第 32 卷第 3 期　数学的实践与认识　Vol.32 No.3
2002 年 5 月　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　May, 2002

建　模

钢管订购与运输问题一的数学模型与求解

杨振华[1]， 胡国雷[2]， 郭跃华[2]

(1. 南京邮电学院应用数理系，南京 210003)
(2. 南通工学院，南通 226007)

摘要： 本文针对 2000 年全国大学生数学建模竞赛 B 题－钢管订购与运输问题的问题，建立了数学模型，并给出了该数学模型的精确求解.

关键词： 数学模型，订购；运输；钢管

记铺设管道 A_1A_{15} 上任一点到 A_1 的管道距离为 x，令 $f_i(x)$ 为钢厂 S_i 生产并运输单位钢管至 x 处的最小总费用. 记 A_j 坐标为 a_j，S_i 生产并运输单位钢管至 A_j 的最小费用为 q_{ij}(a_j 与 q_{ij}的数据由表 1 给出).

表 1　S_i 生产并运输单位钢管至 A_j 的最小总费用(q_{ij})表

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
A_1(0)	330.7	370.7	385.7	420.7	410.7	415.7	435.7
A_2(104)	320.3	360.3	375.3	410.3	400.3	405.3	425.3
A_3(405)	300.2	345.2	355.2	395.2	380.2	385.2	405.2
A_4(1155)	258.6	326.6	336.6	376.6	361.6	366.6	386.6
A_5(1761)	198	266	276	316	301	306	326
A_6(1955)	180.5	250.5	260.5	300.5	285.5	290.5	310.5
A_7(2160)	163.1	241	251	291	276	281	301
A_8(2361)	181.2	226.2	241.2	276.2	266.2	271.2	291.2
A_9(3041)	224.2	269.2	203.2	244.2	234.2	234.2	259.2
A_{10}(3521)	252	297	237	222	212	212	236
A_{11}(3821)	256	301	241	211	188	201	226
A_{12}(4041)	266	311	251	221	206	195	216
A_{13}(4251)	281.2	326.2	266.2	236.2	226.2	176.2	198.2
A_{14}(4671)	288	333	273	243	228	161	186
A_{15}(5171)	302	347	287	257	242	178	162

注：表中第一列给出了 A_j 的坐标

若 $x \in A_jA_{j+1}$，易知：

$$f_i(x) = \min(q_{ij} + 0.1([x - a_j] + 1), q_{i,j+1} + 0.1([a_{j+1} - x] + 1))$$

$f_i(x)$ ($i = 1, 2, \cdots, 7$) 的图形见图 1. 其中$[x - a_j]$表示取 $x - a_j$ 的整数部分.

收稿日期：2001-02-16

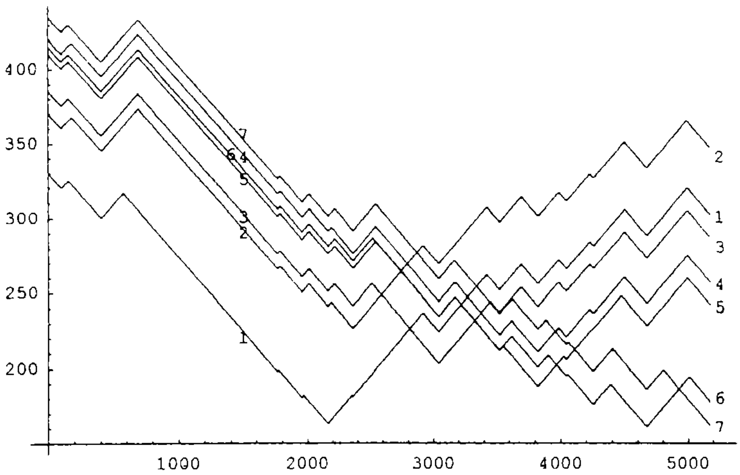

图1　最小费用函数 $f_i(x)$ ($i=1,2,\cdots,7$)

