BTS SIO1

Mardi 7 avril 2020

Interrogation

Exercice 1: (6 points)

Un petit fournisseur de matériel informatique propose trois formules de vente à ses clients :

— une formule F1 « clavier + souris » à 12 euros ;

— une formule F2 « clavier + souris + clé USB » à 16 euros ;

— une formule F3 « clavier » à 10 euros.

Pour chacune de ces formules, dans le tableau suivant sont indiqués le coût d'achat du matériel, le temps moyen nécessaire au conditionnement de chaque formule et le prix demandé :

1. **a.** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix}$

et la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Effectuer le produit matriciel MC.

b. On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3.

Donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC en termes de coût d'achat, de temps et de prix de vente.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a. Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM.

b. Déterminer le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Dans la suite de l'exercice on prend $a = -1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I$.

Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes. Démontrer que si $MX = Y$ alors $X = PY$.

4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros.

Déterminer, pour chacune des formules, le nombre de clients l'ayant choisie.

<u>Exercice 2 :</u> (5 points)

Un opérateur de téléphonie mobile propose trois offres de forfait mensuel sans engagement à ses clients. Chaque offre met à disposition du client une durée de communication mensuelle ainsi qu'un accès à l'Internet 4G avec un volume prédéfini de données.
Le descriptif de chacune de ces offres est détaillé dans le tableau suivant :

	Offre n° 1	Offre n° 2	Offre n° 3
Montant mensuel du forfait (en euro)	6	10	18
Durée de communication (en heure)	2	2	6
Données internet (en Go)	0,2	2	20

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 18 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0,2 & 2 & 20 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 350 \\ 120 \\ 70 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 350 & 120 & 70 \end{pmatrix}$.

a. Lequel de ces deux produits de matrices est-il défini : $M \times A$ ou $M \times B$? Justifier.

b. Effectuer ce produit de matrices à la calculatrice et interpréter le résultat obtenu.

2. On donne P la matrice inverse de M dont les coefficients sont arrondis à la quatrième décimale :

$$P = \begin{pmatrix} -0,1804 & 1,0567 & -0,1546 \\ 0,25 & -0,75 & 0 \\ -0,0232 & 0,0644 & 0,0515 \end{pmatrix}.$$

Pour un mois donné, l'opérateur a obtenu un chiffre d'affaires de 26 540 € pour l'ensemble de ces trois offres. On sait que cela correspond à la mise à disposition de 7 780 h de communications et à un volume de données internet de 14 440 Go.

On définit les matrices $C = \begin{pmatrix} 26540 \\ 7780 \\ 14440 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x désigne le nombre de clients ayant choisi l'offre n° 1, y le nombre de clients pour l'offre n° 2 et z le nombre de clients pour l'offre n° 3.

a. Écrire une égalité matricielle représentant la situation en utilisant les matrices M, C et X.

b. Montrer l'égalité matricielle $X = P \times C$.

c. En déduire le nombre de clients ayant choisi chacune des trois offres.
Les valeurs seront arrondies à la dizaine.

<u>Exercice 3 :</u> (5 points)

La société produit trois types de fibres optiques à partir de silice, forme naturelle du dioxyde de silicium (SiO_2) qui entre dans la composition de nombreux minéraux. Elle produit :

- x pièces du type A, dont le débit supporté vaut 1 gigabit par seconde ;
- y pièces du type B, dont le débit supporté vaut 10 gigabits par seconde ;
- z pièces du type C, dont le débit supporté vaut 100 gigabits par seconde.

Pour une pièce, la masse de silice utilisée et le temps de production de chacun de ces types de fibres sont récapitulés dans le tableau suivant.

Type de fibre	A	B	C
Masse de silice en kg (par pièce)	3	4	7
Temps de production en h (par pièce)	2	3	5

La société modélise cette fabrication afin d'envisager différents scénarios sur une période donnée. Pour cette période, on note N le nombre total de pièces produites, S la masse totale en kg de silice utilisée et H le temps total de production, exprimé en heure.

1. Justifier le fait que x, y, z vérifient le système $\begin{cases} x+y+z=N \\ 3x+4y+7z=S \\ 2x+3y+5z=H \end{cases}$.

2. On considère les matrices colonnes $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} N \\ S \\ H \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée M qui traduit le système ci-dessus par l'équation matricielle $M \times X = Y$.

3. Calculer Y lorsque $X=\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$. Interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la matrice carrée $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $P \times M$.

b) Montrer que si $M \times X = Y$, alors $X = P \times Y$.

c) Pour une période donnée, l'entreprise dispose de 94 kg de silice et de 67 heures de production. Elle souhaite fabriquer 21 pièces de fibres.
Combien de pièces de chaque type peut-t-elle fabriquer ?

Exercice 4 : (4 points)

Une agence de voyage de la zone euro propose un circuit touristique pour visiter les 3 villes A, B et C. Le client peut choisir la durée du séjour dans chaque ville. L'agence distingue deux périodes, la haute et la basse saison, et différencie ses tarifs selon la période.

Les tarifs journaliers dans les différentes villes, en centaines d'euro par personne, sont donnés dans le tableau suivant. L'euro est noté €.

	Ville A	Ville B	Ville C
Nombre de jours	1	1	1
Tarif haute saison	2	2,5	1,5
Tarif basse saison	1	2	1

On note P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Monsieur Martin a choisi un circuit qui comprend 3 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $P \times M$. Que représentent les termes de la matrice obtenue ?

b) Monsieur Martin dispose de 1 500 €. Pourra-t-il réaliser son voyage ?

2. On considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et on note I la matrice unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $Q \times P$.

b) Soient X et Y deux matrices colonnes quelconques à 3 lignes et 1 colonne.
Montrer que, si $P \times X = Y$, alors $X = Q \times Y$.

3. Dans une publicité, l'agence de voyage affirme qu'un circuit complet de 12 jours est possible au tarif de 2250 € en haute saison et 1400 € en basse saison.
Comment se compose ce circuit, en nombre de jours dans chacune des villes ?