

Exercices Calcul booléen

Ex1 Pour les valeurs de a, b et c données, calculer les expressions A, B et C :

$$A = \bar{a} + b + \bar{c}, \quad B = a\bar{b} + c, \quad C = (a+b)\bar{c}$$

a) $a = 0, b = 1, c = 1$

b) $a = 1, b = 1, c = 1$

c) $a = 1, b = 1, c = 0$

Ex2 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a) $a + ab = a$

b) $a(a+b) = a$

Ex3 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a) $a + ab = a + b$

b) $(a+b)(a+\bar{b}) = a$

Ex4 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

a) $a + b + a \cdot \bar{b} = 1$

b) $(a+b)\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

Ex5 Démontrer à l'aide d'une table de vérité les formules suivantes :

$a(b+c) = ab + ac$

(distributivité de la multiplication)

$a + bc = (a+b)(a+c)$

(distributivité de l'addition)

Ex6 Démontrer à l'aide d'un tableau de Karnaugh les formules suivantes :

a) $a + ab = a + b$

b) $a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = 1$

Ex7 a) Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :

$A = ab + \bar{c}$ et $B = \bar{a} + bc$

b) Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de \bar{A} et \bar{B} .

Ex8 a) Représenter par un tableau de Karnaugh les expressions :

$A = a\bar{c} + \bar{b}c + abc$ et $B = \bar{a}b + \bar{b}c + a\bar{c}$

b) Utiliser le tableau pour déterminer les expressions de \bar{A} et \bar{B} .

Ex9 On considère la loi $*$ définie par la table de vérité du tableau :

Tableau 4.23

a	b	$a * b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a) En logique, quel est l'équivalent de cette loi ?

b) À l'aide d'une table de vérité, montrer que $a * b = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$

c) Démontrer par calculs que $a * b = (a+b) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$.

Ex10 Soit $A = \bar{a} \cdot \bar{b} + a\bar{b} + b$. Montrer que $A=1$ de deux façons : table de vérité et calculs.

Ex11 Soit $A = ab + abc + a\bar{b}$. Montrer que $A=a$ de deux façons : tableau de Karnaugh et calculs.

Ex12 Soit $A = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a\bar{b}c + \bar{a} \cdot \bar{b} + a\bar{b} \cdot \bar{c}$. Simplifier A avec un diagramme de Karnaugh, puis vérifier par des calculs.

Ex13 Dans un grand magasin, le service clientèle a organisé une classification des clients en trois catégories :

- Si le client achète un article, il est classé en catégorie A et $a = 1$, sinon $a = 0$.
- Si le client échange ou rend un article, il est classé en catégorie E et $e = 1$ sinon $e = 0$.
- Si le client demande des renseignements, il est classé en catégorie R et $r = 1$ sinon $r = 0$.

Soit $F = a \cdot \bar{e} \cdot r + a \cdot \bar{e} \cdot \bar{r}$

a) Faire le diagramme de Karnaugh de F .

b) En déduire une forme simplifiée de F .

c) Retrouver la forme simplifiée de F par calcul.

d) Quel type de client est un client de type \bar{F} ? Est-ce un client peu intéressant, assez intéressant ou très intéressant pour le magasin ? Donner l'écriture la plus simple de \bar{F} .

Ex14 Une société désire recruter en interne des collaborateurs pour sa filiale en Asie. Pour chaque employé, on définit les variables booléennes suivantes :

$a = 1$ s'il a plus de cinq ans d'ancienneté dans l'entreprise.

$b = 1$ s'il possède un BTS SIO.

$c = 1$ s'il parle couramment l'anglais.

La direction des ressources humaines décide que pourront postuler les employés :

- qui satisfont aux trois conditions ;
- ou qui ont moins de cinq ans d'expérience mais qui maîtrisent l'anglais ;
- ou qui ne maîtrisent pas l'anglais mais ont un BTS SIO.

a) Écrire une expression booléenne E traduisant les critères de sélection de la direction.

b) Représenter l'expression E par un tableau de Karnaugh.

c) À l'aide du tableau, donner une expression simplifiée de E .

d) Retrouver le résultat par calcul.

e) Déduire des questions 3 ou 4 une version simplifiée des critères de la direction.

Ex15 On considère l'expression $E = \overline{a}c + b\overline{c} + \overline{a}b + \overline{a}bc$.

a) Simplifier l'écriture de \overline{E} à l'aide d'un diagramme de Karnaugh et en déduire que $E = \overline{b} + \overline{c}$. Retrouver par calcul la forme simplifiée de E .

b) Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à retrouver un emploi, on considère pour ces personnes les trois variables booléennes a , b et c définies ainsi :

- $a = 1$ si la personne a 45 ans ou plus, sinon $a = 0$.
- $b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus, sinon $b = 0$.
- $c = 1$ si la personne a déjà suivi une qualification l'année précédente, sinon $c = 0$.

Une formation sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

- Avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins d'un an.
- Avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.
- Être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente.
- Avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins d'un an et avoir suivi une formation l'année précédente.

Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.

1) Écrire l'expression booléenne F en fonction de a , b et c qui traduit le fait que la personne pourra suivre cette formation.

2) En déduire les personnes qui ne pourront pas participer à la formation et qui participeront donc à un stage d'insertion en entreprise.

Ex16 Une entreprise décide de choisir de nouveaux chefs de service parmi ses employés en se servant des variables booléennes suivantes :

- $a = 1$ si et seulement si l'employé a plus de 10 ans d'ancienneté dans l'entreprise.
- $b = 1$ si et seulement si l'employé arrive souvent en retard.
- $c = 1$ si et seulement si l'employé a des relations difficiles avec ses collègues.

