博弈论第十讲

授课时间: 2021年11月19日　授课教师: 张家琳　记录人: 蔡鸿儒　冯晓东

1 稳定匹配

1.1 稳定匹配的延迟接受算法

延迟接受算法有如下几个性质：

- 算法会终止。
- 返回一个稳定匹配结果。
- 返回的结果对于男生（邀请者）来说是最优的。
- 对于男生（邀请者）来说是激励相容的，但对于女生（被邀请者）来说不是。

1.2 延迟接受算法性质的证明

命题 1. 延迟接受算法是一个终止的算法。

证明 我们分为以下两点证明：一是最后每个人一定都有舞伴；二是时间复杂度在多项式时间内。

1. 对于被邀请者来说，任何一个人在匹配到了舞伴后，就一直拥有舞伴。因为其拥有舞伴后，即使有别的邀请者对其发出邀请，也会在目前舞伴与邀请者中选择，不会变回没有舞伴的状态。由于邀请者与被邀请者人数相同，那么算法最终一定每个人都会有一个匹配的舞伴。
2. 且延迟接受算法在最多n^2轮迭代后得到一个稳定匹配，n为任意一方的人数。

则可知延迟接受算法是一个多项式时间内终止的算法。

命题 2. 延迟接受算法返回一个稳定匹配结果。

证明 我们采用反证法证明。设大写字母$A, B, C \dots$表示邀请者，小写字母$x, y, z \dots$表示被邀请者，双箭头表示最后的匹配结果，记“在A的排序中$x > y$”为$A : x > y$。后续的证明中延续这样的记号。我们假设延迟匹配算法返回的一个结果中$A \leftrightarrow x$，$B \leftrightarrow y$，且(B, x)构成为不稳定对，即有$B : x > y$,$x : B > A$。

1. 若B邀请过x，而x最终选择的却是A，这意味着$x : A > B$，这与上面推导出来的$x : B > A$矛盾；

2. 若B没有邀请过x，且B最终匹配到的是y，这意味着$B:y>x$，这与上面推导出来的$B:x>y$矛盾。

综上，由反证法可知，最后返回的结果一定是稳定匹配。

命题 3. 延迟接受算法返回的结果对于邀请者来说是最优的。

证明 首先，我们解释“最优”的定义。

定义 4. 对于同一个待匹配的问题，可能有多个稳定匹配结果。对于某一邀请者，延迟接受算法得到的匹配结果是所有可能的稳定匹配结果中排名最高的被邀请者，称这个匹配对于该邀请者是“最优的”。

我们采用反证法证明。我们假设$M_1:A\leftrightarrow x,B\leftrightarrow y$为延迟接受算法的匹配结果，$M_2:A\leftrightarrow y,B\leftrightarrow z$为另一稳定匹配结果。我们假设不为最优结果，则$A:y>x$。则说明，在$M_1$中，$A$邀请过$y$，且被拒绝。

1. 我们假设这是延迟接受算法得到M_1运行过程中第一次某一邀请者被被邀请者拒绝。该时刻，A被y拒绝，y选择的舞伴是B。
2. 则，由y拒绝了A选择B可知$y:B>A$。
3. 在M_2中，由于$y:B>A$，则$B:z>y$，否则会出现不稳定对(B,y)。
4. 由于$B:z>y$，我们可知对于M_1，B被z拒绝过，和1矛盾。

所以，我们可以得到该算法得到的结果对于邀请者一定为最优的。

命题 5. 延迟接受算法对于邀请者来说是激励相容的，但对于被邀请者来说不是。

证明 我们先证明对于邀请者来说是激励相容的。我们假设对于某一邀请者A，给出真实排序得到的延迟接受算法结果为M，给出欺骗排序得到的结果为M'。我们令R为在M'中舞伴好于M中的邀请者的集合。令S为R在M'中舞伴的集合。

1. 我们首先证明：S也是R在M中舞伴的集合。
   我们在M'中，取(R,S)的一个对(B,x)。设$M':B\leftrightarrow x,C\leftrightarrow y$，$M:B\leftrightarrow z,C\leftrightarrow x$，且$x\in S$。因为$B\in R$，则$B:x>z$。那么$x:C>B$，否则会在$M$中形成不稳定对$(B,x)$。则$C:y>x$，否则会在$M'$中形成不稳定对$(C,x)$。我们可以发现$C\in R$。所以对于$B$，其在$M'$中的舞伴$x\in S$，在$M$中为$C$的舞伴，而$C\in R$，所以$S$也是$R$在$M$中舞伴的集合。
2. 其次，我们证明M'的结果不是稳定匹配。
   对于延迟接受算法得到的M，我们假设R中B向x发出邀请，在这个时刻t后，B不会再发出邀请。且$B\in R,x\in S$。设t时刻$M:B\leftrightarrow x,C\leftrightarrow y$，$M':C\leftrightarrow x$。

