BTS Sio

Corrigé de l'épreuve UF2. mai 2014

Exercice 2 :

$$f(t) = \frac{100}{1+6e^{-0,25t}}$$

1) 2000 correspond à $t=0$

or $f(0) \approx 14,3 \Rightarrow$ Au 1er janvier 2000, il y avait 14,3% d'internautes

2) a) Calculons $f'(t)$

$f(t)$ est de la forme $100 \times \frac{1}{u(t)}$ avec $u(t) = 1+6e^{-0,25t}$

donc $u'(t) = 6 \times (-0,25e^{-0,25t})$
$= -1,5e^{-0,25t}$

Ainsi $f'(t) = 100 \times \frac{-u'(t)}{u^2(t)} = 100 \times \frac{-(-1,5e^{-0,25t})}{(1+6e^{-0,25t})^2}$

$$f'(t) = \frac{150e^{-0,25t}}{(1+6e^{-0,25t})^2} \quad \text{CQFD.}$$

b) Pour étudier les variations de f, on doit regarder le signe de $f'(t)$.

Or, pour $t \in [0,50]$: $150 > 0$.

$e^{-0,25t} > 0$ car exponentielle est toujours >0

$(1+6e^{-0,25t})^2 > 0$ car un carré est tjs >0

D'où, $\forall t \in [0,50]$ $f'(t) > 0$. Donc f est strictement croissante.

tableau de variation :

x	0	50
signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	14,3 ↗	99,997

3 - $f(19) \approx 95,065$. Puisque $f(19) > 95$ alors, selon ce modèle, le nombre d'internautes sera supérieur à 95% au 1er janvier 2019.

4) a) $f(t) = 99,9 \iff \dfrac{100}{1+6e^{-0,25t}} = 99,9$

$\iff 1+6e^{-0,25t} = \dfrac{100}{99,9}$ → Produit en croix

$\iff 6e^{-0,25t} = \dfrac{100}{99,9} - 1 = \dfrac{100-99,9}{99,9} = \dfrac{0,1}{99,9}$

$\iff e^{-0,25t} = \dfrac{0,1}{99,9\times 6} = \dfrac{0,1}{599,4} = \dfrac{1}{5994}$

$\iff \ln e^{-0,25t} = \ln\left(\dfrac{1}{5994}\right)$

$\iff -0,25t = \ln(1/5994)$

$\iff t = \dfrac{\ln(1/5994)}{-0,25} \approx 34,79$ soit 35

On a $f(t) = 99,9$ pour $\boxed{t \approx 35}$

b) Cela signifie que 99,9% de la population française sera constituée d'internautes au 1er janvier 2035.