方案的区间表示

到达 A_j 的钢管的铺设费用，只与由 A_j 向左向右铺设的长度有关，不受其铺设中任一段使用何厂的钢管影响，故可将同一厂运来的钢管向左或向右铺成一个区间以简化方案，因而任一方案可表示为 $\bigcup_{i=1}^{7}\bigcup_{j=1}^{15}[a_{ij},b_{ij}]$

引理　问题1的最优解中，一定存在一组可表示为 $\bigcup_{i=1}^{7}\bigcup_{j=1}^{15}[a_{ij},b_{ij}]$ 形式的最优解，其中 a_{ij}, b_{ij} 均为整数.（证明见[1]）

我们称长度为1，且端点值为整数的区间为单位区间. 若 e 为单位区间，记 $f_i(e)$ 为 $f_i(x)$ 在 e 内任一点的取值，显然 $f_i(e)=\int_e f_i(x)\,\mathrm{d}x$.

设 $E_i\subset[0,5171]$ 为 S_i 生产、运输钢管的集合，其总费用为 $\int_{E_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x$，因此原问题的数学模型为模型1：

$$\min\sum_{i=1}^{7}\int_{E_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{s.t.}\quad \mu E_i\in\{0\}\cup[500,s_i]\ (i=1,2,\cdots,7)$$

$$\mu(E_i\cap E_j)=0,\ (i,j=1,2,\cdots,7,\ i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{7}E_i=[0,5171].$$

注　1) $\mu(E_i\cap E_j)=0$，即 $E_i\cap E_j=\varnothing$ 表示钢厂 S_i 与 S_j 铺设的钢管无重叠部分.

2) 在解集中，区间是开区间或闭区间对原问题是同一个解.

我们先取消 S_5, S_6 生产的上下限的限制，建立模型2：

$$\min\sum_{i=1}^{7}\int_{E_i} f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{s.t.}\quad \mu E_i\in\{0\}\cup[500,s_i]\ (i=1,2,3,4,7)$$

$$\mu E_5\geqslant 0,\ \mu E_6\geqslant 0,\ \mu(E_i\cap E_j)=0,\ (i,j=1,2,\cdots,7,\ i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{7}E_i=[0,5171].$$

命题1　若模型2的最优解是模型1的可行解，则必是模型1的最优解.

证明　由模型 1 的可行域为模型 2 的可行域的子集易得.

定理 2(差价控制定理)　在 A_j 与 A_{j+1} 之间任一点 x 处 S_m 与 S_n 钢管单价之差 牱$(x)=f_m(x)-f_n(x)$ 一定位于两厂在 A_j 的差价与在 A_{j+1} 的差价之间,即令 牱$=f_m(a_j)-f_n(a_j)$,牱$_{+1}=f_m(a_{j+1})-f_n(a_{j+1})$,则 $x\in[a_j,a_{j+1}]$时,牱(x) 位于 牱 与 牱$_{+1}$之间.

证明　$x\in[a_j,a_{j+1}]$时,牱(x) 的表达式为

$$牱(x)=\min(q_{mj}+0.1([x-a_j]+1),q_{m,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1))$$
$$-\min(q_{nj}+0.1([x-a_j]+1),q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1))$$

1) 若

$$q_{mj}+0.1([x-a_j]+1)\leqslant q_{m,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

且
$$q_{nj}+0.1([x-a_j]+1)\leqslant q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

则
$$牱(x)=(q_{mj}+0.1([x-a_j]+1))-(q_{nj}+0.1[x-a_j]+1))$$
$$=q_{mj}-q_{nj}=牱.$$

2) 若

$$q_{mj}+0.1([x-a_j]+1)\geqslant q_{m,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

且
$$q_{nj}+0.1([x-a_j]+1)\geqslant q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1),$$

类似于情形 1) 可得 牱$(x)=$牱$_{+1}$.

