

Ex 8) a) Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :

$$A = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}c + abc \quad \text{et} \quad B = \bar{a}b + \bar{b}c + a\bar{c}$$

b) Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de \bar{A} et \bar{B} .

1 lettre = 4 cases
2 lettres = 2 cases
3 lettres = 1 case

a) A:

	b	b	\bar{b}	\bar{b}
a	X	X	X	X
\bar{a}				X
	c	\bar{c}	\bar{c}	c

b) $\bar{A} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$
 $= \bar{a} \cdot (b + \bar{c})$

B:

	b	b	\bar{b}	\bar{b}
a	X	X	X	X
\bar{a}	X	X		X
	c	\bar{c}	\bar{c}	c

$$\bar{B} = abc + \bar{a}b\bar{c}$$

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ac} \\ &= (a + \bar{b}) \cdot (b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + c) \\ &= (ab + a\bar{c} + \bar{b}b + \bar{b}\bar{c}) (\bar{a} + c) \\ &= \underbrace{ab\bar{a}} + \underbrace{abc} + \underbrace{a\bar{c}\bar{a}} + \underbrace{a\bar{c}c} + \underbrace{\bar{a}b\bar{c}} + \underbrace{\bar{b}c\bar{c}} \end{aligned}$$

Ex 17 Soit $A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} b c + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \bar{b} \cdot \bar{c}$. Simplifier A avec un diagramme de Karnaugh, puis vérifier par des calculs.

	b	b	\bar{b}	\bar{b}
a			X	X
\bar{a}			X	X
c	\bar{c}	\bar{c}	c	c

$$A = \bar{b}$$

Vérif : $A = \bar{a} \bar{b} \bar{c} + \bar{a} b c + \bar{a} \bar{b} + a \bar{b} \bar{c}$

$$= \bar{b} (\bar{a} \bar{c} + a c + \bar{a} + a \bar{c})$$

$$= \bar{b} (\bar{a} (\bar{c} + 1) + a (c + \bar{c}))$$

$$= \bar{b} (\bar{a} + a) = \bar{b}$$

loi de Morgan !!!

$$abc = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \overline{a+b+c}$$

Ex 9 On considère la loi $*$ définie par la table de vérité du tableau :

Tableau 4.23

a	b	$a * b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) En logique, quel est l'équivalent de cette loi ? le "ou exclusif" = XOR

b) À l'aide d'une table de vérité, montrer que $a * b = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$

c) Démontrer par calculs que $a * b = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$.

a	b	\bar{a}	\bar{b}	$\bar{a}b$	$a\bar{b}$	$\bar{a}b + a\bar{b}$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

$$\Rightarrow a * b = \bar{a}b + a\bar{b}$$

$$c) (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = \underbrace{a\bar{a}}_0 + a\bar{b} + \bar{a}b + \underbrace{b\bar{b}}_0$$

$$= a\bar{b} + \bar{a}b = a * b$$

Exercice 3:

Définissons un nouvel opérateur, nommé $op1$ et défini par : $op1(P, Q) = (P \wedge (\bar{Q})) \vee ((\bar{P}) \wedge Q)$

1. Construire la table de vérité de cette formule:

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$P \wedge \bar{Q}$	$\bar{P} \wedge Q$	$(P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

Considérons maintenant l'opération $op2$ définie par : $op2(P, Q) = (P \vee Q) \wedge ((\bar{P}) \vee (\bar{Q}))$

2. Construire la table de vérité de cette formule

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$P \vee Q$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$	$(P \vee Q) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

3. Que remarque-t-on?

ces 2 opérateurs sont équivalents -

4. Bonus (+0,5 pts): Comment s'appelle cet opérateur?

le ou exclusif (XOR)

if and only if
if or
if - xor

Ex13 Dans un grand magasin, le service clientèle a organisé une classification des clients en trois catégories :

- Si le client achète un article, il est classé en catégorie A et $a = 1$, sinon $a = 0$.
- Si le client échange ou rend un article, il est classé en catégorie E et $e = 1$ sinon $e = 0$.
- Si le client demande des renseignements, il est classé en catégorie R et $r = 1$ sinon $r = 0$.

Soit $F = a \cdot \bar{e} \cdot r + a \cdot \bar{e} \cdot \bar{r}$
 \rightarrow le client achète, n'échange pas et demande des renseignements
 ou le client achète, n'échange pas et ne demande pas de renseignements

a) Faire le diagramme de Karnaugh de F .

b) En déduire une forme simplifiée de F .

c) Retrouver la forme simplifiée de F par calcul.

d) Quel type de client est un client de type \bar{F} ? Est-ce un client peu intéressant, assez intéressant ou très intéressant pour le magasin ? Donner l'écriture la plus simple de \bar{F} .

a)

	e	e	\bar{e}	\bar{e}
a			X	X
\bar{a}				
	r	\bar{r}	\bar{r}	r

$\rightarrow \bar{F}$: client qui n'achète pas
 ou qui échange
 = nul.

