博弈论第五讲

授课时间: 2021年10月15日　授课教师: 张家琳　记录人: 杨程鸿　彭兴宇

1　迈尔森引理证明(Proof on Myerson lemma)

引理 1 (迈尔森引理). 对于一个单变量问题*(single parameter environment)*，一个分配规则是可实现的，当且仅当它是单调的

解　可实现⇒ 单调：假设一任意分配规则为x是可实现的，则由可实现分配规则的定义可知，存在支付规则p使得机制(x,p)是诚实的。记

$$x(b) = (x_1(b), ..., x_n(b))$$

则在此规则下，对于出价者i，我们令$x_i(y,b_{-i})$为x_y，$x_i(z,b_{-i})$为x_z，$p_i(y,b_{-i})$为p_y，$p_i(z,b_{-i})$为p_z。对任意$y>z$，由于机制(x,p)是诚实的。

$$\begin{cases} y \cdot x_y - p_y \geqslant y \cdot x_z - p_z & \text{估价为y时，报价也为y的受益更高} \\ z \cdot x_z - p_z \geqslant z \cdot x_y - p_y & \text{估价为z时，报价也为z的受益更高} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ y(x_y - x_z) \geqslant p_y - p_z \geqslant z(x_y - x_z)$$

由于$y>z$，需要使$x_y - x_z \geq 0$，可知该分配规则单调。
单调⇒ 可实现：首先假设分配规则x是连续可微的，令$y = z + \Delta z$。我们将上面联立得到的式子同除以Δz，p需要满足该式：

$$\frac{(z+\Delta z)(x_{z+\Delta z} - x_z)}{\Delta z} \geqslant \frac{p_{z+\Delta z} - p_z}{\Delta z} \geqslant \frac{z(x_{z+\Delta z} - x_z)}{\Delta z}$$

令$\Delta z \to 0$ ，有$p'_z = z \cdot x'_z$，积分可得：

$$p_i(b) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z, b_{-i})\, dz$$

此时我们假设v是投标人i对物品的估价。我们需要证明，对于任意的b，有$v \cdot x_v - p_v \geqslant v \cdot x_b - p_b$，即证明$v \cdot (x_v - x_b) \geqslant p_v - p_b$。由于$x_z$是单调的，所以$x'_z \geqslant 0$，因此：

$$p_v - p_b = \int_b^v z \cdot \frac{d}{dz} x(z)\, dz \leqslant v \int_b^v \frac{d}{dz} x(z)\, dz = v \cdot (x_v - x_b)$$

x为连续时的可实现性得证。
再假设分配规则x不连续，并是一个阶梯函数，即在有限个点处取值发生跳跃，在$x=z$处跳跃高度为h_z，并在跳跃点之间保持函数值不变。考虑$y>z$，若$(y,z]$之间没有跳跃点，即$x_z = x_y$，则在诚实的机制中，这两个点对应的支付值满足$0 = y(x_y - x_z) \geq p_y - p_z \geq z(x_y - x_z) = 0$,因此$p_y = p_z$。若$(y,z]$间有恰好一个跳跃点$z'$，记$x_y - x_z = h_{z'}$,则$p_y, p_z$需要满足$yh = y(x_y - x_z) \geq p_y - p_z \geq z(x_y - x_z) = zh$,令$y,z$分别趋向该跳跃点的左边和右边，该式子始终满足，并且$y,z \to z'$,则只有$p_y - p_z = z' h_{z'}$.

根据上述条件，规定$p_0 = 0$时，支付规则只能写成：$p_i(b, b_{-i}) = \sum_{j=1}^{l_b} z_j \cdot h_{z_j}$，其中$z_1, z_2, ..., z_{l_b}$是所有在$[0, b]$中的断点，类比分配规则连续时的情况：

$$p_v - p_b = \sum_{j=l_b}^{l_v} z_j \cdot h_{z_j} \leqslant v \sum_{j=l_b}^{l_v} h_{z_j} = v \cdot (x_v - x_b)$$

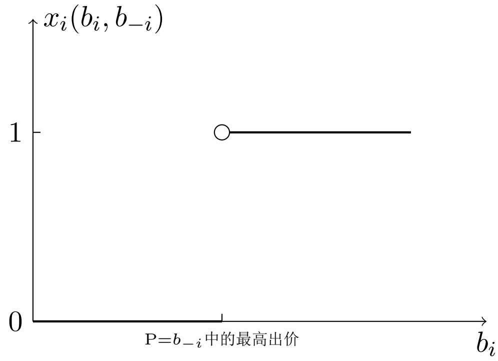
可知(p, x)是诚实的。

2 单物品拍卖(Single Item Auction)

以下我们给出单物品拍卖的定义，并应用迈尔森引理求解其对应的诚实机制。

例 1 [单物品拍卖] 在拍卖中，仅有一个不可分割的拍卖物品，n个投标人。每个投标人对物品有一个私人的估值。

解 对任意投标人i，其所得分配关于其出价的函数如下：



该分配规则满足单调性，假设投标人的出价为y,若$y \leq P$,则$[0, y]$中无断点，支付为0，若出价$y > P$，则P为唯一断点,分配函数跳跃1，由迈尔森引理，出价为P,综上可得到单物品拍卖诚实的支付机制为：

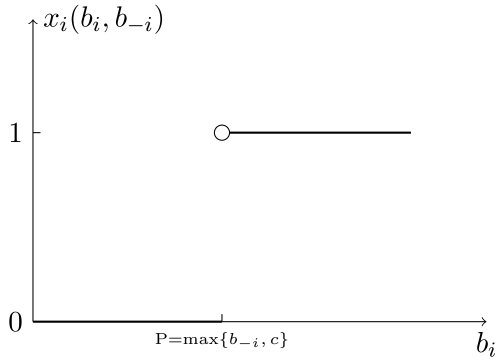
$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{投标人i未中标} \\ P = b_{-i}\text{中最高的报价} & \text{投标人i中标} \end{cases}$$

即二价拍卖。

3 最低出价c的单物品拍卖(Single Item Auction with cost c)

例 2 [最低出价c的单物品拍卖] 在拍卖中，仅有一个不可分割的拍卖物品，n个投标人，最低成交价格为c。每个投标人对物品有一个私人的估值。

解 对任意投标人i，其所得分配关于其出价的函数如下：



我们只需假设一个虚拟的出价人k，其出价$b_k = c$，证明步骤类似单物品拍卖，下面直接给出结论：

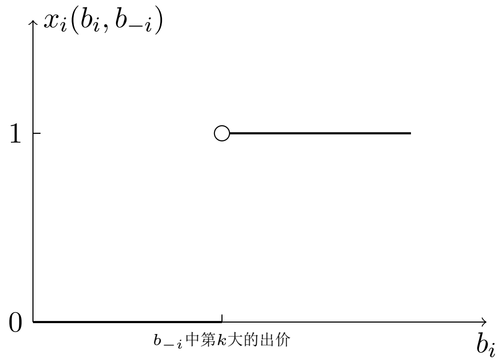
$$\begin{cases} 0 & \text{投标人i未中标} \\ P = \max\{b_{-i}, c\} & \text{投标人i中标} \end{cases}$$

4 多个相同物品拍卖(Multiple Identical Items Auction)

以下我们给出多个相同物品拍卖的定义，并应用迈尔森引理求解其对应的诚实机制。

例 3 [多个相同物品拍卖] 在拍卖中，有k个相同的物品，n个投标人。每个投标人最多只想要一个物品，并且对物品有一个私人的估值。

解 对任意投标人i，其所得分配关于其出价的函数如下：



由迈尔森引理可得

- 当b_i小于b_{-i}中第k大的出价时，投标人i应支付的价格是相同的，我们令其为0；
- 当b_i大于b_{-i}中第k大的出价时，投标人i应支付价格的是相同的，我们令其为p。

取b_y, b_z，其中b_y小于b_{-i}中第k大的出价，b_z大于b_{-i}中第k大的出价，由迈尔森引理可得

$$b_y \leq p \leq b_z$$

当$b_y, b_z \to b_{-i}$中第k大的出价时，可得

$$p = b_{-i}\text{中第}k\text{大的出价}$$

当投标人i中标时，其出价必定不低于b_{-i}中第k大的出价，故其支付的价格实际为所有出价中第$k+1$大的出价。综上，所得诚实的支付机制为：

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{投标人}i\text{未中标} \\ \text{所有出价中第}k+1\text{大的出价} & \text{投标人}i\text{中标} \end{cases}$$

5 赞助搜索拍卖(Sponsored Search Auction)

以下我们给出赞助搜索拍卖的定义，并应用迈尔森引理求解其对应的诚实机制。

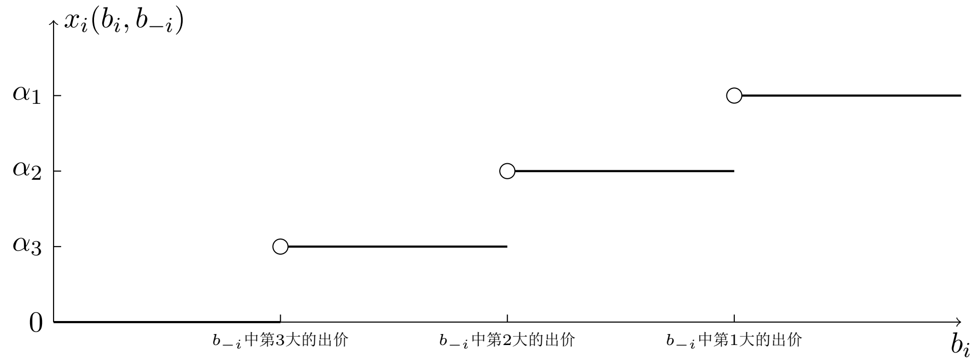
例 4 [赞助搜索拍卖] 赞助搜索拍卖考虑如下形式的拍卖：

- 存在k个广告位（物品），n个广告主（投标人）；
- 对第j个广告位，其点击率为α_j，且$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$；
- 对第i个广告主，如果其得到了第j个广告位并支付了p_i的价格，那么其效用函数可表示为$u_i = v_i\alpha_j - p_i$。

解 在该问题中，假设把点击率第j大的广告位分配给了广告主i_j,那么社会福利为

$$\sum_{j=1}^{k} v_{i_j}\alpha_j$$

显然，使得社会福利最大的分配方式为，将第j好的广告位给心理价位第j高的广告商，由此我们可以决定一个分配规则，以$k=3$为例，对任意投标人i，分配规则如下：



由迈尔森引理可得

- 当$0 < b_i <$$b_{-i}$中第3大的出价时，投标人$i$应支付的价格是相同的，我们令其为0；
- 当b_{-i}中第3大的出价$< b_i <$$b_{-i}$中第2大的出价时，投标人$i$应支付价格的是相同的，我们令其为$p_3$；
- 当b_{-i}中第2大的出价$< b_i <$$b_{-i}$中第1大的出价时，投标人$i$应支付价格的是相同的，我们令其为$p_2$；

- 当$b_i >b_{-i}$中第1大的出价时，投标人i应支付的价格是相同的，我们令其为p_1；

像多个相同物品拍卖诚实机制推导过程中那样多次应用迈尔森引理可得：

$$\begin{cases} p_3 = b_{-i}\text{中第3大的出价}\cdot\alpha_3 \\ p_2 - p_3 = b_{-i}\text{中第2大的出价}\cdot(\alpha_2 - \alpha_3) \\ p_1 - p_2 = b_{-i}\text{中第1大的出价}\cdot(\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

由此即可解得p_1, p_2, p_3。
下面我们给出一般化的结果。
假设$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$，定义$\alpha_{k+1} = 0$，且令未获得广告位的投标人的支付为0。
由迈尔森引理可得以下方程组

$$p_i - p_{i+1} = b_{i+1}(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

解得

$$p_i = \sum_{j=i}^{k} b_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \qquad (i = 1...k)$$

综上，所得诚实的支付机制为：

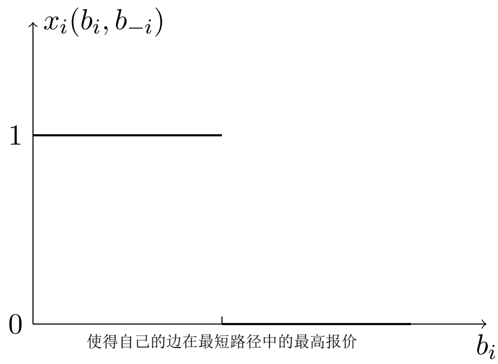
$$p_i = \begin{cases} \sum_{j=i}^{k} b_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j+1}) & i \leq k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

6 路径问题(Routing Problem)

以下我们给出路径问题的定义，并应用迈尔森引理求解其对应的诚实机制。

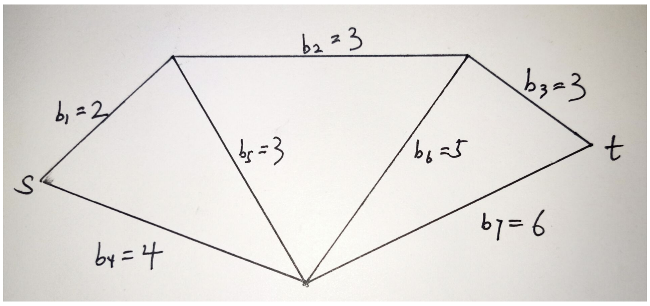
例 5 [路径问题] 给定无向图G和图上的两点s, t，我们希望建设一条从s到t的路径。图G的每条边v_i都有一个权重c_i，表示路径从这条边经过时所需要的建造费用。我们假设每条边由一个理性的玩家持有，权重c_i是他的私有信息，他可以自由报价b_i，收益函数为他最终得到的支付减去c_i。考虑分配规则:以每条边的长度为b_i运行最短路算法，选中所有最短路中的边。现需设计一个诚实的机制（每条边的报价都是真实价格），并最小化总的建造费用（总建造费用最小的路径称为最短路径）。

