

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

FI3104-01 Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Tarea N°9: Constante de Hubble y relación entre bandas i , z de cuásares

Bruno Scheihing, RUT: 18.954.350-6

24 de Noviembre de 2015

Resumen

En la presente tarea se buscó estimar el valor de la constante de Hubble, a partir de las mediciones que originalmente utilizó Edwin Hubble en 1929, y también desde los datos presentados en una medición más reciente. Se encontró que los datos utilizados por Edwin Hubble entregan un valor muy alejado ($\approx 470 [km/(s \cdot Mpc)]$) del que se obtiene usando datos actuales ($\approx 70 [km/(s \cdot Mpc)]$). Esto proviene de un error en la calibración para los datos originales. Por otra parte, se buscó encontrar una relación entre el flujo de las bandas i y z a partir de un catálogo de cuásares (SDSS). Se encontró una recta que visualmente ajusta bien los datos, con intervalos de confianza asociados relativamente estrechos para los parámetros, por lo que se puede decir que el modelo representa relativamente bien el comportamiento de los datos.

1. Introducción

La constante de Hubble es una medida de la tasa de expansión del universo. En 1929, Edwin Hubble comparó la velocidad de recesión de las *Nebulosas* en función de la distancia a la que se encontraban, y a partir de esos datos propuso un modelo:

$$v = H_0 * D$$

donde H_0 es la constante de Hubble, v es la velocidad de recesión del objeto y D es la distancia a la que se encuentra dicho objeto.

En la presente tarea se buscará reproducir los resultados de Edwin Hubble con los datos originales, y luego rehacer el cálculo de forma análoga con datos recopilados recientemente (Freedman et al. 2000) usando supernovas tipo I. En ambos casos se entregará el intervalo de confianza al 95 % asociado al ajuste del modelo.

Por otra parte, se buscará encontrar la línea recta que mejor modela la relación entre el flujo en la banda i y la banda z del catálogo de cuásares del *Data Release 9* del *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). También se reportará el intervalo de confianza al 95 % de los parámetros ajustados.

Se presentarán resultados en forma de gráficos para los ajustes realizados, y para la distribución de los parámetros de los modelos con sus respectivos intervalos de confianza.

2. Procedimiento

2.1. Constante de Hubble

Para estimar la constante de Hubble con el modelo $v = H_0 * D$ se procede a minimizar la siguiente función:

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^N (v_i - H_0^1 * D_i)^2$$

pero notamos que también podríamos minimizar:

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^N (D_i - v_i / H_0^2)^2$$

por lo que minimizaremos ambas y después promediaremos los resultados de forma adecuada. Los mínimos respectivos ocurren cuando:

$$\frac{\partial \chi_1^2}{\partial H_0^1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \chi_2^2}{\partial H_0^2} = 0$$

condiciones respectivamente equivalentes a:

$$H_0^1 = \frac{\sum_i v_i D_i}{\sum_i D_i^2} \quad ; \quad H_0^2 = \frac{\sum_i v_i^2}{\sum_i v_i D_i}$$

donde las sumas son sobre los datos disponibles.

Para promediar los resultados obtenidos, necesitamos un método que sea simétrico entre v y D . Es decir, cualquiera sea el método elegido para promediar, el resultado debe ser el mismo, ya sea promediando H_0^1 con H_0^2 ó $1/H_0^1$ con $1/H_0^2$. No es difícil convencerse de que:

$$H_0 = \tan \left(\frac{\arctan(H_0^1) + \arctan(H_0^2)}{2} \right)$$

preserva la simetría que queremos al promediar. Esto es porque corresponde a promediar los ángulos asociados a las pendientes del gráfico, lo que es invariante frente al eje de referencia que elijamos como dominio (v ó D). Sin embargo, esta forma de promediar no preserva la simetría deseada al cambiar la escala (unidades) de uno de los ejes. No nos preocuparemos mucho por esto, aunque deberemos mantener en mente esta característica del ajuste.

El procedimiento es idéntico para los datos en *hubble_original.dat* que para *SN1a.dat*.

