VARIABLES ALÉATOIRES À VALEURS RÉELLES

I- LOI DE PROBABILITÉ – FONCTION DE RÉPARTITION

A. Loi de probabilité

Variable aléatoire : on considère une expérience aléatoire d'un univers Ω. Définir une variable aléatoire (v.a. par la suite) X, **c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel**.

La loi de probabilité de X est l'association entre les différentes valeurs de X et les probabilités correspondantes.

On la présente parfois sous la forme d'un tableau :

Valeur x_i de la v.a. X	x_1	x_2	…	x_n
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$	$p_1 = P(X = x_1)$	$p_2 = P(X = x_2)$	…	$p_n = P(X = x_n)$

Exemple : on jette un dé équilibré. Si on obtient 6, on gagne 18€. Si on obtient un nombre impair, on gagne 10€. Et dans les autres cas, on perd 30€.

On note X la v.a. égale au gain pour un lancer de dé. X peut donc prendre comme valeurs 18, 10 ou -30.
P(X = 18) = 1/6
P (X= 10) = 3/6 = ½ (car 3 faces impaires sur 6)
P(X = -30) = 2/6 = 1/3 (cas où on tombe sur 2 ou 4)

Gain	-30	10	18
Proba	1/3	1/2	1/6

=> Loi de probabilité de cette v.a. :

La loi de probabilité de la v.a. X est la fonction de X(Ω) →[0 ; 1], qui à k associe $P(X = k)$.

On dit aussi distribution de probabilité.

B. Fonction de répartition

La fonction de répartition de la v.a.X est la fonction F, de IR dans [0 ; 1], qui à x associe F(x) = P($X \leq x$).

Propriétés:

- La fonction de répartition F est toujours **CROISSANTE** sur IR.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- Pour $a \leq b$, on a : $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

C. Cas des variables aléatoires continues

Jusqu'ici, on a étudié des v.a. dont les valeurs étaient « isolées » = v.a. DISCRÈTES.
Mais on peut aussi étudier des v.a. dont les valeurs sont regroupées au sein d'intervalles = v.a. CONTINUES. Pour une telle v.a., la fonction de répartition joue un rôle essentiel et permet de calculer des probabilités P($X \leq x$).

On suppose que cette **fonction de répartition F** est définie par:

P(X ≤ x) = F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ où *f* est la DENSITÉ DE PROBABILITÉ de la v.a. X.

→ Si on trace la représentation graphique de f, **F(x) représente une SURFACE**.

<u>Propriétés de la densité de probabilité de X :</u>

- $f(t) \geq 0 \; \forall t \in IR$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ (car la somme de toutes les probabilités est toujours égale à 1).

<u>Propriété de la fonction de répartition de X :</u> Puisque P(X ≤ x) = F(x) , alors :

$$\mathbf{P\ (\ a \leq X \leq b) \ = \ F(b) - F(a) \ = \int_a^b f\ (t)dt}$$

II- <u>ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE, VARIANCE, ÉCART-TYPE</u>

A. Espérance mathématique

Comme son nom l'indique, l'espérance mathématique représente la valeur à laquelle on s'attend que la variable aléatoire soit égale. C'est pourquoi **on parle aussi de** moyenne.

1. V.a. Discrète

L'espérance mathématique d'une v.a. DISCRÈTE prenant n valeurs x_i avec les probabilités $p_i = P(X = x_i)$, où $1 \leq i \leq n$, est :

$$E\ (X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

2. V.a. Continue

$$E\ (X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt$$

B. Variance, Écart-type

la **variance** d'une v.a. X est, si elle existe, l'espérance mathématique de la v.a. $(X - E(X))^2$.

On a ainsi : $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

Propriété: On a **toujours** $\mathbf{V(X) \geq 0}$

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

C. Couple de deux variables aléatoires X et Y

La **loi du couple** (X, Y) est donnée par $P(X = x \cap Y = y)$.

Les lois respectives de X et de Y sont appelées **loi marginales** de X et de Y.

- **Indépendance de deux v.a.**

$\rightarrow$ Si $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) * P(Y = y_j)$

- **Espérance d'une somme de deux v.a.**

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- **Variance de la somme de deux v.a. indépendantes**

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ **SI** X et Y indépendantes

- **Ecart-type de la somme de deux v.a. indépendantes**

Si X et Y indépendantes ,$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, c'est-à-dire :

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

$$\textbf{DONC } \sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

III- LOIS USUELLES

A. Lois discrètes usuelles

Loi	***Ce que représente X***	***Support X(Ω)***	***Probabilité P (X = k)***	***Espérance E(X)***	***Variance V(X)***	***Ecart type σ***
Bernoulli ***B(p)*** $p \in [0;1]$	Succès/Échec	{0 ; 1}	$p^{k}(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$	$\sqrt{p(1-p)}$
Binomiale ***B(n, p)*** $p \in [0;1]$	Nombre de succès	{0 ; … ,n }	$C_n^k p^{k}(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
Poisson ***P(λ)*** $\lambda > 0$	Phénomènes rares	*IN*	$e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$

- **La loi binomiale** s'utilise lorsqu'une même expérience aléatoire, répétée n fois de façon indépendante (tirage avec remise), a deux issues possibles:
  - "succès", avec la probabilité p
  - "échec", avec la probabilité $1 - p$.

  Alors, la variable aléatoire X associée au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p.

