C. Application de E dans F

1. Définition

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à tout élément de E un **unique** élément de F.

Notation :

2. Image d'une partie de E

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et soit A une partie de E.

L'**image (directe)** de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images des éléments de A:

Remarques :

Propriétés : Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et soient A et A' deux parties de E. On a :

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$$

$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

- Ces propriétés, admises, seront illustrées dans les exercices.

3. Image réciproque d'une partie de F

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et soit B une partie de F.

L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B)$ des images des éléments de E qui sont les antécédents des éléments de B:

Propriétés : Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et soient A et A' deux parties de E. On a :

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

- Ces propriétés, admises, seront illustrées dans les exercices.

4. Injection – surjection – bijection

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

f est une injection = **application injective** ssi chaque élément de E a une image distincte.

f est une surjection = **application surjective** ssi tout élément de F a au moins un antécédent.

f est une bijection = **application bijective** ssi elle est à la fois injective et surjective => tout élément de F a un antécédent unique.

5. Composition d'applications

Théorème (admis) : Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et soit g une application d'un ensemble F dans un ensemble G.

- si f et g sont injectives alors gof est injective
- si f et g sont surjectives alors gof est surjective
- si f et g sont bijectives alors gof est bijective

De plus, si elle existe, $(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$