L'entreprise fait une première sélection parmi ses employés en considérant les critères suivants : « l'employé est ponctuel et s'entend bien avec ses collègues » ou « l'employé est dans l'entreprise depuis au moins 10 ans ».

a) Donner l'expression booléenne E correspondant à un employé qui respecte les conditions pour devenir chef de service.

b) Donner l'expression de \overline{E} à l'aide du tableau de Karnaugh. Retrouver le résultat par calculs.

Ex17 Le gérant d'un magasin de vente de matériel d'occasion décide de réaliser une enquête sur les critères de choix des clients concernant l'achat d'ordinateurs.

Il examine trois critères, associés à trois variables booléennes a , b et c .

- La variable a concerne l'ancienneté. $a = 0$ si l'ordinateur a moins d'un an, $a = 1$ s'il a plus d'un an.
- La variable b concerne l'état. $b = 0$ si l'ordinateur est un peu abîmé, $b = 1$ s'il est en bon état.
- La variable c concerne la fiabilité. $c = 0$ si la marque est réputée peu fiable, $c = 1$ sinon.

Après dépouillement, il apparaît que les clients achètent un ordinateur si :

- il a moins d'un an et que sa marque est réputée fiable ;
- ou s'il a plus d'un an mais qu'il est en bon état ;
- ou si sa marque est réputée peu fiable mais qu'il a moins d'un an.

a) Traduire par une variable booléenne E l'ensemble des critères d'achat.

b) Faire la table de Karnaugh de E et donner une expression simplifiée de E . Traduire par une phrase cette expression simplifiée.

c) Montrer par calculs, que $E = \overline{a} + b$. En déduire une expression de \overline{E} et traduire cette expression par une phrase.

Ex 18 Un centre téléphonique reçoit les appels des clients de l'entreprise iTélé.

Pour chaque appel on considère les variables booléennes a, b, c telles que :

- $a = 1$ quand une commande est passée lors de l'appel ($a = 0$ sinon) ;
- $b = 1$ quand une demande de catalogue est faite lors de l'appel ($b = 0$ sinon) ;
- $c = 1$ quand le SAV est demandé lors de l'appel ($c = 0$ sinon).

Soit l'expression booléenne $A = a \cdot (\bar{b} + c) + \bar{a}$.

a) À l'aide d'un tableau de Karnaugh, montrer que $A = \bar{a} + \bar{b} + c$

b) Retrouver cette simplification par le calcul.

c) Donner l'expression de \bar{A} .

d) On considère un appel qui correspond à \bar{A} . Préciser en français de quel type d'appel il s'agit.

Ex 19 Un immeuble de 30 étages ne comporte qu'un seul ascenseur A. Pour limiter le temps d'attente au rez-de-chaussée, on décide de mettre un deuxième ascenseur B en service avec un logiciel qui le mettra en service sous certaines conditions.

On considère les trois variables booléennes s, m et r définies de la façon suivante :

- $s = 1$ lorsque l'ascenseur A est à un étage supérieur au 15^e étage ;
- $m = 1$ lorsque l'ascenseur A monte ;
- $r = 1$ lorsque l'ascenseur A est appelé.

a) Traduire par une expression booléenne chacune des situations suivantes :

- 1) « L'ascenseur A est appelé alors qu'il est à un étage supérieur au 15^e étage. »
- 2) « L'ascenseur A est appelé ou il ne monte pas. »

b) Quelle situation est traduite par l'expression booléenne $mr + \bar{s}$?

c) À la suite d'une étude, on fait en sorte que l'ascenseur B descende au rez-de-chaussée chaque fois que l'expression booléenne $F = s \cdot r + m \cdot r + \bar{s} \cdot m + s \cdot m \cdot r$ vaut 1.

- 1) Quelle est la valeur de F lorsque $s = 1, m = 0$ et $r = 0$?
- 2) L'ascenseur B descendra-t-il au rez-de-chaussée si l'ascenseur A est appelé et qu'il descend alors qu'il se trouve au 10^e étage ?
- 3) À l'aide d'un tableau de Karnaugh, écrire F comme somme de deux variables booléennes.
- 4) Traduire l'expression simplifiée de F par une phrase.
- 5) Quelle est l'expression de \bar{F} ? À quelle situation correspond-elle ?

Ex 20 Bob et Alice organisent une soirée pour les membres de leur club informatique. Ils décident que pour être invité, il faut :

- être ami d'Alice et Bob,
- ou ne pas être ami de Bob, mais être ami d'Alice,
- ou ne pas être ami d'Alice mais jouer au poker.

Pour un membre quelconque, on considère les variables booléennes suivantes : $a = 1$ s'il est ami de Bob, $b = 1$ s'il joue au poker, $c = 1$ s'il est ami d'Alice.

a) Écrire la fonction booléenne $f(a, b, c)$ qui traduit le fait qu'un membre du club soit invité.

b) Faire le tableau de Karnaugh de cette fonction.

c) Charles est ami de Bob, mais pas d'Alice. Est-il nécessairement invité ? Justifier. David n'est pas ami de Bob mais joue au poker. Est-il nécessairement invité ? Justifier.

d) Simplifier l'expression de $f(a, b, c)$, à l'aide du tableau.

e) Énoncer la règle de décision d'inviter un membre du club, de la façon la plus simple possible.