博弈论第十二讲

授课时间: 2021年12月3日　授课教师: 张家琳　记录人: 高宇臬　冯赫天

1 最优应对算法

在自由市场中，每一个参与者都会改进策略，以求在当前局面下最优化自身的收益，总体的策略局面也不断演化。**最优应对算法（best reponse algorithm）**就是这种演化的抽象。

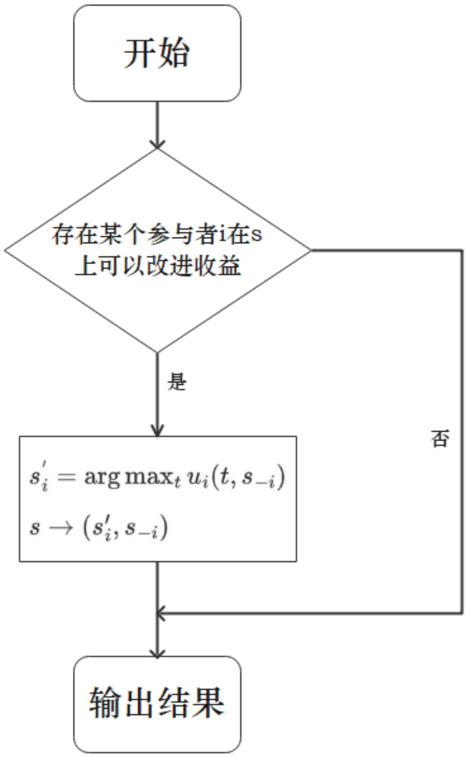

图 1: 最优应对算法示意图

显然，最优应对算法停止当且仅当达到一个纯策略纳什均衡，因此博弈存在纯策略纳什均衡是该算法停止的必要（而非充分）条件。而对于势博弈，假设参与者的目标是最小化代价，那么在每次迭代中，某个参与者选择最优应对，势函数都会单调下降，因此在策略空间有限的博弈中算法总会停止，此时的策略局面即为纯策略纳什均衡。但是我们还关心算法终止达到均衡的速度。

我们考虑利用最优应对算法解决拥塞博弈问题：由于参与者的策略选择的资源数目可能不为1，此时参与者的策略集合为全集$2^{[m]}$，每个参与者的可选策略有2^{nm}种，最坏情况下算法可能需要迭代多轮才能结束。所以我们只考虑 单拥塞博弈（singleton congestion game）：每个参与者i的策略集合$S_i \subseteq ([m])$且$|S_i| = 1$，即只包含大小为1的集合。

定理 1 (单拥塞博弈中最优应对算法的时间复杂度). *对于参与者数目为n，资源数目为m的单拥塞博弈，最优应对算法的时间复杂度为$O(n^2m)$。*

证明　对于单拥塞博弈，策略局面有m^n个，但任何参与者i在任意局面s下的收益总能表示为单个延迟函数的值：$c_i(s) = d_r(N_r(s))$。而且最优应对算法的运行只受$d_r(x)$相对大小而非具体数值影响。

因此我们修改原有的延迟函数为$\hat{d}_1, \hat{d}_2, ..., \hat{d}_n$，使其值域为$[1, nm]$，且满足对于任意$r \in [m]$，$x, y \in [n]$，$\hat{d}_r(x)$和$\hat{d}_r(y)$的相对大小关系与$d_r(x)$和$d_r(y)$相同。

此时考虑如下定义的函数f，对于任意$s \in S$：

$$f(s) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_r(s)} \hat{d}_r(k)$$

容易验证f为新的延迟函数对应的势函数。f有上界

$$f(s) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_r(s)} \hat{d}_r(k) \leq \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_r(s)} nm = nm \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_r(s)} 1 = nm \sum_{r=1}^{m} N_r(s) = n^2 m$$

因为最优应对策略每一轮最少使势函数减小1，因此最多迭代$n^2 m$轮。 □

2 相关均衡

相关均衡指的是在一个策略组合的集合上的概率分布σ。分布σ构成相关均衡的条件是，在按照σ随机抽取行动组合推荐给参与人时，每个参与人在接收到行动推荐后，给定根据σ计算出的对方收到的行动推荐的条件概率并假定对方会服从，那么他的最优选择就是服从推荐。形式化定义如下：