3) 若

$$q_{mj}+0.1([x-a_j]+1)\leqslant q_{m,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

且
$$q_{nj}+0.1([x-a_j]+1)\geqslant q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

则
$$牱(x)=(q_{mj}+0.1([x-a_j]+1)-(q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$
$$\leqslant(q_{m,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1))-(q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1))$$
$$=牱_{+1}$$

另一方面
$$牱(x)\geqslant(q_{mj}+0.1([x-a_j]+1))-(q_{nj}+0.1([x-a_j]+1))=牱$$

因此　牱$\leqslant$牱$(x)\leqslant$牱$_{+1}$.

4) 若

$$q_{mj}+0.1([x-a_j])+1)\geqslant q_{m,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

且
$$q_{nj}+0.1([x-a_j])+1)\leqslant q_{n,j+1}+0.1([a_{j+1}-x]+1)$$

类似于 3) 的情况可证 牱$_{+1}\leqslant$牱$\leqslant$牱,定理 2 证毕.

记$(E_1^*,E_2^*,\cdots,E_7^*)$是模型 2 的一个最优解.

定理 3　Ч$E_7^*=0$

证明　否则 Ч$E_7^*\geqslant500$.

根据表 1 在 $A_1,A_2\cdots A_{14}$ 处均有 $f_7(x)-f_6(x)\geqslant20$,由差价控制定理知,当 $x\in[0,4671]$时,$f_7(x)-f_6(x)\geqslant20$. 当 $x\in[4671,5171]$时,

$$f_6(x)=\begin{cases}161+0.1([x-4671]+1), & 4671\leqslant x<5006\\ 178+0.1([5171-x]+1), & 5006\leqslant x\leqslant5171\end{cases}$$

$$f_7(x)=\begin{cases}186+0.1([x-4671]+1), & 4671\leqslant x<4801\\ 162+0.1([5171-x]+1), & 4801\leqslant x\leqslant5171\end{cases}$$

易知,当 $x\in[4671,4826]$时,$f_7(x)-f_6(x)\geqslant 20$,当 $x\in[4826,5171]$时,$-16\leqslant f_7(x)-f_6(x)\leqslant 20$,且 $\int_{4826}^{5171}(f_7(x)-f_6(x))dx=-2280$.

设 $g(x)=f_7(x)-f_6(x)-20$,则

$$\int_{E_7^*}g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{E_7^*\cap[0,4826]}g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E_7^*\cap[4826,5171]}g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_7^*\cap[4826,5171]}g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_{4826}^{5171}g(x)\,\mathrm{d}x=-20(5171-4826)-2280=-9180$$

从而

$$\int_{E_7^*}(f_7(x)-f_6(x))\,\mathrm{d}x=20\mu E_7^*+\int_{E_7^*}g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 20\cdot 500-9180=820$$

取 $E_6^{*\prime}=E_6^*\cup E_7^*$,$E_7^{*\prime}=\varnothing$ (S_6 的产量无上限,故变化后仍为模型 2 可行解),则

$$\left(\int_{E_6^*}f_6(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E_7^*}f_7(x)\,\mathrm{d}x\right)-\left(\int_{E_6^{*\prime}}f_6(x)\,\mathrm{d}x+\int_{E_7^{*\prime}}f_7(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_{E_6^*\cup E_7^*}f_6(x)\,\mathrm{d}x-\int_{E_6^*}f_6(x)\,\mathrm{d}x-\int_{E_7^*}f_7(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E_7^*}(f_6(x)-f_7(x))\,\mathrm{d}x\leqslant-820.$$

目标函数值减少,与 E_6^*,E_7^* 为最优解矛盾.

