博弈论第八讲

授课时间: 2021年11月5日 授课教师: 张家琳 记录人: 赵天一 刘小煜

1 多参数设置的收益最大化机制

例 1 一个买家，两件（不同的）物品，假设分布F1和F2是两项（独立）私有的分布。

(1) Pr(v=1)=1/2,Pr(v=2)=1/2

(2) Pr(v=0)=1/3,Pr(v=1)=1/3,Pr(v=2)=1/3

(3) Pr(v=0)=1/6,Pr(v=1)=1/2,Pr(v=2)=1/3

解 (1) $P_r(v=1)=1/2$，$P_r(v=2)=1/2$

- 方案1：将两个物体分开拍卖，此时以A物体为例，只有当售价不超过物体的value，物体才会拍卖成功：
  若定价为1，则$E(revenue)=price*P_r(V_A\geq 1)=1*(1/2+1/2)=1$
  若定价为2，则$E(revenue)=price*P_r(V_A\geq 2)=2*(1/2)=1$

- 方案2：将两个物体打包拍卖，只有当售价不超过两个物体的value之和时，物体才会拍卖成功：
  若定价为3，则$E(revenue)=price*P_r(V_A+V_B\geq 3)=3*(1-1/2*1/2)=9/4$

(2) $P_r(v=0)=1/3$，$P_r(v=1)=1/3$，$P_r(v=2)=1/3$

- 方案1：将两个物体分开拍卖，此时以A物体为例，只有当售价不超过物体的value，物体才会拍卖成功：
  若定价为1，则$E(revenue)=2*2/3=4/3$

- 方案2：将两个物体打包卖，当售价不超过两个物体的value之和时，物体才会拍卖成功
  显然最优价格为2，则$E(revenue)=2*P_r(V_A+V_B\geq)=4/3$

- 方案3（第二个半价）：单独购买一个的价格为2，两个都购买总价为3
  $E(revenue)=2*2/9+3*3/9=13/9>4/3$

(3) $P_r(v=0)=1/6$，$P_r(v=1)=1/2$，$P_r(v=2)=1/3$

假设有这样的一种购买机制，顾客有以下四种购买方案

1.什么都不买，价格为0

2.采取抽奖的方式，价格为1，抽奖获得A的概率是1/2

3.采取抽奖的方式，价格为1，抽奖获得B的概率是1/2

4.出价为4，获得A和B

$E(revenue)\approx 3.389$

抽奖机制和固定价格为2的对比

V_A	lottery	fixed price
1	x	x
2	✓	✓
4	✓	✓

$$E_{lottery}(revenue) = 1/2 * (2-1) + 1/3 * (4-1) = 3/2$$
$$E_{fixed}(revenue) = 1/2 * (2-2) + 1/3 * (4-2) = 2/3$$

2 无金钱的投票机制

例 2 有m个候选人进行选举，每个选举人上报对于候选人的全序关系，设计投票机制确定m位候选人的次序

解 当m=2时，有一个简单的机制(majority vote)，即按照多数选举人上报的序关系确定顺序，显然这个机制是诚实的。而当m＞2时，投票机制的设计就会比较困难，考虑以下的两种想法。

- 对每一对候选人，按照多数选举人对两人的顺序确定排序，进而可以得到所有候选人的全序关系
  但是该机制在部分情况下是不可行的，例如三位选举人投票决定A，B，C三位候选人的次序关系，三人的序关系如为：$A \prec B \prec C$，$B \prec C \prec A$，$C \prec A \prec B$
  其中$A \prec B$表示A好于B,那么候选人两两之间的序关系会被确定为$A \prec B$，$B \prec C$，$C \prec A$，显然无法构成三个人的全序关系。
  此外假设有一个选举人的心理排序是$C \prec B \prec A$，但是他通过一些途径得知大多数人认为$A \prec B \prec C$或者$B \prec A \prec C$，此时他首选C显然不能使C当选，而除了C外他希望B而非A当选，那么他就会把B而不是C排在首位。因此这个机制是不诚实的。

- 每个人投票给自己最喜欢的候选者，如果只有两个候选人A，B实际就是majority vote。假设有三个候选人A，B，C，全部选举人中9人$A \prec B \prec C$,10人$B \prec A \prec C$,5人$C \prec A \prec B$，如果是诚实的，那么B将赢得投票，5人的情况中他们从某些途径听说C不可能当选，就有可能将投给C的票投给A（不喜欢B），那么A将赢得投票

