Sprawozdanie 3

Bohdan Tkachenko

November 2022

Zadanie 1

Implementacja metody bisekcji

Opis metody: Metoda opiera sie o Twierdzenie Darboux,jeśli funkcja ciagła zdefiniowana na przedziale rzeczywistym przyjmuje dwie wartości, to przyjmuje również dowolna wartość miedzy nimi. Wiec dla nas istotnym jest to,że $f(a) * f(b) < 0$,czyli funkcja na pewno przecina 0 , na przedziale [a,b]. Nastepnie zaweżamy ten przedział podobnie do wyszukiwania binarnego, aż 0 bedzie wystarczajaco bliskie epsilon.

Implementacja: Sprawdzamy, czy funkcja f zmienia znak w przedziale [a,b], jeśli nie, to ustawiamy flage o błedzie i zwracamy odpowiedni wynik. W przeciwnym wypadku obliczamy środek przedziału x oraz sprawdzamy, czy $f(x) < \varepsilon$.Jeśli tak jest, to zwracamy wynik, jeśli nie, to wybieramy przedział z [a,x], [b,x], w którym funkcja zmienia znak i powtarzamy funkcje.

Zadanie 2

Implementacja metody Stycznych(Newtona)

Opis metody: Poszukiwanie rozwiazania odbywa sie poprzez konstruowanie kolejnych przybliżeń

Założenia dla metody:

1)W przedziale [a,b] znajduje sie dokładnie jeden pierwiastek.

2)Funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału,jak w poprzedniej metodzie

3)Pierwsza i druga pochodna funkcji maja stały znak w tym przedziale.

Implementacja: Dla punktu startowego wyprowadzamy styczna i wyliczamy punkt przeciecia z osia OX. Jest to pierwsze przybliżenie oznaczane jako x1. Jeżeli dane rozwiazanie nie osiagneło naszego przybliżenia to x1 traktujemy jako nowy punkt startowy. Funkcja zwraca bład jeśli $f(x) < \varepsilon$.

Korzystamy w tej funkcji ze wzoru

$x_{k+1} = x_k * \frac{f(x_k)}{f`(x_k)}$

Zadanie 3

Implementacja metody Siecznych(Eulera)

Metoda jest podobna do metody stycznych . Ma te zalete, że do użycia jej niepotrzebna jest znajomość pochodnej danej funkcji ani nawet założenie różniczkowalności.

Opis metody:

Polega ona na przyjeciu, że funkcja ciagła na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia sie w sposób liniowy.

Możemy wtedy na odcinku [a , b] krzywa $y = f(x)$ zastapić sieczna. Za przybliżona wartość pierwiastka przyjmujemy punkt przeciecia siecznej z osia OX.

Implementacja: Do obliczenia stosujemy rekurencyjny wzór $x_0 = a, x_1 = b$ $x_{n+1} = x_n - f(x_n) * \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Zadanie 4

Znaleźć pierwiastki równania $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla zadanych $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-5}$, $\varepsilon = \frac{1}{2} * 10^{-5}$ za pomoca powyższych metod

Otrzymane wyniki:

Metoda	r	v	it	error
Bisekcja	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Styczne	1.933930573929843	-2.2423316314856834e-8	4	0
Sieczne	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Table 1: Do zadania 4

Z uzyskanych wyników wynika, że metoda bisekcji dla danych parametrów wykonała 4 razy wiecej iteracji niż pozostałe 2 metody.Przy czym otrzymane wyniki można uznać za dobre, dla każdej z metod.

Zadanie 5

Metoda bisekcji znaleźć wartości zmiennej x, dla której przecinaja sie wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$ z dokładnościa obliczeń $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-5}$, $\varepsilon = \frac{1}{2} * 10^{-5}$

Aby wyznaczyć punkt przeciecia dwóch funkcji należy znaleźć taki punkt, w którym funkcje przyjmuja ta sama wartość. Łatwo otrzymujemy funkcje $f(x) = 3x - e^x$. Pierwiastkami tej funkcji sa punkty, których szukamy.

Z wykresu można odczytać,że jest 2 takich punkty, w przedziale [0,1] oraz w przedziale [1,2]

Otrzymane wyniki:

Przedział	x	f(x)	iteracje
$[0.0, 1.0]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	9
$[1.0, 2.0]$	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13

