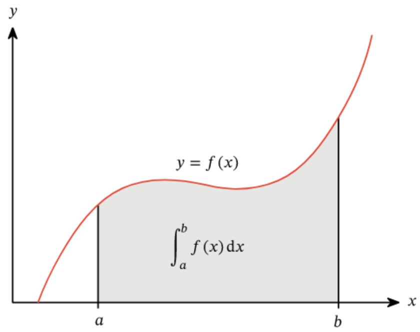
Intégrales : Étude de quelques méthodes d'approximation



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

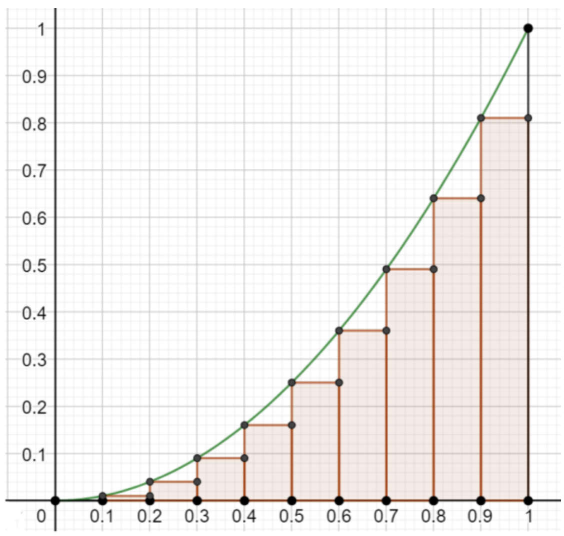
Le but de ce TP est de mettre en place et comparer plusieurs méthodes de calcul approché de l'aire du domaine situé sous la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle [a ; b].

I - Méthodes des rectangles

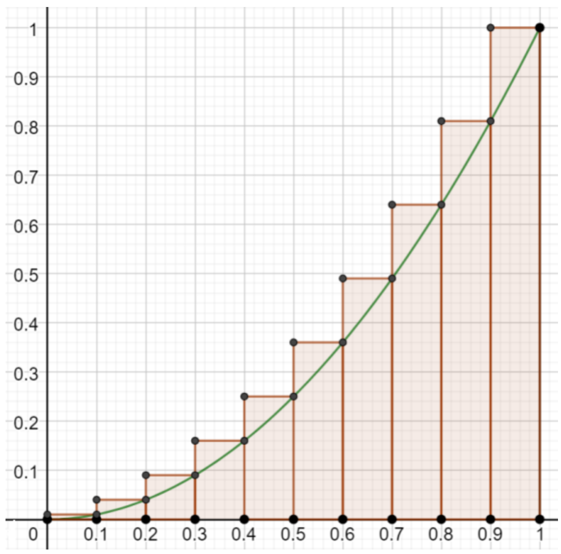
La méthode historique, celle qui donne sa notation $\int_a^b f(x)dx$ est la méthode des rectangles.

On divise l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de largeur dx. On forme alors des rectangles dont l'aire cumulée approchera celle du domaine sous la courbe. Il y a trois possibilités pour construire un rectangle entre les abscisses x et $x + dx$:

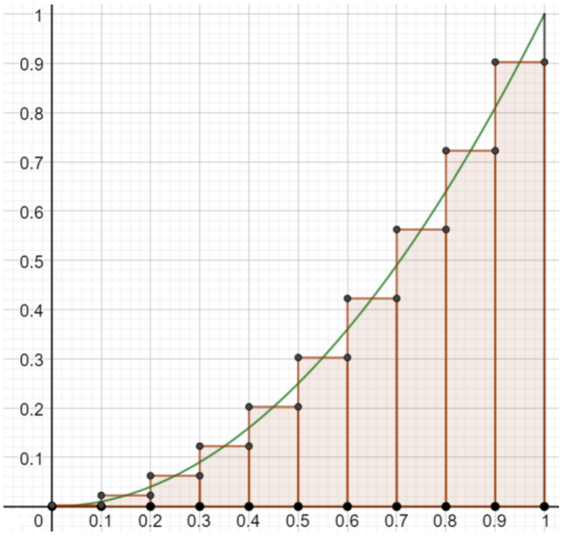
• **<u>Méthode 1</u>** : On le construit d'une hauteur $f(x)$: les sommets en haut à gauche de chaque rectangle correspondent à des points de la courbe.



• **<u>Méthode 2</u>** : On le construit d'une hauteur $f(x + dx)$: les sommets en haut à droite de chaque rectangle correspondent à des points de la courbe.



• **<u>Méthode 3</u>** : On le construit d'une hauteur $f\left(x+\frac{dx}{2}\right)$: les milieux des côtés hauts de chaque rectangle correspondent à des points de la courbe.



L'objectif est de comparer ces trois méthodes.

Consigne :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On souhaite déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}$, aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0 ; 1].

1) On utilise la méthode 1.

Écrire un programme permettant de calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ en partageant l'intervalle [0 ; 1] :

a) En 10 intervalles
b) En 50 intervalles
c) En 100 intervalles.

2) Mêmes questions avec la méthode 2.

3) Mêmes questions avec la méthode 3.

