

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

FI3104-01 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Tarea N°7: Dinámica de un Gas Ideal unidimensional

Bruno Scheihing, RUT: 18.954.350-6

10 de Noviembre de 2015

Resumen

En la presente tarea se explora el comportamiento de un fluido compresible unidimensional, a partir de una pequeña perturbación en uno de sus extremos, en un dominio $x \in [0, 1]$. Como se elige una ecuación de estado $P = A\rho^\gamma$, y $\gamma = 5/3$, este fluido corresponde a un gas ideal monoatómico en régimen adiabático. Se usa la constante A como 4 si $x \leq 1/3$ y 1 en caso contrario. Para hacer la integración se usa el método de las curvas características. Se obtuvo una solución relativamente estable hasta $t = 0.3$, momento en el cual aparece un comportamiento inestable en ρ . Hasta entonces, se obtuvo un comportamiento esperable y satisfactorio para el pulso de densidad, haciendo *scattering* 3 veces sobre $x = 1/3$, en cada una de las cuales se refleja y transmite parte del pulso. De no haber errores en la implementación, es probable que la inestabilidad haya sido generada por la discontinuidad de A en $x = 1/3$, pues se observó que la intersección de curvas características se vuelve irregular entre valores de x en torno a este punto.

1. Introducción

Un gas ideal unidimensional, en ausencia de gravedad, puede ser modelado usando las ecuaciones para un fluido compresible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\partial \rho v)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad ; \quad P = A\rho^\gamma$$

Donde la última ecuación es una ecuación de estado. En el caso de un gas ideal monoatómico en régimen adiabático, $\gamma = 5/3$, que es el caso a estudiar en la presente tarea.

Se resolverán las ecuaciones anteriores usando el método de las curvas características. Se usará $A = 1$ si $x > 1/3$ y $A = 4$ si $x \leq 1/3$. Esto refleja dos “medios” diferentes para la perturbación a propagarse, que bien podrían ser dos gases diferentes, o medios con temperaturas diferentes (lo que sería cuestionable en el caso de que el problema esté en un régimen adiabático).

Además, se tendrá como condiciones iniciales y de borde que:

$$\begin{aligned} v(0, t) = 0 \quad ; \quad v(1, t) = 0 \quad ; \quad \rho(x > 10^{-1}, 0) = 1 \\ \rho(x \leq 10^{-1}, 0) = 1 + 0,0350 \cdot (1 + \cos(10\pi x)) \end{aligned}$$

Se integrará el sistema de ecuaciones desde $t = 0$ hasta que $t = 1,2$ en el centro del intervalo, usando una curva inicial en $t = 0$ con 10001 valores de x equiespaciados. Es decir, $x = 0, 0.0001, 0.0002, \dots, 0.9998, 0.9999, 1$.

2. Procedimiento

Para resolver las ecuaciones del fluido, se procede de la siguiente forma: Primero se define una cantidad c (con unidades de velocidad) mediante la siguiente relación:

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P}{\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1}$$

desde el apunte del profesor Patricio Cordero sabemos que esta cantidad c es la velocidad del sonido en ese punto del gas. La última igualdad es específica de las ecuaciones aquí tratadas. Desarrollando las ecuaciones antes planteadas en su forma diferencial, se obtiene que:

$$\rho(dx - vdt)dv = \rho[(dx - vdt)^2 - c^2 dt^2]\partial_x v - c^2 d\rho dt$$

Si nos movemos sobre curvas que mantengan a $(dx - vdt)^2 - c^2 dt^2 = 0$, entonces se obtiene que las curvas características (las que satisfacen lo anterior) son:

$$\frac{dx}{dt} = v + c \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = v - c$$

