모두의 연구소 세번째 시간

Sophy Shin

Quantum Developer Advocate, Korea Quantum & Qiskit Community Lead

IBM Quantum

Recap I

IBM **Quantum**

Single System (외부와 단절되어 있는, 정보를 저장하는 하나의 시스템)

양자상태벡터

- 열 벡터로 표현됨
- 벡터 인덱스는 시스템의 고전적인 상태에 라벨을 붙인 것
- 양자 상태 벡터의 값은 *복소수*
- 양자 상태 벡터의 요소의 *절대 값의 제곱의* 합은 1과 같아야 함

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |0\rangle \quad \text{그리고} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle,$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle,$$

양자상태측정(표준기저측정(= 0 또는 1로 측정함))

- 측정을 수행하는 관측자는 양자 상태 벡터가 아니라 가능한 고전적인 상태 중 하나를 얻음
- 보른 규칙: 양자 상태가 측정되면 시스템의 각 고전 상태는 각각에 해당하는 양자 상태 벡터의 요소의 절대 값의 제곱과 같은 확률로 얻어짐
- $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \rightarrow \Pr(=0) = |\langle 0|+\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}, \Pr(=1) = |\langle 1|+\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

유니터리 연산

- 양자 상태 벡터의 조작은 유니터리 행렬
- 유니터리(U): 복소수 계수를 갖는 정사각 행렬로 다음을 만족
    - $UU^\dagger = I, U^\dagger U = I$ ($U^\dagger$ = U의 공역전치, $\overline{U^T}$ and U^{-1})

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \qquad P_\theta = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$$

$$R = HSH = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2}\\\frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}$$

Recap II

Multiple System

벡터 텐서

- 두 시스템이 독립인 경우 성립 (Pr((X,Y) = (a,b)) = Pr(X=a)Pr(Y=b)
- $|\phi\rangle = \sum_{a\in\Sigma} \alpha_a |a\rangle,\ |\psi\rangle = \sum_{b\in\Gamma} \beta_b |b\rangle \ \rightarrow |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \ \sum_{(a,b)\in\Sigma\times\Gamma} |ab\rangle$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_1\beta_k \\ \alpha_2\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_2\beta_k \\ \vdots \\ \alpha_m\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_m\beta_k \end{pmatrix}.$$

Example

The quantum state vector

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{i}{2}|11\rangle$$

is an example of a product state:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{2}|01\rangle - \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{i}{2}|11\rangle \\ &\qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \end{aligned}$$

Recap II

IBM **Quantum**

얽힘

$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ 은 $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$의 형태로 표현할 수 없음 → 얽혀있음

대표적인 2 큐비트 얽힘 상태: 벨 상태

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

대표적인 3 큐비트 얽힘 상태: GHZ 상태 및 W 상태

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle.$$

측정

- Tensor Product 상태인 경우
  - 한 시스템을 부분 측정하는 경우라면 single system으로 취급가능

  → 한 서브 시스템의 측정이 다른 서브 시스템의 상태에 영향을 주지 않음

  → 예를 들어 $|\phi^+\rangle$ 상태의 경우, 1번째 큐비트가 0으로 측정될 확률은 0.5이고, 이때 0번째 큐비트가 0, 1로 측정될 확률은 각각 0.5

- 얽힘 상태인 경우
  - 한 서브 시스템의 측정이 다른 서브 시스템의 상태를 결정함

  → 예를 들어 W state의 경우, 1번째 큐비트가 1로 측정될 확률은 1/3이고 이때 나머지 큐비트의 상태는 0으로 100%의 확률로 결정됨

Recap II

IBM **Quantum**

Unitary Operations – Tensor Product

Suppose X and Y are qubits.

Performing a Hadamard operation on X and doing nothing to Y is equivalent to performing this unitary operation on (X, Y):

$$H \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Suppose X and Y are qubits.

