

# 计算机学院《算法设计与分析》

## (2020 年秋季学期)

### 第三次作业

作业提交截止时间：2020 年 12 月 6 日 23 : 55

#### 1 合并果子问题 (20 分)

现有  $n$  堆果子，第  $i$  堆果子的权值为  $w_i (w_i > 0)$ 。若把权值为  $a$  和  $b$  的两堆果子合并，则可得到权值为  $2\sqrt{ab}$  的一堆果子。设计一个尽可能高效的算法，使得合并  $n - 1$  次后剩下的一堆果子的权值最小，并分析其时间复杂度。

#### 2 分蛋糕问题 (20 分)

给定  $n$  块体积不同的蛋糕，其体积分别用  $a_1, \dots, a_n$  表示。现要从中挑选出  $k (k < n)$  块蛋糕分给同学们。不妨记选出的蛋糕的编号为  $s_1, \dots, s_k (1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n)$ ，则这次分配的不公平度为

$$\max\{a_{s_1}, \dots, a_{s_k}\} - \min\{a_{s_1}, \dots, a_{s_k}\}$$

请设计一个尽可能高效的算法制定蛋糕的选取方案，使得选出蛋糕的不公平度最小。并分析其时间复杂度。

#### 3 最小生成树问题 (20 分)

给定带权无向图  $G = (V, E)$ ，记边  $(u, v) \in E$  的权重为  $w(u, v)$ 。现给定一个点集  $U \subset V$ 。需寻找一棵生成树满足：

1. 所有  $U$  集合中的节点都是该树的叶子节点；
2. 该树是满足条件 1 的生成树中边权和最小的。

请设计一个尽可能高效的算法，求出满足上述条件的合法生成树，或判断不存在这样的生成树。并分析其时间复杂度。

#### 4 老城区改造问题 (20 分)

最近某老城区建设了一个新型能源发电站，现希望该发电站给  $n$  个小区提供电能（目前发电站与任何小区都不存在传输电路）。已知在这些小区之间已有  $m$  条传输电路，第  $i$  条传输电路  $(a_i, b_i)$  表示第  $a_i$  个小区和第  $b_i$  个小区之间的电能可以互相传输。

每个小区可通过下述两种方式之一获取电能：

1. 政府投资 1000 万元，在该小区和新型能源发电站之间建设新的传输电路。
2. 该小区可以通过已有的传输电路从其他已被供电的小区获得电能。

请设计一个尽可能高效的算法，使得政府投资建设传输电路的费用尽可能的少。并分析其时间复杂度。

## 5 货物运输问题 (20 分)

给定一个有向无环图  $G = (V, E)$ ，图中仅有一个入度为零的点  $S$ （起点），和一个出度为零的点  $T$ （终点）。现需要从起点将一定量的货物运输到终点。

图中的每个点  $v_i$  有一个属性值  $k_i$ ：

1. 若  $k_i = 0$ ，则进入点  $v_i$  时要支付 1 个货物作为代价。
2. 若  $k_i = 1$ ，则进入点  $v_i$  时要支付当前货物的  $1/20$ （向上取整）作为代价。

（初始时货物已在起点，不需要支付任何代价。）

现希望达到终点后至少有  $m$  个货物，请设计一个尽可能高效的算法，求出在起点时最少要携带多少货物才能满足需求。并分析其时间复杂度。