Kombinatoryka Analityczna 3

Bohdan Tkachenko 256630

December 1, 2023

1 Zadanie 64

W niniejszym sprawozdaniu przedstawiamy analize ciagu współczynników r_n funkcji generujacej $f(z) = \frac{1}{(1-z)^z}$. Celem analizy jest wyznaczenie wartości współczynników dla $n = 1, \ldots, 100$ oraz określenie asymptotyki ciagu $(r_n)_{n \geq 1}$.

1.1 Metodologia

Do obliczenia współczynników r_n wykorzystano narzedzie numeryczne mpmath w jezyku programowania Python. Zastosowano funkcje `taylor`, aby uzyskać współczynniki rozwiniecia w szereg Taylora funkcji $f(z)$ wokół punktu 0 do 100-tego wyrazu.

1.2 Wyniki

Wyniki obliczeń przedstawiaja sie nastepujaco:

1.2.1 Pierwsze 20 współczynników

$$r_1 = 1.0$$
$$r_2 = 0.0$$
$$r_3 = 1.0$$
$$r_4 = 0.5$$
$$r_5 = 0.833333333333333$$
$$r_6 = 0.75$$
$$r_7 = 0.825$$
$$r_8 = 0.833333333333333$$
$$r_9 = 0.856746031746032$$
$$r_{10} = 0.870833333333333$$
$$r_{11} = 0.883829365079365$$
$$r_{12} = 0.894345238095238$$
$$r_{13} = 0.903317049462883$$
$$r_{14} = 0.910962301587301$$
$$r_{15} = 0.917558248079081$$
$$r_{16} = 0.923293776054192$$
$$r_{17} = 0.92832087481889$$
$$r_{18} = 0.932758187992563$$
$$r_{19} = 0.936700267188428$$
$$r_{20} = 0.940223046032818$$

1.2.2 Ostatnie 20 współczynników

$$
\begin{aligned}
r_{81} &= 0.987026777790158\\
r_{82} &= 0.987190802568093\\
r_{83} &= 0.987350757997298\\
r_{84} &= 0.987506792999307\\
r_{85} &= 0.987659049341084\\
r_{86} &= 0.987807662058394\\
r_{87} &= 0.987952759849523\\
r_{88} &= 0.988094465441749\\
r_{89} &= 0.988232895932738\\
r_{90} &= 0.988368163108832\\
r_{91} &= 0.988500373742029\\
r_{92} &= 0.98862962986731\\
r_{93} &= 0.988756029041792\\
r_{94} &= 0.988879664587096\\
r_{95} &= 0.989000625816171\\
r_{96} &= 0.98911899824573\\
r_{97} &= 0.989234863795344\\
r_{98} &= 0.989348300974162\\
r_{99} &= 0.989459385056144\\
r_{100} &= 0.989568188244621
\end{aligned}
$$

1.3 Asymptotyka

Zuwazamy , że ciag współczynników (r_n) daży do 1. Oznacza to, że dla dużych wartości n, r_n zbliżaja sie do 1.

2 Średnia Liczba Punktów Stałych w Permutacjach

2.1 Wprowadzenie

W teorii permutacji, interesujacym zagadnieniem jest badanie liczby punktów stałych w permutacji zbioru $[n]$. Punkt stały w permutacji to element, który znajduje sie na tej samej pozycji, na której był w zbiorze pierwotnym. Niniejsza sekcja przedstawia dowód na to, że średnia liczba punktów stałych w losowej permutacji zbioru $[n]$ daży do 1, gdy n rośnie do nieskończoności.

2.2 Hipoteza

Hipoteza brzmi: *Średnia liczba punktów stałych w losowej permutacji zbioru* $[n]$ *daży do 1, gdy* $n \to \infty$.

2.3 Metodyka

Do udowodnienia hipotezy wykorzystamy zasade właczeń i wyłaczeń, która jest kluczowa metoda w kombinatoryce. Zasada ta pozwala na obliczenie liczby elementów spełniajacych co najmniej jeden z kilku warunków.

2.4 Obliczenia

Rozważmy permutacje zbioru $[n]$. Liczba wszystkich permutacji wynosi $n!$. Permutacje, w których nie wystepuje żaden punkt stały, nazywamy deranżacjami.

Liczba deranżacji $D(n)$ dla zbioru n elementów wynosi:

$$D(n) = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Średnia liczba punktów stałych dla wszystkich permutacji zbioru $[n]$ jest równa prawdopodobieństwu, że losowo wybrany element jest punktem stałym. Możemy to obliczyć jako $1 - \frac{D(n)}{n!}$, gdzie $\frac{D(n)}{n!}$ to prawdopodobieństwo braku punktów stałych.

