VARIABLES ALÉATOIRES À VALEURS RÉELLES

I- LOI DE PROBABILITÉ – FONCTION DE RÉPARTITION

- **Variable aléatoire :** on considère une expérience aléatoire d'un univers Ω. Définir une variable aléatoire (v.a. par la suite) X, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

- **La loi de probabilité de X** est l'association entre les différentes valeurs de X et les probabilités correspondantes.

    - La loi de probabilité est la fonction qui à k associe **P(X=k).**

- **La fonction de répartition de la v.a.X** est la fonction F, de IR dans [0 ; 1], qui à x associe

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriété : Pour $a \leq b$, on a : $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

II- ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE, VARIANCE, ÉCART-TYPE

A. Espérance mathématique

Comme son nom l'indique, l'espérance mathématique représente la valeur à laquelle on s'attend que la variable aléatoire soit égale. C'est pourquoi **on parle aussi de** moyenne.

B. Variance, Écart-type

la **variance** d'une v.a. X est, si elle existe, est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne…

Propriété: On a **toujours V(X) ≥ 0**

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

C'est **l'écart moyen** à la moyenne.

C. Couple de deux variables aléatoires X et Y

La **loi du couple** (X, Y) est donnée par P $(X = x \cap Y = y)$. Les lois respectives de X et de Y sont appelées **loi marginales** de X et de Y.

- **Indépendance de deux v.a.**

$\rightarrow$ Si P $(X = x_i$ et $Y = y_j)$ = P $(X = x_i)$* P $(Y = y_j)$

- **Espérance d'une somme de deux v.a.**

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

- **Variance de la somme de deux v.a. Indépendantes**

$$\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad \textbf{SI } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}}$$

- **Ecart-type de la somme de deux v.a. Indépendantes**

SI X et Y indépendantes :

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$= \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$

DONC :

$$\boxed{\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}}$$

III- LOIS USUELLES

A. Lois discrètes usuelles

- **La loi binomiale** **(phrase à savoir)** s'utilise lorsqu'une même expérience aléatoire, répétée n fois de façon indépendante (tirage avec remise), a deux issues possibles:
  - "succès", avec la probabilité p
  - "échec", avec la probabilité $1 - p$.

Alors, la variable aléatoire X associée au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On a alors : $P(X = k)$ se détermine à la calculatrice

$P(X \leq t) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$ se détermine à la calculatrice

et : $P(X \geq t) = 1 - P(X < t)$

Son espérance est np et son écart-type : $\sqrt{np(1-p)}$

- **La loi de Poisson** s'utilise généralement lorsqu'une variable aléatoire représente un phénomène rare.

On a dans ce cas:

$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ se détermine à la calculatrice

$P(X \leq t) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = t)$ se détermine à la calculatrice

$P(X \geq t) = 1 - P(X < t)$

Son espérance est λ et son écart-type : $\sqrt{\lambda}$

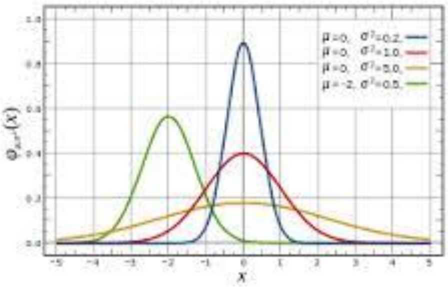
B. Lois continues usuelles

➢ Une variable aléatoire suit une **loi uniforme sur [a;b]** si et seulement si, pour tout intervalle I inclus dans [*a;b*], la probabilité de l'événement «$X\in I$» est l'aire du domaine $\{M(x;y);\ x\in I\ et\ 0\leq y\leq \frac{1}{b-a}\}$

Dans ce cas, pour tout intervalle [$x_1;x_2$] inclus dans [*a;b*], $P(X\in[x_1;x_2]) = \frac{x2-x1}{b-a}$

Son espérance est $\frac{a+b}{2}$ et son écart-type est : $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

➢ Dans le cas d'une variable aléatoire qui suit une **loi normale d'espérance *m* et d'écart-type *σ***, on calcule directement une probabilité avec la **calculatrice**.
Représentation :



Il faut retenir que :

- $P\ (X \leq m\ ) = P\ (X \geq m) = 0{,}5$
- $P\ (\ m - \sigma \leq X \leq\ m + \sigma\ ) = 0{,}68$
- $P\ (\ m - 2\sigma \leq X \leq\ m + 2\sigma\ ) = 0{,}95$
- $P\ (\ m - 3\sigma \leq X \leq\ m + 3\sigma\ ) = 0{,}997$

