博弈论第三次作业

完成人: Aries

[Title1]: Give an example to illustrate that Generalized second-price auction is not truthful.

[答]: 假设有 3 个广告位以及 5 个广告主进行拍卖，3 个广告位的点击率分别是 $0.3, 0.2, 0.1$. 每个广告主 i 最多拍得其中一个广告位，每个广告主 i 相对应地对每一次点击都有一个估值 v_i 和一个出价 b_i，其中 $v_1 = 500, v_2 = 400, v_3 = 300, v_4 = 200, v_5 = 100$，令 $x(b)$ 表示分配规则，对于 $i = 1, 2, ..., 3$，将点击率第 i 高的广告位分配给出价第 i 高的广告主，对于 $i = 4, 5$，分配函数值为 0，支付规则按照 GSP 机制，出价第 i 高的成功竞拍者需要支付第 $i+1$ 高报价的数额.

现证明该例子下的 GSP 机制不是 truthful 的

[证明] 对于广告主 1 号，假设其他 4 位广告主均是诚实的，即满足 $b_i = v_i$. 此时有 $b_2 = 400, b_3 = 300, b_4 = 200, b_5 = 100$.

若 $b_1 = v_1 = 500$ 时，广告主 1 号中拍点击率为 0.3 的广告位，收益是 $0.3 \times (v_1 - b_2) = 30$; 若 $300 < b_1 < 400$ 时，广告主 1 号中拍点击率为 0.2 的广告位，收益是 $0.2 \times (v_1 - b_3) = 40$.

显然此时广告主 1 号出价满足 $300 < b_1 < 400$ 比出价 $b_1 = v_1 = 500$ 时获益更多，因此从该例可看出 GSP 机制不是 truful 的.

[Title2]: Compute the payment function for the following allocation function according to Myerson's lemma.

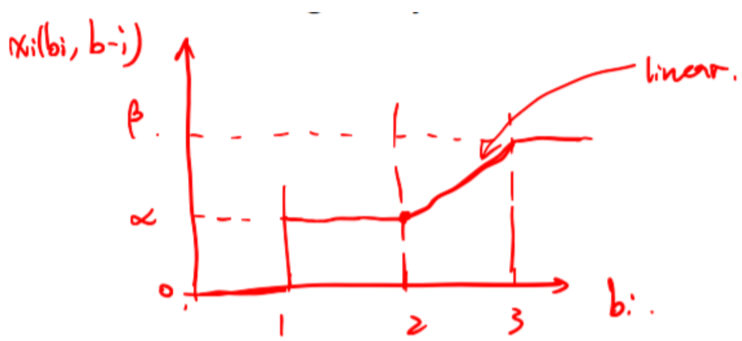

图 1: allocation function

[答]:

由分配函数 $x_i(b_i, b{-}i)$ 图像可知，函数在 [0,2] 是分段常函数，由分段常函数的迈尔森引理公式 $p_i(b_i, b_{-i}) = \sum_{j=1}^{l} z_j[x_i(\cdot, b_{-i})$ 在 z_j 处的变化] 可得：

当 $0 \le b_i \le 2$ 时，

$$p_i(b_i, b_{-i}) = \begin{cases} 0 & 0 \le b_i \le 1 \\ \alpha & 1 < b_i \le 2 \end{cases} \tag{1}$$

由分配函数 $x_i(b_i, b{-}i)$ 图像可知，函数在 [2,3] 是连续函数，由连续函数的迈尔森引理公式 $p_i(b_i, b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z, b_{-i}) dz$ 可得：

当 $2 < b_i \le 3$ 时，

$$p_i(b_i, b_{-i}) = p_i(2, b_{-i}) + \int_2^{b_i} z \cdot (\beta - \alpha) dz = (\beta - \alpha) \cdot \frac{b_i^2}{2} + 3\alpha - 2\beta \quad 2 < b_i \leq 3$$

由分配函数 $x_i(b_i, b-i)$ 图像可知，函数在 [3,+∞] 又变为常函数，由迈尔斯引理公式可得：
当 $b_i > 3$ 时

$$p_i(b_i, b_{-i}) = p_i(3, b_{-i}) = \frac{5}{2}\beta - \frac{3}{2}\alpha \quad b_i > 3$$

综上，支付函数为:

$$p_i(b_i, b_{-i}) = \begin{cases} 0 & 0 \leq b_i \leq 1 \\ \alpha & 1 < b_i \leq 2 \\ (\beta - \alpha) \cdot \frac{b_i^2}{2} + 3\alpha - 2\beta & 2 < b_i \leq 3 \\ \frac{5}{2}\beta - \frac{3}{2}\alpha & b_i > 3 \end{cases} \tag{2}$$