  On a alors :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k} = C_n^k p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$P(X \leq t) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$$

et :

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$$

- **La loi de Poisson** s'utilise généralement lorsqu'une variable aléatoire représente un phénomène rare.

On a dans ce cas:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X \leq t) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = t)$$

$$P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$$

Ces probabilités se calculent à la **calculatrice** (voir p.7)

B. Lois continues usuelles

Loi	*Densité f*	*Fonction de répartition F*	*Espérance E(X)*	*Variance V(X)*	*Ecart type*
Uniforme sur [a ; b]	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} \; si \; a \leq x \leq b \\ 0 \; si \; x < a \; ou \; x > b \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \quad si \; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \; si \; a \leq x \leq b \\ 1 \quad si \; x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Normale $N\ (m\ ;\ \sigma^2)$ $m \in IR;\ \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$	*Non explicite*	m	σ^2	σ
Normale centrée réduite $N\ (0\ ;\ 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$	*Non explicite*	0	1	1
Exponentielle $E\ (\lambda)$ $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$ *si* $x > 0$; *0 sinon*	$1 - e^{-\lambda x}$ *si* $x > 0$; *0 sinon*	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$

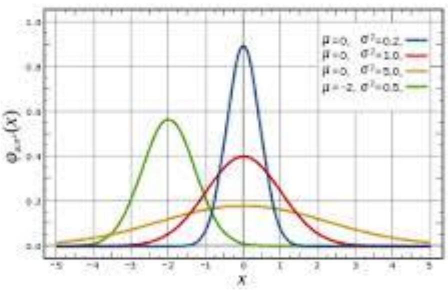
➢ Une variable aléatoire suit une **loi uniforme sur [a ; b]** si et seulement si, pour tout intervalle I inclus dans [a ; b], la probabilité de l'événement « $X \in I$ » est l'aire du domaine
$\{M(x\ ;y)\ ;\ x \in I \ \ et\ 0 \leq y \leq \frac{1}{b-a}\}$

Dans ce cas, pour tout intervalle [x_1 ; x_2] inclus dans [a ; b],

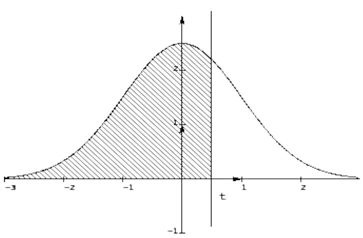
$$P(X \in [x_1\ ;\ x_2]) = \frac{x2 - x1}{b-a}$$

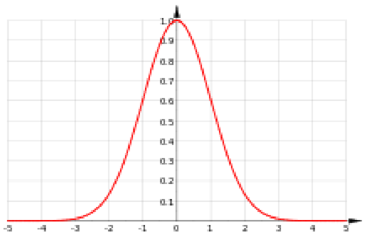
➢ Dans le cas d'une variable aléatoire qui suit une **loi normale d'espérance m et d'écart-type σ**, on calcule directement une probabilité avec la **calculatrice** (voir p.6).

Représentation :



Et pour une loi normale centrée réduite :





➢ La **loi exponentielle** est utilisée pour les questions relatives à la **fiabilité** d'un dispositif. C'est la loi suivie par une variable aléatoire T lorsque le **taux d'avarie** $\boldsymbol{\lambda}$ est constant.

On définit donc, pour $t \geq 0$:

- La **fonction de défaillance** (= failure), qui donne la probabilité pour que le système ait une défaillance avant l'instant t: $\boldsymbol{F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}}$
- La **fonction de fiabilité** (= reliability), qui donne la probabilité pour que le système n'ait pas de défaillance avant l'instant t: $\boldsymbol{R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}}$
- La **M.T.B.F.** (Moyenne de Temps de Bon Fonctionnement, ou encore, en anglais, Mean Time Between Failures), est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.

  On a M.T.B.F. $= \frac{1}{\lambda}$
- De plus $\boldsymbol{\sigma(T) = \frac{1}{\lambda}}$.

C. Approximation

1. d'une loi binomiale par une loi de poisson

Si $n \geq 30, p \leq 0{,}1$ *et* $np < 15$ OU lorsque $p \leq 0{,}1$ *et* $np \leq 10$ *alors* $B(n, p) \sim P(\lambda)$ *où* $\lambda = np$

Sous ces conditions, **une loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$**

2. d'une loi binomiale par une loi normale

Si $n \geq 30, \ np > 5 \ \ np(1-p) > 5$ *alors* $B(n, p) \sim N(m, \sigma)$

Sous ces conditions, une **loi binomiale de paramètres n et p peut être approchée par une loi normale de moyenne (espérance)** $\boldsymbol{m = np}$ **et d'écart-type** $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{np(1-p)}}$.

Mémo – Utilisation de la calculatrice

➔ **Cas d'une loi BINOMIALE :**

- Pour déterminer $P(X = k)$:

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

- Pour déterminer $P(X > k)$:

➔ **Cas d'une loi de POISSON :**

- Pour déterminer $P(X = k)$:

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

- Pour déterminer $P(X > k)$:

➔ **Cas d'une loi NORMALE :**

- Pour déterminer $P(X \leq k)$:

- Pour déterminer $P(a \leq X \leq b)$:

- Pour déterminer $P(X > k)$:

- Pour déterminer k tel que $P(X \leq k) = n$ (par exemple 0,9 ou 0,95 ou 0,99).