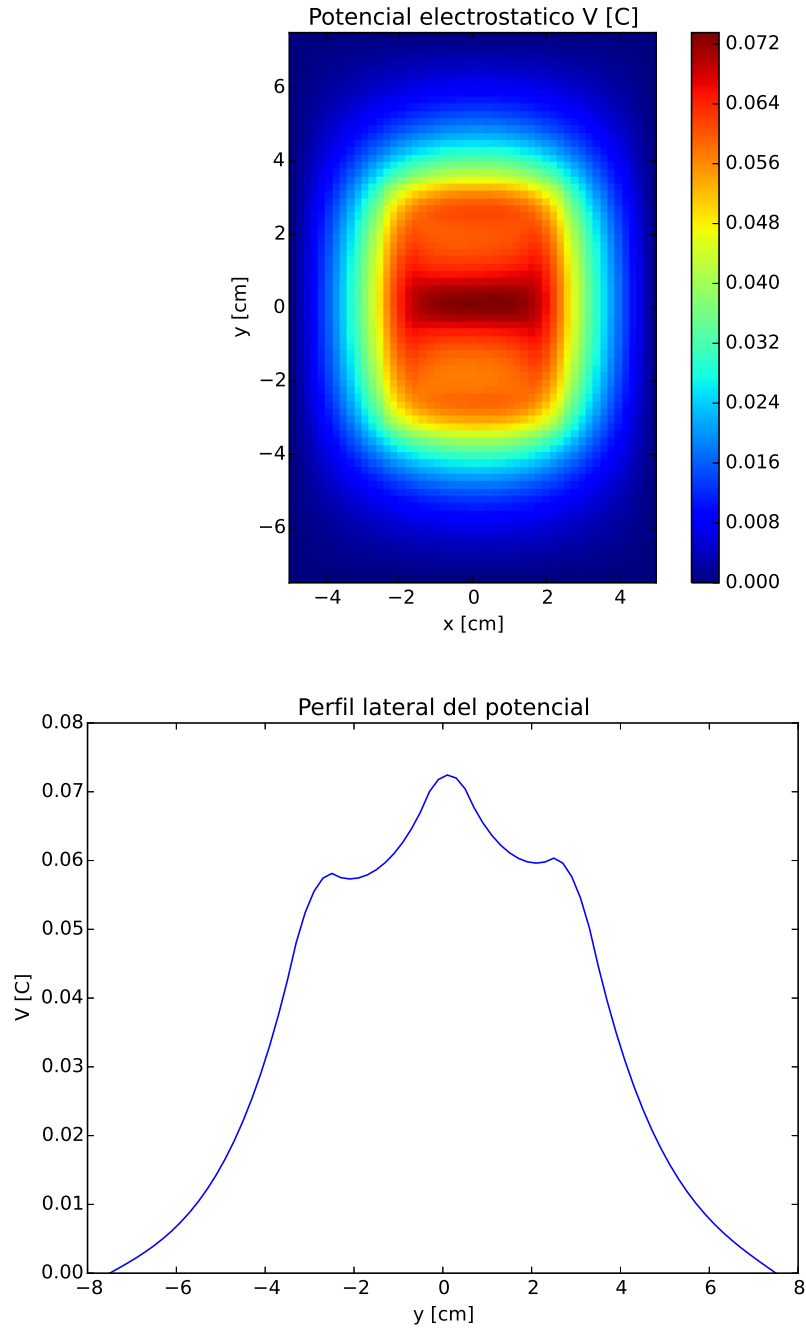


Figura 2: Solución a ecuación de Poisson sin condición de borde derivativa en  $y = -5,5 [cm]$ . Los resultados son producto únicamente de la distribución de carga. Arriba se muestra el mapa del potencial en 2D, y abajo el perfil lateral sobre la línea  $x = -0,5 [cm]$