- n个候选人，选举人对全部候选人打分，依次为n-1,n-2,⋯,0
  $n=2$时，打分1,0，即majority vote，这种理论上是一种诚实的机制但是现实中可能存在作弊的方式。例如：5个人给A,B投票，其中3人$A \prec B$,两人$B \prec A$，这种情况A获胜，但是B为作弊引入了C，并且3人$A \prec B \prec C$,2人$B \prec A \prec C$，假如诚实投票，A得8分，B得7分，最终A当选。但如果另外两人改为$B \prec C \prec A$就会导致A得到6分，B得7分，B当选。

3 阿罗不可能定理

一个合理的投票机制应当满足以下性质:

1. **帕累托条件(一致性条件,unanimity):** 若对于所有的任意的Voter i, 都有a$\prec_i$b，,那么在投票结果中a$\prec$b

2.**独立性条件(independence of irrelevant alternatives,IIA):**任选两个候选人$\{a,b\}, \forall i, a \prec_i$b,或b$\prec_i$a不变,那么投票结果中的a,b顺序不变.
3.**没有独裁者(non-dictatorship):**即不存在一个投票人i,使投票结果总是等于i的排序,即只要 $x \prec_i y$，则 $x \prec y$

定义 1 (**阿罗不可能定理**). *当候选人大于2人时,不存在非独裁的投票规则 F 能同时满足帕累托条件和独立性条件*

符号约定:

- S：候选人的集合
- L：A上的全序关系
- F：$L^n \to L$ social welfare function 即阿罗投票机制
- $\prec_L$：是全序关系L所对应的二元序关系。
- $\prec_i$：是投票者i的选票结果
- $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{(\cdot)}$：是所有投票者的一次投票
- $\mathbb{Q}_i, \mathbb{Q}_i^{(\cdot)}$：是在一次投票 $\mathbb{Q}_i, \mathbb{Q}_i^{(\cdot)}$中第$i$个投票者的选票结果
- F($\mathbb{Q}$)：表示在投票机制F下投票$\mathbb{Q}$的结果

证明思路:给定任意满足前两个条件的机制F，投票$\mathbb{Q}$以及候选人 S，我们将从中找出一位潜在独裁者（potential dictator）具体步骤如下：
1.对于一个投票Q按照一定的规则构造n+1个投票，规则如下：对于$1 \le i \le n$对于投票$P^{(i)}$,$j \le i$有$X \prec_{P_j^{(i)}}$ Else ；对于$j > i$有$Else \prec_{P_j^{(i)}} X$。
2.我们证明了，在 $F(\mathbb{P}^{(0)})$，$F(\mathbb{P}^{(1)})\cdots\cdots F(\mathbb{P}^{(n)})$中,X在选举结果中要么排在最前要么排在最后。令 i 为最小的使得 X 在 $F(\mathbb{P}^{(i)})$ 中选举结果排在最后的序号，根据F的一致性，易知这样的 i 存在，且 i ¿ 0，称,则选举人 i 为潜在独裁者。
3.我们又先证明了，对于任意的投票$\mathbb{Q}$和$A, B \neq X$，如果，$A \prec_{Q_i} B$,则$A \prec_{F(Q)} B$
4.我们再又证明了，对于任意的投票$\mathbb{Q}$和$A \neq X$，如果，$A \prec_{Q_i} X$,则$A \prec_{F(Q)} X$。
所以最后得到$\mathbb{Q}_i = F(\mathbb{Q})$

step 1 [**命题1：**]如果 X 在投票 O 的每一张选票中要么排名第一，要么排在最后，则 X 在 F(O) 中要么排在第一，要么排在最后。

证明 利用反证法，假设存在$A, B \in S$,使得$A \prec_{F(\mathbb{O})} X \prec_{F(\mathbb{O})} B$，那么对于$\forall O_i$,将B置于A之前，其他的次序关系不变构造的一次投票$\mathbb{R}$，如表3。

$\mathbb{O}$	$\mathbb{R}$
$3 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 5$	$3 \prec 1 \prec 2 \prec 4 \prec 5$
$1 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 5$	$1 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 5$
$5 \prec 2 \prec 4 \prec 1 \prec 3$	$5 \prec 1 \prec 2 \prec 4 \prec 3$
$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$	$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$
$5 \prec 3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$	$5 \prec 3 \prec 1 \prec 2 \prec 4$

表 1: A=2,B=1,X=5

在R这个投票中由于只改变了A,B的次序关系，对于A和X，投票R中的次序关系与O中一致，所以由独立性条件可得$A \prec_{F(\mathbb{R})} X$；对于B和X，投票R中的次序关系与O中一致，所以由独立性条件可得$X \prec_{F(\mathbb{R})} B$，所以有$A \prec_{F(\mathbb{R})} X \prec_{F(\mathbb{R})} B$,然而在R中的所有选票中，$B \prec_i A$,所以由帕累托条件得$B \prec_{F(R)} A$，矛盾!，所以假设不成立，证毕。