定理 4　$\mu E_4^*=0$

证明　由于 $q_{4,j}-q_{5,j}\geqslant 10(j=1,2,\cdots,15)$,根据差价控制定理,在$[0,5171]$上有$f_4(x)-f_5(x)\geqslant 10$,又 S_5 无产量上限,类似于定理 3 的证明可证 $\mu E_4^*=0$

设 $A_1=[0,3325]$,$A_2=[3325,5171]$,由于当 $x\in A_2$ 时,

$$\min(f_5(x),f_6(x))<\min(f_1(x),f_2(x),f_3(x)),$$

我们可将模型 2 分解为两个模型:记 $\{1,2,3,5,6\}=J$

模型 3:

$$\min\sum_{i\in J}\int_{E_i}f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{s.t.}\quad 0\leqslant\mu E_i\leqslant s_i(i=1,2,3)$$

$$\mu E_5\geqslant 0,\ \mu E_6\geqslant 0$$

$$\mu(E_i\cap E_j)=0,(i,j\in J,i\neq j)$$

$$\bigcup_{i\in J}E_i=A_1$$

模型 4:

$$\min\sum_{i\in J}\int_{E_i}f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{s.t.}\quad 0\leqslant\mu E_i\leqslant s_i(i=1,2,3)$$

$$\mu E_5\geqslant 0,\ \mu E_6\geqslant 0$$

$$\mu(E_i\cap E_j)=0,(i,j\in J,i\neq j)$$

$$\bigcup_{i\in J}E_i=A_2$$

命题 5　设$(E_{1k}^*,E_{2k}^*,E_{3k}^*,E_{5k}^*,E_{6k}^*)(k=3,4)$分别是模型 3 与模型 4 的最优解,若$(E_{13}^*\cup E_{14}^*,E_{23}^*\cup E_{24}^*,E_{33}^*\cup E_{34}^*,\varnothing,E_{53}^*\cup E_{54}^*,E_{63}^*\cup E_{64}^*,\varnothing)$为模型 2 的可行解,则其必为模型 2 的最优解.

证明　设$(E_1,E_2,E_3,\varnothing,E_5,E_6,\varnothing)$是模型 2 的任一可行解,则

$$(E_1\cap A_k,E_2\cap A_k,E_3\cap A_k,\varnothing,E_5\cap A_k,E_6\cap A_k,\varnothing)(k=1,2)$$

分别是模型 3 与 4 的可行解.从而

$$\sum_i\int_{E_i}f_i(x)\,\mathrm{d}x=\sum_i\int_{E_i\cap A_1}f_i(x)\,\mathrm{d}x+\sum_i\int_{E_i\cap A_2}f_i(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{j\in J}\int_{E_{j3}^*}f_i(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{j\in J}\int_{E_{j4}^*}f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i\in J}\int_{E_{i3}^*\cup E_{i4}^*} f_i(x)\,\mathrm{d}x$$

从而命题 5 成立.

模型 4 是容易求解的. 取 $\{x \mid f_5(x) < f_6(x)\} \subset E_5^*$, $\{x \mid f_6(x) < f_5(x)\} \subset E_6^*$, 对 $\{x \mid f_5(x) = f_6(x)\}$中的点,可任意置于 E_5^* 或 E_6^* 中.

以下我们来求解模型 3.

在$[0,3325]$上,$f_5(x) \leqslant f_6(x)$,因此可设 $E_6^* \cap [0,3325] = \varnothing$(否则 E_6^* 并入 E_5^* 中)

定理 6　$\mu E_i^* = s_i(i=1,2,3)$

证明　在$[0,2600]$上有$f_i(x) < f_5(x)(i=1,2,3)$

若对某个 $i(i=1,2,3)$ $\mu E_i^* < s_i$,则 $\mu(E_5^* \cap [0,2600]) \geqslant s_i - \mu E_i^*$,取 $E_5^* \cap [0,2600]$的任一子集 e,使 $\mu e = s_i - \mu E_i^*$,令 $E_i^{*\prime} = E_i^* \cup e$, $E_5^{*\prime} = E_5^* \setminus e$,其余不变,则 $\mu E_i^{*\prime} = s_i$,

$$\left(\int_{E_i^*} f_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_5^*} f_5(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\int_{E_i^{*\prime}} f_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_5^{*\prime}} f_5(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_{E_i^*} f_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_e f_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_5^*} f_5(x)\,\mathrm{d}x - \int_e f_5(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_i^*} f_i(x)\,\mathrm{d}x - \int_{E_5^*} f_5(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_e (f_i(x) - f_5(x))\,\mathrm{d}x < 0$$

从而目标函数值减小,与最优解矛盾.

根据定理 6,模型 3 的产量约束实际上已成为等式约束,为给出模型 3 在等式约束下的最优解,我们给出如下的几个准则.

定理 7　模型 1 与模型 3 的最优解的必要条件是

$$\min_{x\in E_j^*}[f_i(x) - f_j(x)] \geqslant \max_{x\in E_i^*}[f_i(x) - f_j(x)]$$

证明　若定理不成立,则存在单位区间 e_i, e_j,使得:

$$e_i \subset E_i^*,\ e_j \subset E_j^*,\ f_i(e_j) - f_j(e_j) < f_i(e_i) - f_j(e_i)$$

令 $E_i^{*\prime} = e_j \cup (E_i^* \setminus e_i)$, $E_j^{*\prime} = e_i \cup (E_j^* \setminus e_j)$. 其余不变.

显然 $\mu E_i^{*\prime} = \mu E_i^*$, $\mu E_j^{*\prime} = \mu E_j^*$,仍是可行解

$$\left(\int_{E_i^*} f_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_j^*} f_j(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\int_{E_i^{*\prime}} f_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_j^{*\prime}} f_j(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= (f_i(e_j) - f_j(e_j)) - (f_i(e_i) - f_j(e_i)) < 0$$

目标函数值减小,与最优解矛盾.

推论 8　设 $B \subset H = [0,3325]$, $\mu B < s_i$,若

$$\min_{x\in H\setminus B}[f_i(x) - f_j(x)] > \max_{x\in B}[f_i(x) - f_j(x)],\text{则 } E_j^* \cap B = \varnothing$$

证明　否则,存在 $x_j \in E_j^* \cap B$,由 $\mu B < s_i$,存在 $x_i \in E_i^* \cap (H \setminus B)$,使得

$$f_i(x_i) - f_j(x_i) > f_i(x_j) - f_j(x_j),\text{与定理 7 矛盾.}$$

由推论 8 易得:

推论 9　设 $B \subset H = [0,3325]$, $\mu B < s_i$,若对任意 $j \neq i$ 有

$$\min_{x\in H\setminus B}[f_i(x) - f_j(x)] > \max_{x\in B}[f_i(x) - f_j(x)]$$

则 $B \subset E_i^*$.

表 2 差价函数的取值

	$f2-f1$	$f3-f1$	$f5-f1$	$f6-f1$	$f3-f2$
[0,179]	40,44.9	55	80	85	10.1,15
[179,687]	45,67.9	55,77.9	80,102.9	85,107.9	10
[687,1771]	68	78	103	108	10
[1771,2236]	38.1,77.9	78.2,87.9	103.2,112.9	108.2,117.9	10,15
[2236,2262]	62.9,67.9	77.9,82.9	102.9,107.9	107.9,112.9	15
[2262,2536]	45,62.7	55.1,77.7	85,102.7	86.1,107.7	10.1,15
[2536,2600]	45	42.3,54.9	73.3,85	73.3,85.9	−2.7,9.9
[2600,3200]	45	−21,42.1	4.1,73.1	4.1,73.1	−66,−2.9
[3200,3325]	45	−21	−20.9,3.9	−20.9,3.9	−66
[3325,5171]	45	−21,−15	−68,21.1	−127,−21.1	−66,−60

	$f5-f2$	$f6-f2$	$f5-f3$	$f6-f3$	$f6-f5$
[0,179]	35.1,40	40.1,45	25	30	5
[179,687]	35	40	25	30	5
[687,1771]	35	40	25	30	5
[1771,2236]	35,40	40,45	25	30	5
[2236,2262]	40	45	25	30	5
[2262,2536]	40	41.1,45	25,29.9注(1)	30,31	1.1,5
[2536,2600]	28.3,40	28.3,40.9	30.1,31	31	0,0.9
[2600,3200]	−40.9,28.1	−40.9,28.1	25.1,31	25.1,31	0
[3200,3325]	−65.9,−41.1	−65.9,−41.1	0.1,24.9	0.1,24.9	0
[3325,5171]	−113,−66.1	−172,−66.1	−45,−0.1	−112,−0.1	−67,13注(2)

