LES SUITES NUMÉRIQUES

Une suite est une famille (= une succession) de nombres liés les uns aux autres par une relation, et indexés par des nombres entiers positifs.

Ainsi, on notera (U_n) l'ensemble de tous ces nombres, et U_n le terme général de la suite, celui qui est « au rang n ».

I. SUITES ARITHMÉTIQUES

A. Définition

Une suite arithmétique (U_n) est une suite pour laquelle il existe un réel r tel que, pour tout n, $\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}$.

B. Calcul du terme U_n en fonction de n

Théorème : Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout n entier naturel, on a :

$\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$ si U_0 est le premier terme de la suite

Ou

$\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)r}$ si U_1 est le premier terme de la suite

C. Monotonie (sens de variation) d'une suite arithmétique

Définition : Une suite est dite **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante (pas les deux !).

Pour une suite arithmétique :

- Si $r > 0$,alors (U_n) est strictement croissante
- Si $r < 0$,alors (U_n) est strictement décroissante
- Si $r = 0$,alors (U_n) est constante = stationnaire

⇨ Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de vérifier que l'écart $U_{n+1} - U_n$ est constant ($\forall n$).

D. Calcul de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique

Théorème : Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout n entier naturel, on a :

$$Somme\ des\ termes = (nombre\ de\ termes) \times \frac{Premier\ Terme + Dernier\ Terme}{2}$$

Ainsi la somme du premier au nième terme sera égale à : $(n+1) * \frac{U_0+U_n}{2}$ si U_0 est le premier terme de la suite ou $n\frac{U_1+U_n}{2}$ si U_1 est le premier terme de la suite. Cette formule n'est **pas à connaître par cœur**.

II. SUITES GÉOMÉTRIQUES

A. Définition

Une suite géométrique (U_n) est une suite pour laquelle il existe un nombre réel q tel que, pour tout n (nombre entier positif), $\boldsymbol{U_{n+1} = qU_n}$.

B. Calcul du terme U_n en fonction de n

<u>Théorème :</u> Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout n entier naturel, on a :

$\boldsymbol{U_n = U_0\, q^{\,n}}$ si U_0 est le premier terme de la suite

Ou

$\boldsymbol{U_n = U_1\, q^{\,n-1}}$ si U_1 est le premier terme de la suite

C. Monotonie d'une suite géométrique

- Si $q > 1$,alors (U_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$,alors (U_n) est strictement décroissante
- Si $q = 1$,alors (U_n) est constante = stationnaire
- Si < 0 , alors (U_n) est une suite alternée (change de signe à chaque terme)

⇨ Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de vérifier que le rapport $\frac{U_{n+1}}{Un}$ est constant ($\forall n$).

D. Calcul de la somme des n + 1 premiers termes d'une suite géométrique

<u>Théorème :</u> Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout n entier naturel, on a :

$$Somme\ des\ termes = (\text{Premier Terme})\,\frac{1-q^{(Nombre\ de\ termes)}}{1-q}$$

Ainsi la somme du premier au nième terme sera égale à : $U_0.\frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$ si U_0 est le premier terme de la suite ou $U_1.\frac{1-q^{n}}{1-q}$ si U_1 est le premier terme de la suite. Cette formule n'est **pas à connaître par cœur**.