□

step 2 [**构造特殊投票：**] 对于任意投票$\mathbb{Q}$如表1,由于我们只关注其中A,B两个候选人的次序，由帕累托条件可知，改变其他候选人的次序并不影响A,B两人选举结果的排名顺序，所以我们不妨改变$X = 5$的次序如表2所示

$\mathbb{Q}$
$3 \prec 2 \prec 5 \prec 1 \prec 4$
$1 \prec 5 \prec 4 \prec 3 \prec 2$
$5 \prec 2 \prec 4 \prec 1 \prec 3$
$4 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 5$
$3 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec 1$

表 2: 任意的一个投票$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^{(0)}$	$\mathbb{Q}^{(1)}$	$\cdots$	$\mathbb{Q}^{(5)}$
$5 \prec 3 \prec 2 \prec 1 \prec 4$	$3 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 5$	$\cdots$	$3 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 5$
$5 \prec 1 \prec 4 \prec 3 \prec 2$	$5 \prec 1 \prec 4 \prec 3 \prec 2$	$\cdots$	$1 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 5$
$5 \prec 2 \prec 4 \prec 1 \prec 3$	$5 \prec 2 \prec 4 \prec 1 \prec 3$	$\cdots$	$2 \prec 4 \prec 1 \prec 3 \prec 5$
$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$	$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$	$\cdots$	$4 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec 5$
$5 \prec 3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$	$5 \prec 3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$	$\cdots$	$3 \prec 2 \prec 4 \prec 1 \prec 5$

表 3: 对X=5进行次序变换

设i 为最小的使得 X 在 $F(\mathbb{Q}^{(i)})$ 中选举结果排在最后的序号，根据F的一致性，易知这样的 i 存在，且 i ¿ 0，称,则选举人 i 为潜在独裁者。

step 3 &step 4:证明i是独裁者

step 3 [**命题2：**]对于任意投票 Q 和候选人 $A, B \neq X$，如果 $A \prec_{Q_i} B$ 则 $A \prec_{F(Q)} B$

证明 不妨设$A \prec_{Q_i} B$根据step2中所构造的投票Q^{i-1}和$Q^{(i)}$,构造如表4的投票R，在R_i中A,B,X为最后三名,次序为$A \prec_R X \prec_R B$,其余的候选人次序与Q_i相同。

$\mathbb{Q}^{(i-1)}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}^{(i)}$
$3 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 5$	$3 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 5$	$3 \prec 2 \prec 1 \prec 4 \prec 5$
$1 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 5$	$1 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 5$	$1 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 5$
$5 \prec 2 \prec 4 \prec 1 \prec 3$	$4 \prec 3 \prec 2 \prec 5 \prec 1$	$2 \prec 4 \prec 1 \prec 3 \prec 5$
$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$	$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$	$5 \prec 4 \prec 1 \prec 2 \prec 3$
$5 \prec 3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$	$5 \prec 3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$	$5 \prec 3 \prec 2 \prec 4 \prec 1$

表 4: 根据$Q^{(i)}R$,其中A=2,B=1,X=5

在R这个投票中，B和X的次序与$Q^{(i-1)}$完全相同，所以显然选举结果也相同，即$X \prec_{F(R)} B$,同理，A和X的次序与$Q^{(i)}$完全相同，所以显然选举结果也相同，即$A \prec_{F(R)} X$ 所以在R这个投票下有：$A \prec_{F(R)} X \prec_{F(R)} B$,又因为A,B≠X,其余次序R与Q完全一致，所以有$A \prec_{F(Q)} B$，证毕!

□

step 4 [**命题3：**]对于任意的投票$\mathbb{Q}$和$A \neq X$，如果，$A \prec_{Q_i} X$,则$A \prec_{F(Q)} X$.

证明

对于任意的$W \neq X$,由命题2可知一定存在一个独裁者j,我们断言$j = i$

反证法，假设$j \neq i$ ，不妨设$j < i$，回顾step2中的构造有，对于任意$k < i$,X均在$F(Q^{(k)})$中排名第一，因此有$X \prec_{F(Q^{(J)})} W$,但是根据定义有$W \prec_{Q^{(j)}}$W,矛盾!,所以断言得证!!

注：本次课老师没有讲完这个证明，step4的证明见 lecture_note 9.

□