(a) 由$B \in R, x \in S$和C是M'中x的舞伴可知$C \in R$。则可知$C : x > y$，那么可以推出在得到M过程中，C被x拒绝过，由此可以推出$x : B > C$。

(b) 在M中，我们假设t时刻x的舞伴是D，x因为B拒绝了D，才得到了$B \leftrightarrow x$。此后，$M : B \leftrightarrow x, C \leftrightarrow y, D \leftrightarrow z$。则我们可知：

- $D \notin R$，否则和时刻t的选取有矛盾。
- 从时间线上来看，C先邀请x，因为D的邀请被拒绝，然后D因为B邀请了x而被拒绝（t时刻发生）。可知$x : B > D > C$。

(c) t时刻后$M : B \leftrightarrow x, C \leftrightarrow y, D \leftrightarrow z$，$M' : C \leftrightarrow x, D \leftrightarrow z'$。对于$D$，由a可知$D \notin R$，则$D : z \geq z'$，且$D$被$x$拒绝过，可以推出$D : x > z \geq z'$。又由b可知$x : D > C$，可以得到$M'$中$(D, x)$为不稳定对，与延迟接受算法得到稳定匹配结果的性质矛盾。

(d) 则我们可得M'不是稳定匹配

最后，我们用一个反例证明对于被邀请者不是激励相容的。我们假设邀请者与被邀请者的真实偏好排序分别为$A : y > x > z, B : x > z > y, C : x > y > z$，$x : A > C > B, y : C > A > B, z : A > C > B$，此时延迟接受算法得到的匹配结果为$A \leftrightarrow y, B \leftrightarrow z, C \leftrightarrow x$。而如果被邀请者$x$谎称自己的偏好排序为$x : A > B > C$时，得到的结果为$A \leftrightarrow x, B \leftrightarrow z, C \leftrightarrow y$。可以发现被邀请者$x$匹配到的结果变好了。

1.3 延迟稳定算法的社会应用

- 学位匹配：公立小学升初中填志愿
- 医科生与实习医院的选择
- 高考填报志愿

2 纳什均衡

2.1 纯策略与混合策略纳什均衡

在博弈中，如果对某位参与者存在有利的策略，使得无论其他参与者如何应对，该策略总是最好的，称这样的策略为占优策略（*dominant strategy*）,令$u_i(s)$表示 i 策略局面s下的收益，S_i表示参与者i的策略集合，则占优策略形式化的定义如下：

定义 6. （占优策略） 若参与者i的策略$d \in S_i$，满足在任何策略局面$s \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$下，均有$u_i(d, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$,则称$d$为占优策略。

纳什均衡$Nash\ equilibrium$是博弈论中的重要概念，他刻画了博弈中的一个稳定的局面，其中任何参与者单方面改变策略都无法提升收益。

纯策略纳什均衡 $(pure - strategy\ Nash\ equilibrium)$可以形式化地定义如下：

定义 7. （纯策略纳什均衡） 若局面s满足对于任意一个参与者$i \in [n]i$的任何策略s_i'均有$s_i(d, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$,则称$s$是一个纯策略纳什均衡。

显然，纯策略纳什均衡是一个占优策略。在现实的博弈场景中，参与者会不停地改变策略以提升收益，假设每次参与者总会选择当前能最大幅度提升收益的策略，策略局面也会随之不断演化，我们称之为 最优对应过程（*the best response process*） ,这个过程只有在到达纳什均衡局面时才会停止。

将参与者的选择由纯策略推广到混合策略，既允许参与者的选择是策略集上的一个分布，参与者从该分布中采样策略，相应地 混合策略纳什均衡（ $mixed-strategy\ Nash\ equilibrium$）定义如下：

定义 8. （混合策略纳什均衡） 若$S_1, S_2, \ldots, S_n$上的分布$D_1, D_2, \ldots, D_n$满足对于任意一个参与者$i \in [n]$和S_i上的任意分布D_i'，均有：

$$E_{s-D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n}[u_i(s)] \geq E_{s-D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_i' \times \ldots \times D_n}[u_i(s)]$$

则称$D_1, D_2, \ldots, D_n$是一个混合策略纳什均衡。

一般情况下，纯策略纳什均衡不一定存在，而Nash证明了混合策略纳什均衡总是存在的。

命题 9. 任何有限参与者和策略数的博弈均存在混合策略纳什均衡。

2.2 纳什均衡的计算方法

关键点：一个混合策略当且仅当在它的$support$下所有的纯策略纳什均衡均为最优时达到最优。
step1:猜测每一个参与者的support；
step2:根据support值找到纳什均衡策略。