博弈论第二次作业

完成人: Aries

[Title]: Consider second price auction, if we require that (1) the price of the item is at least C (you can think it is the cost of the item) which is the public information; (2) at most one player wins the item, can you design a truthful auction?

[答]: 新机制如下:

1. 考虑待拍物品为单件物品，拍卖行给出物品起拍价为 C，有 n 个竞价者想要买这件物品，拍卖只进行一轮

2. 每个竞价者 i 对该物品都有一个心理估值，记作 v_i，是个体的私人信息

3. 每个竞价者 i 会对该物品给出一个报价 b_i，同时拍卖行会记录拍卖者 i 给出报价的时间 t_i(拍卖是密封的，竞价者彼此之间都不知道彼此的报价和报价时间，报价时间采用极为精确的记录装置，默认不会出现报价时间相同的竞价者)

4. 拍卖商根据竞拍者给出的报价 $(b_1, b_2, ..., b_n)$，记报价最高的竞拍人集合为 D，D 集合中的竞价者的报价时间集合记为 t_D 报价集合 $(b_1, b_2, ..., b_n)$ 中第二高的价格为 p，如果 $p < C$，则该物品流拍; 如果 $p \geq C$，拍卖继续。拍卖继续的情况下，若 $|D| = 1$，则 D 集合中竞价者直接中标，中标价格为 p; 若 $|D| > 1$, 则根据 D 集合中竞价者的报价时间集合 t_D，报价最早的为中标者，中标价格为 p

上述机制产生的拍卖结果只有两种可能: 一种是流拍; 一种是以大于等于 C 的成交价卖出，并且中标者唯一，不会出现成交价小于 C 卖出或者中标者不唯一的情况, 满足题设两个条件.

下证明该机制是诚实的, 这相当于要证明该拍卖机制存在占优策略 $(b_1, ..., b_n) = (v_1, ..., v_n)$，即每个投标人报自己对物品的真实估值.

[证明]: 要证明该上述结论, 即相当于证明对任意 i 和任意的 $(b_1, ..., b_n)$, 有 $u_i(v_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i})$. 令 $b = max(b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n)$

当 $b \geq C$ 时

1, 若 $v_i > b$，则报价 v_i 时，投标人 i 中标，支付的价格为 b, 收益为 $v_i - b$. 当报价改为 b_i 时，若 $b_i > b$, 则仍然是 i 中标，收益为 $v_i - b$; 若 $b_i \leq b$，无论 i 中不中标，收益均为 0. 因此报价 v_i 使收益最大化.

2. 若 $v_i < b$，报价 v_i 时，投标人 i 未中标，收益为 0. 当报价改为 b_i 时，若 $b_i < v_i$，则 i 未中标，收益为 0; 若 $b_i > v_i$, 无论是否中标，收益小于 0. 因此报价 v_i 使收益最大化.

3. 若 $v_i = b$, 报价 v_i 时，比较投标人 i 和剩余投标人中出价相同的出价时间，若 t_i 最小，则 i 中标，支付的价格为 b, 收益为 0；若 t_i 不是最小，则 i 未中标，收益也为 0. 报价 b_i 时，若 $b_i < v_i$ 仍然不可能中标，收益为 0; 若 $b_i > v_i$, 中标，但收益小于 0. 因此报价 v_i 使收益最大化

当 $b < C$ 时，该物品流拍，无论哪种报价方式，投标人 i 收益均为 0.

综上，$\forall i$ 和 $\forall(b_1, ..., b_n)$, 有 $u_i(v_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i})$. 该机制诚实性得证.

] [