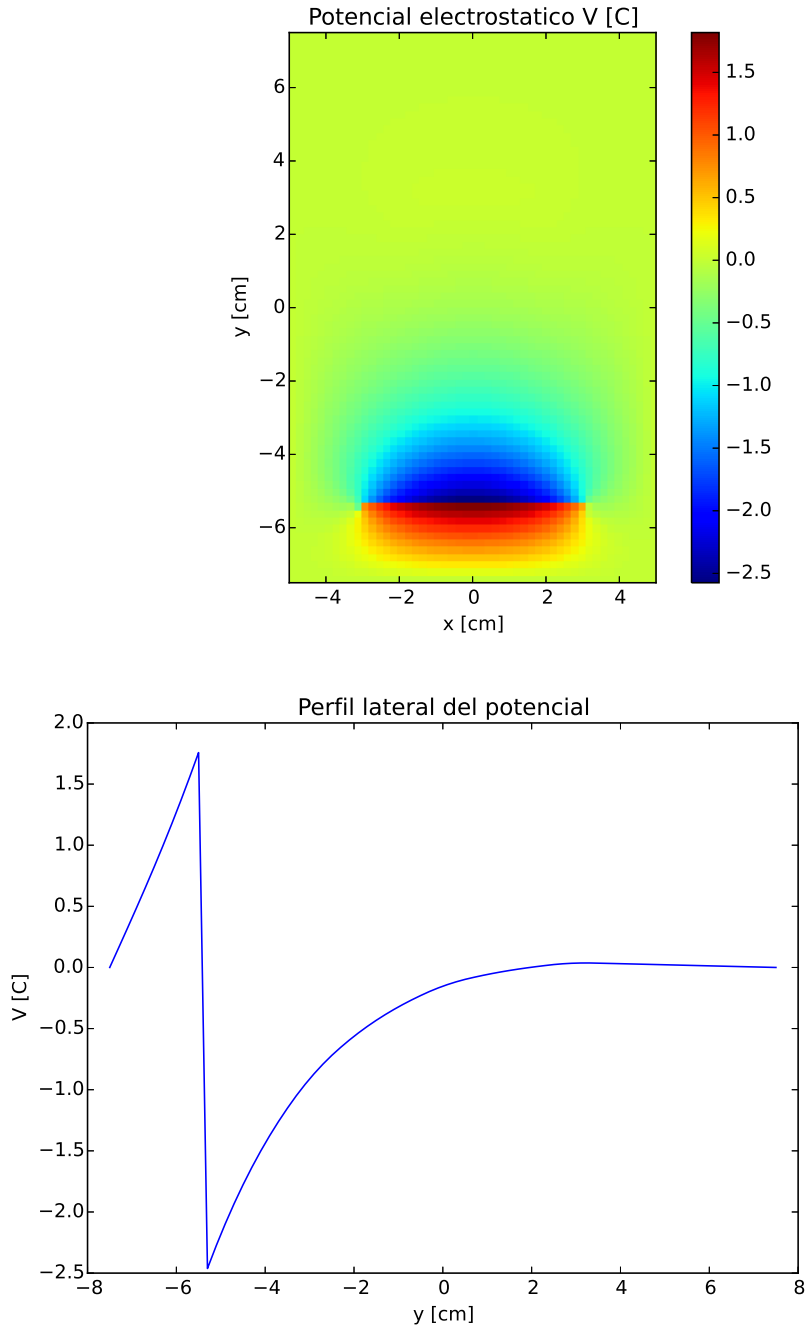


Figura 3: Solución a ecuación de Poisson con condición de borde derivativa en  $y = -5,5 [cm]$ . Arriba se muestra el mapa del potencial en 2D, y abajo el perfil lateral sobre la línea  $x = -0,5 [cm]$

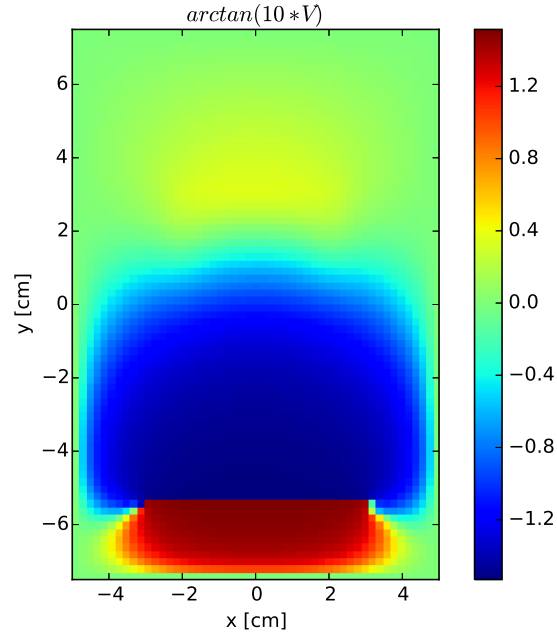


Figura 4: Solución a ecuación de Poisson con condición de borde derivativa en  $y = -5,5 \text{ [cm]}$ . El voltaje está medido en Coulomb.

