# 博弈论第七讲

授课时间: 2021 年 10 月 29 日　授课教师: 张家琳　记录人: 张必浪　刘峻甫

## 1 收益最大化机制补充说明

上节课，我们证明了等式：

$$\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathbf{v})] = \mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i)\cdot x_i(\mathbf{v})]$$

$$\text{其中} \qquad \varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

也就是说，收益最大化问题可以转化为这样一个问题：寻找这样一个 $x(\mathbf{v})$，使得 $\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v_i)\cdot x_i(v)]$ 最大。

比如以下这个例子：

**例 1** 1 件物品拍卖，共有 2 位竞拍者，私有估值 $v_i$ 为（0，1）上的均匀分布 F

**解** 此时，$F_i(v_i)=v_i, f_i(v_i)=1$，则 $\varphi_i(v_i)=2v_i-1$，卖家的期望收益为 $\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{2}(2v_i-1)x_i(\mathbf{v})]$

注意到，如果我们 $\varphi_i(v_i)$ 看作 $v_i$，我们就遇到了"老朋友"：最大化社会福利期望。我们将 $\mathbb{E}_{v\sim F}[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v_i)\cdot x_i(v)]$ 称作期望虚拟福利。也由以前所学知识可知，如果最大化期望虚拟福利问题的分配方式是单调的，那么我们将会有一个诚实的机制使得期望虚拟福利最大化，也即收益期望最大化。

**定理 1.** 最大化社会福利的分配方式都是单调的。

那么，最大化期望虚拟福利的分配方式是不是也是单调的呢？

**定义 2** (正则分布)**.** 如果估值分布 $F$ 所对应的虚拟估值函数 $\varphi_i(v_i)$ 是关于 $v$ 严格递增的，则称该估值分布是正则的。

**定理 3.** 如果每一个估值分布 $F_i$ 都是正则的，则此最大化期望虚拟福利的分配方式是单调的。

**证明** 首先我们来看定理 1 的证明, 最大化社会福利即 $\max\ \sum_{i=1}^{n}x_i(v)v_i$。对于 $i$，假设 $v_i'>v_i$。分别考虑 $i$ 的估值为 $v_i$ 和 $v_i'$ 时的最优分配方式，分别设为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和 $(z_1,z_2,\cdots,z_n)$。于是有

$$\sum_{j=1}^{n} y_i v_i \ge \sum_{j=1}^{n} z_i v_i$$

即

$$y_i v_i + \sum_{j\neq i} y_j v_j \ge z_i v_i + \sum_{j\neq i} z_j v_j$$

同理可得

$$z_i v_i' + \sum_{j\neq i} z_j v_j \ge y_i v_i' + \sum_{j\neq i} y_j v_j$$

上述两式两边相加，然后左右相消可得 $(z_i-y_i)(v_i'-v_i)\ge 0$, 因为 $v_i'>v_i$，所以 $z_i\ge y_i$，所以是个单调的分配方式。

接着我们将 $v_i$ $v_i'$ 分别替换为 $\varphi_i(v_i)$ $\varphi_i(v_i')$，因为每一个 $F_i$ 都是正则的，即 $\varphi_i(v)$ 是严格单调递增的，所以 $\varphi_i(v_i') > \varphi_i(v_i)$，所以 $z_i \geq y_i$。所以此最大化期望虚拟福利的分配方式是单调的。得证。
□

接下来，我们看其在拍卖例子上的应用。

**例 2** 1 个竞拍者，1 件物品，$F$ 为 $[0,1]$ 上的均匀分布

**解** $\varphi = v - \frac{1-F}{f} = 2v-1$，问题转换为 $\max\ (2v-1)x(v)$，所以当 $v \geq \frac{1}{2}$ 时，卖出 (即 $x(v)=1$)，支付 $\frac{1}{2}$；否则不卖出 $(x(v)=0)$。

**例 3** $n$ 个竞拍者，1 件物品，$F$ 为 $[0,1]$ 上的均匀分布

**解** $\varphi_i = v_i - \frac{1-F_i}{f_i} = 2v_i - 1$，问题转换为 $\max\ \sum_{i=1}^{n}(2v_i-1)x_i(\mathbf{v})$，所以当 $\exists i$，$v_i \geq \frac{1}{2}$ 时，卖出，给出价最高的人，其支付价格为 $\max\ \{\frac{1}{2}, v_{-i}\}$；否则不卖出。等价于有 $\frac{1}{2}$ 最低价格的二价拍卖。

**例 4** $n$ 个竞拍者，1 件物品，$F$ 为相同的正则分布

**解** $\max\ \sum_{i=1}^{n}\varphi(v_i)x_i(\mathbf{v})$，所以当 $\exists i$，$\varphi(v_i) \geq 0$ 时，卖出，给 $v_i$ 最大的竞拍者，支付价格 $\max\ \{\varphi^{-1}(0), v_{-i}\}$；否则不卖出。等价于有 $\varphi^{-1}(0)$ 最低价格的二价拍卖。