定义 2 (相关均衡). *在 n 参与者，收益函数为 $u_1, u_2, \ldots, u_n$，策略集合为 $S_1, S_2, \ldots, S_n$的博弈中，称满足如下条件的，策略局面集合 $S_1 \times S_2 \times S_n$ 上的分布 σ为相关均衡：对于所有参与者 i 和策略 s_i , $s_i' \in S_i$*

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \sigma}[u_i(s_i, s_{-i})|s_i] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \sigma}[u_i(s_i^{'}, s_{-i})|s_i]$$

对于两个参与者博弈的相关均衡，σ可以由下面的表格刻画：

	F	B
F	a	b
B	c	d

图 2: 双参与者相关均衡

以右上角的值为例，这个概率分布会以概率b抽取行动组合(F, B)，将F推荐给第一个参与人，B推荐给第二个参与人。当第一个参与人收到推荐F的时候，可以通过条件概率估计对方以概率$\frac{a}{a+b}$收到了推荐F，以概率$\frac{b}{a+b}$收到了推荐B。

相关均衡中，只要其他人服从均衡指定的推荐，那么自己服从推荐就是最优的。相关均衡是比混合策略纳什均衡更一般的概念，因为每个参与人自己得到的推荐和其他人的推荐可以是相关的，而在纳什均衡里，每个参与人的策略都是独立的。

例 1 　十字路口博弈

解

一个无交通信号灯的十字路口驶来两辆车，两辆车此时都有STOP/GO两种策略，收益矩阵如下：

	STOP	GO
STOP	0 0	1 0
GO	0 1	-5 -5

图 3: 十字路口博弈

对于此博弈，我们可以计算出纯策略纳什均衡为：（STOP,GO）和(GO,STOP)
同时，我们易求出混合策略纳什均衡为$(\frac{5}{6},\frac{1}{6})$，$(\frac{5}{6},\frac{1}{6})$
同时我们能验证存在相关均衡，其矩阵形式如下所示：

	STOP	GO
STOP	0	1/2
GO	1/2	0

图 4: 相关均衡矩阵

此时上表给出的（STOP，GO），（GO，STOP）无法由任何乘积表示，易看出在该分布下，策略是高度相关的。

3 粗相关均衡

定义 3 (粗相关均衡). 在 n 参与者，收益函数为 $u_1, u_2, \ldots, u_n$，策略集合为 $S_1, S_2, \ldots, S_n$的博弈中，称满足如下条件的，策略局面集合 $S_1 \times S_2 \ldots \times S_n$ 上的分布 σ为粗相关均衡：对于所有参与者 i 和其单方面改变的策略 $s'_i \in S_i$

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\sigma}[u_i(s)] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\sigma}[u_i(s'_i, s_{-i})]$$

粗相关均衡可以理解为在相关均衡的基础上，参与者选择策略时不允许参考谕示信息。就好比聘请了一个理财顾问，每年都会给你规划资产配置的方案，此时，你既可以看过方案之后决定听从建议（相关均衡），又可以没看方案就决定听从建议（粗相关均衡）。

4 路径选择问题(CE VS CCE)

【问题描述】

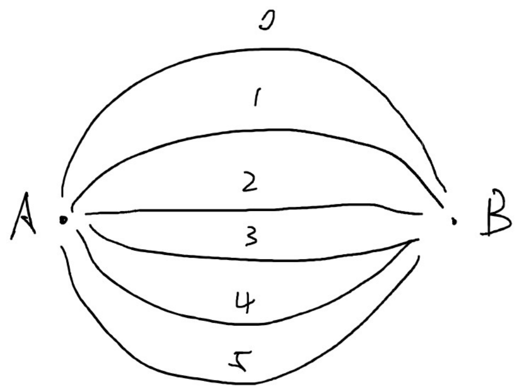

图 5: Example of singleton congestion game

现有四名参与者$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$和六条路径$\{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$，每条路径的延迟函数为$d_r(x) = x$，即选择每条路径的延迟与选择这条路径的人数成正比。

解

例一:

我们已知该博弈的**纯策略纳什均衡**(PNE)是当且仅当$i \neq j$时，$s_i \cap s_j = \emptyset$，即每个人个选择一个不同的道路。

混合策略均衡(MNE)为$(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$，即每个人以相等的概率选取每一条路径。

同时还存在着**相关均衡**(CE)：两个人选择同一条路径，另外两个人各选择一条不同的路径，如{0,0,1,2}，{2,1,3,3}等，σ是所有这些情况的均匀分布。下面证明其为（CE）：

假设参与者1收到第三方的建议选择0策略，我们需要比较参与者1选择策略0的期望代价和选择其他策略的期望代价。

1.首先计算选择策略0的期望代价

case 1：其他参与者没有选择策略0，例如4个参与者的选择为(0,1,1,2),(0,1,3,3)的情况，剩下三个玩家中有两个人选择相同，另一人选择与他们都不同，符合这种情况的策略向量的个数为$C_3^1 \times A_5^2 = 60$，此时参与者1的**代价(cost)**为1。

case 2：其他玩家有一个选择策略0，符合这种情况的策略向量的个数为$C_3^1 \times A_5^2 = 60$ ，此时参与者1的**代价(cost)**为2。

综合**case1,2**得到代价的期望为$\frac{60}{60+60} \times 1 + \frac{60}{60+60} \times 2 = \frac{3}{2}$

2.计算在此分布下选择其他策略的期望收益，易知无论选择其他的那个策略，情况都是相同的，所以我们不妨假设参与人1从建议的决策0改选1。

case 1：其他的三个玩家中出现一次0，一次1，符合这种情况的策略向量个数为$C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1 = 24$，**代价(cost)**为2，

case 2：其他三个玩家中出现一次1，没有玩家选择策略0，此时另外两个应该相同，符合这种情况的策略向量个数为$C_3^1 \times C_4^1 = 12$，此时**代价(cost)**为2。

case 3：其他三个玩家中出现两次1，没有玩家选择策略0，选取策略1的两个参与者有3种情况，其他的人有3种，符合这种情况的策略向量个数为$C_3^2 \times C_4^1 = 12$，此时**代价(cost)**为3。

case 4：其他三个玩家没有选择0，1选项，选择相同的两个组合有三种，之前选择1的有三种，符合这种情况的策略向量个数为$C_3^2 \times A_4^2 = 36$种，**代价(cost)**为1。

case 5：其他三个玩家中没有出现1，出现一次0，符合这种情况的策略向量个数为$C_3^1 \times A_4^2 = 36$，**代价(cost)**为1。

故期望收益为

$$\frac{12}{24+36+12+12+36} \times 3 + \frac{24+12}{24+36+12+12+36} \times 2 + \frac{36+36}{24+36+12+12+36} \times 1 = \frac{3}{2}$$

由此可见，在其他玩家服从行动推荐的前提下，不存在更优的选择，**该分布是相关均衡(CE)的**。

例二:

下面我们证明满足CCE的分布不一定满足CE：在上述例子的情况(两个人选同一条路径，另两个选两条不同路径)下，我们加以限制，使参与者从{0,2,4}或{1,3,5}中选择，我们可以证明此时的分布σ'是CCE的而不是CE的。

在粗相关均衡的定义之下，玩家1完全按σ'来执行策略，而σ'是一个均匀分布，因此我们只需要计算满足σ'给定条件的所有策略向量对应的代价即可。进一步细化，我们只需要讨论两种情况：玩家1单独选择一种策略，或是玩家1与一个其他玩家的策略相同。