Las que respectivamente reducen la ecuación anterior a:

$$cd\rho + \rho dv = 0 \quad ; \quad cd\rho - \rho dv = 0$$

Así, se puede calcular el punto siguiente x_R, t_R sobre una curva característica a partir del punto x_P, t_P :

$$x_R - x_P = (v_P + c_P)(t_R - t_P)$$

Pero allí hay dos incógnitas, por lo que se hace uso de la otra curva característica (vista desde un punto adyacente x_Q, t_Q , con $x_Q > x_P$):

$$x_R - x_Q = (v_Q - c_Q)(t_R - t_Q)$$

También se tiene el otro par de ecuaciones sobre las características, desde donde se puede discretizar:

$$c_P(\rho_R - \rho_P) + (v_R - v_P)\rho_P = 0$$

$$c_Q(\rho_R - \rho_Q) - (v_R - v_Q)\rho_Q = 0$$

Las que permiten despejar ρ_R, v_R en términos de los valores en los puntos P y Q (donde hemos denotado por P al punto de la “izquierda” y Q al de la “derecha”). Explícitamente,

$$t_R = \frac{x_Q - x_P + (v_P + c_P)t_P - (v_Q - c_Q)t_Q}{v_P + c_P + c_Q - v_Q}$$

$$\rho_R = \frac{v_P - v_Q + c_Q + c_P}{c_Q/\rho_Q + c_P/\rho_P}$$

y basta reemplazar en las expresiones para x_R y v_R y así obtener sus respectivos valores.

A partir de estos valores, se puede seguir a partir de $n = 1$ con las siguientes expresiones para refinar los valores de x_R, t_R, v_R, ρ_R :

$$\begin{aligned} x_R^{n+1} - x_P &= \frac{1}{2}(v_P + v_R^n + c_P + c_R^n)(t_R^{n+1} - t_P) \\ x_R^{n+1} - x_Q &= \frac{1}{2}(v_Q + v_R^n - c_Q - c_R^n)(t_R^{n+1} - t_P) \\ (c_P + c_R^n)(\rho_R^{n+1} - \rho_P) &= -(v_R^{n+1} - v_P)(\rho_P + \rho_R^n) \\ (c_Q + c_R^n)(\rho_R^{n+1} - \rho_Q) &= (v_R^{n+1} - v_Q)(\rho_Q + \rho_R^n) \end{aligned}$$

e iterar hasta que los valores converjan. El despeje de t_R^{n+1}, ρ_R^{n+1} es completamente análogo. En general, para esta tarea, se pedirá que los valores converjan con una tolerancia relativa de 10^{-5} , con un máximo de n igual a 1000.

Se debe distinguir entre los pasos pares y los impares del avance sobre la grilla (x, t) , pues en el primer paso (par a impar) se tienen valores sobre los bordes y se itera hacia “adentro”, y en el siguiente se itera desde los extremos del arreglo en x hacia los bordes para recuperar las condiciones de borde. En el caso ideal, el índice de un x dentro del arreglo se mueve “hacia la derecha” en el paso de par a impar, y “hacia la izquierda” en el paso de impar a par.

Para manejar el movimiento hacia los bordes (en el paso impar a par) se usan las mismas ecuaciones que antes, tomando solamente que corresponden al lado enfrentado por el borde. Por ejemplo, para ver los puntos en el borde derecho, se usa, desde el punto extremo (con el máximo de x en el arreglo):

$$\begin{aligned} c_P(\rho_R - \rho_P) + (v_R - v_P)\rho_P &= 0 \\ x_R - x_P &= (v_P + c_P)(t_R - t_P) \end{aligned}$$

donde x_R, v_R son conocidos (se está en el borde) y se pueden despejar t_R, ρ_R . Análogamente se usan, desde el punto Q que es el mínimo de x en el arreglo:

$$\begin{aligned} c_P(\rho_R - \rho_P) + (v_R - v_P)\rho_P &= 0 \\ x_R - x_Q &= (v_Q - c_Q)(t_R - t_Q) \end{aligned}$$

para despejar los valores de t_R, ρ_R en el borde de la izquierda, pues también x_R, v_R son conocidos.

