博弈论第四讲

授课时间: 2021年10月8日 授课教师: 张家琳 记录人: 罗人杰 吴凌轩

1 多物品拍卖 (Multiple items auction)

例 1 二价拍卖（上节课内容） 特点：一个物品， n 个竞标人

定义 1 (多物品拍卖). k 个相同的物品， n 个竞标人。同时每个竞标人最多只想要一个物品，并且各自对物品有自己的估值。

- 机制： (k+1) 价拍卖，即把k个物品卖给出价最高的 k 个人，每个人支付第 (k+1) 个人的出价。
- 性质：
  1. 占优策略激励相容 (dominant-strategy incentive-compatible) 或诚实 (truthful) 的
  2. 最大化社会福利（而不是拍卖者的利益）
  3. 实用

2 赞助搜索拍卖 (Sponsored search auction)

赞助搜索拍卖主要关注当拍卖的 k 个物品变为搜索页面中的 k 个广告位时的情况，设定如下：

- 存在 k 个广告位， n 个竞标人（广告商）
- 对第 j 个广告位，其点击率为 α_j ，且 $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$
- 对第 i 个广告商，如果其赢得了第 j 个广告位并支付了 p_i ，那么其效用函数为 $v_i \cdot \alpha_j - p_i$

与多物品拍卖类似，我们希望赞助搜索拍卖达到如下目标：

1. 占优策略激励相容或诚实的
2. 最大化社会福利（而不是拍卖者的利益）
3. 实用

关于最大化社会福利的一些解释

- 与价钱没有关系，因为钱只是从买家流到了卖家手里
- 一般来说，只要物品流到了出价高的买家那里，并且机制是诚实的，那么一般就能达到最大化社会福利

3 单变量环境 (Single-Parameter Environments) 拍卖

上述两种形式的问题均可归纳为一种更加一般的形式，称为单变量环境拍卖，其特点和性质如下:

- 有n个投标人，每个人有一个私有信息 v_i ，出价为 b_i
- 参与者的出价记为 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$
- 分配规则为：$x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))$
- 支付规则为：$p(b) = (p_1(b), p_2(b), \dots, p_n(b))$
- 对第i个竞标者，其效用函数为 $u_i(b) = v_i \cdot x_i(b) - p_i(b)$
- 该机制是诚实的当且仅当对任意 b_{-i}, b_i ，均有 $u_i(v_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i})$
- 最大化社会福利即为 $max \sum_i v_i \cdot x_i(b)$

4 广义二价拍卖 (Generalized Second-Price Auction)

- 假设 $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$
- $x(b) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$
- $p(b) = (b_2 \cdot \alpha_1, b_3 \cdot \alpha_2, \dots, b_{k+1} \cdot \alpha_k, 0, \dots, 0)$

其主要优缺点如下：

- 不诚实
- 非常简单直观，且被广泛使用
- 仍然具有许多不错的性质，以及某种意义上的稳定性

5 迈尔森引理 (Myerson's Lemma)

定义 2 (可实现的分配规则 implementable allocation rule). 对于任何单变量问题，一个分配规则 x 是可实现的,如果存在一个支付规则 p ，使得机制 *(x, p)* 是诚实的。

定义 3 (单调分配规则 (monotone allocation rule)). 对于任何单变量问题，一个分配规则 *x(b)* 是单调的，如果对于任意 b_{-i}, $b_i > b'_i$ ，都有 $x_i(b_i, b_{-i}) \geq x_i(b'_i, b_{-i})$ 。

定理 4 (迈尔森引理 (Myerson's Theorm)). 对于任何单变量问题，一个分配规则 x 是单调的，当且仅当它是可实现的。

证明 可实现的 $\Rightarrow$ 单调的

如果一个分配规则 x 是可实现的，那么存在一个支付规则 p ，使得机制 (x, p) 是诚实的。对于投标人 i ，有其他人报价为 b_{-i} 。我们记 $x(v) = x_i(v, b_{-i})$, $p(v) = p_i(v, b_{-i})$ 。假设 $v_1 > v_2$ ，我们要证 $x(v_1) \geq x(v_2)$ 。因为机制 (x, p) 是诚实的，如果有 v_1 是投标人 i 的真实信息，那么有

$$\begin{aligned} v_1 \cdot x(v_1) - p(v_1) &\geq v_1 \cdot x(v_2) - p(v_2) \\ p(v_1) - p(v_2) &\leq v_1(x(v_1) - x(v_2)) \end{aligned} \tag{1}$$

如果 v_2 是投标人 i 的真实信息，那么有

$$\begin{aligned} v_2 \cdot x(v_2) - p(v_2) &\geq v_2 \cdot x(v_1) \\ p(v_1) - p(v_2) &\geq v_2(x(v_1) - x(v_2)) \end{aligned} \tag{2}$$

