Ex 1 :

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ l'ensemble de travail et on pose

$A = \{x \in E,\ x \text{ est pair}\}$ $B = \{x \in E,\ x \text{ est multiple de } 3\}$ $C = \{4; 8; 12\}$

Déterminer les ensembles suivants :

$$A;$$
$$B;$$
$$A \cap C;$$
$$A \cup B;$$
$$A \cup C;$$
$$\bar{A};$$
$$\bar{B};$$
$$\bar{A} \cap C;$$
$$(A \cup C) \cap \bar{B}$$

Ex2 : Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme de la figure 5.6 :

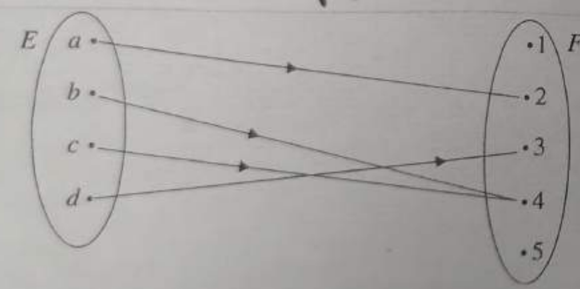


Figure 5.6

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Soit $A = \{a;b;c\}$ et $A' = \{c;d\}$. Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.

c) Déterminer $f(E)$.

d) Soit $B = \{1;2;3\}$ et $B' = \{4\}$. Déterminer $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B')$.

Ex 3 : $E = \{a;b;c;d\}$, $F = \{1;2;3;4;5\}$. f est l'application de E vers F telle que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 5$, $f(d) = 3$.

a) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

b) Quelle est l'image directe de $A = \{b;c;d\}$ par f ?

c) Quelle est l'image réciproque de $B = \{1;2;3\}$ par f ?

Ex 4 : $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, $F = \{0;1;2;3\}$. f est l'application de E dans F, qui à tout élément de E, associe son reste dans la division euclidienne par 3.

a) f est-elle une injection ? Une surjection ?

b) Soit $A = \{1;3;4\}$, déterminer $f^{-1}[f(A)]$. Est-ce que $f^{-1}[f(A)] = A$?

c) Soit $B = \{2;3\}$, déterminer $f[f^{-1}(B)]$. Est-ce que $f[f^{-1}(B)] = B$?

Ex 5 : $E = \{a;b;c;d\}$, $F = \{1;2;3\}$, $G = \{\alpha;\beta;\gamma\}$. On définit les applications f de E vers F et g de F vers G de la façon suivante : $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 3$, $f(d) = 2$, $g(1) = \gamma$, $g(2) = \alpha$, $g(3) = \beta$.

a) Les applications f et g sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

b) Définir l'application $g \circ f$.

c) Peut-on définir l'application réciproque de f ? de g ?

Ex 6 : On définit une application f de $E = \{-2;-1;0;1;2\}$ dans $F = \{0;1;2;3;4\}$ par $f(x) = x^2$. Dans E, on considère les parties $A = \{-2;-1;0\}$ et $A' = \{0;1\}$.

a) Est-ce que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$?

b) Est-ce que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$?

c) Est-ce que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$?

Ex 7 : On définit une application f de $E = \{-2;-1;0;1;2\}$ dans $F = \{0;1;2;3;4\}$ par $f(x) = x^2$. Dans F, on considère les parties $B = \{0;1;2\}$ et $B' = \{2;4\}$.

a) Est-ce que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$?

b) Est-ce que $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$?

c) Est-ce que $f^{-1}(\bar{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$?

Ex 8 Pour s'échanger des messages codés, Alice et Bob utilisent leur clavier téléphonique. Le chiffre 2 sert à coder les lettres A, B, C ; le chiffre 3 sert à coder les lettres D, E, F etc.

a) Quel nombre Alice va-t-elle envoyer à Bob pour lui dire BRAVO ?

b) Bob est-il sûr de comprendre ?

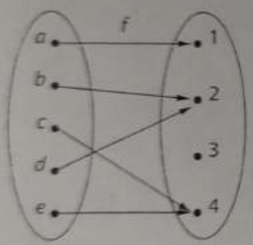
c) Quelle propriété de l'application : lettre $\mapsto$ chiffre n'est pas respectée, qui permettrait de décoder le message de façon certaine ?

d) Proposer une adaptation de la méthode permettant d'avoir un décodage unique.

Application de E dans F

9 ++ Image et image réciproque

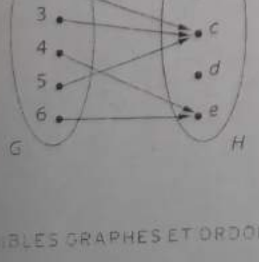
Soit f l'application de E dans F définie par le diagramme ci-dessous.



1. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $A' = \{a, d, e\}$.
a) Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.
b) Comparer $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.
c) Déterminer $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.
2. Soit $B = \{1, 2\}$ et $B' = \{3, 4\}$.
a) Déterminer $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B')$.
b) Déterminer $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B')$.
c) Déterminer $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cup B')$.
3. f est-elle injective ?
4. f est-elle surjective ?

10 Image et image réciproque

Soit g l'application de G dans H définie par le diagramme ci-dessous.



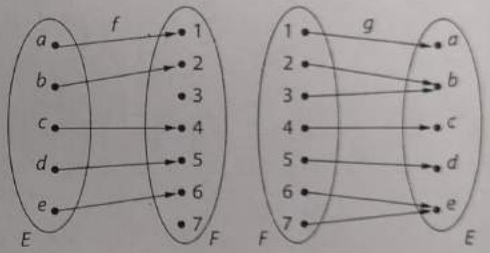
1. Soit $C = \{1, 2\}$ et $C' = \{1, 3\}$.
a) Déterminer $g(C)$ et $g(C')$.
b) Comparer $g(C \cap C')$ et $g(C) \cap g(C')$.
c) Déterminer $g(C \cup C')$ et $g(C) \cup g(C')$.
2. Soit $D = \{a, b, c\}$, $D' = \{c, d, e\}$, $D'' = \{b, d\}$.
a) Déterminer $g^{-1}(D)$, $g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D'')$.
b) Déterminer $g^{-1}(D) \cap g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D \cap D')$.
c) Déterminer $g^{-1}(D) \cup g^{-1}(D')$ et $g^{-1}(D \cup D')$.
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

11 ++ Composition

1. Déterminer l'application composée $g \circ f$ où f est définie dans l'exercice 9 et où g est définie dans l'exercice 10.
2. $g \circ f$ est-elle injective ?
3. $g \circ f$ est-elle surjective ?

12 +++ Composition

Soit f l'application de E dans F et g l'application de F dans E définies par les diagrammes ci-dessous.



1. a) f est-elle injective ?
b) f est-elle surjective ?
2. Même question avec l'application g.
3. a) Déterminer l'application composée $g \circ f$.
b) $g \circ f$ est-elle injective ?
c) $g \circ f$ est-elle surjective ?
4. Reprendre la question **3.** avec $f \circ g$.