Dada la forma de las ecuaciones anteriores, se debe cuidar de que $x_P < x_Q$, de modo de asegurar que se integra hacia adelante en el tiempo. Esto no será problema desde la condición inicial, pues la podemos entregar ordenada. Sin embargo, los diferentes medios del sistema hacen que c sea discontinuo en $x = 1/3$, implicando que el tiempo avanzará de forma diferente a ambos lados de $x = 1/3$. Esto hará que eventualmente, un punto adyacente a la derecha Q alcanzará un valor de t tal que en la siguiente iteración la intersección entre las características de sí mismo con un punto P a la izquierda de $x = 1/3$ esté a la derecha de Q (o en su defecto, a la izquierda de P), en términos de x .

Por ello, se implementa el algoritmo de forma que los nuevos puntos R estén ordenados en términos de x , para así intentar que la solución se mantenga estable por más tiempo. En caso de que se repita un valor de x (al intentar ingresarlo al arreglo que describe la nueva curva), se omitirá y perderá ese dato, eventualmente disminuyendo el número de puntos disponibles para barrer el espacio. Si el algoritmo resulta estable entonces el ordenamiento será redundante, pues ya debería estar ordenado.

El programa lanzará mensajes de error en caso de que se esté asignando un punto fuera del intervalo $[0, 1]$ para x , o si se obtuvo una densidad nula o negativa para algún punto. También generará un mensaje si la velocidad del fluido supera la velocidad del sonido en sí mismo (a priori no tiene por qué causar problemas, pero mirando las fórmulas se puede observar que es una posible fuente de irregularidades).

Como el número de iteraciones a realizar para obtener la solución completa es relativamente grande, se guardarán los datos (x, t, v, ρ) una vez cada 100 etapas. Esto también provocará cierta irregularidad en los resultados a la hora de graficar, pues no se dispondrá de toda la resolución. Los resultados se presentarán como gráficos de superficie para v y ρ en función de (x, t) , y curvas $\rho(x)$, $1 + v(x)$ a tiempos fijos $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ (estas últimas en el mismo gráfico para intentar ver la correlación). Para obtener las funciones a tiempo fijo se barrerá sobre los datos disponibles buscando puntos con tiempos suficientemente cercanos al deseado (se usó una tolerancia de $\pm 10^{-3}$).

3. Resultados

Las Figuras 1,2,3 muestran las curvas $\rho(x)$ y $1 + v(x)$ a tiempo fijo. En $t = 0$ simplemente tenemos la condición inicial. Se observa que la solución va haciéndose más irregular con el avance del tiempo, aunque conserva características importantes que muestran, a pesar de la pérdida de regularidad, un comportamiento relativamente satisfactorio: La velocidad de la perturbación es distinta de cero sobre los puntos que poseen una perturbación en la densidad (c/r a 1), y está orientada de forma consistente con una reflexión sobre $x = 1$. Por otra parte, la velocidad es nula en los puntos donde no hay perturbación sobre la densidad. No se muestran gráficos para valores de t entre 0 y 0.2, pero como se verá en la Figura 4, la solución pareciera ser regular (más suave).

En las Figuras 2 y 3 se pierden valores de x hacia los extremos, presumiblemente debido a una pérdida de precisión (o que sobre los tiempos correspondientes las curvas características estén orientadas de forma tal que se alejen de los extremos, impidiendo generar puntos asociados a esas posiciones). También se observa una progresiva degeneración de la solución, hasta prácticamente no poder distinguir comportamiento alguno en $t = 1, 0$.

La Figura 4 muestra la densidad ρ y la velocidad v sobre el espacio-tiempo (x, t) . Se graficó hasta una iteración donde las soluciones todavía eran relativamente regulares, para poder apreciar adecuadamente los procesos de *scattering* en $x = 1/3$. El límite superior del color azul muestra que el tiempo no es uniforme sobre x en cada iteración (lo que está graficado es una interpolación entre los extremos: realmente el contorno de la región recorrida es mucho menos suave).

