电子科大2001组合数学（有答案）

一(10分)、有多少个五位数，每位数字都不相同，不能取0，而且数字4和5不相邻？

二(10分)、把a个1和b个0排成一行，且没有两个1相邻，求这样的排列数为多少？

三(10分)、试用容斥原理求重集 $B=\{4\cdot a,\ 3\cdot b,\ 4\cdot c,\ 5\cdot d\}$ 的12-组合数。

四(10分)、试用母函数求解上题(第三题)

五(10分)、要悬挂10面彩旗(排成一行)，其中红、黄、蓝、绿、白旗各2面，试求相同颜色不相邻的悬挂方式（即排列方式）有多少？

六(10分)、在所有的n位数中，包含数字4、6，且5和7出现偶数次，但不包含数字0、1、2、3的数有多少？

七（10分）、设$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n}{m+k}$，试求$\{a_n\}$所满足的递归关系并解之。

八（10分）、在信道上传输仅用a、b、c这3个字母组成的长度为n的字符串，规定有两个a连续出现的串不能传输，用a_n表示这个信道允许传输长度为n的字符串的个数，试建立序列$\{a_n\}$的递归关系并解之。

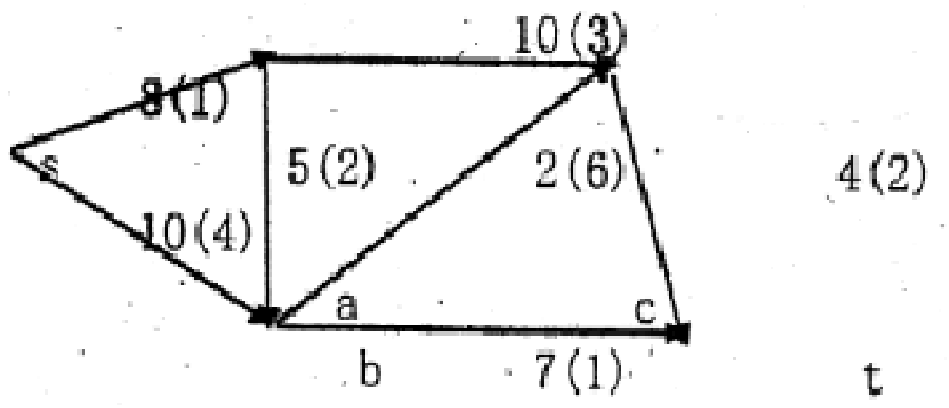
九（10分）、某公司购置五套先进设备，需分配给所属甲、乙、丙三个工厂，各工厂获得这种设备后，每年为公司提供的盈利（单位：万元）如下表所示，问如何分配这些设备，才能使公司得到的盈利最大？

盈利 设备数 工厂	0	1	2	3	4	5
甲	0	3	7	9	12	13
乙	0	5	10	11	11	11
丙	0	4	6	11	12	12

十（10 分）、试用两阶段法求解线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ & y=-2x_1-x_2-x_3 \\
\text{s.t}\ & 4x_1+6x_2+3x_3\le 8 \\
& x_1-9x_2+x_3\le -3 \\
& -2x_1-3x_2+5x_3\le -4 \\
& x_i\ge 0 \qquad i=1,2,3
\end{aligned}
$$

十一（10 分）、求下图所示网络的最小费用最大流。



十二（10 分）、试用母函数求解递归关系：

$$
\begin{cases}
a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} & n\ge 2 \\
a_0=1 \quad a_1=-2
\end{cases}
$$

参考答案

一. 解： P(9, 5)-2・4・P(7, 4)=13440。

二. 解： $\binom{b+1}{a}$

三. 解：构造集合 $B'=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c,\infty\cdot d\}$。

设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示 B' 的 12-组合中含有多于 4 个 a，3 个 b，4 个 c，5 个 d 的组合的集合，则 B 的 12-组合数为：

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|$$

$$=$$

455-(120+165+120+84)+(20+4+10+20+4+10)-0+0

= 34。

四.（略）

五．解：设 A_1 表示两面红旗相邻的悬挂方式的集合，

A_2 表示两面黄旗相邻的悬挂方式的集合，

A_3 表示两面蓝旗相邻的悬挂方式的集合，

A_4 表示两面绿旗相邻的悬挂方式的集合，

A_5 表示两面白旗相邻的悬挂方式的集合，

则有：

$$\left|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \hat{A}_5\right|$$

$$= |s| - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j| + \cdots$$

$$= \frac{10!}{(2!)^5} - \binom{5}{1}\frac{9!}{(2!)^4} + \binom{5}{2}\frac{8!}{(2!)^3} - \binom{5}{3}\frac{7!}{(2!)^2} + \binom{5}{4}\frac{6!}{2!} - \binom{5}{5}5!$$