Performing a Hadamard operation on Y and doing nothing to X is equivalent to performing this unitary operation on (X, Y):

$$\mathbb{1} \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Unitary Operations – Non-Tensor Product operations

Example

The swap operation can be expressed using the Dirac notation as follows:

$$\mathrm{SWAP} = \sum_{a,b\in\Sigma} |a\rangle\langle b| \otimes |b\rangle\langle a|$$

For instance, when X and Y are qubits, we find that

$$\mathrm{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Example

A controlled-NOT operation (where the first qubit is the control):

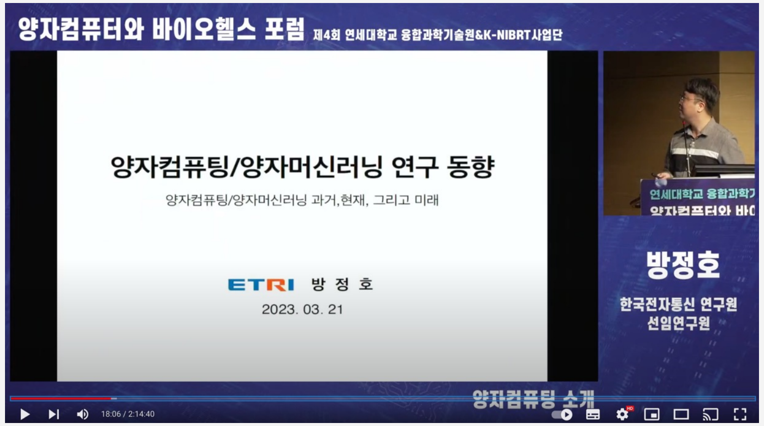
$$|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agenda

1. Quantum Circuits
2. Inner Products, orthonormality, and Projections
3. Limitations of quantum information:
    1. Irrelevance of global phases
    2. No-cloning theorem
    3. Non-orthogonal states cannot be perfectly discriminated

시작하기 전에

https://www.youtube.com/watch?v=nOzY4yGJOAE



https://www.youtube.com/live/nOzY4yGJOAE?feature=share&t=1086

https://www.youtube.com/live/nOzY4yGJOAE?feature=share&t=3832

Quantum Circuit

회로: 계산의 모델

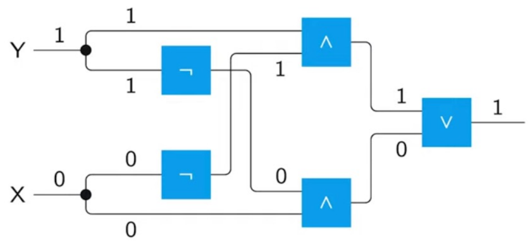
- 와이어는 정보를 전달
- 게이트는 연산을 의미함

회로에서 정보는 **왼쪽** 에서 **오른쪽** 으로 흐름

고전적 회로의 예

Wires store binary values, gates represent Boolean logic operations, such as AND (∧), OR (∨), NOT (¬), and FANOUT (•).

Boolean Circuit (논리 회로)

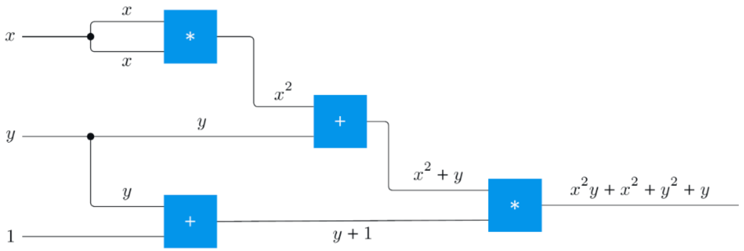


a	$\neg a$
0	1
1	0

ab	$a \wedge b$
00	0
01	0
10	0
11	1

ab	$a \vee b$
00	0
01	1
10	1
11	1

Arithmetic Circuit연산 회로



Quantum Circuit

양자 회로

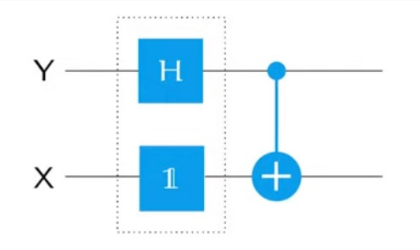
- 와이어는 큐비트를 의미
- 게이트는 유니터리 연산과 측정 등을 의미함

Qiskit의 양자 회로에서

- 큐비트의 위에서 아래 순서는 오른쪽에서 왼쪽의 순서와 같다

0번 큐비트

1번 큐비트



$|XY\rangle$

양자 회로의 예

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{THSH} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Learn by Coding