Para estimar los intervalos de confianza, se hace una simulación tipo Bootstrap: se procede a tomar una muestra de N elementos (con repetición) de la muestra completa (de tamaño N). Con los elementos recogidos, se repite el proceso de minimización antes descrito N_B veces y se obtienen nuevos valores para H_0 . Estos valores son ordenados en forma creciente en un arreglo de tamaño N_B , y se deducen los límites del intervalo de confianza tomando los elementos de índices $N_B/40$, correspondiente al percentil 2,5 %, y $39N_B/40 - 1$, correspondiente al percentil 97,5 % (con los índices en términos de **Python**).

Para cada set de datos, se elegirá $N_B = N^3$, con N el tamaño del set de datos (lo que usualmente se sugiere es $N \log(N)^2$, pero las muestras son pequeñas).

2.2. Relación entre flujo de bandas i y z en cuásares

Se quiere encontrar la línea recta que mejor modela la relación entre el flujo por la banda i y el flujo por la banda z . Antes de hacer cualquier cosa, se convertirán las unidades de los datos desde *nmaggies* a 10^{-6} *Jy*. Para ello, se usará la rutina **numpy.polyfit**, que entrega un ajuste polinomial a un par de set de datos correspondientes, que en este caso se utilizará hasta primer orden. Como el ajuste no es necesariamente simétrico, se ajustarán tanto $z(i)$ como $i(z)$, donde $z(i)$ será el flujo de la banda z en función del flujo de la banda i e $i(z)$ su inversa. Los ajustes entregarán como resultado:

$$z(i) = a * i + b \quad ; \quad i(z) = c * z + d$$

Para hacer el ajuste simétrico, primero buscamos el punto de intersección i_c, z_c entre ambos ajustes (que existirá en la medida que los ajustes sean distintos), dado por:

$$i_c = \frac{bc + d}{1 - ac} \quad ; \quad z_c = a * \frac{bc + d}{1 - ac} + b$$

y queremos plantear una relación de la forma $z - z_c = m(i - i_c)$, con m la pendiente de la recta. Las pendientes obtenidas desde los ajustes, consistentes con la expresión anterior, son $a, 1/c$. Para obtener un promedio seguiremos el mismo razonamiento que para la constante de Hubble y definiremos:

$$m = \tan \left(\frac{\arctan(a) + \arctan(1/c)}{2} \right)$$

con lo que tendremos un ajuste simétrico. Así,

$$z(i) = m * i + z_c - m * i_c$$

será el modelo lineal a obtener, y los parámetros obtenidos serán m (pendiente) y $p = z_c - m * i_c$ (coeficiente de posición).

Para estimar el intervalo de confianza, se harán $N_{mc} = 100000$ simulaciones de Monte-Carlo, generando en cada una un set de datos a partir de los registrados y sus errores, de la forma:

$$x_i^{mc} \sim \mathcal{N}(x_i, \Delta x_i)$$

$$y_i^{mc} \sim \mathcal{N}(y_i, \Delta y_i)$$

y para cada una de las simulaciones se repetirá el ajuste descrito antes para los nuevos datos (en lo anterior asumimos que los errores son gaussianos). Estas simulaciones entregarán N_{mc} valores para m y p . Para cada uno de estos parámetros se determina un intervalo de confianza, considerando los percentiles 2,5 % y 97,5 % desde los arreglos ordenados de los parámetros.

3. Resultados

3.1. Constante de Hubble

La Figura 1 muestra los resultados de realizar el ajuste antes descrito a los datos que utilizó Edwin Hubble en su trabajo. El valor de H_0 obtenido corresponde a:

$$H_0 = 467.22 [km/(s \cdot Mpc)]$$

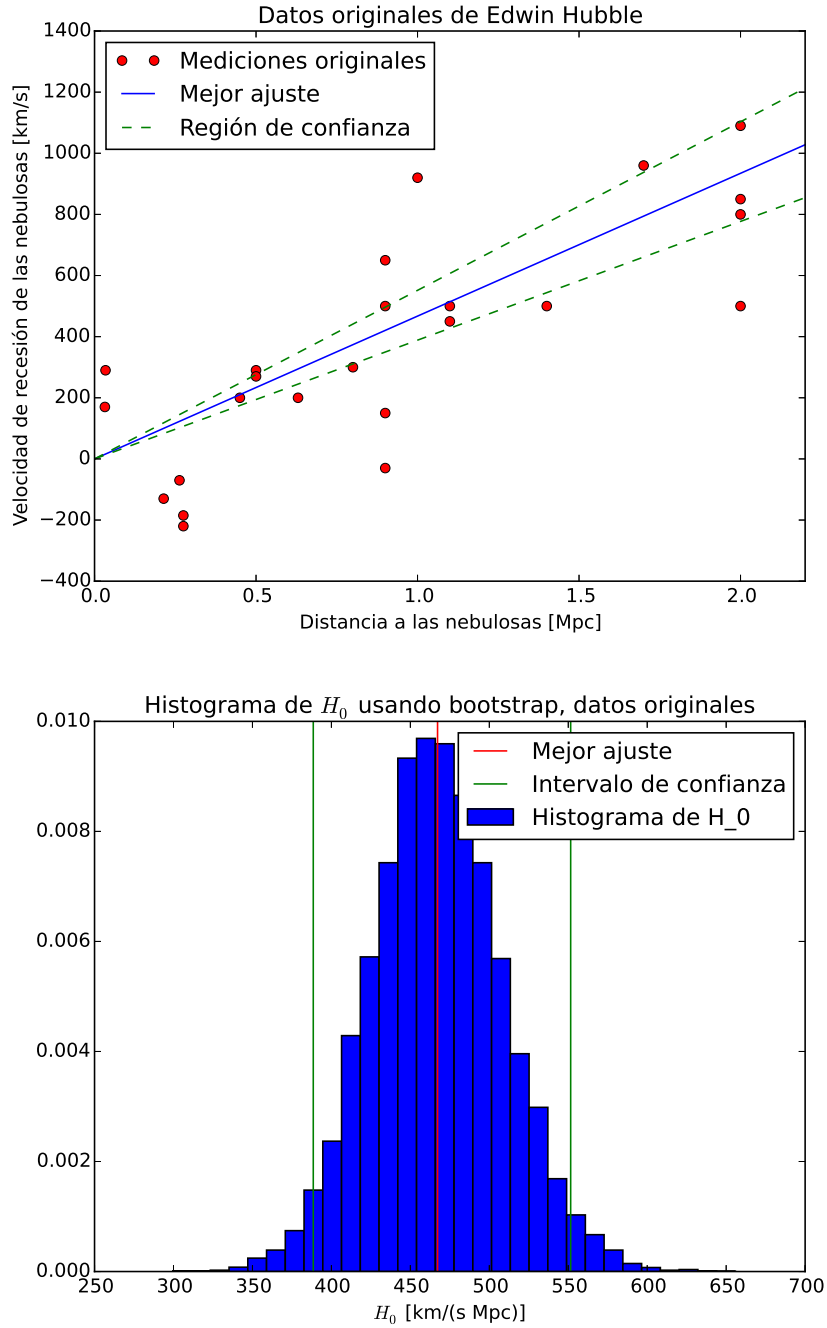


Figura 1: Ajuste realizado para obtener la constante de Hubble H_0 , a partir de los datos que utilizó Edwin Hubble. Arriba datos y ajuste realizado, con valores límite del intervalo de confianza para H_0 . Abajo histograma normalizado con distribución de H_0 generada con simulación de bootstrap, para estimar el intervalo de confianza.