➢ La **loi exponentielle** est utilisée pour les questions relatives à la **fiabilité** d'un dispositif. C'est la loi suivie par une variable aléatoire *T* lorsque le **taux d'avarie λ** est constant.
On définit donc, pour $t \geq 0$:

- La **fonction de défaillance** (=failure), qui donne la probabilité pour que le système ait une défaillance avant l'instant *t:*

$$F(t)=P(T\leq t)=1-\ e^{-\lambda t}$$

- La **fonction de fiabilité** (= reliability), qui donne la probabilité pour que le système n'ait pas de défaillance avant l'instant *t:*

$$R(t) = P\ (T > t) = 1 - P(T\leq t) = 1 - F(t) =\ e^{-\lambda t}$$

- La **M.T.B.F.** (Moyenne de Temps de Bon Fonctionnement, ou encore, en anglais, Mean Time Between Failures), est l'espérance mathématique de la variable aléatoire *T*.

On a M.T.B.F. = $\frac{1}{\lambda}$

- De plus $\sigma(T)=\frac{1}{\lambda}$.

C. Approximation

Les conditions ne sont pas à connaître

1. d'une loi binomiale par une loi de poisson

Si $n \geq 30, p \leq 0{,}1$ *et* $np < 15$ OU lorsque $p \leq 0{,}1$ *et* $np \leq 10$ *alors* $B(n, p) \sim P(\lambda)$ *où* $\lambda = np$

Sous ces conditions, une loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda = np}$

2. d'une loi binomiale par une loi normale

Si $n \geq 30,\ np > 5\ \ np(1-p) > 5$ *alors* $B(n, p) \sim N(m, \boldsymbol{\sigma})$

Sous ces conditions, une loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par une loi normale de moyenne (espérance) $\boldsymbol{m = np}$ et d'écart-type $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{np(1-p)}}$.

Mémo – Utilisation de la calculatrice CASIO

➔ Cas d'une loi BINOMIALE :

- Pour déterminer $P(X = k)$:

  MENU STAT ➔DIST
  Choix : BINM
  Choix : BPD
  x est la valeur de k
  numtrial est le nombre d'essais (le paramètre n)
  p est la probabilité de succès (le paramètre p)

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

  MENU STAT ➔DIST
  Choix : BINM
  Choix : BCD
  x est la valeur de k
  numtrial est le nombre d'essais (le paramètre n)
  p est la probabilité de succès (le paramètre p)

- Pour déterminer $P(X \geq k)$: on fait $P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

➔ Cas d'une loi de POISSON :

- Pour déterminer $P(X = k)$:

  MENU STAT ➔DIST
  Choix : POISN
  Choix : PPD
  On entre ensuite k et le paramètre λ

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

  MENU STAT➔DIST
  Choix : POISN
  Choix : PCD
  On entre ensuite k et le paramètre λ

- Pour déterminer $P(X > k)$: on fait $P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

➔ Cas d'une loi NORMALE :

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

  MENU STAT ➔DIST
  Choix : NORM
  Choix : NCD
  Lower : $- 10^{99}$ (correspond à $-\infty$)
  Upper : k
  σ = ecart-type σ
  μ = espérance/moyenne m

- Pour déterminer $P(a \leq X \leq b)$:

  MENU STAT ➔DIST
  Choix : NORM
  Choix : NCD
  Lower : *a*
  Upper : *b*
  σ = ecart-type σ
  μ = espérance/moyenne m

- Pour déterminer $P(X > k)$:

  MENU STAT ➔DIST
  Choix : NORM
  Choix : NCD
  Lower : k
  Upper : 10^{99} (correspond à $+\infty$)
  σ = ecart-type σ
  μ = espérance/moyenne m

Mémo – Utilisation de la calculatrice

➔ **Cas d'une loi BINOMIALE :**

- Pour déterminer $P(X = k)$

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

- Pour déterminer $P(X \geq k)$: on fait $P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

➔ **Cas d'une loi de POISSON :**

- Pour déterminer $P(X = k)$:

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

- Pour déterminer $P(X > k)$: on fait $P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

➔ **Cas d'une loi NORMALE :**

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

- Pour déterminer $P(a \leq X \leq b)$:

- Pour déterminer $P(X > k)$: