博弈论第一讲

授课时间: 2021 年 9 月 10 日 授课教师: 张家琳 记录人: 张骁扬 倪云昊

1 博弈的概念及其基本要素

博弈（Game）是现代应用数学的一个分支，表示在多决策主体之间行为具有相互作用时，各主体根据所掌握信息及对自身能力的认知，做出有利于自己的决策的一种行为理论，在计算机科学、管理学、经济学和国际关系学等领域中发挥着重要作用。

博弈的基本要素有：

- 多玩家（multiple players）：博弈一般由多方主体共同参与，当然也存在单个玩家与环境交互的博弈。
- 策略（strategies）：参与博弈的各主体依据自身掌握的信息、决策偏好等，设计自己的博弈策略。
- 结果（outcome）：根据参与各方的选择的博弈策略，产生博弈结果。
- 目标函数（objective function）：参与博弈的各方均有要达成的目标，依据目标达到的程度可以确定各方在博弈中的收益，从策略到收益的映射即称为目标函数。根据目标函数值的符号，又可以分为效用函数（utility function）和损失函数（loss function）。
- 重复博弈或单次博弈（repeated or one-shot）：一些博弈随着时间推移不断重复进行，而另一些博弈则仅进行一次。

举个简单的例子说明这些基本要素：

例 1 现在在一个 30 人的班级中进行如下博弈: 每个学生从 1 到 1000 中选择一个整数。把所有这些整数求平均值，最接近平均数的 $\frac{2}{3}$ 的学生获得博弈的胜利。

解 在这个博弈中，玩家就是这 30 位学生，学生在集合 $\{1, 2, 3, ..., 1000\}$ 中的选择决策即为策略，最终获胜的学生则是博弈的结果。根据不同学生的想法，可以确定每一位学生的目标函数，如大部分学生的目标函数为：若获胜，则收益为一个大于 0 的整数，否则收益为 0（可能也存在一部分学生因小组串谋，放弃获胜的可能性而帮助其他学生）。这个博弈如只进行一次，则为单次博弈，若在每一节课开始时都重复做一次，那么则是重复博弈。

2 典例

例 2 囚徒困境问题

问题描述：两名囚徒甲和乙被隔离审讯，他们分别面临“坦白”和“抗拒”两种选择。

(i) 如果两名囚徒都抗拒，那么由于证据不足，两人都只会被判轻罪，处两年监禁；

(ii) 如果一名囚徒抗拒而另一名囚徒坦白，那么抗拒者获罪入狱且从严处罚。处五年监禁，坦白因坦白立功而减少刑期，处一年监禁；

(iii) 如果两名囚徒都坦白，则两名囚徒均被正常判刑，处四年监禁。

收益矩阵 (其中-2 代表拘留两年，以此类推)：

(甲, 乙)		甲的选择	
		坦白	抗拒
乙的选择	坦白	(-4,-4)	(-5,-1)
	抗拒	(-1,-5)	(-2,-2)

表 1: 囚徒困境收益矩阵

策略分析：通过该收益矩阵我们可以发现，无论甲选择“坦白”或者是“抗拒”，乙要想尽可能最大化自己的收益 (或是减少拘留年限)，由于 $-4 > -5$ 且 $-1 > -2$，乙的较优选项都为“坦白”，同理对甲而言也是如此。于是最终结果双方坦白，总拘留时长达 8 年，对甲乙而言并不是特别友好，但为了自己的利益最大化，该结果是必然的，而双方都坦白也达到了 Nash 均衡。

破局可能性分析：如果甲乙之间感情比较好，为彼此着想，决策目标改为希望两人被拘留总时间最少或希望对方被拘留时间最少，即可打破该博弈问题的平衡。

例 3　污染博弈问题

问题描述：假设地球上 n 个国家，若选择控制污染，则需要支付 3；若选择什么都不做，则需要支付 0。若某个国家不控制污染，则由于环境恶化，则会让所有 n 个国家叠加 1 点损失，并且是可累计的，否则不叠加损失。

策略集：对于第 i 个国家，有两种策略可以选择：

$$strategy = \begin{cases} control\ pollution, & s_i = 1 \\ do\ nothing, & s_i = 0 \end{cases}$$

目标函数：对于第 i 个国家，其损失函数为:

$$\begin{aligned} f_i(s_1, s_2, \cdots, s_n) &= 3s_i + \sum_{j=0}^{n}(1 - s_j) \\ &= 2s_i + \sum_{j \neq i}(1 - s_j) + 1 \end{aligned}$$

策略分析：显然，对第 i 个国家来说，需要最小化自己的损失函数，并且这个国家有且仅有 s_i 可以调整，无论别的玩家如何选择，该玩家选择 $s_i = 0$ 会使得自己的损失最小，即不控制污染。然而，我们再从整体上分析：

$$if \quad \forall i(s_i = 0) \Rightarrow f_i(s_1, s_2, \cdots, s_n) = n$$
$$if \quad \forall i(s_i = 1) \Rightarrow f_i(s_1, s_2, \cdots, s_n) = 3$$

通常情况下 $n \gg 3$，因此第二种情况会远优于第一种情况，但在我们之前的博弈中，我们到达的是第一种情况的 Nash 均衡，它并不是我们需要的最优解。

破局可能性分析：可以考虑通过大国给予小国一些援助，或添加其他的政治外交因素影响 (经济压力等)，改变损失函数，从而改变整个博弈局势。