BTS SIO 2015

Corrigé UF2

Exercice 1 :

Partie A :

1) a) on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car A et B sont indépendants.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$= 0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}02 \times 0{,}01$

$P(A \cup B) = 0{,}0298$

2) a) on répète 100 fois la m expérience de façon indépendante.

Elle a 2 issues possibles :

- batterie défectueuse, avec la proba $p = 0{,}0298$
- batterie non défectueuse, avec la proba $1 - p = 0{,}9702$

Alors la v.a X associée au nombre de batteries défectueuses suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0298$.

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$= 1 - P(X \leq 2)$ et, à la calculatrice

$= 1 - 0{,}4243$

$= 0{,}5757$

La probabilité d'avoir au moins 3 batteries défectueuses dans le lot est égale à 0,5757

Partie B :

$Y \sim \mathcal{N}(80 ; 10)$

1) $P(60 \leq Y \leq 100) \simeq 0{,}9545$ à la calculatrice

2) $P(Y \geq h) = 0{,}95$ équivaut à $P(Y \leq h) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

A la calculatrice, on trouve $\boxed{h \approx 63{,}55}$

on a donc $P(Y \geq 63{,}5) \simeq 0{,}95$

→ Il y a 95% de chances que la durée de charge dépasse 63 min 30 s.

Partie C :

1. $\lambda = \dfrac{1}{\text{MTBF}} = \dfrac{1}{1900} \approx \underline{0{,}0005}$

Prenons $\lambda = 0{,}0005$

2. $P(T \geqslant 4000) = R(4000) = e^{-\lambda \times 4000} = e^{-0{,}0005 \times 4000}$

$= e^{-2}$

$\boxed{P(T \geqslant 4000) \approx 0{,}1353}$

3. $P(T \leqslant t) = 0{,}7 \iff F(t) = 0{,}7$

$\iff 1 - e^{-\lambda t} = 0{,}7$

$\iff e^{-\lambda t} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$\iff \ln e^{-\lambda t} = \ln 0{,}3$

$\iff -\lambda t = \ln 0{,}3$

$\iff t = \dfrac{\ln 0{,}3}{-\lambda} = \dfrac{\ln 0{,}3}{-0{,}0005} \approx 2407{,}95$

$\iff t = 2408$

Il y a 70% de chances que l'écran fonctionne correctement moins de <u>2408 jours</u>.

Exercice 2

A. Etude d'une fonction

1.a) $f(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x$

D'où $f'(x) = -4x + 20 - \dfrac{16}{x} = \dfrac{-4x^2 + 20x - 16}{x}$

$$= \frac{-4(x^2 - 5x + 4)}{x} = \frac{-4(x-1)(x-4)}{x}$$

b) Pour $1 \leq x \leq 6,5$ on a $-4 < 0$
$x - 1 \geqslant 0$

Donc $f'(x)$ a le même signe que $x - 4$

Donc $f'(x) < 0$ pour $x \geqslant 4$ et $f'(x) > 0$ pour $x \leq 4$

En résumé $f'(x) = 0$ si $x = 1$ ou $x = 4$

$f'(x) > 0$ pour $x \in]1;4[$

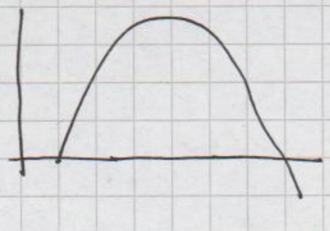
$f'(x) < 0$ pour $x \in]4;6,5[$

c) Tableau de variation

x	1		4		6,5
Signe de $f'(x)$	0	−	0	+	
variations de f	0	↗	7,8	↘	−2,4

2. a)

x	1	2	3	4	5	6	6,5
$f(x)$	0	2,9	6,4	7,8	6,2	1,3	−2,4

b) 

(pas à l'échelle!)

3. F sera une primitive de f sur $[1;6,5]$ si, pour tout x de cet intervalle, on a $F'(x) = f(x)$. Calculons $F'(x)$.

$F(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - 16x\ln x$

$F'(x) = -\dfrac{2}{3} \times 3x^2 + 20x - 2 - 16\left(\ln x + x \times \dfrac{1}{x}\right) = -2x^2 + 20x - 2 - 16\ln x - 16$

$= -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x = f(x)$ cqfd

B. Application à l'Économie

1. a) Sur l'intervalle $[4;6,5]$, la fonction f est strictement décroissante. Par ailleurs on a $f(4)>0$ et $f(6,5)<0$.

Donc l'équation $f(q)=0$ admet une solution.

Pour trouver cette sol° :
- résolution graphique ou
- solveur de la calculatrice ou
- tâtonnement avec le tableau !

on a $f(q)=0$ pour $\boxed{q \approx 6,2}$

b) L'entreprise réalise un bénéfice jusqu'à 620 pièces.

2. f atteint son max pour $x=4 \Rightarrow$ Bénéfice maximal pour 400 pièces

le bénéfice maximal vaut $f(4) = 7\,800$ €.

3. $$B_m = \frac{1}{5,5}\int_1^{6,5} f(x)\,dx = \frac{1}{5,5}\left[F(x)\right]_1^{6,5}$$

$$= \frac{1}{5,5}\left(F(6,5)-F(1)\right) = \frac{1}{5,5}\left(-\frac{2}{3}\times 6,5^3 + 10\times 6,5^2 - 2\times 6,5 - 16\times 6,5\ln 6,5\right.$$
$$\left. - \left(-\frac{2}{3} + 10 - 2 - 16\times 0\right)\right)$$

$$\approx \frac{1}{5,5}\times 24,4 \approx 4,4$$

Le bénéfice moyen réalisé s'élève à environ 4400€