PROBABILITÉS SUR LES ENSEMBLES FINIS

I. VOCABULAIRE DES PROBABILITÉS

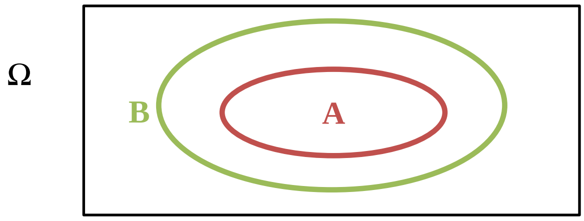
Il s'agit d'étudier une **expérience aléatoire** (= épreuve aléatoire) : c'est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut prévoir l'issue avec certitude.
Ex. : jet de dé.

Un événement est lié à une expérience aléatoire si, à la fin de cette expérience, il est possible de dire si cet événement est réalisé ou non.
On appelle **événement élémentaire** un événement qui ne fait intervenir qu'un seul résultat de l'expérience.

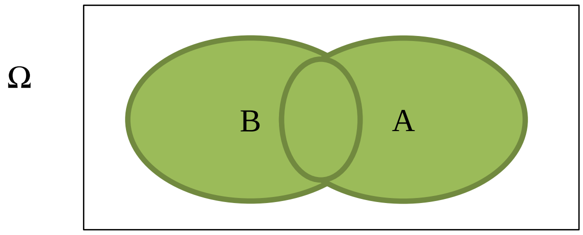
On appelle **univers** (= ensemble fondamental = espace des probabilités), et on note Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles. Un élément ω de Ω est **un résultat = une issue**.

➔ **Opérations sur les événements :**

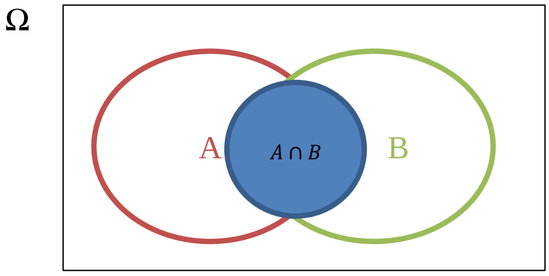
- **Inclusion A ⊂ B** : A est inclus dans B si tous les éléments de A appartiennent à B



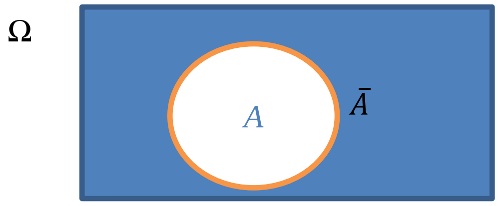
- **Union A ∪ B** : Regroupe tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B.



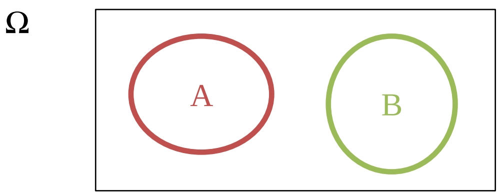
- **Intersection A ∩ B** : Regroupe tous les éléments qui appartiennent à A **et** à B.



- Événement **contraire de A = Complémentaire de A** : c'est l'événement, noté $\bar{A}$, qui se réalise si A ne se réalise pas (et inversement).
  On a $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et a $A \cup \bar{A} = \Omega$



- Deux événements sont dits **incompatibles = disjoints** si la réalisation de l'un exclut celle de l'autre, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$



- **L'ensemble des parties (= sous-ensembles) de Ω, noté $\mathcal{P}$ (Ω),** constitue l'ensemble des événements liés à une expérience aléatoire.

II. CALCUL DES PROBABILITÉS

A – Définition

Soit Ω un univers fini. Une distribution de **probabilité** associe à tout événement de Ω un nombre compris entre 0 et 1.

B – Propriétés

- $P(\Omega) = 1$ car Ω est l'événement certain
- $\emptyset$ est l'événement impossible, donc $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Théorème :

$\forall$ *A et B* alors $\quad$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Cas particulier :

$\forall$ *A et B* disjoints alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Si on peut décomposer Ω en n événements A_i mutuellement incompatibles, tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
On définit les probabilités $p_i = P(A_i)$ *telles que* $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_1^n p_i = 1$.

C – Equiprobabilité

Elle correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Ex. : lancer de dé équilibré (non pipé), …

Si les n événements élémentaires sont équiprobables, chacun a la probabilité $\frac{1}{n}$.

Dans le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité, la probabilité d'un événement *A* est

$$P(A) = \frac{nombres\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

III. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE – ÉVÉNEMENTS INDEPENDANTS

A – Probabilité conditionnelle

→ Il s'agit de déterminer la probabilité d'un événement B sachant que l'événement A est réalisé.

On représente ce type de situation par **un arbre de probabilité**.

On a :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Remarque : $P_A(B)$ se note aussi $P(B/A)$.

Propriétés :

- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$ **SI** B et C sont incompatibles.
- $P_A(\Omega) = 1$
- Pour tous événements *A* et *B* de probabilités non nulles, on a, d'après la formule:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ => $P(A \cap B) = P_A(B)*P(A)$ *et,*

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ => $P(A \cap B) = P_B(A)*P(B)$. *Donc*

$$P(A \cap B) = P_A(B)*P(A) = P_B(A)*P(B)$$

Cela veut dire que $P_A(B) = \frac{P_B(A)*P(B)}{P(A)}$ et que $P_B(A) = \frac{P_A(B)*P(A)}{P(B)}$ (s'aider de l'arbre).

B – Evénements indépendants

Définition : deux événements A et B sont dit **indépendants** ssi :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)*P(B)}$$

Remarques:

1. Si $P(A)$ et $P(B) \neq 0$, A et B sont indépendants ssi $P_A(B)=P(B)$ou $P_B(A)=P(A)$.
2. Ne pas confondre évènements indépendants $(P(A \cap B) = P(A) * P(B))$ et événements incompatibles $(P(A \cap B) = 0)$.

IV. APPROCHE DE LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Exemple :
La probabilité d'obtenir un nombre pair en lançant un dé est égale à ½.
Si on réalise l'expérience « en vrai », répétée n fois, on obtient statistiquement la fréquence de cet événement.

- ➔ Plus n est élevé, plus la fréquence se stabilise autour de p = ½.

Théorème : On obtient, au cours de n expériences indépendantes, une fréquence d'apparition de l'événement A, aussi proche que l'on veut de p, lorsque n est suffisamment grand.