**例 5** $n$ 个竞拍者，1 件物品，$F_i$ 为不同的正则分布

**解** $\max\ \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v_i)x_i(\mathbf{v})$，所以当 $\exists i$，$\varphi_i(v_i) \geq 0$ 时，卖出，给 $\varphi_i(v_i)$ 最大的竞拍者，令 $w = \max\ \{\varphi_i(v_i), 0\}$，支付价格 $\varphi_i^{-1}(w)$；否则不卖出。

# 2 多参数机制设计

## 2.1 多参数机制的组成

多参数的机制设计由以下几个部分组成

- $n$ 名参与者
- 有限的结果集合 $\Omega$
- 每名参与者 i 所私有的估值函数 $v_i : \Omega \to R_{\geq 0}$，和其公开的报价函数 $b_i : \Omega \to R_{\geq 0}$
- 分配策略 $\mathbf{x}(\mathbf{b}) \in \Omega$ 和支付函数 $\mathbf{p}(\mathbf{b}) \in R^n$

  由以上分配策略和支付函数，可以计算出每名参与者的收益 $u_i(\mathbf{b}) = v_i(\mathbf{x}(\mathbf{b})) - p_i(\mathbf{b})$

## 2.2 多参数机制的简单应用

结合多参数机制设计，下面我们更加深刻地描述传统的单物品拍卖

**例 6** （**单物品拍卖**）其组成如下：

- n 名参与者；
- n+1 元结果集合 Ω=$\{0, 1, 2, ..., n\}$，其中 0 表示流拍，$i(i = 1, 2, ..., n)$ 表示第 i 名参与者竞拍成功；

- 每名参与者 i 的估值函数

$$v_i(j) = \begin{cases} w_i & if \quad j = i \\ 0 & if \quad j \neq i \end{cases} \tag{1}$$

- 分配策略 $\mathbf{x}(\mathbf{b}) \in \Omega$ 和支付函数 $\mathbf{p}(\mathbf{b}) \in R^n$

此时，可以计算出每名参与者的收益 $u_i(\mathbf{b}) = v_i(\mathbf{x}(\mathbf{b})) - p_i(\mathbf{b}) = x_i(\mathbf{b}) \cdot w_i - p_i(\mathbf{b})$

## 2.3 Vickrey-Clarke-Groves mechanism

**定理 4 (VCG 定理).** *在任何一个多参数的机制设计环境下，都存在一个诚实的机制使得社会福利最大化。*

### 2.3.1 VCG 机制

VCG 机制的分配函数为能够使得报价下社会福利最大化的分配机制，表示为：

$$\mathbf{x}(\mathbf{b}) = \arg\max_{w \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(w)$$

VCG 机制的支付函数可以表示为以下形式，对于任意买家 i 其支付函数为:

$p_i(\mathbf{b}) = \max\limits_{w \in \Omega} \sum\limits_{j \neq i} b_j(w) - \sum\limits_{j \neq i} b_j(w^*) = b_i(w^*) - [\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(w^*) - \max\limits_{w \in \Omega} \sum\limits_{j \neq i} b_j(w)]$

其中,

$$w^* = \arg\max_{w \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(w)$$

### 2.3.2 VCG 定理的证明

**证明** 我们只需要证明上述的 VCG 机制是诚实的即可, 首先，我们知道任意参与者 i 的收益为

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{b}) &= v_i(w^*) - p_i(\mathbf{b}) \\ &= v_i(w^*) - \max_w \sum_{j \neq i} b_j(w) + \sum_{j \neq i} b_j(w^*) \\ &= [v_i(w^*) + \sum_{j \neq i} b_j(w^*)] - \max_w \sum_{j \neq i} b_j(w) \end{aligned}$$

注意到其中后一项 $\max\limits_w \sum\limits_{j \neq i} b_j(w)$ 与参与者 i 的报价 $b_i$ 无关, 因此只需要使前一项 $v_i(w^*)+\sum\limits_{j \neq i} b_j(w^*)$ 最大化即可, 我们发现，当 $v_i = b_i$ 时，$v_i(w^*) + \sum\limits_{j \neq i} b_j(w^*)$ 转化为 $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(w^*)$, 而 $w^*$ 恰好是能够使得该式子最大化的 w，因此，若该参与者诚实报价，则其最大化个人收益的分配规则与最大化社会福利的分配规则一致, 显然此时每名参与者的收益都能得到最大化，故诚实报价是每名参与者的最优策略

由上可知，VCG 机制是诚实机制，VCG 定理得证 □

### 2.3.3 VCG 机制的应用

- **二价拍卖**

  一件物品，n 名参与者，不妨设其报价满足 $b_1(1) \geq b_2(2) \geq ... \geq b_n(n)$

  为了使得社会福利 $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(w^*)$ 最大化，显然应该有 $w^* = 1$，即报价最高者竞拍成功，而其所支付的价格可由 VCG 机制的支付函数公式计算出，为：

$$p_1(\mathbf{b}) = \max_{w \in \Omega} \sum_{j \neq 1} b_j(w) - \sum_{j \neq 1} b_j(w^*) = b_2(2) - 0 = b_2(2)$$

