Corrigé BTS 2013 (Polynésie)

$f(x) = 0,4x + e^{-0,4x+2}$

1) a)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$f(x)$	7,39	4,12	3,09	3,07	3,50	4,14	4,86	5,63	6,41

b) 90 litres = 9 dizaines de litres
Or $f(9) \approx 3,80$ $\Rightarrow$ Le coût de fabrication de 90L de sirop est d'environ 380€ (3,80 centaines)

2) a) la dérivée de $e^{-0,4x+2}$ est $-0,4e^{-0,4x+2}$ (forme $e^u \Rightarrow u'e^u$)

Donc $f'(x) = 0,4 - 0,4e^{-0,4x+2}$ et, en factorisant :

$\boxed{f'(x) = 0,4(1 - e^{-0,4x+2})}$ cqfd

b) $1 - e^{-0,4x+2} > 0 \iff e^{-0,4x+2} < 1$ (j'ai écrit l'inéquation dans l'autre sens)

$\iff \ln e^{-0,4x+2} < \underbrace{\ln 1}_{0}$

$\iff -0,4x + 2 < 0$

$\iff -0,4x < -2$

$\iff x > \frac{-2}{-0,4}$

$\iff \boxed{x > 5}$

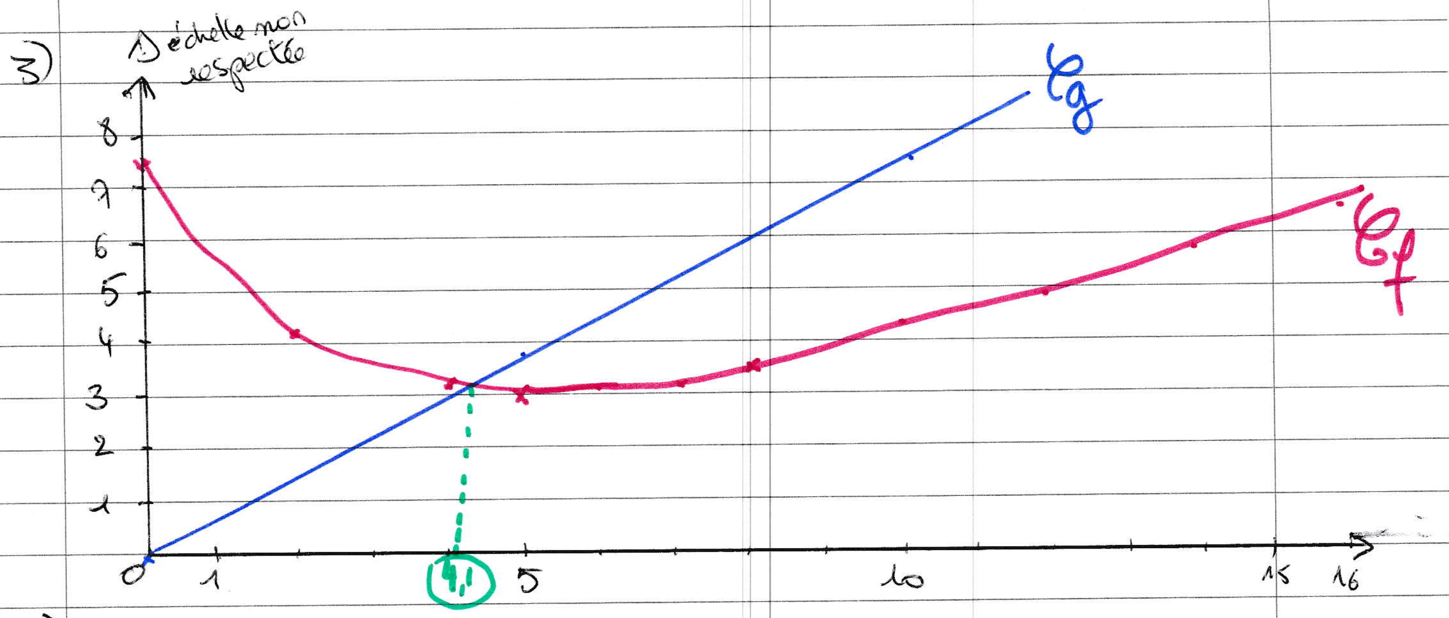
Puisque $0,4 > 0$ alors $f'(x)$ a le même signe que $1 - e^{-0,4x+2}$

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) > 0 \iff x > 5 \\ f'(x) = 0 \iff x = 5 \\ f'(x) < 0 \iff x < 5 \end{array}}$$

c) On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		5		16
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	7,39	↘	3	↗	6,41

d) f atteint son minimum en $x=5$ et $f(5)=3$
$\Rightarrow$ Le coût de production sera minimal pour la production de 50 litres de sirop.
Ce coût s'élèvera à 300 €.

3)


4)
a) Chiffre d'affaires = prix x quantité vendue or prix = 7,50 € = 0,75 centaine d'€ et $q^{tés} = x$

D'où $CA = 0{,}75 \times x$

$\boxed{g(x) = 0{,}75x}$ cqfd

b) Voir ci-dessus : droite qui passe par l'origine

c) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la recette (= le CA) est supérieure au coût, donc lorsque $g(x) > f(x)$

C'est le cas lorsque $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$. Graphiquement, on voit cela pour $x > 4{,}1$ (ou 4)

$\Rightarrow$ L'entreprise réalisera un bénéfice si elle produit plus de 40 litres par jour.