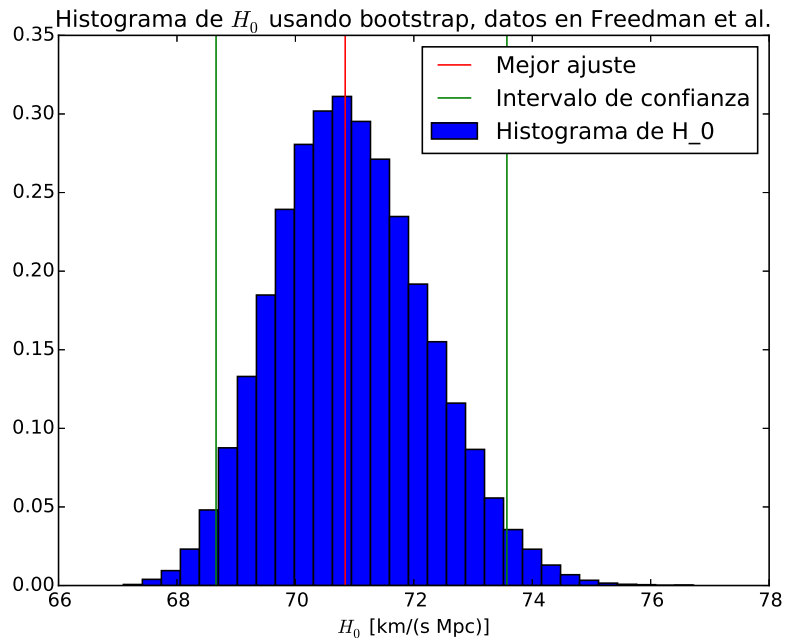
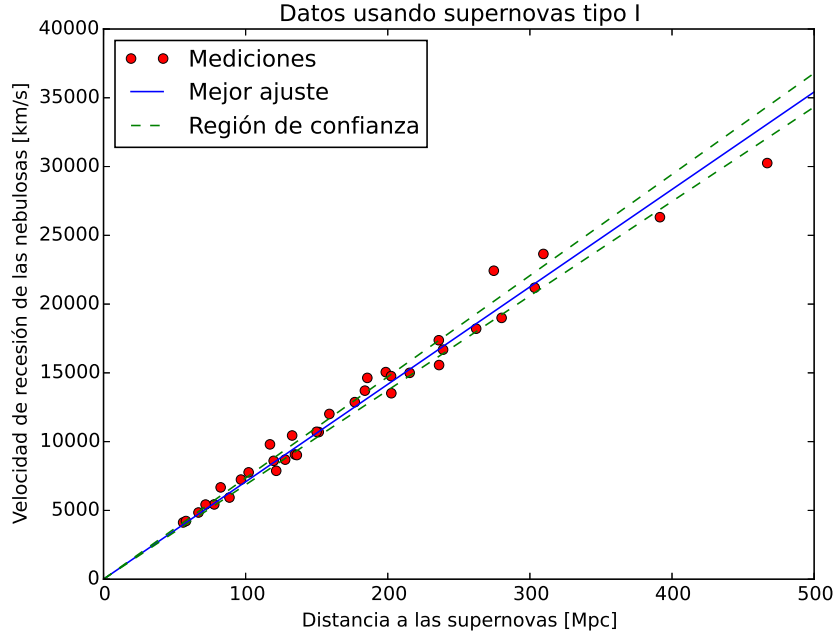


Figura 2: Ajuste realizado para obtener la constante de Hubble H_0 , a partir de los datos presentados en Freedman et al. (2000). Arriba datos y ajuste realizado, con valores límite del intervalo de confianza para H_0 . Abajo histograma normalizado con distribución de H_0 generada con simulación de bootstrap, para estimar el intervalo de confianza.