Se aprecian 3 instantes en que incide un pulso desde el lado izquierdo y es parcialmente reflejado y transmitido, evidenciando que el scattering ocurre.

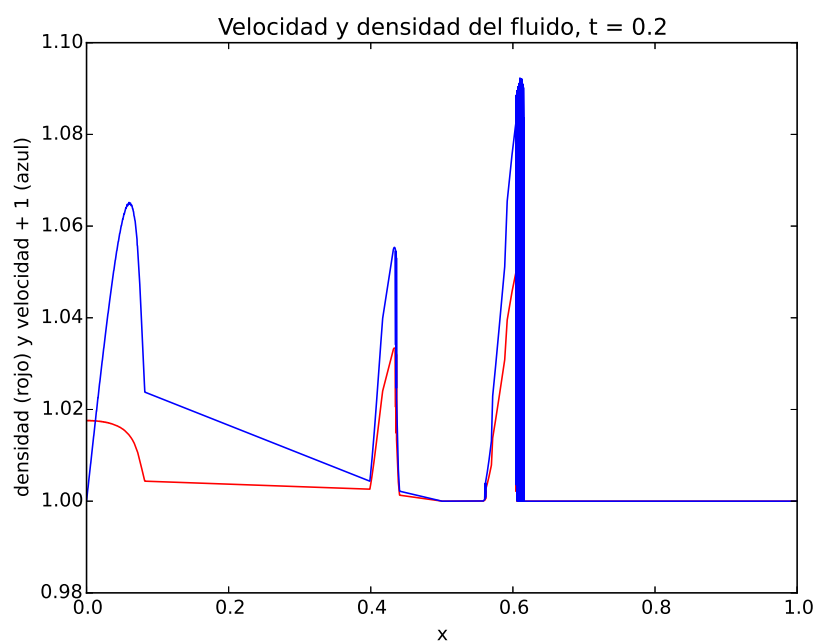
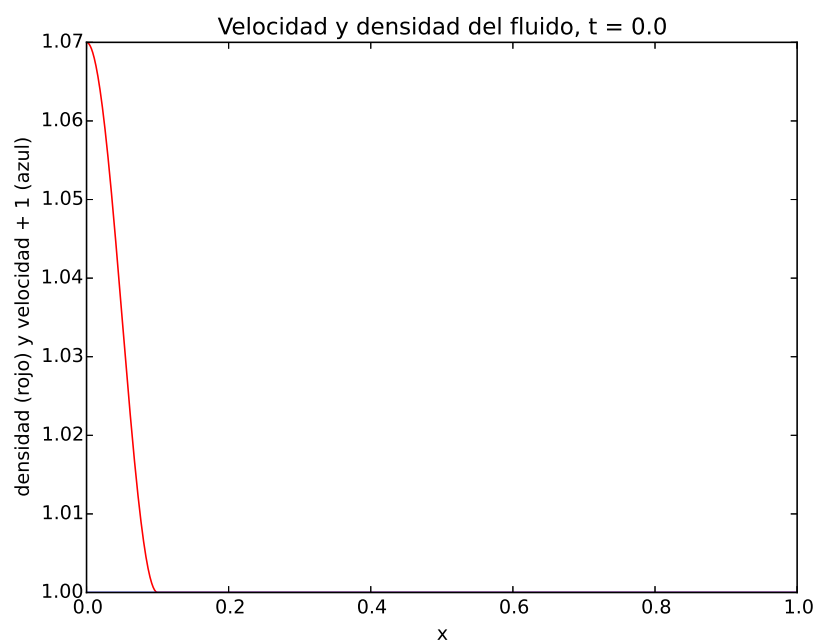


