# 博弈论第四次作业

完成人: Aries

**Consider the following allocation of knaspack auction,**

**1.Round each $v_i$ to $v_i' = \lfloor \frac{v_i}{\frac{\epsilon V}{n}} \rfloor$**

**2.Solve the problem with valuation $v_i'$ by the dynamic programming algorithm and use the optimal solution as the allocation**

**Answer the following questions:**

**•If the algorithm set $V$ as $V = max_i\ v_i$, prove that algorithm does not define a monotone allocation rule.**

**•If $V$ is fixed up front, show the algorithm defines a monotone allocation rule(for any $\epsilon$)**

**[Question 1]**

**[证明]:** 考虑这样一个场景，背包大小 $W = 1$，有 5 个投标者，对投标者 $i$，均有一个出价权重 $w_i$ 和报价 $v_i$，其中 $w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = w_3 = \frac{1}{2}, w_4 = w_5 = \frac{1}{6}, v_1 = 245, v_2 = 195, v_3 = 200, v_4 = 49, v_5 = 98$，同时设定 $\epsilon = 0.1$.

由近似算法 $v_i' = \lfloor \frac{v_i}{\frac{\epsilon V}{n}} \rfloor$ 和 $V = max_i\ v_i$ 可得 $v_1' = 50, v_2' = 39, v_3' = 40, v_4' = 10, v_5' = 20$. 再通过动态规划算法可得，最优组合是 $\{v_1', v_4', v_5'\}$, 可得

$$v_1' + v_4' + v_5' > v_2' + v_3'$$

因此，$x_1(245, v-_i) = 1$.

但是当 $v_1$ 提升至 250 时，由近似算法可得 $v_1' = 50, v_2' = 39, v_3' = 40, v_4' = 9, v_5' = 19$，此时有

$$v_1' + v_4' + v_5' < v_2' + v_3'$$

因此，$x_1(250, v-_i) = 0$

从上述例子可发现，投标者 1 号将出价从 245 提升至 250，分配函数值由 1 降至 0，不符合单调非减性，结论得证.

**[Question 2]**

**[证明]:** 不失一般性，背包大小记为 $W$，有 $n$ 个投标者，对于投标者 $i(i = 1, \ldots, n)$ 均有一个出价权重 $w_i$ 和报价 $v_i$.

对于投标者 $i$, 如果他的权重 $w_i > W$，显然他永远不会中标，因此可得 $x_i(v_i, v_{-i}) = 0, v_i \in [0, +\infty)$, 符合单调非减性.

对于投标者 $i$, 如果他的权重 $w_i \leq W$, 将包含投标者 $i$ 的最优集合记为 $M$, 不包含投标者 $i$ 的最优集合记为 $M-_i$, 可知要想投标者 i 所在的最优集合即为竞拍的最优集合需要满足:

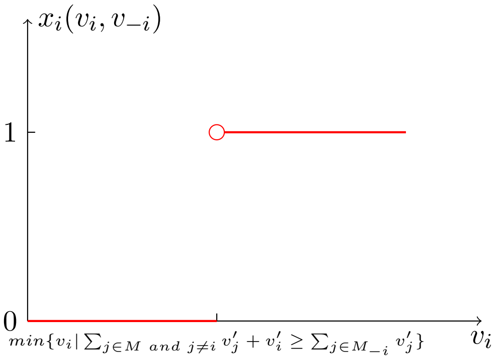
$$\sum_{j \in M\ and\ j \neq i} v_j' + v_i' \geq \sum_{j \in M_{-i}} v_j' \tag{1}$$

由于 Question2 中 $V$ 是固定值，近似算法 $v_i' = \lfloor \frac{v_i}{\frac{\epsilon V}{n}} \rfloor$ 得到的 $v_i'$ 不会随着最高报价的变化而变化. 因此，(1) 式中 $\sum_{j \in M\ and\ j \neq i} v_j'$ 和 $\sum_{j \in M_{-i}} v_j'$ 都不会因为 $v_i$ 的变化而有所改变，即对于投标者 $i$ 来说 $\sum_{j \in M_{-i}} v_j' - \sum_{j \in M\ and\ j \neq i} v_j'$ 是个固定值.

因此, 分配函数为: (由于取等时如何抉择最优集合，不影响分配函数的单调性，我们先统一将取等时的分配函数值取为 0)

当 $v_i \leq min\{v_i | \sum_{j\in M\ and\ j\neq i} v'_j + v'_i \geq \sum_{j\in M_{-i}} v'_j\}$，有 $x_i(v_i, v_{-i}) = 0$;

当 $v_i > min\{v_i | \sum_{j\in M\ and\ j\neq i} v'_j + v'_i \geq \sum_{j\in M_{-i}} v'_j\}$，有 $x_i(v_i, v_{-i}) = 1$.




显然，此时 $x_i(v_i, v_{-i})$ 符合单调非减性.

综上，当 $V$ 是一个固定值，近似算法得到的分配函数单调性得证.