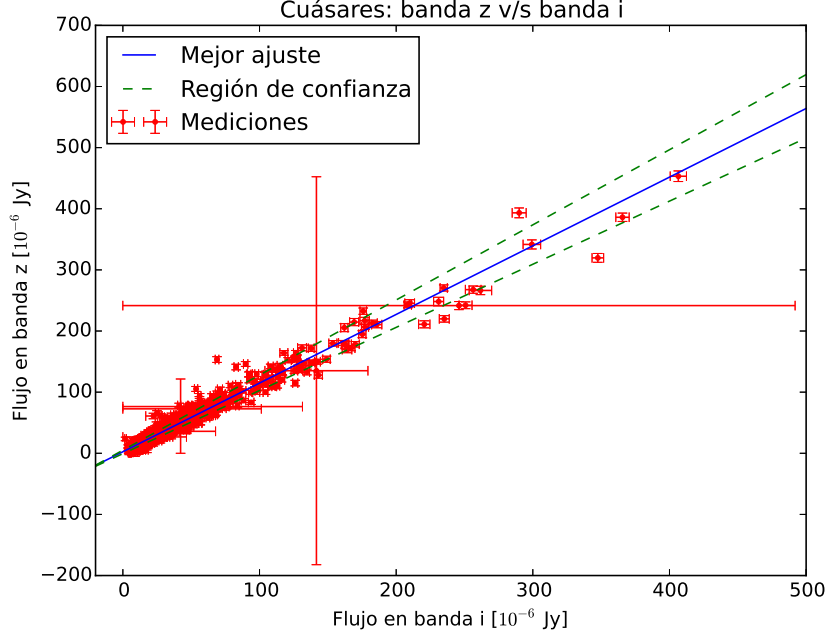


Figura 3: Ajuste lineal a flujos en bandas i , z a partir del catálogo de cuásares del *Data Release 9* del SDSS. La línea azul muestra el mejor ajuste, y las líneas verdes las rectas definidas por los parámetros al límite de sus intervalos de confianza (no necesariamente provienen del mismo ajuste).

con un intervalo de confianza al 95 % dado por:

$$(388.51 [km/(s \cdot Mpc)], 551.53 [km/(s \cdot Mpc)])$$

La Figura 2 muestra los resultados de realizar el ajuste antes descrito a los datos presentados en Freedman et al. (2000). El valor de H_0 obtenido corresponde a:

$$H_0 = 70.84 [km/(s \cdot Mpc)]$$

Las líneas discontinuas de color verde en los gráficos muestran visualmente, comparando con los datos, la región que modela el intervalo de confianza.

El intervalo de confianza al 95 % está dado por:

$$(68.66 [km/(s \cdot Mpc)], 73.58 [km/(s \cdot Mpc)])$$

En ambos casos el mejor ajuste está relativamente centrado en el histograma respectivo, y sobre el *bin* de mayor cantidad de datos.

3.2. Relación entre flujo de bandas i y z en cuásares

La Figura 3 muestra los resultados del ajuste lineal, descrito en *Metodología*, que relaciona el flujo de la banda i con el flujo de la banda z en cuásares. El modelo ajustado, de la forma $z = m * i + p$ entregó parámetros óptimos:

$$m = 1.12 \quad ; \quad p = 2.50 [10^{-6} Jy]$$

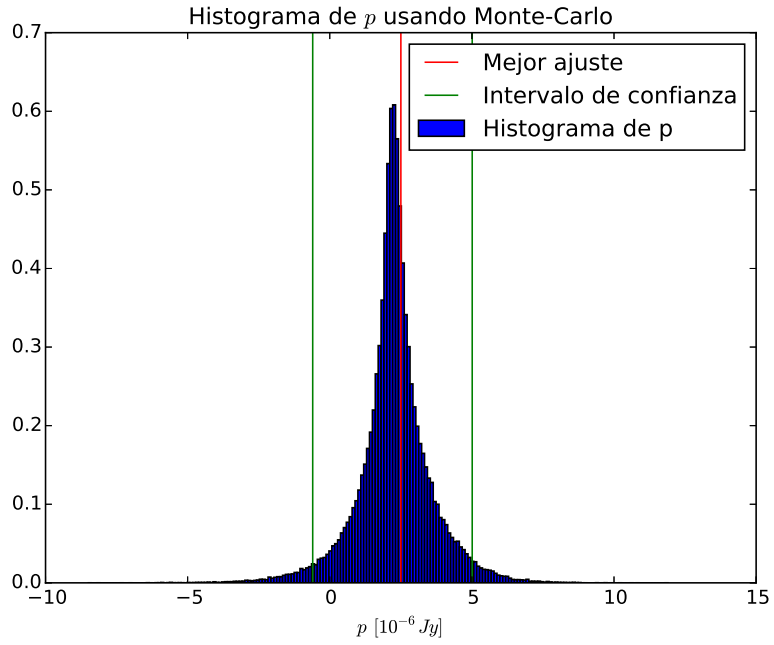
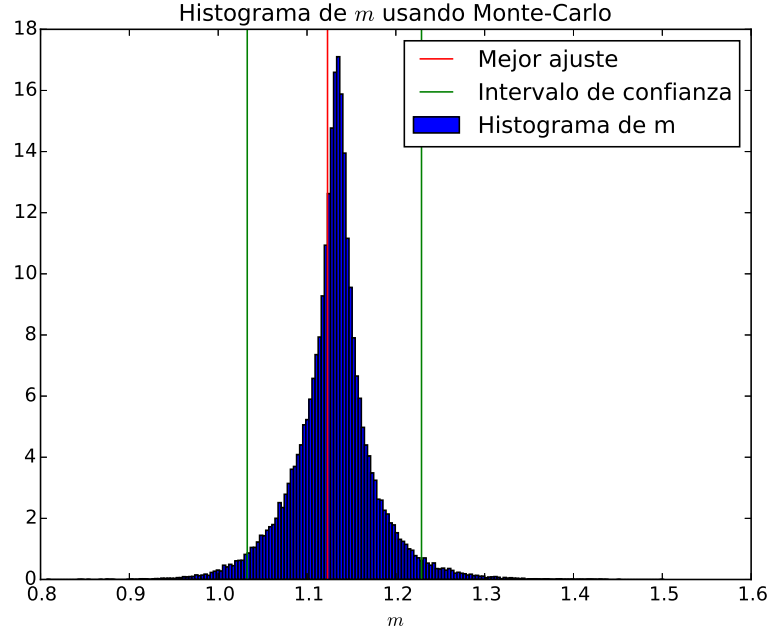