b) On a $F = a\bar{e}$

c) $F = a\bar{e}r + a\bar{e}\bar{r} = a\bar{e}(r + \bar{r}) = a\bar{e} \cdot 1 = a\bar{e}$

d) $F = a\bar{e}$

$\bar{F} = \overline{a\bar{e}} = \bar{a} + \bar{\bar{e}}$ loi de Morgan

$\bar{F} = \bar{a} + e$

EX 15 On considère l'expression $E = \overline{a}\overline{c} + \overline{b}c + \overline{a}b + \overline{a}\overline{b}c$.

a) Simplifier l'écriture de E à l'aide d'un diagramme de Karnaugh et en déduire que $E = \overline{b} + \overline{c}$. Retrouver par calcul la forme simplifiée de E .

b) Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à retrouver un emploi, on considère pour ces personnes les trois variables booléennes a , b et c définies ainsi :

- $a = 1$ si la personne a 45 ans ou plus, sinon $a = 0$.
- $b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus, sinon $b = 0$.
- $c = 1$ si la personne a déjà suivi une qualification l'année précédente, sinon $c = 0$.

Une formation sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

- Avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins d'un an.
- Avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.
- Être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.
- Avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins d'un an et avoir suivi une formation l'année précédente.

Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.

1) Écrire l'expression booléenne F en fonction de a , b et c qui traduit le fait que la personne pourra suivre cette formation.

2) En déduire les personnes qui ne pourront pas participer à la formation et qui participeront donc à un stage d'insertion en entreprise.

a) Table de Karnaugh de E

	b	\overline{b}	\overline{b}	\overline{b}
a	\times	\times	\times	\times
\overline{a}	\times	\times	\times	\times
c	\overline{c}	\overline{c}	\overline{c}	\overline{c}

On obtient donc \overline{E} grâce aux cases non cochées :

$$\overline{E} = bc$$

$$\Rightarrow E = \overline{\overline{E}} = \overline{bc}$$

$$E = \overline{b} + \overline{c} \text{ loi de Morgan}$$

b) 1) $F = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c = E$

2) Ceux qui ne peuvent pas participer correspondent à \overline{F} . Or $\overline{F} = \overline{E} = bc$

↳ personnes au chômage depuis 1 an ou plus et qui ont déjà suivi une formation l'année précédente.

Calcul pour retrouver E

$$E = \bar{a}\bar{c} + b\bar{c} + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c$$

$$= \cancel{b\bar{a}\bar{b}\bar{c}} + \underline{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} + \underline{ab\bar{c}} + \underline{\bar{a}b\bar{c}} + \underline{\bar{a}bc} + \underline{\bar{a}b\bar{c}} + \underline{\bar{a}\bar{b}c}$$

en double

$$= \bar{b}(\bar{a}\bar{c} + ac + a\bar{c} + \bar{a}c) + \bar{c}(\bar{a}\bar{b} + ab + \bar{a}b + a\bar{b})$$

$$= \bar{b}(\underbrace{\bar{a}(\bar{c}+c)}_1 + \underbrace{a(\bar{c}+c)}_1) + \bar{c}(\underbrace{\bar{a}(\bar{b}+b)}_1 + \underbrace{a(\bar{b}+b)}_1)$$

$$= \bar{b} + \bar{c} \quad \text{ok!}$$

au moins = +

au + = -

Ex 6 Une entreprise décide de choisir de nouveaux chefs de service parmi ses employés en se servant des variables booléennes suivantes :

- $a = 1$ si et seulement si l'employé a **plus** de 10 ans d'ancienneté dans l'entreprise.
- $b = 1$ si et seulement si l'employé arrive souvent en retard.
- $c = 1$ si et seulement si l'employé a des relations difficiles avec ses collègues.

L'entreprise fait une première sélection parmi ses employés en considérant les critères suivants : « l'employé est ponctuel et s'entend bien avec ses collègues » ou « l'employé est dans l'entreprise depuis **au moins 10 ans** ».

a) Donner l'expression booléenne E correspondant à un employé qui respecte les conditions pour devenir chef de service.

b) Donner l'expression de \bar{E} à l'aide du tableau de Karnaugh. Retrouver le résultat par calculs.

a)

$$E = \bar{b}\bar{c} + a$$

b) Table de Karnaugh de \bar{E} :

	b	b	\bar{b}	\bar{b}
a	X	X	X	X
\bar{a}	X	X	X	X

on a donc $\bar{E} = \bar{a}b + \bar{a}c = \bar{a}(b+c)$

Par calcul : $E = a + \bar{b}\bar{c}$
 $\Rightarrow \bar{E} = \overline{a + \bar{b}\bar{c}} = \bar{a} \cdot \overline{\bar{b}\bar{c}}$ 1° loi de Morgan

$$= \bar{a} \cdot (\bar{\bar{b}} + \bar{\bar{c}}) = \bar{a} \cdot (b+c)$$
$$= \bar{a}b + \bar{a}c$$

A faire : • DM pour lundi

• Pour mercredi : exos d'algo (conditions) : TD2.

• ex 20