联立 1 , 2 可得

$$v_1(x(v_1) - x(v_2)) \geq p(v_1) - p(v_2) \geq v_2(x(v_1) - x(v_2)) \tag{3}$$

由 3 可推出

$$(v_1 - v_2)\left[x(v_1) - x(v_2)\right] \geq 0 \tag{4}$$

当 $v_1 > v_2$ 时，必然有 $x(v_1) \geq x_(v_2)$ 。单调性得证。

单调的 $\Rightarrow$ 可实现的

我们假设 x 是可导的。令 $v_1 = v_2 + \Delta v$ 。我们将 3 两边同除 Δ ，得到

$$\frac{v_1(x(v_2 + \Delta v) - x(v_2))}{\Delta v} \leq \frac{p(v_2 + \Delta v) - p(v_2)}{\Delta v} \leq \frac{v_2(x(v_2 + \Delta v) - x(v_2))}{\Delta v} \tag{5}$$

令 $\Delta v \to 0$ ，我们得到 $p'(v) = vx'(v)$ 。假设边界条件 $p(0) = 0$ ，则有 $p(v) = \int_0^v w \cdot x'(w)\mathbf{d}w$ 。因此，对于投标人 i ，其需要支付的价格应该为

$$\begin{aligned} p_i(\mathbf{b}) &= p_i(b_i, b_{-i}) \\ &= \int_0^{b_i} w \cdot x_i'(w, b_{-i})\mathbf{d}w \end{aligned} \tag{6}$$

以下我们证明，分配规则 (x, p) 确实是诚实的。假设 v_i 是投标人 i 的真实信息，我们要证：对任意 b_i , $v_i \cdot x(v_i) - p(v_i) \geq v_i \cdot x(b_i) - p(b_i)$ ，即 $v_i(x(v_i) - x(b_i)) \geq p(v_i) - p(b_i)$ 。因为 $x(\cdot)$ 是单调的，所以 $x'(\cdot) \geq 0$ ，因此

$$\begin{aligned} p(v_i) - p(b_i) &= \int_{b_i}^{v_i} w \cdot x'(w)\mathbf{d}w \\ &\leq v_i \int_{b_i}^{v_i} \cdot x'(w)\mathbf{d}w \\ &= v_i(x(v_i) - x(b_i)) \end{aligned} \tag{7}$$

问题得证。

$\square$

在迈尔森引理的证明中，我们假设了分配规则 $x(z) = x_i(z, b_{-i0})$ 是可导的。当 $x(z)$ 不可导时，我们仍然可以定义出相应的价格函数。我们可以以分段常值函数为例进行说明。假设 $x(z)$ 具有如下形式：

$$x(z) = \begin{cases} 0 & z \le a \\ \alpha_1 & a < z \le b \\ \alpha_2 & b < z \le c \end{cases} \tag{8}$$

对于任意 $v_1 \in (a, b]$, $v_2 \in (b, c]$ 令 $p_1 = p_i(v_1, b_{-i})$, $p_i(v_2, b_{-i})$ 。由之前的讨论，我们有

$$v_1 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \le p_2 - p_1 \le v_2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \tag{9}$$

由于上式对任意 $v_1 \in (a, b], v_2 \in (b, c]$ ，令 $v_1 = b$, $v_2 \to b$ 可得，$p_2 - p_1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$ 。由此我们知道了 $x(z)$ 在各段之间的定价关系。正如 x 可导一样，当我们知道了 p 的“初值”时，p 在各段的所有取值就都知道了。

我们用赞助搜索拍卖进一步说明上述定价过程。我们的分配规则 $\mathbf{x}$ 十分简单—— 把第 j 个广告位分配给报价第 j 大的人。假设有3个广告位，4个投标人，记 $c = \max(b_{-i})$, $b = \max(b_{-i} \backslash \{c\})$, $a = \max(b_{-i} \backslash \{c, b\})$ ，则 $x(z) = x_i(z, b_{-i})$ 有如下形式：

$$x(z) = \begin{cases} 0 & z \le a \\ \alpha_3 & a < z \le b \\ \alpha_2 & b < z \le c \\ \alpha_1 & z > c \end{cases} \tag{10}$$

如 $x(z) > c$ 时的定价为 p_1 ，$x(z) \in (b, c]$ 时的定价为 p_2 ，$x(z) \in (a, b]$ 时的定价为 p_3 。广义二价拍卖 (GSP) 的定价策略为：$p_3 = a \cdot \alpha_3$, $p_2 = b \cdot \alpha_2$, $p_1 = c \cdot \alpha_1$ 。而由迈尔森引理导出的诚实机制的定价策略为：$p_3 = a \cdot \alpha_3$, $p_2 = a \cdot \alpha_3 + b \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)$, $p_1 = a \cdot \alpha_3 + b \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) + c \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)$ 。