Figura 4: Histogramas normalizados de parámetros en ajuste lineal a flujos en bandas i , z , generados vía simulación de Monte-Carlo usando los errores asociados a la muestra y repitiendo el ajuste.

con intervalos de confianza para m y p dados respectivamente por:

$$m : (1.03, 1.23) \quad ; \quad p : (-0.6 [10^{-6} Jy], 5.02 [10^{-6} Jy])$$

La Figura 4 muestra estos intervalos junto con la distribución generada a partir de N_{mc} simulaciones de Monte-Carlo, para cada uno de los parámetros. Notamos que las distribuciones no están centradas en los parámetros asociados al mejor ajuste. Esto bien puede ser porque los parámetros no son independientes entre sí, implicando que un cambio en uno determine al otro, o bien por propiedades intrínsecas de la muestra, que marquen una dirección privilegiada para el ajuste.

Las líneas verdes, análogamente a los gráficos de la constante de Hubble, muestran las rectas definidas por los parámetros al límite de sus intervalos de confianza, donde los parámetros en cada recta no necesariamente vienen del mismo ajuste, sino que es solamente para dar una idea visual del rango en que oscila el modelo lineal al simular con los errores asociados.

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos para la constante de Hubble muestran que los datos originales estaban bastante lejos de representar el valor que actualmente se conoce. Los datos originales entregan que $H_0 \approx 470 [km/(s \cdot Mpc)]$, y usando datos más recientes (Freedman et al. 2000) se obtiene $H_0 \approx 70 [km/(s \cdot Mpc)]$, valor que se compara bastante mejor con otras fuentes actuales.

Sin embargo, en ambos ajustes el modelo $v = H_0 * D$ entregó un intervalo de confianza razonablemente pequeño para la constante de Hubble, lo que sugiere que efectivamente es un buen modelo, en el sentido de que los datos efectivamente muestran una tendencia acorde. Quizá es esta la mayor contribución que hizo Edwin Hubble: mostrar que este modelo efectivamente tiene sentido, más allá de que el valor la constante que determinó esté lejos de su valor efectivo.

Con respecto a la relación entre los flujos de las bandas i y z del catálogo de cuásares, se encontró una recta que visualmente ajusta bien los datos, con un intervalo de confianza comparativamente pequeño para p (con respecto al orden de magnitud de los datos), y razonablemente pequeño para la pendiente m del gráfico. Se observó que los parámetros del mejor ajuste no están en la posición de máximo de sus histogramas correspondientes, como sí ocurre con la constante de Hubble. Esto puede ser debido a la correlación entre los parámetros del ajuste (m y p no son independientes), o bien a que las propiedades de la muestra son tales que pequeñas perturbaciones a la misma (introducidas a través de simulaciones de Monte-Carlo) induzcan una dirección privilegiada.

Por otra parte, el fit realizado a los flujos de las bandas i y z permite deducir que la relación entre ellas puede ser bien descrita por una función lineal con coeficiente de posición nulo, pues en general el coeficiente p encontrado está bastante por debajo del orden de magnitud de los datos. Una buena forma de seguir estudiando la relación entre los flujos puede ser haciendo nulo el coeficiente de posición siempre, y ver qué valor se obtiene para la pendiente.