

Ôn tập môn Toán rời rạc

1 Mệnh đề và tập hợp

1.1 Lý thuyết

1.1.1 Bảng giá trị chân lý mệnh đề

p	q	\bar{p}	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

Hình 1: Bảng giá trị chân lý của các phép toán mệnh đề

1.1.2 Bảng mệnh đề tương đương

1.1.3 Dạng chuẩn tắc của mệnh đề (chuẩn hội)

Biến đổi công thức về dạng chuẩn hội là một cách hiệu quả để chứng minh tính tương đương của các mệnh đề và không sử dụng bảng chân trị. Các bước để biến đổi một công thức về dạng chuẩn hội:

1. Bỏ các phép kéo theo (\rightarrow) bằng cách thay $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
2. Áp dụng luật De Morgan để chuyển các phép phủ định vào sát các mệnh đề; thay $\neg \bar{p} \Leftrightarrow p$
3. Áp dụng luật phân phối thay các công thức có dạng: $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge T \Leftrightarrow p$	(Luật đồng nhất)	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	(Luật giao hoán)
$p \vee F \Leftrightarrow p$	Identity laws	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Commutative laws
$p \vee T \Leftrightarrow T$	(Luật nuốt)	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	(Luật kết hợp)
$p \wedge F \Leftrightarrow F$	Domination laws	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee p \Leftrightarrow p$	(Luật lũy đẳng)	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(Luật phân phối)
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotent laws	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distribute laws
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	(Luật phủ định kép)	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	(Luật De Morgan)
	Double negation law	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws

Hình 2: Bảng mệnh đề tương đương (1)

1.1.4 Vị từ và lượng từ

Vị từ Tổng quát, giả sử M là một tập hợp các phần tử nào đó. M thường được gọi là trường hay miền xác định của các phần tử thuộc M . Khi đó, biểu thức $P(x)$ gọi là vị từ xác định trên trường M nếu khi thay x bởi một phần tử bất kỳ của trường M thì $P(x)$ sẽ trở thành một mệnh đề trên trường M .

Lượng từ

- Lượng từ với mọi của $P(x)$, ký hiệu $\forall xP(x)$: " $P(x)$ đúng với mọi phần tử x thuộc trường đang xét"
- Lượng từ tồn tại của $P(x)$, ký hiệu $\exists xP(x)$: " $Tồn tại ít nhất 1 phần tử x trong trường đang xét sao cho $P(x)$ đúng".$

1.1.5 Tổ hợp

Các phép toán trên tập hợp

- Phép hợp: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
- Phép giao: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
- Phép hiệu: $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- Phép bù: $\bar{A} = \{x | x \notin A\}$

TABLE 7 Logical Equivalences Involving Conditional Statements.
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

TABLE 8 Logical Equivalences Involving Biconditional Statements.
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Hình 3: Bảng mệnh đề tương đương (2)

- Hợp các tập hợp: $\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
- Giao các tập hợp: $\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

Các hằng đẳng thức trên tập hợp

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$ (U là tập vô hạn)	Luật đồng nhất
$A \cup U = U$ $A \cup \emptyset = A$	Luật nuốt
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Luật lũy đẳng
$\bar{\bar{A}} = A$	Luật bù
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Luật giao hoán
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Luật kết hợp
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Luật phân phối
$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$	Luật De Morgan

1.2 Bài tập

Bài 1. Sử dụng các phép biến đổi tương đương và các mệnh đề tương đương cơ bản, chứng minh sự tương đương logic sau:

- $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \vee r)$
- $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$

Bài 2. Sử dụng phương pháp lập bảng chân trị, chứng minh sự tương đương logic sau:

- $\neg(p \leftrightarrow q) = \neg p \leftrightarrow q$
- $(p \rightarrow q) = (\neg p \vee q)$
- $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) = \neg p \wedge \neg q$
- $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) = T$
- $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) = q \rightarrow (p \vee r)$

Bài 3. Kiểm tra các suy luận sau:

1. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg r] \rightarrow \neg(p \vee r)$
2. $[(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge p] \rightarrow r$
3. $[(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r] \rightarrow q$

Bài 4. Ba sinh viên A, B, C bị nghi ngờ đã gian lận trong bài thi. Khi được hỏi đã trả lời như sau:

- A: "B đã chép bài còn C vô tội"
- B: "Nếu A có tội thì C cũng có tội"
- C: "Tôi không gian lận"

1. Nếu cả 3 đều đúng thì ai gian lận?
2. Nếu cả 3 không gian lận thì ai nói dối?
3. A nói thật, B nói dối thì ai gian lận?
4. Nếu cả 3 đều nói dối thì sao?

Bài 5. Cho các mệnh đề sau:

- p = "Tam giác ABC là tam giác cân"
- q = "Tam giác ABC là tam giác đều"
- r = "Tam giác ABC có 2 cạnh $BA = BC$ "
- s = "Tam giác ABC có góc A bằng 60 độ"

Viết các mệnh đề sau bằng ngôn ngữ tự nhiên và cho biết chân trị mệnh đề

1. $q \rightarrow p$
2. $r \wedge \neg s \rightarrow q$
3. $r \vee s \rightarrow p$

Bài 6. Cho các vị từ $P(x) = "x \leq 5"$, $Q(x) = "(x + 3) \bmod 2 = 0"$, $R(x) = "x > 0"$. Tìm chân trị các mệnh đề sau:

1. $P(2) \vee (Q(2) \vee R(2))$
2. $P(2) \wedge (\neg Q(2) \vee \neg R(2))$
3. $P(3) \rightarrow (Q(3) \rightarrow R(3))$
4. $P(3) \wedge Q(3) \rightarrow R(3)$