2.5 Analiza Graniczna

Interesuje nas granica średniej liczby punktów stałych, gdy $n \to \infty$. Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{D(n)}{n!}\right)$$

2.6 Wnioski

Jak pokazano w obliczeniach, ta granica wynosi 1. Oznacza to, że dla bardzo dużych n, średnia liczba punktów stałych w permutacji zbioru $[n]$ jest bardzo bliska 1. To potwierdza nasza hipoteze i pokazuje ciekawy aspekt permutacji w kontekście punktów stałych.

3 Zadanie 74

Wykres funkcji zespolonych w postaci parametrycznej

3.1 Analiza Powierzchni Funkcyjnych

W tej sekcji skupimy sie na analizie trzech różnych powierzchni funkcyjnych w przestrzeni trójwymiarowej. Każda z tych powierzchni jest zdefiniowana za pomoca określonych równań parametrycznych.

3.2 Powierzchnia Sr

Pierwsza powierzchnia, oznaczona jako Sr, jest zdefiniowana równaniem:

$$Sr = \{(\Re(re^{it}), \Im(re^{it}), \Re(\sqrt{r}e^{it/2})) : r \in [0,1], t \in [0,4\pi]\}$$

gdzie $\Re$ i $\Im$ oznaczaja odpowiednio cześć rzeczywista i urojona liczby zespolonej. Ta powierzchnia prezentuje interesujace zachowanie w przestrzeni 3D, zwłaszcza w zakresie zmiany promienia r i kata t.

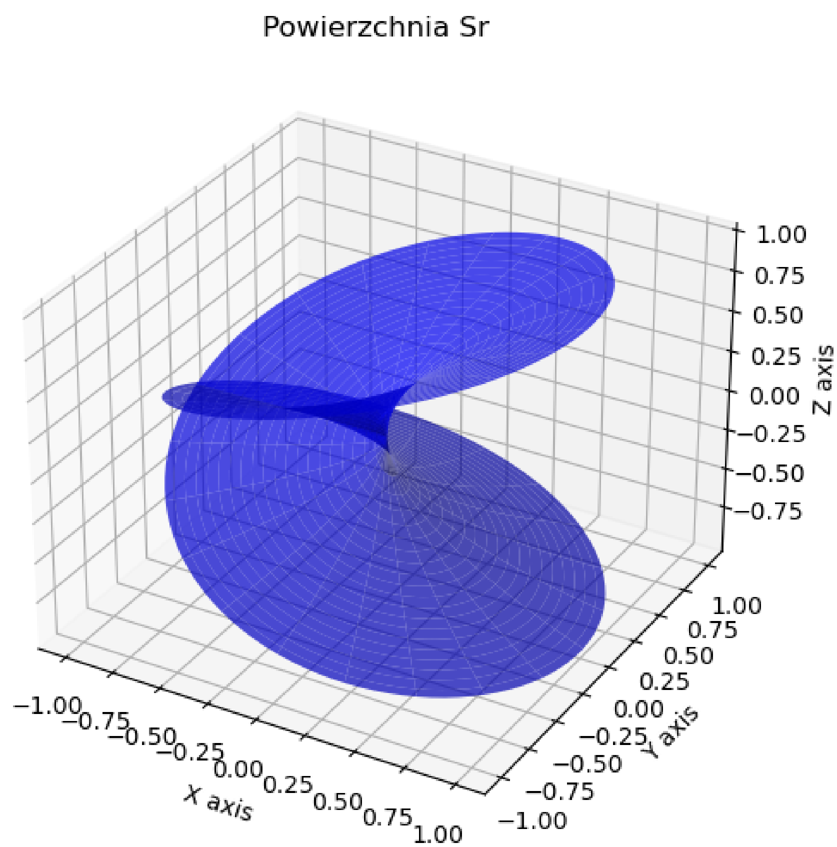

Figure 1: Sr

3.3 Powierzchnia Sc

Druga powierzchnia, oznaczona jako Sc, jest zdefiniowana równaniem:

$$Sc = \{(\Re(re^{it}), \Im(re^{it}), \Im(\sqrt{r}e^{it/2})) : r \in [0, 1], t \in [0, 4\pi]\}$$

Różni sie ona od powierzchni Sr tym, że trzeci wymiar jest teraz zależny od cześci urojonej zespolonego pierwiastka kwadratowego.

3.4 Powierzchnia L

Trzecia powierzchnia, oznaczona jako L, jest zdefiniowana równaniem:

$$L = \{(\Re(re^{it}), \Im(re^{it}), |\ln(r) + it|) : r \in [0.1, 10], t \in [0, 8\pi]\}$$

Ta powierzchnia jest szczególnie interesujaca ze wzgledu na użycie logarytmu naturalnego i modułu liczby zespolonej, co daje złożona strukture w trzech wymiarach.