Figura 1: Plots de $\rho(x)$ (rojo) y $1 + v(x)$ (azul) para $t = 0$ y $t = 0.2$

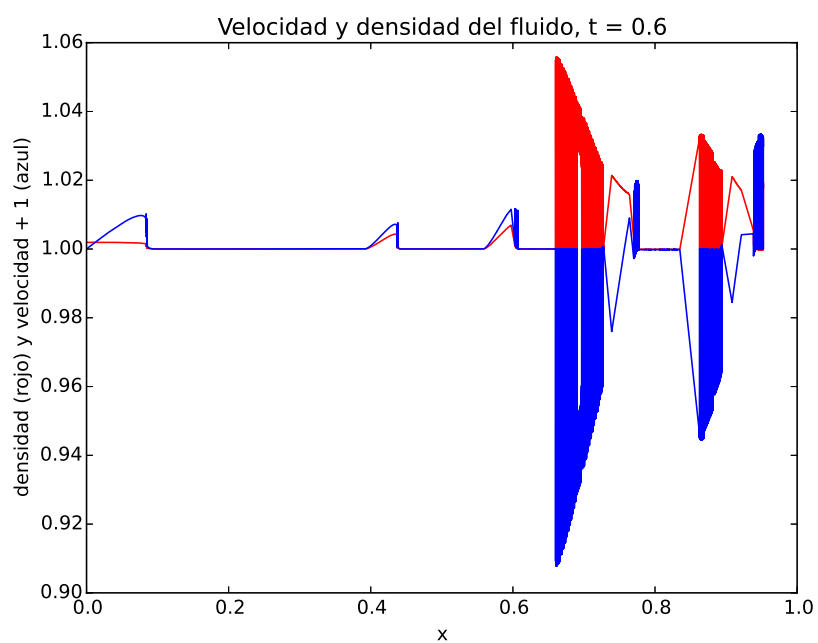
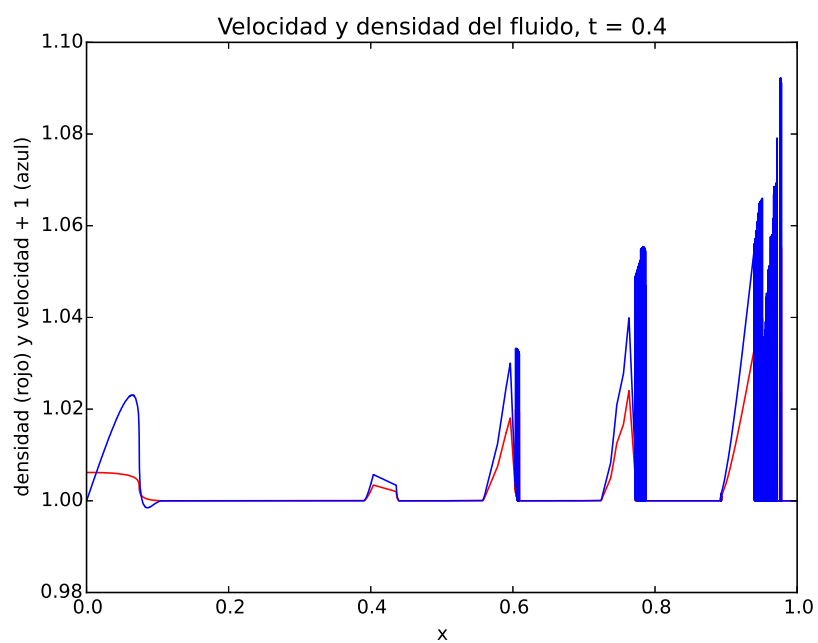


Figura 2: Plots de $\rho(x)$ (rojo) y $1 + v(x)$ (azul) para $t = 0.4$ y $t = 0.6$

