博弈论第五次作业

完成人：Aries

[Title 1]: Consider an auction with k identical goods, with at most one given to each bidder. There are n bidders whose valuations are i.i.d. draws from a regular distribution F. Describe the truthful auction which maximize the revenue in this case.

[答]: 由题意可知，该拍卖有 k 个相同物品，n 个竞拍者，他们的估值都服从于一个正则化的分布 F, 因此他们的虚拟估值函数是相同的，记为 $\varphi(v)$. 由正则化定义可知，对竞拍者 i 来说，他的虚拟估值 $\varphi(v_i) = v_i - \frac{1-F(v_i)}{f(v_i)}$ 是单调非减的，满足迈尔斯引理条件. 同时我们知道期望收益最大化即虚拟估值福利最大化，因此由迈尔斯引理得到的虚拟估值福利最大化的分配和支付机制，即是最大化收益的分配和支付机制.

机制如下：

对于竞拍者 i, 有虚拟估值 $\varphi(v_i) = v_i - \frac{1-F(v_i)}{f(v_i)}$。在所有竞拍者都是诚实的假设下，竞拍者的报价均为自己的估值，记第 k+1 大的虚拟估值为 V_{k+1}.

则他的分配函数如下：

$$x_i(v_i, b-i) = \begin{cases} 1 & v_i > max(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(V_{k+1})) \\ 0 & v_i \leq max(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(V_{k+1})) \end{cases}$$

支付函数如下：

$$p_i(v_i, b-i) = \begin{cases} max(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(V_{k+1}))) & v_i > max(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(V_{k+1}))) \\ 0 & v_i \leq max(\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(V_{k+1})) \end{cases}$$

[Title 2]: Repeat the previous exercise for sponsored search auctions, with n bidders with valuations-per-click drawn i.i.d. from a regular distribution F, and with k slots with$\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k$.

[答]: 由题意可知，该拍卖有 k 个广告位，和 n 个竞拍者，对于竞拍者 i，他对每一次点击有一个估值 v_i，且他们的估值都服从正则化分布 F, 因此他们的虚拟估值函数相同，记为 $\varphi(v)$. 由正则化定义可知，对竞拍者 i 来说，他的虚拟估值 $\varphi(v_i) = v_i - \frac{1-F(v_i)}{f(v_i)}$ 是单调非减的，满足迈尔斯引理条件. 同时我们知道期望收益最大化即虚拟估值福利最大化，因此由迈尔斯引理得到的虚拟估值福利最大化的分配和支付机制，即是最大化收益的分配和支付机制.

机制如下：

将 n 位竞拍者按照他们的虚拟估值进行排序，竞拍者 i 即为虚拟估值第 i 大的竞拍者. 对于竞拍者 i，有虚拟估值 $\varphi(v_i) = v_i - \frac{1-F(v_i)}{f(v_i)}$。在所有竞拍者都是诚实的假设下，竞拍者的报价均为自己的估值，记第 i 大的虚拟估值为 V_i. 记第 m 大的虚拟估值满足 $V_m \geq max(0, V_{k+1})$，第 m 大之后的虚拟估值均小于 $max(0, V_{k+1})$, α_m 为 0; 如果没有一个 $m > 0$ 满足条件，则记 m 为 0，广告位流拍.

则他的分配函数如下：

$$x_i(v_i, b-i) = \begin{cases} \sum_{j=i}^{m-1} (\alpha_j - \alpha_{j+1}) & i < m \\ 0 & i \geq m \end{cases}$$

支付函数如下:

$$p_i(v_i, b-i) = \begin{cases} \sum_{j=i}^{m-1} \varphi^{-1}(V_{j+1})(\alpha_j - \alpha_{j+1})s & i < m \\ 0 & i \geq m \end{cases}$$

[Title 3]: Prove that in the VCG mechanism, $p_i(b) \geq 0$.

[证明]:

$$\begin{aligned} p_i(b) &= b_i(\omega^*) - [\sum_{j=1}^{n} b_j(\omega^*) - \underset{\omega\in\Omega}{max} \sum_{j\neq i} b_j(\omega)] \\ &= b_i(\omega^*) - [b_i(\omega^*) + \sum_{j\neq i} b_j(\omega^*) - \underset{\omega\in\Omega}{max} \sum_{j\neq i} b_j(\omega)] \\ &= \underset{\omega\in\Omega}{max} \sum_{j\neq i} b_j(\omega) - \sum_{j\neq i} b_j(\omega^*) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

[Title 4]: Please use VCG mechanism to explain the truthful mechanism for routing game.

