Langage ensembliste - Applications

Exercice 1:

Donner un exemple de trois ensembles A, B et C tels que $A \cap B = A \cap C$, mais $A \neq B$.

Exercice 2: c.f. cours double distributivité

À l'aide de diagrammes, montrer les identités suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Exercice 3: ×

Soient A et B deux parties d'un même ensemble E. À l'aide de diagrammes, simplifier : $(A \cap (A \cup B)) \cap (A \cup E)$.

Exercice 4:

1. Soit A et B des parties d'un ensemble E. Illustrer graphiquement les ensembles suivants :

$$\overline{A} \cap B$$
$$\overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A} \cap \overline{B}$$

2. Soit A, B, C des parties d'un ensemble E. Illustrer graphiquement les ensembles suivants :

$$A \cap B \cap C$$
$$A \cap B \cap \overline{C}$$
$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$
$$(\overline{A} \cap B) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Exercice 5:

Soit A et B des parties d'un ensemble E. Simplifier :

$$A \cap \varnothing$$
$$A \cup \varnothing$$
$$A \cap E$$
$$A \cup E$$
$$A \cap (A \cap B)$$
$$A \cup (A \cup B)$$
$$A \cap \overline{A}$$
$$A \cup \overline{A}$$
$$A \cap (\overline{A} \cap B)$$
$$A \cup (\overline{A} \cup B)$$

Exercice 6:

Soit A, B, C des parties d'un ensemble E. Simplifier :

$$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$$
$$A \cup \overline{A} \cup (A \cap B)$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$$
$$(A \cup B \cup \overline{C}) \cap C \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B \cup \overline{C}} \cap A$$

Exercice 7:

Pour des parties A et B d'un ensemble E, on définit la **différence** de A et de B, notée $A \setminus B$, par

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

1. Illustrer cette notion par une figure. Déterminer les ensembles $\overline{A} \setminus \overline{B}$, $A \setminus A$, $A \setminus E$ et $A \setminus \varnothing$.
2. Montrer que, si A, B, C sont des parties de E, on a $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 8:

Produit cartésien

Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

a) Montrer que $E \times F$ et $F \times E$ ont même cardinal, mais que ce sont deux ensembles différents.

b) Que vaut le cardinal de E^3 ? En donner les éléments.

Exercice 9:

Soit $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ et $G = \{1, 4\}$. Donner la liste des éléments des ensembles suivants :

$$E \times F \qquad E \times \{1\} \qquad E \times \varnothing \qquad F \times (E \cap G) \qquad (F \times E) \cap G$$

Exercice 10:

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et l'application f définie de E dans E par

$$f(a) = b \qquad f(b) = c \qquad f(c) = b$$

1. Faire un diagramme sagittal de cette application.
2. Déterminer les antécédents par f de chacun des éléments de E.
3. L'application f est-elle injective de E dans E ?
4. L'application f est-elle surjective de E dans E ?