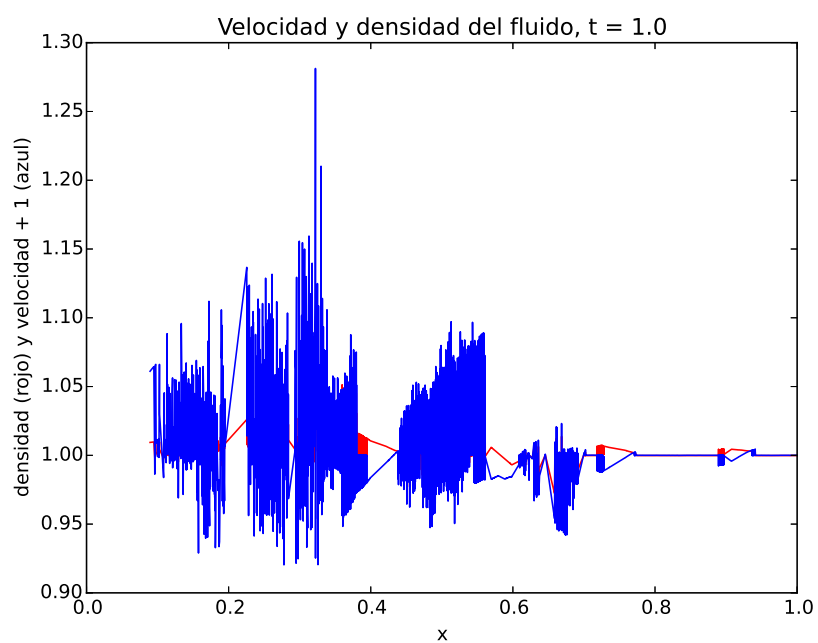
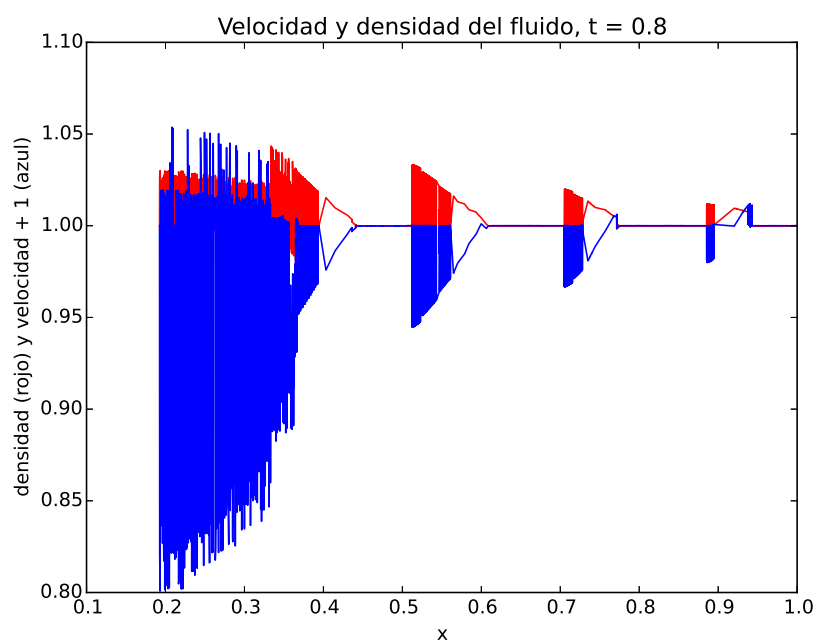


Figura 3: Plots de $\rho(x)$ (rojo) y $1 + v(x)$ (azul) para $t = 0.8$ y $t = 1.0$