解 对任意玩家i，其所得分配关于其出价的函数如下：



由迈尔森引理可得我们需要支付给边被选入最短路径的玩家的费用为“该玩家使得自己的边在最短路径中的最高报价”。

例 6 下图中，最短路径为$b_1b_2b_3$，总建设费用$a_1 = b_1 + b_2 + b_3 = 8$；第二短路径为$b_4b_7$，总建设费用为$a_2 = b_4 + b_7 = 10$。故需支付给1号玩家$a_2 - a_1 + b_1 = 4$，支付给2号玩家$a_2 - a_1 + b_2 = 5$，支付给3号玩家$a_2 - a_1 + b_3 = 5$，支付给其他玩家0。



7 背包拍卖(Knapsack Auction)

例 7 [背包拍卖] 有一个容量为B的背包和n个投标人（物品）。每个投标人有一个权重w_i和一个价值v_i。w_i是公有信息，v_i是私有信息。在拍卖中，投标人i报价b_i。而拍卖方需要根据这些报价，决定哪一拨人可以使用背包，使得这波人的总权重不超过背包的容量B。该问题对应的分配规则为：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum b_i \cdot x_i \\ s.t. \quad & \sum w_i \cdot x_i \leqslant B, \quad x \in \{0,1\} \ . \end{aligned}$$

求解该问题是$\mathcal{NP}$难的，我们可以通过下述耗时较少的办法解决。

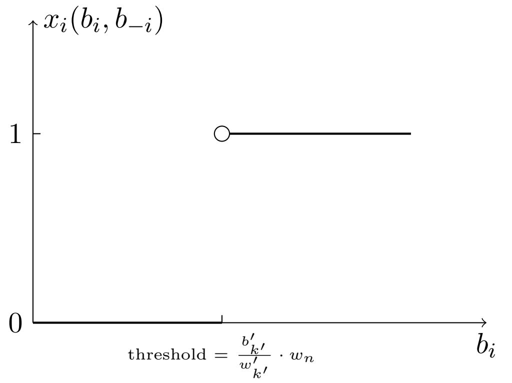
贪心算法 将每个投标人的$\frac{b_i}{w_i}$从大到小依次排序：

$$\frac{b_1'}{w_1'} \geqslant \frac{b_2'}{w_2'} \geqslant \frac{b_3'}{w_3'} \geqslant \dots \geqslant \frac{b_n'}{w_n'}$$

分配规则(allocation rule)：将前k个投标人对应的物品放入背包中，直到背包无法再装下

$$\text{find k, } s.t. \sum_{i=1}^{k} w_i' \leqslant B, \quad \sum_{i=1}^{k+1} w_i' \geqslant B$$

对于投标人n，存在一个k',只有其报价与权重之比大于剩下人中排名第k'的，才能被选上，因此其分配函数为



该分配规则是单调的，于是根据迈尔森引理，存在诚实机制。但是通过我们学习过的算法知识，我们知道这种算法最终得到的解可能并非全局最优解，他可能没法达到最高的社会福利。背包问题的精确解可以用动态规划算法。

动态规划算法 设$f(i,j)$为只在前i个物品中选择且使得总价值为j所需的最小权重，则状态转移方程为：

$$f(i,j) = \min\{f(i-1,j), f(i-1,j-v_i)+w_i\}$$

最终得到总价值的最大值为：$\max\{j|f(n,j) \leq B\}$。

该算法对应的分配规则是单调的，由迈尔森引理可知存在定价规则使得整个机制是诚实的。然而，该算法的时间复杂度为$O(n\sum_i v_i) = O(n^2 \cdot \max_i v_i)$，是一伪多项式时间复杂度的方法，在$\max_i v_i$较大时并不高效。

为了解决效率问题，我们可以根据DP算法设计一近似算法：用$\bar{v_i} = \lfloor \frac{nv_i}{\varepsilon \max_i v_i} \rfloor$替代$v_i$，再运行上述的DP算法。这样，近似DP算法的时间复杂度为$O(n^2 \cdot \max_i \bar{v_i}) = O(\frac{n^3}{\varepsilon})$，是多项式时间的算法，且可证明该算法是$1-\varepsilon$近似算法。然而由于取整运算的参与，按此近似DP算法得到的分配规则不再是单调的，不再有定价规则使得整个机制是诚实的。