博弈论第十一讲

授课时间: 2021 年 11 月 26 日　授课教师: 张家琳　　记录人: 吴凌轩　王柏森

1 纳什均衡

先补充上节课的纳什均衡求解的剩余部分，根据一个简单例子给出一种纳什均衡通用的解法。

例 1　假设 Alice 有 n 个动作，Bob 有 m 个动作；对应的分布分别为 $p = (p_1, \ldots, p_n)$，$q = (q_1, \ldots, q_n)$。计算其混合策略纳什均衡。

先给出一个求解中需要反复提到的数学概念的定义。

定义 1 (支撑集 (Support Set)). *混合策略的支撑集是该混合策略中概率大于 0 的纯策略的集合。*

解

1. 猜测支撑集。

   设 Alice、Bob 的支撑集分别为 S_A、S_B。

2. 由于 Alice 的混合策略 p 相对于 Bob 的混合策略 q 而言是最佳响应 (Best Response)。根据上节课内容，支撑集中每个动作的收益一致。设 Alice、Bob 的收益函数分别为 A 、B，则对 Alice 存在一个常数 C_A 使得：

$$\forall i \in S_A, \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} q_j = C_A$$

$$\forall i \notin S_A, \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} q_j \leq C_A$$

   对 Bob 同理, 存在一个常数 C_B：

$$\forall j \in S_B, \sum_{i=1}^{m} B_{i,j} p_i = C_B$$

$$\forall j \notin S_B, \sum_{i=1}^{m} B_{i,j} p_i \leq C_B$$

   其中 $A_{i,j}, B_{i,j}$ 分别表示 Alice 选择 i，Bob 选择 j 时，他们的收益。本质是一个线性规划。解空间非空，则求出了混合策略；若为空，则支撑集猜测错误。

注意：需要枚举所有的支撑集元素的可能性。否则不能求解所有的纳什均衡。同时，不应该在一开始直接默认支撑集元素就是全部动作，很可能会遗漏一些情况。

这个方法非常暴力 (Brute force)，直接按照定义进行枚举，效率很低。显然，在两人的情况下，支撑集元素的可能性有 $2^n * 2^m$ 种。因此显然不是多项式时间算法。我们希望能找到多项式算法求纳什均衡，但现在求解纳什均衡是 PPAD 问题，仍未找到多项式时间算法，但它不是 $\mathcal{NP}-hard$ 问题。当然，现在的纳什均衡难以计算，那么市场自然也很难达到稳定状态。

当然我们也可以使用 Lemke-Howson 算法，思路是不去暴力枚举，而是根据当前的结果来有策略地更换支撑集元素。

2 最优应对算法

最优应对算法 (Best Response) 流程如下：

1. 如果当前状态 s ，存在至少一名参与者可以严格改善其收益，则转 2，否则终止算法。
2. 选择能改善收益的一位参与者，记为 i。
3. 将参与者 i 的状态转换为其最优应对 $s' = (s_i', s_{-i})$，其中 s_i' 是对参与者 i 在状态 s 的最优应对。
4. 以状态 s' 回到步骤 1

该算法的性质有：

- 不总是终止
- 如果终止，则一定终止在纯策略纳什均衡。

第一个性质在作业中已经出现，而第二个性质是由该算法终止条件与纯策略纳什均衡定义一致而得到的。

3 势博弈 (Potential Game)

定义 2 (势博弈). *若收益函数为 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，策略集合为 $S := S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ 的博弈为 Γ，存在函数 $f : S \mapsto \mathbb{R}$，对于任何策略局面 $s \in S$，任意参与者 i 的任意策略 $s_i' \in S_i$，满足*

$$u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s_i', s_{-i}) = f(s_i, s_{-i}) - f(s_i', s_{-i})$$

则称 Γ 为势博弈。

内涵 *在势博弈中，参与者的收益可以由势函数 $f(\cdot)$ 表示：任何参与者单方面改变策略所带来的收益变化与势函数的改变相同。*

例 2 收益矩阵如下的双人博弈是势博弈。

A \ B		
	1 2	0 0
	0 0	2 1

图 1: 势博弈实例

定义函数 $f : \{0, 1\}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ，其中 $f(0, 0) = 2, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 0, f(1, 1) = 2$，如下图所示，易验证 f 为博弈的势函数。

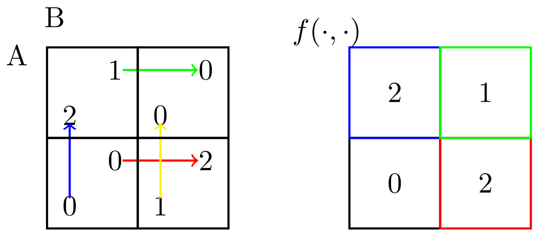

图 2: 势函数计算与验证

此例中，先定义函数的某个值（本例定义 $f(1,0)=0$），再根据定义利用不同颜色的箭头先对对应颜色的函数进行定义，再验证黄色箭头是否正确即可。

4 拥塞博弈 (Congestion Game)

拥塞博弈 (*Rosenthal, 1973*) 描述了一类常见的场景：参与者需要使用一些资源，而使用每种资源的代价取决于这项资源被多少个人使用了。例如，网络中的路由节点负载越高，延迟就越大；市场中的商品需求越大，价格就越高。拥塞博弈的形式化定义如下：