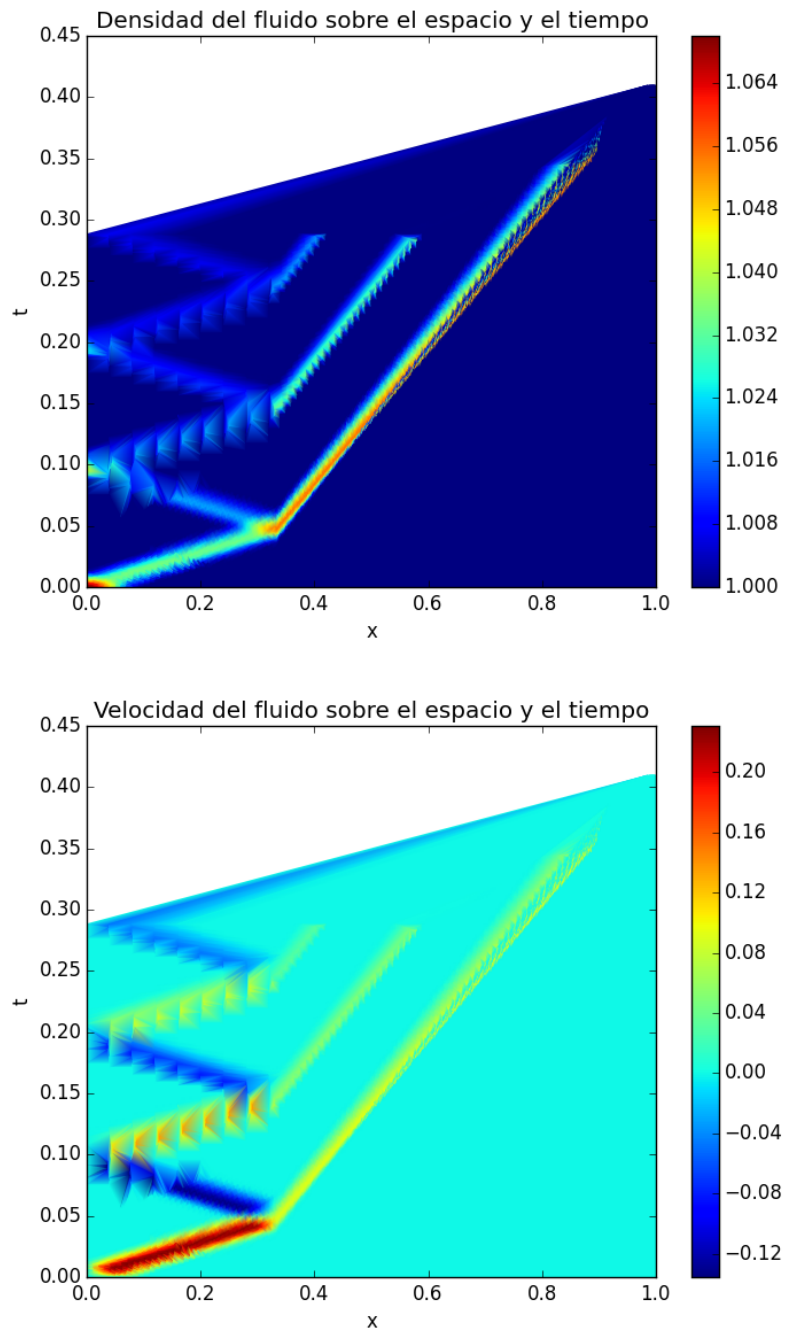


Figura 4: Densidad y Velocidad del gas en función del espacio y del tiempo

También se aprecia que el pulso se propaga más rápido en el lado izquierdo (donde $A = 4$). El comportamiento de $v(x, t)$ es casi idéntico al de $\rho(x, t)$, salvo por el signo en el caso de que el pulso viaje hacia la izquierda, y también por la escala asociada: la densidad del pulso crece al pasar hacia el medio del lado derecho, mientras que su velocidad de propagación disminuye.

Por último, se ve también en la Figura 4 que el primer pulso en atravesar $x = 1/3$ se va “desarmando” una vez que pasa $t = 0,2$, pues se observa una zona más azul en el interior del mismo, en correspondencia con lo observado en Figura 1 para $v(x)$ en $t = 0.2$.

4. Conclusiones

Para $t \leq 0.3$, (desde la Figura 4), se obtuvieron comportamientos satisfactorios de la solución al sistema de ecuaciones planteado al principio, observando un muy bien definido proceso de scattering en $x = 1/3$. Los pulsos viajan más rápido en el medio del lado izquierdo, en consistencia con un valor más alto de c (pues A es mayor que al otro lado). También se observa que los pulsos son más densos en el lado derecho. Esto aparece principalmente por conservación de masa: si incide una cantidad de masa moviéndose rápidamente, y este movimiento es frenado, necesariamente la masa se comprime al otro lado del scattering (salvo que la tasa de reflexión sea muy alta, y no es el caso).

En la Figura 8, en la región $x \leq 1/3$ la velocidad pareciera irse atenuando a medida que avanza el tiempo (pues el color es menos extremo). Sin embargo, hay que considerar que para esos momentos hay una superposición de pulsos en sentidos contrarios como producto de las reflexiones, por lo que la velocidad de cada elemento de masa no tiene por qué corresponderse con la rapidez de propagación de la fluctuación. Un ejercicio interesante sería comparar la velocidad efectiva de propagación del pulso, contra la velocidad local y la velocidad local del sonido. Esto queda propuesto para un estudio posterior, pues la característica más relevante que exhibió la solución fue su inestabilidad a partir de $t = 0.3$, y consumió al autor la mayor cantidad de tiempo durante el desarrollo de esta tarea.

Es posible ver que, dado el valor de A en cada medio, al comienzo de la solución el tiempo avanza mucho más rápido (4 veces más rápido) al lado “derecho” ($x > 1/3$), creando una discontinuidad en los valores para el tiempo en $x = 1/3$. A medida que avanza la solución, se alcanza un punto en que esta diferencia será tal que la intersección de las características, desde puntos adyacentes que tengan a $x = 1/3$ en medio, quedará fuera del intervalo entre los puntos, haciendo que el punto generado quede fuera de la zona que le corresponde.

Se proponen dos alternativas para lidiar con esto: a) Insertar el nuevo punto en la mejor posición para el x que le corresponde, aunque al tener valores de t, v distintos a sus nuevos adyacentes esto creará irregularidades (menos que si se le dejara el mismo índice que antes), para así retrasar la pérdida de precisión (pues el efecto de un punto puede ser absorbido por el grueso de los datos en $x > 1/3$), o bien b) Eliminar dicho punto y terminar la característica asociada allí. Esto último puede parecer lo más efectivo, pero realmente se terminan eliminando demasiados puntos, pues antes de llegar a $t = 0.2$ la grilla de x disminuye desde largo 10000 hasta 5000, implicando una pérdida de precisión mayor que en a) (se verificó paralelamente). En el código adjunto se encuentra implementada la

opción a), y efectivamente la solución pierde estabilidad dado suficiente tiempo, pues el lado izquierdo va “perdiendo puntos” y se genera una sobrepoblación de los mismos hacia $x = 1$, que dados sus orígenes diferentes desestabilizan la solución (muchos acaban de saltar desde $x \sim 1/3$ cuando $t \sim 0.3$, y por lo tanto tienen velocidades, tiempos y densidades inconsistentes).

Otra forma de solucionarlo (o atenuarlo) sería considerar la solución sobre cada “lado” por separado y hacer que las soluciones interactúen solo cuando estén en tiempos similares, pero entonces no es claro cómo definir la condición de borde hacia cada lado, pues ambos lados son variables en el tiempo, velocidad y densidad.

Todo lo anterior es salvo un error en la implementación del código, que al autor le parece improbable pues la solución exhibió un comportamiento satisfactorio mientras no hubo tiempo suficiente para que ocurra la desestabilización antes descrita. Probablemente es posible implementar un código más eficiente (en términos de tiempo) que permita testear de mejor forma los comportamientos observados.

En resumen, dentro de los instantes de tiempo para los cuales la solución implementada es estable, el comportamiento obtenido es satisfactorio e incluso esperable. Una vez que se deja pasar suficiente tiempo, el código implementado pasa a una solución irregular en términos de ρ, v . Queda propuesto hacer un estudio completo de estas ecuaciones, bajo las condiciones especificadas para los parámetros, que sea más estable con el avance del tiempo.