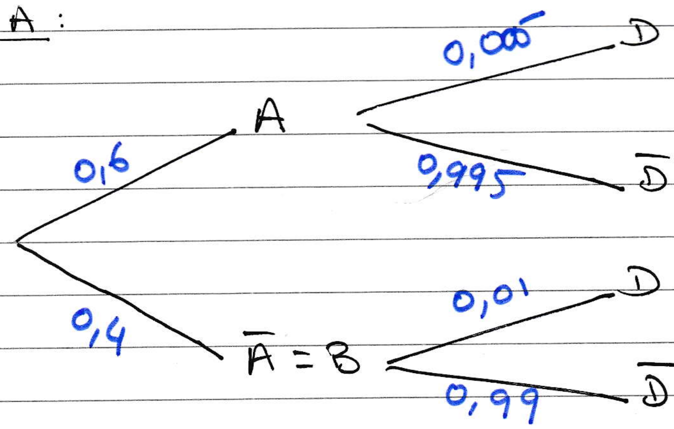
Corrigé du BTS UF2 - Polynésie 2019

Exercice 1 :

Partie A :

1-



2. $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$

$= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$

$= 0,6 \times 0,005 + 0,4 \times 0,01$

$= 0,003 + 0,004$

$= \underline{0,007}$

3. $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,004}{0,007} \simeq \underline{0,571}$

Partie B :

1. On répète 50 fois la même expérience, de façon indépendante (tirage avec remise). Cette expérience a 2 issues possibles :
   - le composant est défectueux, avec la probabilité $p = 0,007$
   - le composant n'est pas défectueux, avec la proba $1 - p = 0,993$

alors la variable aléatoire X associée au nombre de composants défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,007$.

2. $P(X = 0) = \underline{0,704}$ à la calculatrice

3. $P(X \leq 1) = \underline{0,952}$ à la calculatrice

Partie C :

$Y \sim \mathcal{N}(100 ; 10)$

1. $P(Y \geq 110) \approx \underline{0{,}159}$ à la calculatrice

2. $P(Y \geq 90) \approx \underline{0{,}841}$ à la calculatrice

Partie D :

1. $P(T \geqslant t) = R(t) = \boxed{e^{-\lambda t}}$ fonction de fiabilité

2. On cherche λ sachant que pour $t = 24$ on a $e^{-\lambda \times 24} = 0{,}698$

$\Leftrightarrow -24\lambda = \ln 0{,}698 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 0{,}698}{-24} \approx \underline{0{,}015}$

3. a) $E(T) = MTBF = \dfrac{1}{\lambda} \approx \underline{67}$

b) 3 ans = 36 mois

$P(T \geq 36) = R(36) = e^{-\lambda \times 36} = e^{-0{,}015 \times 36} \approx \underline{0{,}583}$

Exercice 2

Partie A :

1- a)

t	0	2	5	6	7	8	12
$f(t)$	3	4,79	5,60	5,77	5,92	6,04	6,43
$g(t)$	2	2,49	3,72	4,32	5,06	5,95	12,02

b) $f(0) = 3 \Rightarrow$ la courbe représentative de f est $\mathcal{C}_1$ (bleue)
$g(0) = 2 \Rightarrow$ ———————— g est $\mathcal{C}_2$ (rouge)

2- a) α est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
Arrondi à l'unité, $\boxed{\alpha \simeq 8}$

b) On a $f(t) \geq g(t)$ lorsque $\mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_2$.
C'est le cas pour $t \in [0 ; \alpha]$.
$\Rightarrow$ Il y a plus de clients pour le type A que pour le type B pendant les 8 ($=\alpha$) premières années (2023)

c) Il semble que la différence $f(t) - g(t)$ soit maximale pour $t \simeq 3$ (plus grand écart entre $\mathcal{C}_1$ et C_2, avec $\mathcal{C}_1$ au dessus de $\mathcal{C}_2$

d) A la calculatrice on trouve $\alpha \simeq 8,10$

Partie B

1. a) $\int_0^{12} f(t)\,dt = [F(t)]_0^{12} = F(12) - F(0)$

$= 2\times 12 + 0,4\ln(12+0,4) + 12\ln(2,5\times 12+1) - (0+0,4\ln 0,4+0)$
$= 24 + 0,4\ln(12,4) + 12\ln 31 - 0,4\ln 0,4$

b) $V_m = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt = \frac{1}{12}(24 + 0,4\ln 12,4 + 12\ln 31 - 0,4\ln 0,4)$

$V_m \simeq 5,5$
$\rightarrow$ Sur les 12 premières années, il y a eu en moyenne 5500 clients pour le modèle de type A.

2- a) $h(t) = 5e^{0,2t} \Rightarrow h'(t) = 5 \times 0,2\, e^{0,2t} = \underline{e^{0,2t}}$

b) Une primitive de g peut être G telle que

$G(t) = h(t) + t = \boxed{5e^{0,2t} + t}$

c) $\int_0^{12} g(t)\,dt = \left[G(t)\right]_0^{12} = G(12) - G(0)$

$= 5 \times e^{0,2 \times 12} + 12 - 5\underbrace{e^0}_{1} - 0 = 5e^{2,4} + 7$

$\approx \underline{62,1}$ CQFD

d) $V_m = \frac{1}{12}\int_0^{12} g(t)\,dt = \frac{1}{12} \times 62,1 \approx \underline{5,2}$ arrondi au 10^e

3- On a $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,dt > \frac{1}{12}\int_0^{12} g(t)\,dt$ car $5,5 > 5,2$

↳ le nombre moyen annuel de clients pour le <u>modèle A</u> sera plus élevé (environ 5500).