博弈论第十次作业

完成人：Aries

[Title]:

Consider the following selfish routing problem with 1 unit of flow. Compute its Price of Anarchy.

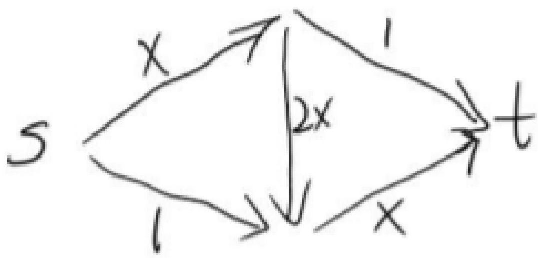

图 1: selfish routing

[证明]: 记上下两个节点为 v_1, v_2，则各边的延迟函数为:

$$d_{s\to v_1}(x) = x, d_{v_1\to v_2}(x) = 2x, d_{v_1\to t}(x) = x, d_{s\to v_2}(x) = 1, d_{v_2\to t}(x) = x$$

不妨设边 $s \to v_1$ 的流量为 a, 边 $v_1 \to v_2$ 的流量为 b, 边 $v_2 \to t$ 的流量为 c，则代价函数为:

$$C = (a-b)(a+1) + b(a+2b+c) + (c-b)(1+c)$$

同时满足，$a-b+b+c-b = a+c-b = 1, a \geq b, c \geq b, a \in [0,1], b \in [0,1], c \in [0,1]$

代入代价函数可得 $C = (1-c)(a+1)+b(1+3b)+(1-a)(1+c)$, 其中关于 b 的部分是单调递增的, 又因为 $b \in [0,1]$ 所以, 可取 b=0, 则 a+c=1, 所以原函数可化为 $C = a(a+1)+(1-a)(2-a) = 2a^2-2a+2$。因此 $a = c = \frac{1}{2}$ 时，C 取最小值为 $\frac{3}{2}$.

下面求纳什均衡策略：

根据纳什均衡的条件，可列出如下等式：

$$a + c - b = 1 \tag{1}$$
$$a + 1 = a+2b + c = 1 + c \tag{2}$$

解得：$a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{3}{5}$.

因此，只有一种纳什均衡，则最差纳什均衡的代价为:

$$\frac{2}{5} \times (\frac{3}{5}+1) + \frac{1}{5} \times (\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}) + \frac{2}{5} \times (1+\frac{3}{5}) = \frac{8}{5}$$

综上，此博弈的 POA 为 $\frac{8}{5}/\frac{3}{2} = \frac{16}{15}$