III - ALGÈBRE DE BOOLE

On a remarqué qu'il existe une concordance entre les langages de la logique et de la théorie des ensembles. Il s'agit de deux cas particuliers d'une structure appelée ALGÈBRE DE BOOLE.

Rmq: Georges Boole: logicien, mathématicien, et philosophe britannique (1815-1864).

A) Définition

Un ensemble B (non vide) muni de deux lois de composition interne (+ et .), d'une opération unaire (négation $\bar{a}$) et possédant deux éléments particuliers (0 et 1), a une STRUCTURE d'ALGÈBRE DE BOOLE si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées:

$\forall (a,b) \in B^2$ $\quad a+b=b+a \quad$ *commutativité de +*

$\forall (a,b) \in B^2$ $\quad a.b=b.a \quad$ *commutativité de .*

$\forall (a,b,c) \in B^3$ $\quad a.(b+c)=a.b+a.c \quad$ *distributivité de . par rapport à +*

$\forall (a,b,c) \in B^3$ $\quad a+(b.c)=(a+b).(a+c) \quad$ *distributivité de + par rapport à .*

$\forall a \in B$ $\quad a+0=a \quad$ 0 *élément nul*

$\forall a \in B$ $\quad a.1=a \quad$ 1élément *unité*

$\forall a \in B$ $\quad a+\bar{a}=1 \quad$ $\bar{a}=$ *complément de a*

$\forall a \in B$ $\quad a.\bar{a}=0 \quad$ $\bar{a}=$ *complément de a*

Analogies:

+ = v = U et . = ^ = ∩
De plus, $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$ équivaut à $P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$

→L'ensemble B = {0,1} muni de l'addition booléenne et de la multiplication booléenne, de l'opération unaire définie par $\bar{0}=1$ *et* $\bar{1}=0$ a une structure d'algèbre de Boole.

Table de l'addition booléenne:

	0	1
0	0	1
1	1	1

Table de la multiplication booléenne:

	0	1
0	0	0
1	0	1

B) Propriétés

Soit un ensemble B muni d'une structure d'algèbre de Boole. Prenons $a \in B, b \in B, c \in B$:

1. Idempotence

$$a+a=a$$
$$a.a=a$$

2. Propriétés des éléments nul et unité: 0 et 1

$$a+1=1$$
$$a0=0$$

3. Absorption

$$a+ab=a$$
$$a(a+b)=a$$

4. Associativité

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ on écrit } a+b+c$$
$$(ab)c=a(bc) \text{ on écrit } abc$$

5. Propriétés du complément

$\forall a \in B$

$$\bar{\bar{a}}=a$$
$$\bar{0}=1$$
$$\bar{1}=0$$

6. Lois de Morgan

$\forall (a,b) \in B^2$

$$\overline{a+b}=\bar{a}\,\bar{b}$$
$$\overline{(ab)}=\bar{a}+\bar{b}$$

C) Tableaux de KARNAUGH

Préambule:exemples de fonctions ou expressions booléennes.

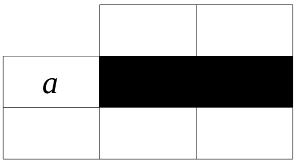
Les tableaux de Karnaugh permettent de représenter graphiquement des expressions booléennes comportant plusieurs variables booléennes.
Nous nous limiterons au cas de 2 ou 3 variables booléennes.

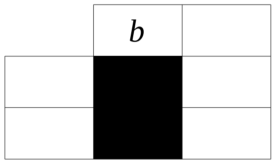
1. Cas de deux variables booléennes

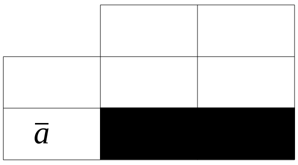
Dans ce cas un tableau de Karnaugh est un carré comportant 4 cases correspondant aux 4 produits $ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}$:

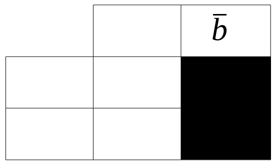
	b	$\bar{b}$
a	ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}$	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

On a donc:

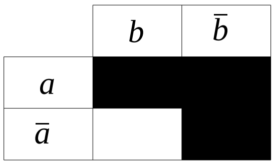








<u>Exemple:</u>



$$ab + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} = a + \bar{b}$$

Un tableau de Karnaugh permet de simplifier une expression ou de vérifier des calculs.

2. Cas de 3 variables booléennes

3 variables impliquent 8 cases correspondant aux 8 produits: $abc, ab\bar{c}, a\bar{b}c, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}bc, \bar{a}b\bar{c}, \bar{a}\bar{b}c, \bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

	b		$\bar{b}$	
a	abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$
	c	$\bar{c}$		c

On a donc:

a:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

b:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

c:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{a}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{b}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{c}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

et :

ab:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$a\bar{b}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

bc:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

ac :

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$a\bar{c}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$b\bar{c}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{a}b$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{a}\bar{b}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{b}c$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{a}c$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{a}\bar{c}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

$\bar{b}\bar{c}$:

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c