注:1) $f5-f3$ 在[2262,2511]上取值为 25,在[2511,2536]上取值为[25.1,29.9];2) $f6-f5$ 在[3325,3551]上取值为 0,在[3551,3966]上取值为[0.1,13],在[3966,5171]上取值为[−67,−0.1]; 3) 表中给出了差价函数在区间上的最小值与最大值.

定理 10 $[3200,3325]\subset E_5^*$

证明 对于模型 3,取 $\mu E_{63}^{*}=0$,令 $B=(3200,3325]$,由推论 9 可得.

定理 11 $[2536,3200]\subset E_3^*$

证明 仍对模型 3 中[2536,3200]段进行分析,由 $\max\limits_{x\in[2536,3200]}[f_3(x)-f_i(x)]<\min\limits_{x\in[0,2536]}[f_3(x)-f_i(x)]\ (i=1,2)$,根据推论 8,可得

$$E_i^*\cap[2536,3200]=\varnothing\quad(i=1,2)$$

同理,根据表 2 及注 1) $\max\limits_{x\in[2511,3200]}[f_3(x)-f_5(x)]<\min\limits_{x\in[0,2511]}[f_3(x)-f_5(x)]$ 可得 $E_5^*\cap[2511,3200]=\varnothing$ 从而 $[2536,3200]\subset E_3^*$.

类似可得定理 12:

定理 12 $[1711,2236]\subset E_1^*$

定理 13 $E_1^*\subset[687,2236]$

证明　若 $E_1^{*} \not\subset [687, 2236]$，

1) $E_2^{*} \cap [687, 2236] = \emptyset$ 由 $\min\limits_{x \in [687,2236]} [f_1(x) - f_2(x)] > \max\limits_{x \in [0,687] \cup [2236,2536]} [f_1(x) - f_2(x)]$ 及定理 7 可得.

2) $E_2^{*} \cap [179, 687] \neq \emptyset$ 由 1) 与前面的定理，$E_2^{*} \subset [0, 687] \cup [2236, 2536]$ (这是尚未确定分配的全部路线)，又 $\mu E_2^{*} = 800$ 可知.

3) $(E_3^{*} \cup E_5^{*}) \cap [687, 1771] \neq \emptyset$ 模型 3 中 $\mu E_{63}^{*} = 0 = \mu E_{43}^{*} = \mu E_{73}^{*}$，由 $[687, 1771] \cup [1771, 2236] \subset E_1^{*} \cup E_3^{*} \cup E_5^{*}$，及 $\mu E_1^{*} = 800$ 可知.

4) 不妨设 $E_3^{*} \cap [687, 1771] \neq \emptyset$ (若 $E_5^{*} \cap [687, 1771] \neq \emptyset$ 类似可证) 取单位区间 e_1, e_2, e_3，使

$$e_1 \subset E_1^{*} \setminus [687, 2236],\ e_2 \subset E_2^{*} \cap [179, 687],\ e_3 \subset E_3^{*} \cap [687, 1771],$$

令 $E_1^{*\prime} = e_3 \cup (E_1^{*} \setminus e_1)$，$E_2^{*\prime} = e_1 \cup (E_2^{*} \setminus e_2)$，$E_3^{*\prime} = e_2 \cup (E_3^{*} \setminus e_3)$，其余不变，则

$$\left(\int_{E_1^{*\prime}} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2^{*\prime}} f_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_3^{*\prime}} f_3(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\int_{E_1^{*}} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_2^{*}} f_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{E_3^{*}} f_3(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= (f_2(e_3) - f_3(e_3)) - (f_2(e_2) - f_3(e_2)) + (f_2(e_1) - f_1(e_1)) - (f_2(e_3) - f_1(e_3))$$