[答]:

在路径规划问题中，会选择最短路径作为最终结果，定义分配机制 x 为:

$$x(b) = \underset{\omega\in\Omega}{argmin} \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega)$$

VCG 机制下，我们将给智能体 i 的报酬视为他的报价加上他对于最短路径的“贡献”，即有 i 之前的最短路径与有 i 之后的最短路径总费用之差. 支付规则为:

$$p_i(b) = b_i(\omega^*) + [\underset{\omega\in\Omega}{min} \sum_{j\neq i} b_j(\omega) - \sum_{j=1}^{n} b_j(\omega^*)]$$

下证明该机制的诚实性:

固定 i 和 $b-i$, 当选中的 $x(b)$ 是 ω^* 时，我们可以利用上述支付规则，将 i 的收益写成:

$$p_i(b) - v_i(\omega^*) = \underset{\omega\in\Omega}{min} \sum_{j\neq i} b_j(\omega) - [v_i(\omega^*) + \sum_{j\neq i} b_j(\omega^*)]$$

我们知道 $\underset{\omega\in\Omega}{min} \sum_{j\neq i} b_j(\omega)$ 是一个常数，和 i 的竞价 b_i 无关。因此，最大化 i 的收益，即最小化 $v_i(\omega^*) + \sum_{j\neq i} b_j(\omega^*)$。现在，如果智能体 i 设置 $b_i = v_i$，那么机制要最小化的式 zi 子即分配函数中的式子就和智能体要最小化的项一致。因此，真实竞价可以“诱导”机制去选择能最大化智能体 i 收益的结果，而任何其他报价都不能比这做得更好。

[Optional Homework]:

Ref: Lecture Notes on Algorithmic Game Theory, Stanford CS364A,2013, Problem Set #2

This exercise derives an interesting interpretation of a virtual valuation $\varphi(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$ and the regularity condition. Consider a strictly increasing distribution function F with a strictly positive density f on the interval [0, v_{max}](with $v_{max} < +oo$). For $q \in [0,1]$, define $V(q) = F^{-1}(1-q)$ as the posted price resulting in a probability q of a sale(for a single bidder with valuation drawn from F).

Define $R(q) = q \cdot V(q)$ as the expected revenue obtained when (for a single bidder) the probability of a sale is q. The function $R(q)$, for $q \in [0,1]$, is often called the "revenue curve" of a distribution F. Note that $R(0) = R(1) = 0$.

1.What is the revenue curve for the uniform distribution on [0,1]?

2.Prove that the slope of the revenue curve at $q(i.e., R'(q))$ is precisely $\varphi(V(q))$, where φ is the virtual valuation function for F.

3.Prove that a distribution is regular if and only if its revenue curve is concave.

4.Prove that, for a regular distribution, the median price $V(\frac{1}{2})$ is a $\frac{1}{2}$-approximation of the optimal posted price. That is, prove that $R(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2} max_{q\in[0,1]} R(q)$.

[Hint: ues(c).]

1.**[答]:** 因为 F 是 [0,1] 上的均匀分布，则 $F(q) = q$，$V(q) = F^{-1}(1-q) = 1-q$. 所以 $R(q) = q \cdot F^{-1}(1-q) = q(1-q)$

2.**[证明]:**

$$\begin{aligned}
R'(q) =& V(q) + q \cdot V'(q) \\
=& V(q) - q \cdot [F^{-1}(1-q)]' \\
=& V(q) - \frac{q}{F'(V(q))} \\
=& V(q) - \frac{1 - F(F^{-1}(1-q))}{f(V(q))} \\
=& V(q) - \frac{1 - F(V(q))}{f(V(q))} \\
=& \varphi(V(q))
\end{aligned}$$

3.**[证明]:** 由题意可知 $R(q)$ 是凹函数，因此 $R'(q)$ 是单调递增的. 由问题 2 可知，$R'(q) = \varphi(V(q))$. 因为 F 是严格递增的函数，则 F^{-1} 也是严格递增的函数，所以 $V(q) = F^{-1}(1-q)$ 是单调递减的函数. 记 $v = V(q)$, 因为 $\varphi(V(q))$ 是单调递增的，所以随着 q 的增大，$\varphi(V(q))$ 增大，又因为随着 q 的增大，$V(q)$ 减小，所以 $\varphi(V(q)) = \varphi(v)$ 是关于 v 的单调递减函数，则 $\varphi(v)$ 单调性得证，因此该分布 F 是正则的.

4.**[证明]:** 因为分布 F 是正则的，所以 R(q) 是凹函数，由凹函数性质有：

$$R(\frac{1}{2}) = R(\frac{q+1-q}{2}) \geq \frac{max_{q\in[0,1]} R(q) + R(1-q)}{2}$$

因为 $R(q) = qV(q) = qF^{-1}(1-q) \geq 0$, 可得 $R(1-q) \geq 0$：

$$R(\frac{1}{2}) = R(\frac{q+1-q}{2}) \geq \frac{max_{q\in[0,1]} R(q) + R(1-q)}{2} \geq \frac{1}{2} max_{q\in[0,1]} R(q)$$