定义 3 (拥塞博弈). 在拥塞博弈中，有 n 个参与者和 m 项资源，第 i 个参与者的策略集合 $S_i \subseteq s^{[m]}$ 表示 i 可以选择的资源组合， $d_1, d_2, \cdots, d_m : [n] \to \mathbb{R}$ 为博弈的延迟函数 *(delay function)*，其中 $d_r(x)$ 表示当 x 个参与者选择资源 r 时，选择 r 的参与者为此付出的代价。定义 $N_r(s)$ 为在策略局面 s 下，选择资源 r 的参与者数。每个参与者 i 的目标均为最小化代价函数 $c_i(s)=\sum_{r\in s_i} d_r(N_r(x))$。

例 3 (路径选择问题)

在如下有向图上定义 n 参与者的路径选择问题，其中延迟函数定义为:

$$d_{s\to v_1}(x)=x/n,\quad d_{s\to v_2}(x)=1,\quad d_{v_1\to t}(x)=1,\quad d_{v_2\to t}(x)=x/n$$

所有参与者 i 的策略集均为 $S_i := \{\{s\to v_1, v_1\to t\},\{s\to v_2, v_2\to t\}\}$ ，即所有可以组成由 s 到 t 路径的极小边集。

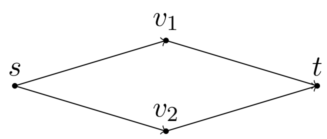

图 3: 路径选择问题的有向图

不妨假设 n 为偶数，则例 2 存在纯策略纳什均衡：令一半的参与者 $i\in[1,n/2]$ 选择 $s\to v_1\to t$，另一半 $j\in[n/2+1,n]$ 选择 $s\to v_2\to t$ ，此时任意参与者 i 的收益均为 $c_i(s)=3/2$ 。易证，s 局面下任何参与者改变策略都无法提升收益，且该局面为博弈中唯一的纯策略纳什均衡。

若在此基础上增加一条 v_1 到 v_2 的边，令其上的延迟函数 $d_{v_1\to v_2}(x)=0$，参与者的策略集合变为 $S_i=\{\{s\to v_1, v_1\to t\},\{s\to v_2, v_2\to t\},\{s\to v_1, v_1\to v_2, v_2\to t\}\}$

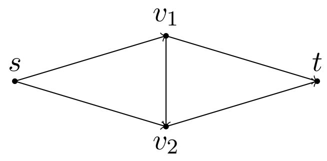

图 4: 路径选择问题的有向图

此时博弈中唯一的纯策略纳什均衡变为：所有参与者均选择 $s \to v_1, v_1 \to v_2, v_2 \to t$，而此时任意参与者 i 的收益下降到 $c_i(s) = 2$。我们在图上增加了一条“免费捷径”，但在纯策略纳什均衡局面下参与者的代价却上升了，这种现象被称为布雷斯悖论 (Braess's Paradox) 。

甚至当我们在新增的捷径边上收取一些费用时，上述现象依然存在。设 v_1 到 v_2 的边上的延迟函数为 $d_{v_1 \to v_2}(x) = x/n$，若局面 s 下选择 $s \to v_1 \to t, s \to v_1 \to v_2 \to t, s \to v_2 \to t$ 的参与者人数分别为 a, b, c，那么这三类人的代价分别为：

$$\begin{aligned} c_{s \to v_1 \to t}(s) &= \frac{a+b}{n} + 1 \\ c_{s \to v_1 \to v_2 \to t}(s) &= \frac{a+3b+c}{n} \\ c_{s \to v_2 \to t}(s) &= \frac{b+c}{n} + 1 \end{aligned}$$

显然，当某个参与者改变策略加入到其他类别之中，那么这个类别的代价一定不会下降，由此易知当这三类参与者的代价相同时 s 为纯策略纳什均衡，那么 $a = b = c = n/3$ 时 s 是纯策略纳什均衡，所有参与者的代价均为 5/3，依然大于最初的 3/2。

定理 4 (*Rosenthal, 1973*). 拥塞博弈是势博弈 [1]。

证明 对于 n 参与者 m 资源延迟函数为 $d_1, d_2, \ldots, d_m$ 且策略集合为 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ 的拥塞博弈，定义函数 $f : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(s) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{N_r(s)} d_r(k)$$

下面，我们要证明 $f(\cdot)$ 是博弈的势函数。对于任意 $i \in [n]$ 和局面 s，均有

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{r \in s_i} d_r(N_r(s)) + \sum_{r \in s_i} \sum_{k=1}^{N_r(s)-1} d_r(k) + \sum_{r \notin s_i} \sum_{k=1}^{N_r(s)} d_r(k) \\ &= c_i(s) + \sum_{r \in s_i} \sum_{k=1}^{N_r(s)-1} d_r(k) + \sum_{r \notin s_i} \sum_{k=1}^{N_r(s)} d_r(k) \\ &= c_i(s) + f(\varnothing, s_{-i}) \end{aligned}$$

因此，对于任意 $s_i' \in S_i$，显然有 $f(s_i', s_{-i}) - f(s) = c(s_i', s_{-i}) - c(s)$。

□

定理 5 (*Monderer and Shapley, 1996*)**.** 对于任何势博弈，总存在拥塞博弈，它们的势函数相同 [2]。

换言之，拥塞博弈和势博弈在某种意义上是等价的。

参考文献

[1] Robert W Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2(1):65–67, 1973.

[2] Dov Monderer and Lloyd S Shapley. Potential games. *Games and economic behavior*, 14(1):124–143, 1996.

[3] Lecture Notes on Algorithmic Game Theory, ETHZ, 2019: Lecture 1

[4] Lecture Notes on Algorithmic Game Theory, Stanford CS364A, 2013: Lecture #13, #16

[5] Algorithmic Game Theory: Chapter 18