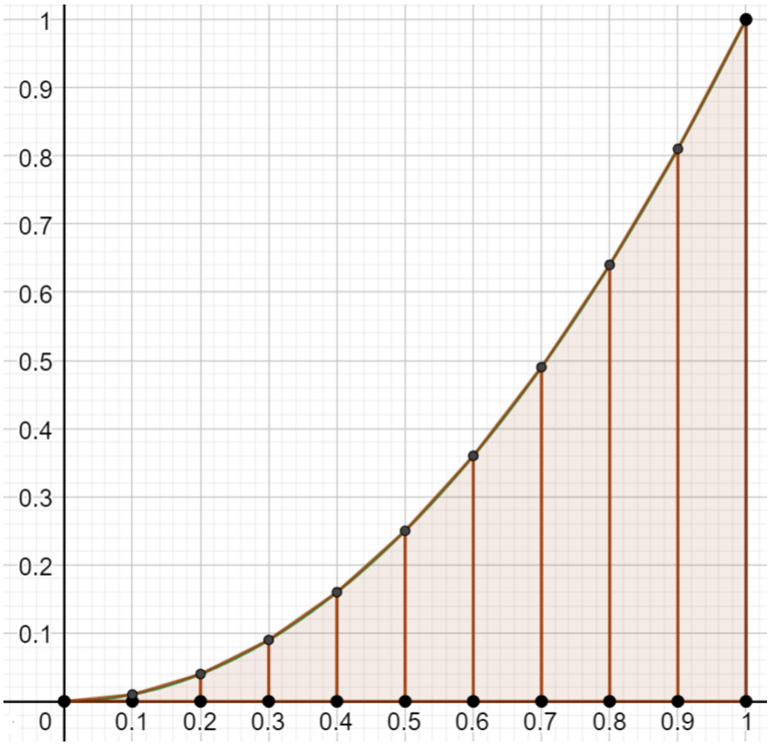
4) Comparer les résultats obtenus.

II - Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes ressemble à celle des rectangles, sauf qu'elle utilise… des trapèzes !

On divise toujours l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de largeur dx. Pour chacun de ces intervalles, on forme alors un trapèze dont le côté haut correspond au segment joignant les deux valeurs de la fonction aux bornes de l'intervalle considéré.

En ajoutant les aires des trapèzes ainsi construits, on obtient alors une estimation de l'intégrale de notre fonction f entre a et b.



On rappelle que l'aire d'un trapèze de hauteur h, de petite base b et de grande base B vaut $\frac{B+b}{2} \times h$.

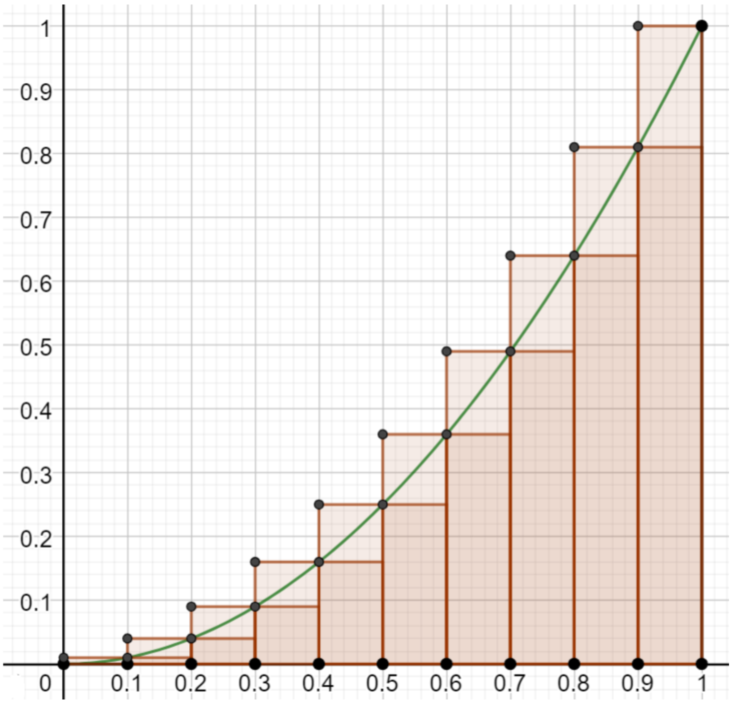
Consigne : Reprendre les questions de la partie I avec cette nouvelle méthode.

III – Méthode par encadrement

Les méthodes précédentes donnent une valeur approchée par défaut ou par excès de l'aire cherchée. On peut essayer de faire mieux.

On reprend la méthode des rectangles, mais cette fois, on va encadrer simultanément la surface à calculer par deux sommes d'aires.

On appelle u_n la somme des aires des n rectangles construits sous la courbe $\mathcal{C}$ (cf méthode 1 de la partie I), et v_n la somme des aires des n rectangles construits au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$ (cf méthode 3 de la partie I), comme ci-dessous :



On admet donc que : $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$.

Consigne : En utilisant les calculs de la partie I, conjecturer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.

IV – Prolongement

On va retrouver le résultat conjecturé par le calcul.

1) Déterminer une fonction, que l'on notera F, telle que $F'(x) = x^2$.
2) On admet que $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

V – Question-défi

Proposer une méthode de partage d'un carré de côté 1 en trois zones de même surface.