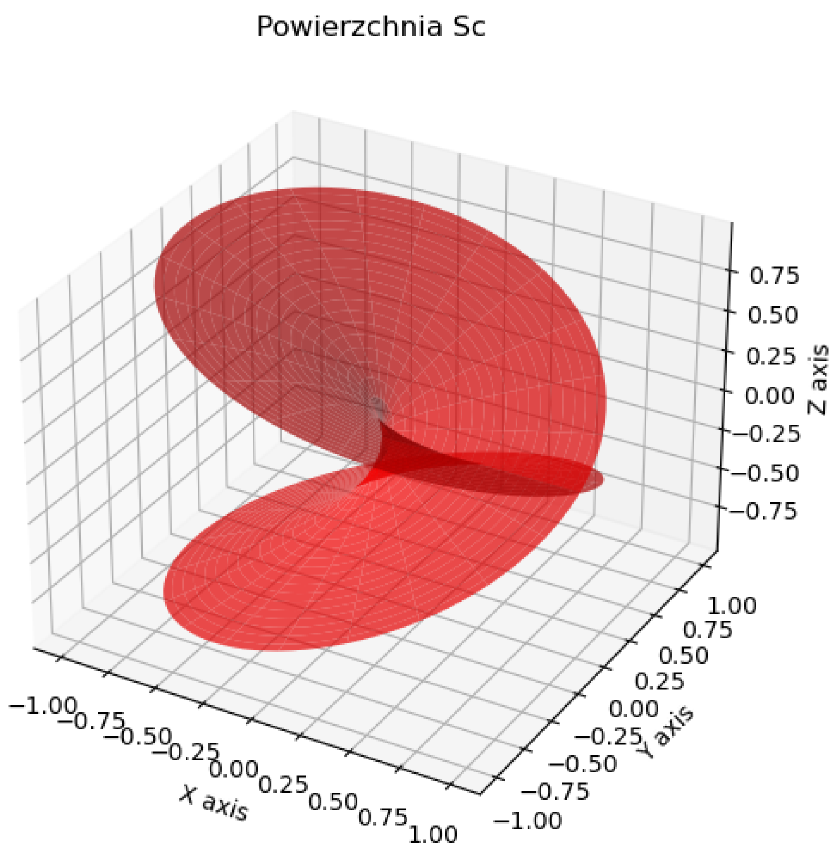

Figure 2: Wizualizacja powierzchni Sc

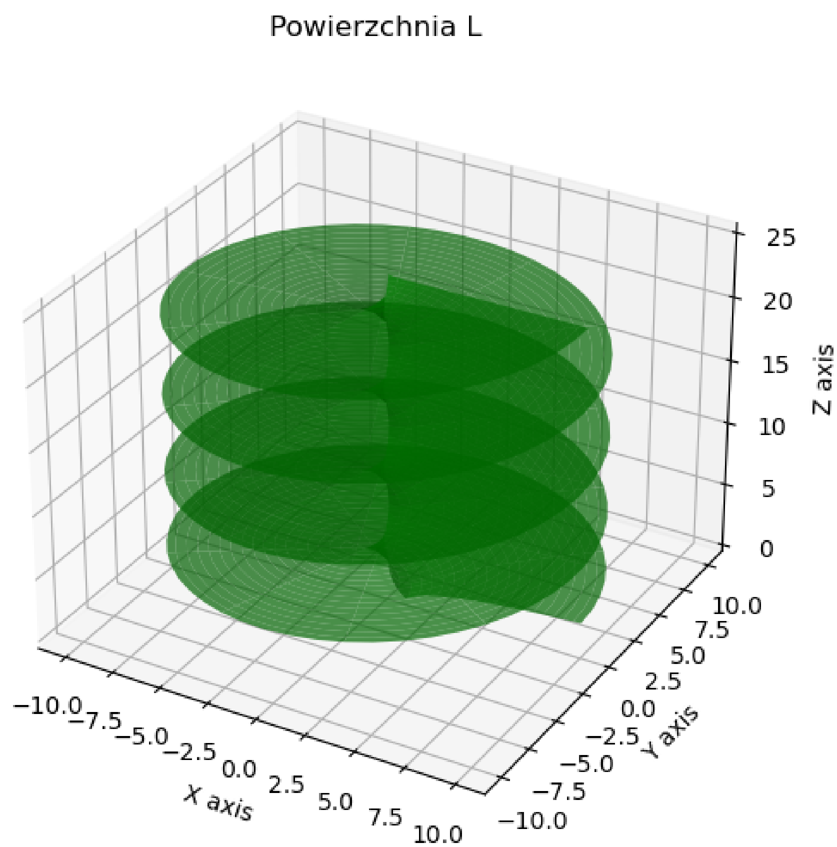

Figure 3: Wizualizacja powierzchni L