博弈论第六讲

授课时间: 2021年10月22日 授课教师: 张家琳 记录人: 朴宣夷 王柏森

1 再谈背包拍卖(knapsack auction)

例 1 [背包拍卖(knapsack auction)] 有一个容量为B的背包和n个投标人（物品）.每个投标人有一个权重w_i和一个价值v_i.w_i是公有信息，v_i是私有信息.在拍卖中，投标人i报价b_i.而拍卖方需要根据这些报价，决定哪一拨人可以使用背包，使得这波人的总权重不超过背包的容量B.该问题对应的分配规则为：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum b_i x_i \\ s.t. \quad & \sum w_i x_i \le B, x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

上节课得到了一种贪心算法，但对于某些情况得到的解结果不好，可使用以下的方案：

解 使用价重比排序，不妨设$\frac{v_i}{w_i} \ge \frac{v_j}{w_j}, \forall i < j$，并搜索$k$，使得：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} w_i \le& B \\ \sum_{i=1}^{k+1} w_i >& B \end{aligned}$$

记$\mathrm{Val}_1 = \sum_{i=1}^{k} w_i, \mathrm{Val}_2 = \max_{i \in \{1,2,\dots,k+1\}} v_i$ 此时选择：

$$\max(\mathrm{Val}_1, \mathrm{Val}_2)$$

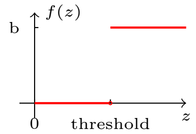
即可.

首先分析性能：

$$\begin{aligned} \mathrm{OPT} \le & \sum_{i=1}^{k+1} v_i \\ &= \mathrm{Val}_1 + v_{k+1} \\ &= \mathrm{Val}_1 + \mathrm{Val}_2 \\ &\le 2\mathrm{Val}_{\mathrm{algorithm}} \end{aligned}$$

因此至少能保证达到$\frac{1}{2}$的最优性能.

再证明诚实性：固定其他人报价，对于第i个人，若其报价低于可被容纳的$\frac{b_{k+1}}{w_{k+1}}$的下限时不会被选中，分配结果为0. 再提高报价，有可能被方案二选中，此时分配结果为1或0，从而单调.若未被选中，则分配结果仍为0. 而若提高报价至高于$\frac{b_k}{w_k}$的界时，则必被方案一选中，此时分配结果为1或0. 继续提高报价，则会同时被方案一和方案二选中，此时分配结果一定为1. 因此可画出第i个人的分配函数：



为一段阶跃函数，单调.由迈尔森引理，是诚实的机制.

2 收益最大化拍卖(Revenue-Maximizing Auction)

此前，我们仅关注最大化社会福利(social werlfare)，并设计一个诚实的机制.但是对于拍卖方而言，**收益(revenue)**最大化也是需要考虑的因素. 例如1个物品和1个投标人，若采用二价拍卖，则分配机制为无论出什么价都该给买家（保证有社会福利）. 但是会导致价格为0，这个结果显然是不可接受的. 因此，需要更换我们的目标.考虑最大化收益，并设计一个诚实的机制也是必要的. 我们先利用单人单价收益最大化拍卖作为引例.

例 2 [单人单价收益最大化拍卖]假设投标人出价服从[0,1]上的均匀分布. 设计诚实机制使得$\max \mathbb{E}_{v\sim F}[p_1(v)]$.

解 先设计单调的分配规则，就可以导致诚实的机制.
选择：

$$x_1(v)=\begin{cases}0, b_1<t\\ 1, b_1\geq t\end{cases}$$

$$p(b_1)=\begin{cases}0, b_1<t\\ t, b_1\geq t\end{cases}$$

则最大值为：$\max_t t(1-F(t))=\max_t t(1-t)=\frac{1}{4}$ (when $t=\frac{1}{2}$).

再利用**贝叶斯环境(Bayesian setting)**给出多人多价情况的收益最大化拍卖. 先给出贝叶斯环境的定义：

定义 1 (贝叶斯环境(Bayesian setting))**.** *满足下列条件被称为贝叶斯环境：*

1. *单变量环境*
2. *私有估值v_i来源于分布F_i的概率密度函数f_i*
3. *F_i、f_i 彼此独立，是公开信息*
4. *$F=F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$*

为简化问题，先考虑二人拍卖的几种情况:

例 3 [二人均匀收益最大化拍卖]在贝叶斯环境下，设计最大化收益的诚实机制.设两位投标人出价服从[0, 1]上的均匀分布，且目标：$\max \mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_i p_i(v)]$

解 [二价拍卖(second price auction)]

$$\mathbb{E}[\mathrm{Rev}]=\int_0^1\int_0^1 \min(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

解 [均匀定价(uniform price)]均匀定价中，定价为p，两位投标人出价都小于定价，即$v_1,v_2<p$才无法卖出.而无法卖出的概率显然为p^2，因此有:

$$\mathbb{E}[\mathrm{Rev}]=p(1-p^2)\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}(\text{when } p=\frac{1}{\sqrt{3}})$$

根据取最大值时$p=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则应该定价为$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

解 [序列定价(sequential post-pricing)]序列定价中，先以定价p_1卖给第一个人，若第一个人不购买，则以定价p_2卖给第二个人. 对于第一个人，不买的概率为p_1，因此期望收益为$\mathbb{E}_1 = p_1(1-p_1)$. 对于第二个人，第一个人不买的概率为$p_1$，第二个人不买的概率为$p_2$，因此期望收益为$\mathbb{E}_2 = p_2(1-p_2)p_1$.