1.证明其为CCE的

case 1：当参与者1单独选择一种策略时，此时的代价为1。其有三种策略可以选择，剩下的3个参与者分为两组，分别选择剩下2种策略，因此总共的策略向量数为

$$3 \times C_3^2 \times 2 = 18$$

case 2当玩家1与一个其他玩家策略相同时，此时的代价为2.先从剩下3个玩家中选择一个与个与玩家1策略相同，这两个玩家有3种策略可以选择。随后剩下的两个玩家策略必须不同，因此总共的策略向量数为

$$C_3^1 \times 3 \times 2 = 18$$

综合上述两种情况，玩家按照σ'执行策略的期望代价为

$$\frac{18}{18+18} \times 1 + \frac{18}{18+18} \times 2 = \frac{3}{2}$$

2.接下来我们证明该策略是CCE的，即不存在纯策略使其优于分布下的策略。我们假设，玩家1不按照σ'来选择策略，而是固定地选择某个策略（不妨设这个策略为策略 0），其他玩家仍然按照σ'选择策略。

case 1：其他3个玩家中，没有玩家选择策略0，此时的代价为1。由于策略总数只有3个，因此其他的3个玩家中一定会有两个玩家策略相同。此时有两种可能性：其他玩家的策略集合是{0,2,4}或{1,3,5}。若其他玩家的策略集合是{0,2,4}，且倘若此时玩家1仍然遵循σ'的要求，则其只能选择策略0。若其他玩家的策略集合是{1,3,5} ，且倘若此时玩家1仍然遵循σ'的要求，则玩家1可以任意选择策略。这种情况下的策略总数应该和上面分析的{0,2,4}的情况相同，即36种。因此，总共的策略向量数有

$$C_3^2 \times 2 + 36 = 42$$

case 2：其他3个玩家中，有一个玩家选择策略0，此时的代价为2。可以进行分类讨论：剩下3个玩家中是否有两个玩家选择的策略相同。若没有两个玩家选择的策略相同，那么就是把0, 2, 4三种策

略在这3个玩家中进行排列，有3!=6种策略向量。注意，倘若此时玩家1仍然遵循σ'的要求，其可以选择策略中的任意一种。因此，此时的策略向量数有

$$3! \times 3 = 18$$

若有两个玩家选择的策略相同，那么把其他3个玩家分成2组，其中一组选择一种不是0的策略，另一组选择另一个策略。倘若此时玩家1仍然遵循σ'的要求，玩家1只能选择剩下的那个策略，因此，此时的策略向量数有

$$C_3^2 \times 2 = 6$$

case 3：其他3个玩家中，有两个玩家选择策略0，此时的代价为3。把其他3个玩家分成2组，其中一组选择策略0，另一组选择另一个策略。倘若此时玩家1仍然遵循σ'的要求，玩家1只能选择剩下的那个策略。因此，此时的策略向量数有

$$C_3^2 \times 2 = 6$$

因此，玩家1始终执行策略0的期望代价为

$$\frac{42}{42+18+6+6} \times 1 + \frac{18+6}{42+18+6+6} \times 2 + \frac{6}{42+18+6+6} \times 3 = \frac{3}{2}$$

根据对称性，玩家1始终执行其他纯策略的期望代价也相同。因此，我们得到了玩家1不按照σ执行策略的期望代价。

2.证明不是CE

现在我们证明σ'不是相关均衡：现在第三方建议玩家1执行策略0，我们分别计算玩家1执行策略0和不执行策略0的期望代价。

首先计算玩家1执行策略0的情形。这种情况与前面策略集合为{0,1,2,3,4,5}的情况完全相同，结果也相同，期望代价应该也是$\frac{3}{2}$。

现在我们考虑玩家1不执行策略0的情形。在第三方建议玩家1执行策略0时，玩家1就可以知道，此时其他玩家执行的策略只能是{0,2,4}中的其中一个。这样，玩家1只需要选择{1,3,5}中的任意一个策略，就能稳定地保证自己的代价为1。同样，对于第三方建议玩家1执行其他策略的情况也相同。换句话说，玩家1只要不按照第三方给定的建议执行策略，期望代价就是1。

由于$\frac{3}{2} > 1$，即执行第三方给定的建议并不能使得结果变得更好，因此并不是一个相关均衡。

根据这里我们可以看出**粗关联均衡**(CCE)和**关联均衡**(CE)的区别:CE中局中人可以根据自己得到的建议去揣测当自己做出策略s_i时其他人做出的对策，而CCE中因为她不知道自己在策略空间上的概率分布所以他只能用自己的纯策略去检验；CE中局中人试图检验的是“是否听从第三方的建议”，CCE中则是“是否接受第三方给出的局势空间S上的概率分布σ”。