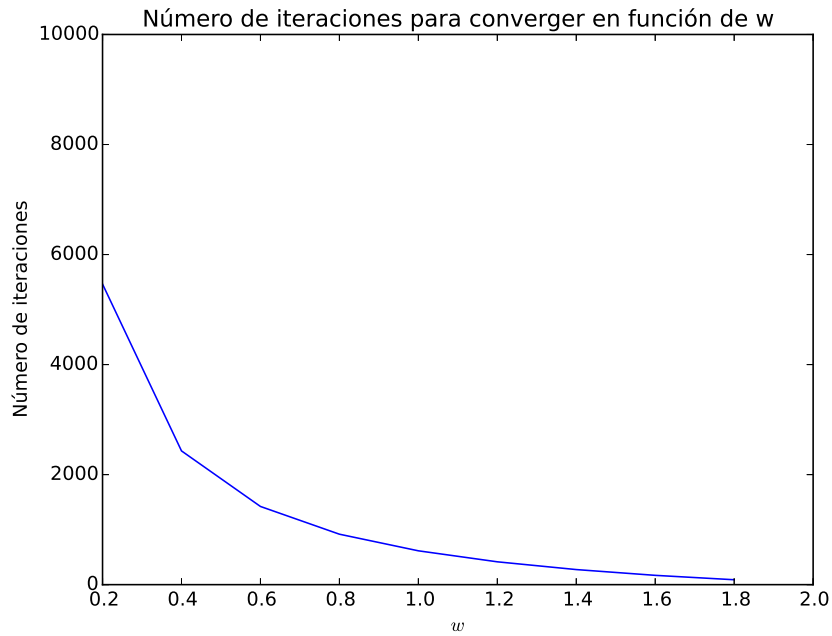


Figura 5: Número de iteraciones necesarias para que el método de sobre-relajación converja a la solución, en función de  $w$ .

responde a la arcotangente de 10 veces el potencial, para contrastar mejor las pequeñas fluctuaciones. En este caso sí es visible una región de máximo local para el potencial en torno a  $(x, y) = (0 [cm], 3 [cm])$ .

Finalmente, desde Figura 5 observamos el número de iteraciones que tomó a la solución converger a un estado casi completamente relajado. Se ve un comportamiento claramente decreciente con  $w$ , indicando que la velocidad de convergencia es mayor a medida que aumenta  $w$ . Esta curva es posiblemente ajustable a alguna función de la forma  $K/w^\alpha$ , o una exponencial del tipo  $Ke^{-\alpha w}$ , en ambos casos con  $\alpha > 0$ .

## 4. Conclusiones

La ecuación de Poisson fue integrada exitosamente. La solución obtenida satisface todas las condiciones de borde del problema (ver Figura 3), y presenta comportamientos (leves) que son consecuencia de la densidad de carga. Estas manifestaciones son pequeñas pues la densidad de carga colocada en la geometría es pequeña comparada con la necesaria para generar un gradiente de  $1 [C/cm]$ , que es el impuesto por condiciones de borde. Es posible hacer esta afirmación ya que se verificó que las cargas por sí solas producen un efecto consistente con su geometría en el potencial (en ausencia de la condición de borde derivativa), y que al aplicar una transformación a la función resultante (con la condición derivativa incluida) se observaron características que no pueden ser explicadas sino por una densidad de carga.

El aspecto más notorio de la solución es que el potencial  $V$  resultó ser discontinuo sobre la línea con condición de borde derivativa. Esto, como se explicó en la sección *Procedimiento*, no supone una contradicción puesto que las condiciones con las que se actualizan los valores sobre y en torno a la línea son tales que esta situación sea posible.

El método de sobre-relajación converge a la misma solución de forma casi independiente al parámetro  $w$ . Se dice de forma casi independiente pues a valores altos de  $w$  (i.e. 1.6 ó 1.8) se observaron perturbaciones al costado de la línea con condición de borde derivativa. Esto no fue presentado explícitamente en este informe, pero en la entrega de la tarea se adjuntan todas las imágenes necesarias para verificarlo.

También se observó que al aumentar  $w$  también lo hace la velocidad de convergencia a la solución, lo que sugiere, de forma conjunta con lo anterior, que al acelerar la convergencia el método se vuelve más inestable, lo que de alguna forma es esperable pues se esperaría tener un costo asociado a obtener la solución en menos tiempo.

En caso de tener más tiempo para resolver la tarea, se podrían realizar más cálculos y pruebas acerca de la convergencia de las soluciones, y probablemente encontrar buenos ajustes para la curva descrita por la Figura 5. Esto permitiría comprender de forma más acabada las fortalezas y debilidades de la sobre-relajación para los diferentes valores de  $w$ .