  易知其他参与者的定价与支付都为 0

  综上可见，单物品拍卖中的二价拍卖实际上就是 VCG 机制

- **搜索引擎赞助问题**

  有 n 名参与者竞拍 k 个点击率分别为 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k$ 的广告位，每名参与者 i 的估价为 $v_i$，报价为 $c_i$，每名参与者最多只能获得一个广告位置

  为了应用 VCG 机制，我们首先定义状态空间 $\Omega$ 为 $\{1, 2, ..., n\}$ 的所有有序 k 元子集组成的集合，有序集合的分量代表着对应的广告位被分配给的人，然后定义相应的报价函数 b 为：

$$b_i(w) = \begin{cases} \alpha_j c_i & if \quad \exists j \quad s.t. \quad w(j) = i \\ 0 & if \quad else \end{cases} \tag{2}$$

  不妨设 $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n$，由排序不等式知，当第 i 个广告位拍卖给第 i 名参与者时，社会福利最大。因此，根据 VCG 机制，有分配函数：

$$x(b) = w^* = \begin{cases} i & if \quad i \leq k \\ 0 & if \quad else \end{cases} \tag{3}$$

  相应地，定价函数为:

$$p_i(\mathbf{b}) = \max_{w \in \Omega} \sum_{j \neq i} b_j(w) - \sum_{j \neq i} b_j(w^*) = \begin{cases} \sum\limits_{j=i+1}^{k} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) c_i + \alpha_k c_{k+1} & if \quad i \leq k \\ 0 & if \quad else \end{cases} \tag{4}$$

  这与我们在单参数条件下利用迈尔森引理的定价方法得到的结论是一致的。

- **路径问题**

  留作本周作业

#### 2.3.4 VCG 机制与迈尔森引理的对比

| | 迈尔森引理 | VCG 机制 |
|---|---|---|
| 场景 | 单参数 | 多参数 |
| 目标函数 | 任意单调的分配 | 仅仅使社会福利最大化 |
| 实用性 | 通常较为实用 | 实用性较差 |

#### 2.3.5 VCG 机制的优劣

作为多参数机制设计理论的基础，VCG 机制有其优点所在：

- 当我们想社会福利最大化时，可以从原则上保证机制的诚实性
- 是一个干净的机制

但与此同时，VCG 机制仍有其局限性，劣势如下：

- VCG 机制的参数空间可能过大
- VCG 机制不总是实用的
- VCG 机制不总能保证卖方有利可图
- 有时可能存在一些另类的不诚实策略

**例 7** [**VCG 机制下的一个欺骗策略**] 有三位参与者 1、2、3，竞拍两个物品 A 与 B，三人对物品的估值函数分别如下：

$$v_1 = \begin{cases} 1 \quad if \quad getAB \\ 0 \quad if \quad others \end{cases} \tag{5}$$

$$v_2 = \begin{cases} 1 \quad if \quad getA \text{ or } getAB \\ 0 \quad if \quad others \end{cases} \tag{6}$$

$$v_3 = \begin{cases} 1 \quad if \quad getB \\ 0 \quad if \quad others \end{cases} \tag{7}$$

假设我们采用 VCG 机制，那么可以得到如下情况:

- 首先考虑只有参与者 1 和 2 参与拍卖时的情况。此时不难发现将物品 A 和 B 都分配给参与者 1 与只将物品 A 分配给参与者 2 都可以实现社会福利最大化。我们不妨选择后一种分配方式，此时按照 VCG 机制的相关公式不难计算出社会福利为 1；参与者 1 报价为 0，支付为 0；参与者 2 报价为 1，支付为 1；卖家收益为 1.

- 接下来考虑参与者 3 加入之后的情况。为了使社会福利最大化，显然我们应该将物品 A 分配给参与者 2，而将物品 B 分配给参与者 3。此时，按照 VCG 机制的相关公式不难计算出社会福利为 2；参与者 1 报价为 0，支付为 0；参与者 2 报价为 0，支付为 0；参与者 3 报价为 0，支付为 0；卖家收益为 0.

由上可知，在 VCG 机制中，虽然社会福利得到了最大化，但是卖方的收益并不总是能最大化；相反，在特定情况（例如例子中参与者 3 的加入），VCG 机制甚至会让卖方血本无归

事实上，考察以上例子中参与者 3 的加入对参与者 2 的影响，我们可以发现，参与者 3 的加入使得参与者 2 在保持得到物品 A 的前提下降低了支付（从 1 变成 0），由此可见，从参与者 2 的立场来看，如果想最大化其个人收益，那么其最有利的选择应当是找到一个像参与者 3 那样的“托”来入场参加拍卖。虽然参与者 2 在这一过程中如实地报价，满足了广义上的诚实报价，但其引入其他人的策略仍是一种欺诈，属于通过带有欺骗性质的手段来提高其收益的行为，而我们的 VCG 机制无法有效地避免这类欺诈。

## Reference

[1] W. Vickrey (1961). Counterspeculation, auctions, andcompetitive sealed tenders. Journal of Finance, 16(1):8-37

[2] E. H. Clarke (1971). Multipart pricing of public goods. Public Choice, 11(1):17-33

[3] T. Groves (1973). Incentives in teams. Econometrica, 41(4):617-631