博弈论第三讲

授课时间: 2021 年 9 月 24 日　授课教师: 张家琳　记录人: 贾乐童　王思泽

1 机制设计

1.1 案例

例 1　空调温度的设定: 在一间教室里有 n 位学生，他们对于空调温度的要求各不相同。其中同学 i 的最适温度为 T_i，实际报上去的温度为 b_i。我们要求根据所有同学提供的 b_i，确定空调的温度 T，以最大限度的满足所有人的要求。

解

机制一：取平均值——not truthful

取所报温度的平均值:

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

该机制存在不诚实性。玩家可能会刻意高报温度或低报温度，以使得最终平均值向其最适温度靠近。

该机制也并没有最大化社会福利 $\sum_{i=1}^{n}|T_i - T|$. 比如考虑有三个同学，他们的最适温度与报上去的温度一致，分别为 $0, 0, 100$，那么采取平均数的最终温度为 $\frac{100}{3}$, 社会福利为 $\frac{400}{3}$. 实际上，如果采取中位数 0 作为最终温度，社会福利为 $100 < \frac{400}{3}$。

机制二：取中位数——optimal(social welfare), truthful

取所报温度的中位数，下面不妨设 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$，则中位数为:

$$T = \begin{cases} b_{\frac{n}{2}}\text{或者}b_{\frac{n}{2}+1} & n\text{为偶数} \\ b_{\frac{n+1}{2}} & n\text{为奇数} \end{cases}$$

这个机制是诚实并且在最大化社会福利的意义下是最优的。证明如下:

- 当 n 为奇数时，对于任意的 i 属于 $[n]$，假设 $T_i < T$。若 $b_i < T$ 且不等于 T_i 时，所定温度不变，该同学的损失不变；若 $b_i > T$，所定温度变大，该同学的损失变大。即无论第 i 同学如何谎报，都不可能减少代价，$T_i > T$ 时同理。

  其次，中位数机制在最大化社会福利的意义下是最优的，这里使用记号 c_i 表示使用机制 T 时第 i 位同学的代价，本问题中中位数机制可以最小化代价总和，即 $\sum_{i=1}^{n}|T_i - T|$。不妨设 $T_1 \le T_2 \le T_3 \le ... \le T_n$。当 n 为奇数时，对于任意机制 T，都有:

  $$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n}|T_i - T| = |T_1 - T| + |T_2 - T| + ... + |T_n - T|$$

  故

  $$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(|T_i - T| + |T_{n-i} - T|\right) + |T_{\frac{n+1}{2}} - T|$$

由绝对值不等式可知：$\sum_{i=1}^{n} c_i \geq \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |T_{n-i} - T_i|$ 等号成立条件是 T 取中位数。故得证。

- 当 n 为偶数时，若 $T = \frac{\left(b_{\frac{n}{2}} + b_{\frac{n}{2}+1}\right)}{2}$，则和机制一取平均值同理，是 not truthful 的。则取

$$T = \ b_{\frac{n-1}{2}} \text{或者} b_{\frac{n+1}{2}}$$

  此时，该机制是 truthful 的。证明如下：

  设选择的 $T = T_i$。任取 j，不妨令 $T_j > T_i$。只有 $b_j < T_i$ 时，中位数才会改变并变小，最终温度与个人最适温度差值变大，该同学所付的代价变大，因此谎报温度不会增加该同学的收益。同理可得 $T_j < T_i$ 的情况。社会福利的最优性与 n 为奇数类似可证。

机制三：让最不好的人最好——optimal(fairness), not truthful, simple

目标函数为：

$$\min_T \max_{1 \leq i \leq n} |T_i - T|$$

考虑到该社会问题的公平性，我们期望让最不好的人最好。仍然假设 $T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq ... \leq T_n$，目标函数变换为：

$$\min\max \quad \{|T_1 - T|, |T_n - T|\}$$

那么，我们取

$$T = \frac{T_1 + T_n}{2}$$

该机制，虽然可以保证公平性上的最佳，但却不能保证诚实性。最不好的人，可以倾向性的报数字，使得最终结果更接近其期待。

机制二和三对比

现在考虑采取机制二，对比它与机制三在公平性目标函数上的表现

$$T_{median} = \text{median}(T_1, T_2 ... T_n)$$

记机制 2 和 3 目标函数分别为 ME 和 OPT：

$$ME = \max_{1 < i < n} |T_{median} - T_i|$$

$$OPT = \min_T \max_{1 \leq i \leq n} |T - T_i| = \frac{|T_n - T_1|}{2}$$

对 ME 和 OPT 存在

$$ME \leq |T_n - T_1| \leq 2OPT$$

也就是说，采用机制二即使在公平性上，也不会比最优值的两倍差。

1.2 原则

在实际生活中的机制设计当中，一般选择机制的特点有：

- 尽可能简单。

  复杂的机制会使得参与者难以短时间内甚至无法找到符合机制设计目标的策略，使得所有参与者的表现更加不可预测。

- 会为了 truthful 牺牲其它的目标 (例如最优化社会福利，fairness 等等)。

2 合作博弈

不是所有博弈都具有竞争性。合作博弈的最终目标是整个团体的稳定（stable）。

在本节中，我们将介绍 voting game，来帮助大家深入了解合作博弈的内涵。

2.1 Voting Game 建模

在 Voting game 当中，有 n 个玩家，玩家 i 拥有权重（weight）w_i，个人营收 x_i.

设置集合 $N = 1, 2...N$. 阈值（threshold）t.

对于集合 $S \subseteq N$，营收 $f(S)$ 满足：

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i \in S} w_i \geq t \\ 0 & \sum_{i \in S} w_i < t \end{cases}$$

每个人的营收 x_i 满足

$$\sum_{i \in N} x_i = 1$$

问题： n 个玩家怎么分配营收，能够使得所有玩家构成的系统稳定？

即，x_i 如何取值，可以满足

$$\forall S \subset N, S \neq N, f(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$$

分析：系统稳定和阈值的问题

当系统中存在集合 S 的总权重大于阈值时，那集合 S 中的玩家可以凭借新团体的力量获得营收，即一部分玩家的能力足够他们构成新的联盟，脱离原系统，成立新系统。那么此时，如果营收分配不合适，就会造成该系统分崩离析。如何分配营收，使得该系统稳定，无人脱离就是该博弈游戏的主要问题。

2.2 Voting Game 例题

例 2 $4(n = 4)$ 位主播隶属于同一个直播公司，主播 i 的影响力用 w_i 表示，其中若干位主播 $S \subseteq [n]$ 组成的团体可以产生营收 $f(S)$，定义为：

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i \in S} w_i \geq t \\ 0 & \sum_{i \in S} w_i < t \end{cases}$$

其中，阈值 $t=7$，即若几个主播的影响力大于阈值 7 时，他们就可以抱团单飞，成立新直播公司，在该行业占得一席之地。
其中，影响力 w_i 取值如下：

- $w=(6,1,1,1)$
- $w=(2,2,2,2)$
- $w=(3,3,1,1)$
- $w=(3,3,3,3)$

解

- $w=(6,1,1,1)$ 时，取 $x=(1,0,0,0)$

  很明显，只有玩家 1 和任意 1 人抱团，即可成立新公司，构成威胁。那么留住玩家 1，即可维持系统的稳定。

- $w=(2,2,2,2)$ 时，x 随意分配

  可以分析得出，只有四人抱团，该系统才会崩塌，三人抱团不足以成立新公司。那么无论如何分配，都不会出现 4 人一起离开的场面，更不可能出现三人离开的情况。

- $w=(3,3,1,1)$ 时，x_1 和 x_2 随意分配，$x_3=x_4=0$

  只有玩家 1 和 2 和另外一人抱团出走，该系统才会崩塌。玩家 1 和 2 中任何 1 人和玩家 3，4 构成的小团体都不具备出走的条件。那么，只要让玩家 1 和 2 占有全部的份额，就可以保证团体稳定。

- $w=(3,3,3,3)$ 时，不存在使得系统稳定的分配方法

  任意 3 人抱团，均可出走。那么无论如何分配，都不存在使得系统稳定的方法，因为只要有某三个人的总份额小于 1，他们就可以抱团独立出去获得更大份额，然而没法做到任意三个人的总份额都是 1。

3 大作业

分组合作完成一次课程大作业：以博弈论的视角对一个实际的问题进行建模分析，清晰地描述问题、严格地定义数学模型、从问题中正确地抽象出博弈论的要素。

如能作进一步分析（如找到纳什均衡解、设计诚实的机制）会有额外加分。

以下是一个参考案例。

例 3 小组合作评分：小组合作中，经常会出现一部分人工作，一部分人摸鱼，但最终分数相同的情况。请设计一个小组合作评分机制，根据小组评分和组员贡献给每位组员分别打分，使结果尽可能公平合理。

如果该选题可以在期中之前完成，且机制设计公平合理，经同学们同意，其方案可以用作本学期大作业的评分方式，设计该方案的小组也会有额外加分。