$e_2 \subset [179, 687]$，$e_3 \subset [687, 1771]$，在 $[179, 1771]$ 上 $f_2(x) - f_3(x)$ 为常数，所以

$$(f_2(e_3) - f_3(e_3)) - (f_2(e_2) - f_3(e_2)) = 0,$$

又　$e_1 \subset [0, 687] \cup [2236, 2536]$，$f_2(e_3) - f_1(e_3)) > (f_2(e_1) - f_1(e_1))$，

因此上式小于零，与最优性矛盾. 定理 13 证毕.

由于在 $[687, 1771]$ 上 $f_i(x) - f_1(x)$ ($i = 2, 3, 5$) 为常数，所以取其中任意区间为 E_1^{*} 不影响目标函数值，为使调运方案简单，我们可取 $E_1^{*} = [1436, 2236]$

定理 14　$[0, 179] \cup [2236, 2536] \subset E_2^{*}$

证明　由

$$\min_{x \in [0,179] \cup [2236,2536]} [f_i(x) - f_2(x)] > \max_{x \in [179,1771]} [f_i(x) - f_2(x)] \quad (i = 3, 5)$$

及

$$\min_{x \in [0,179] \cup [2236,2536]} [f_1(x) - f_2(x)] > \max_{x \in [687,1771]} [f_1(x) - f_2(x)]$$

易得.

由于在区间 $[179, 1771]$ 上，$f_i(x) - f_j(x)$ ($i, j = 2, 3, 5$) 为常数，在此区间上，$E_2^{*}, E_3^{*}, E_5^{*}$ 选取，只要各自长度不变，总费用不变，为使调度方案简单，取最优解为：

$$E_1^{*}: [1436, 2236]$$
$$E_2^{*}: [0, 500], [2236, 2536]$$
$$E_3^{*}: [500, 836] \cup [2536, 3200]$$
$$E_5^{*}: [836, 1436] \cup [3200, 3966]$$
$$E_6^{*}: [3966, 5171]$$

其中，在区间 $[3325, 3551]$ 上 $f_5(x) = f_6(x)$，所以这一部分的钢管可由 S_5 厂也可由 S_6 厂供应. 此时，目标函数值为 1.2786316×10^6 万元.

注 1) 若在管道上取运输 x 单位钢管费用为 $\frac{x(x+1)}{2}$，进而求得单位费用为 $\frac{x+1}{2}$，于是

得

$$f_i(x)=\min\left(q_{ij}+0.1\left((x-a_j)+\frac{1}{2}\right),q_{i,j+1}+0.1\left((a_{j+1}-x)+\frac{1}{2}\right)\right)$$

所得最优解集与原问题的最优解集不完全一致,但上述最优解也是该费用函数之下的最优解,其最优函数值为 1.27863155×10^6 万元.

2) 若不考虑"不足一公里按一公里计算",费用按连续函数计算,取

$$f_i(x)=\min(q_{ij}+0.1(x-a_j),q_{i,j+1}+0.1(a_{j+1}-x))$$

所得最优解集与原问题的最优解集不完全一致,但上述最优解也是该费用函数之下的最优解,其最优函数值为 1.278373×10^6 万元.

参考文献:

[1] 郭跃华,杨振华. 钢管订购与运输问题三的数学模型与灵敏度分析[J]. 数学的实践与认识,2001,1.

Mathematical Model and Solution of Problem One of Order and Transport of Steel Tube

YANG Zhen-hua[1], HU Guo-lei[1], GUO Yue-hua[2]

(1. Nanjing University of Posts & Telecommunications, Nanjing 210003, China)
(2. Nantong Institute of Technology, Nantong 226007, China)

Abstract: In this paper, we establish the mathematical model of problem one of problem B of 2000 Chinese Undergraduate Mathematical Contest in Modeling —— order and transport of steel tube. Then we give the exact solution of this model.

Keywords: mathematical model; order; transport; steel tube