Table 2: Do zadania 5

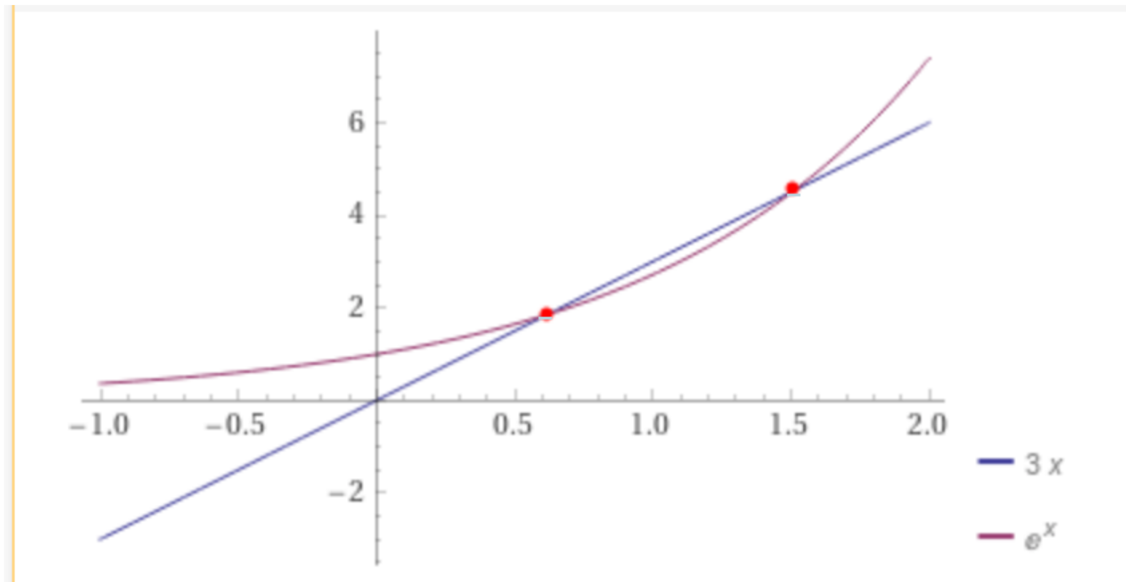

Figure 1: Wolfram alpha plot

Zadanie 6

Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f(x) = x * e^{-x}$ z dokładnościa obliczeń $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-5}$, $\varepsilon = \frac{1}{2} * 10^{-5}$ Sprawdzić co stanie, gdy w metodzie Newtona dla f_1 wybierzemy x_0 wieksze od 1 oraz dla f_2 ,czy można wybrać $x_0 = 1$

1) $f(x) = e^{1-x} - 1$

Metoda	dane	r	f(x)	iteracje	error
Bisekcja	$[0, 2]$	1	0	1	0
Bisekcja	$[0, 2.1]$	0.9999961853027345	3.814704541582614e-6	17	0
Bisekcja	$[0, 1.1]$	0.9999969482421877	3.051762468953001e-6	15	0
Styczne	x=0.2	0.9995934089229739	8.264695372517394e-8	4	0
Styczne	x = 1.5	0.9999447477307815	1.5263785790864404e-9	4	0
Styczne	x = 6.0	0.9997079551046488	4.264096031825204e-8	147	0
Styczne	x = 10.0	....	....	> 1000	0
Sieczne	$[0.5, 1.5]$	0.9999999624498374	3.755016342310569e-8	5	0

Table 3: Do zadania 6 : $f(x) = e^{1-x} - 1$

2) $f(x) = x * e^{-x}$

Metoda	dane	r	f(x)	iteracje	error
Bisekcja	$[-1, 1]$	0	0	1	0
Bisekcja	$[-0.4, 0.6]$	-6.1035156250222045e-6	-6.103552878038877e-6	15	0
Styczne	x = 0.5	-0.0005537098560354364	-3.0642502806087233e-7		
Styczne	x = 1	1	0.36787944117144233	1	2
Styczne	x= 1.5	13.708750863460901	5.594878975694858e-6	10	0
Styczne	x= 4.5	13.708750863460901	5.594878975694858e-6	9	0
Styczne	x= 11.5	13.681480395032755	5.73804504657442e-6	3	0
Styczne	x= 15	15.0	4.588534807527386e-6	0	0
Styczne	x= 115.0	115.0	1.3086768545340485e-48	0	0
Sieczne		1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18	0

Table 4: Do zadania 6 : $f(x) = x * e^{-x}$

Wnioski:
Można zauważyć, że metoda bisekcji niezależnie od przesuniecia przedziału wzgledem pierwiastka osiaga wynik w tym samym tempie (zależy tylko od wielkości poczatkowego przedziału), wyjatkiem jest sytuacja, gdy szukany pierwiastek jest środkiem przedziału.

Metoda Newtona osiaga wynik po najmniejszej liczbie iteracji, niestety wymusza konieczność liczenia pochodnej, wiec wyklucza rozwiazania, gdzie wyliczona pochodna jest bliska zeru.

Z otrzymanej tabelki widać,że jeżeli dla f_1 wybieramy $x_0 \in (1, \infty)$ to metoda nadal daje poprawne wyniki,ale liczba iteracji bardzo szybko rośnie w zależności od x. Dla $x_0 = 10.0$, liczba iteracji przekracza 1000.

Kiedy dla f_2 w metodzie Newtona wybierzemy x0 = 1 pochodna funkcji jest bardzo blisko 0, i metoda zwraca bład. Jezeli wybieramy $x_0 \in (1, \infty)$ to metoda zwraca poprawne wyniki.