$$\mathbb{E}[\text{Rev}] = p_1(1-p_1) + p_1(1-p_2)p_2 \le 0.3906(when\ p_1 = \frac{5}{8}, p_2 = \frac{1}{2})$$

注意到最值点$p_1 = \frac{5}{8} > p_2 = \frac{1}{2}$，这符合普遍认知：当买方多时，定价一般较高；当物品无法卖出时，卖方往往选择抛售。

解 [保留价格的二价拍卖(second-price with reserved price)]二价拍卖引入保留价格机制，保留价格为C. 除非报价都低于保留价格，否则第一高价得物品，支付第二高价与C中较大者.

$$\text{Rev}_C(b) = \begin{cases} \max(\min(b_1,b_2),C), & \max(b_1,b_2) \le C. \\ 0, & Otherwise. \end{cases}$$

该机制诚实.且期望：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{Rev}_C(b)] &= \int_C^1 \int_C^1 \min(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^C \int_0^C 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_C^1 \int_0^C C\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= (\frac{1}{3} - C^2 + \frac{2}{3}C^3) + (2C^2 - 2C^3) \\
&= \frac{1}{3} + C^2 - \frac{4}{3}C^3 \\
&\le \frac{5}{12}(when\ C = \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

在求解一般情况时，我们首先确定合适的分配规则（allocation rule）$x(\boldsymbol{b})$，若满足诚实性，即若$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}$，则由迈尔森引理可得到支付规则（payment rule）$p(\boldsymbol{v})$. 而最终的目标为：$\max \mathbb{E}_{\boldsymbol{v}\sim F}[\sum_i p_i(\boldsymbol{v})]$.

例 4 [收益最大化拍卖]在贝叶斯环境下，设计最大化收益的诚实机制，即目标：$\max \mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_i p_i(v)]$

解 [一般情况]

首先确定玩家i和v_{-i}，则唯一变量为$v_i \sim F_i$.设x可导，v_i有限：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[p_i(v_i,v_{-i})] &= \mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[\int_0^{v_i} zx_i^{'}(z)\mathrm{d}z] \\
&= \int_0^{v_{\max}} f_i(z)\mathrm{d}v_i \int_0^{v_i} zx_i^{'}(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{v_{\max}} \mathrm{d}z \int_z^{v_{\max}} \mathrm{d}v_i(zx_i^{'}(z)f_i(z)) \\
&= \int_0^{v_{\max}} zx_i^{'}(z)\mathrm{d}z \int_z^{v_{\max}} f_i(z)\mathrm{d}v_i \\
&= \int_0^{v_{\max}} z\mathrm{d}x_i(z)(1-F_i(z)),\ For\ F_i(v_{\max})=1 \\
&= zx_i(z)(1-F_i(z))\Big|_0^{v_{\max}} - \int_0^{v_{\max}} x_i(z)(1-F_i(z)-zf_i(z))\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{v_{\max}} x_i(z)(F_i(z)+zf_i(z)-1)\mathrm{d}z,\ For\ F_i(v_{\max})=1 \\
&= \int_0^{v_{\max}} x_i(z)(z-\frac{1-F_i(z)}{f_i(z)})f_i(z)\mathrm{d}z \\
&= \mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[x_i(z)(z-\frac{1-F_i(z)}{f_i(z)})|v_{-i}]
\end{aligned}
$$

称：$z-\frac{1-F_i(z)}{f_i(z)}$为$v$在分布$F$上的**虚拟估值(vitual value)**.

定义$\psi_i(v)=v-\frac{1-F_i(v)}{f_i(v)}$为$v_i$在$F_i$上的虚拟估值，$\psi_i(v_i)$只与$v_i$有关.

则

$$\mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[p_i(v_i)] = \mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[\psi_i(v_i)x_i(v_i)]$$

注意： $p_i(v_i)\neq\psi_i(v_i)x_i(v_i)$，因为并不一定是点点对应的.

则期望收益为：

$$\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n} p_i(v_i,v_{-i})] = \mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n}\psi_i(v_i)*x_i(v_i,v_{-i})]$$

即最大期望收益在形式上等于估价为价值在相应分布上的虚拟估值时的最大期望社会福利.

称$\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n}\psi_i(v_i)*x_i(v_i,v_{-i})]$为**虚拟的期望社会福利**.

则一般问题的求解步骤为：

1. 求解虚拟估值
2. 确定分配规则，使得虚拟的期望社会福利最大，即求解max $\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n}\psi_i(v_i)*x_i(v_i,v_{-i})]$
3. 检查单调性

我们使用该求解步骤对下例进行计算.

例 5 设有两个投标人，且 v 服从[0,1]上的均匀分布.求$\mathbb{E}(\sum p_i|\boldsymbol{v}_i)$

解 先求解虚拟估值：

$$\psi_1(v)=\psi_2(v)=v-\frac{1-F(v)}{f(v)}=2v-1$$

再确定分配规则.目标函数为$\mathbb{E}_{v\sim F}(\sum(2v_i-1)x_i(v_i,v_{-i}))$，固定 v，则：

$$\mathbb{E}_{v\sim F}(\sum(2v_i-1)x_i(v_i,v_{-i})) = (2v_1-1)x_1+(2v_2-1)x_2$$

因此分配规则为：若$\max(v_1, v_2) \geq 1/2$，则将物品给报价高的人；若$\max(v_1, v_2) < 1/2$，则物品无法卖出.

此时相当于引入保留价格1/2的二价拍卖机制.

最终检查单调性：显然此机制是单调的.