$=39480$

六．解： 设 a_n 表示这样的数的个数，则 a_n 表示重集 $B=\{\infty\cdot 4, \infty\cdot 5, \infty\cdot 6, \infty\cdot 7, \infty\cdot 8, \infty\cdot 9\}$ 的排列个数。依题意，序列 $\{a_n\}$ 的指数母函数为：

$$f_e(x) = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2 \cdot (x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^2 \cdot (1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^2$$

$$= (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 \cdot (e^x-1)^2 \cdot e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(6^n - 2\cdot 5^n + 3\cdot 4^n - 4\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 2)\cdot\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{1}{4}(6^n - 2\cdot 5^n + 3\cdot 4^n - 4\cdot 3^n + 3\cdot 2^n - 2) & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

七．解：$\{a_n\}$所满足的递归关系式为：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{n}{m+n} a_{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

解以上递归关系得：

$$a_n = \frac{m!n!}{(m+n)!} = \binom{m+n}{n}^{-1}$$

八．解：$\{a_n\}$的递归关系为：

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \qquad n \ge 3 \\ a_1 = 3 \qquad a_2 = 8 \end{cases}$$

解此递归关系得：

$$a_n = \frac{1}{6}\left[(3+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n + (3-2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})^n\right]$$

九．解：有两种分配方案如下，可使公司得到盈利 21 万元。

① 甲两套，乙两套，丙一套

② 甲零套，乙两套，丙三套。

十．解：用两阶段法求得最优基本可行解为：

$$x_1 = \frac{9}{7} \qquad x_2 = \frac{10}{21} \qquad x_3 = 0, \qquad \min y = -\frac{64}{21}$$

十一．解：最大流 $f^*_{\max} = 11$。

最小费用为：4×5+2×5+3×6+1×7=55。

十二．解：设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为序列$\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$的普通母函数，则有：

$$(1-5x+6x^2)f(x) = 1-7x$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(x) &= \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x} \\ &= 5\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n)x^n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n = 5\cdot 2^n - 4\cdot 3^n \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

电子科技大学

2002 年攻读硕士学位研究生入学试题

科目名称：组合数学

注：应届考生作 1-10 题，往届考生在 12 题中选作 10 题

一 (10 分) 某车站有 1 到 6 个入口每个入口每次只能进一个人，问一小组 9 人的进站方案数有多少？

二 (10 分) m 个男生与 n 个女生排成一行，无两男生相邻，求排列数。

其中：(n≥m)

三 (10 分) 求方程：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ 的整数解个数。

四 (10 分) 用容斥原理求重集 $B = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10-组合数。

五 (10 分) 求由 1,2,3,4,5 五个数字组成的 r 位数的个数。其中要求 1,5 出现的次数为奇数，2 出现的次数为偶数，3,4 出现的次数不加限制。

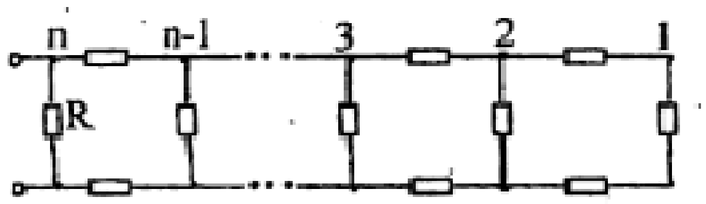
六 (10 分) 用组合分析的方法证明 $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 与 $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ 均为偶数。

七 (10 分) 有四对夫妻围坐在一张圆桌旁，欲使男女交替入坐，且没有一个妻子坐在其丈夫身边，求坐的方式数。

八 (10 分) 用指母函数法求解错排问题：$\begin{cases} D_n - nD_{n-1} = (-1)^n \\ D_0 = 1, D_1 = 0 \end{cases}$。

八 (10 分) 用指母函数法求解错排问题：$\begin{cases} D_n - nD_{n-1} = (-1)^n \\ D_0 = 1, D_1 = 0 \end{cases}$。

九 (10 分) 求图一所示的 n 级电路网络的等效电阻 R_n;图中每个电阻 R=1 (用递归关系法求解)。



图一

十 (10 分) 求解如下线性规划：

$$\max y = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t} \quad 2x_1 + 3x_2 \le 100$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 120$$

$$x_1 \cdot x_2 \ge 0$$

十一 (10 分) 求解递归关系： $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

十二 (10 分) 求用一元，二元的钞票支付 n 元钱的方式数(不考虑次序)

电子科技大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学试题答案

科目名称：组合数学

一 解：9 人进站方案数为：p(9,14)=726485760

二 解：排列数为： $m! \cdot n! \cdot C_{n+1}^{m}$

三 解：原方程等价于 $\begin{cases} x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$，即等价于求方程 $y_1 + y_2 + y_3 = 7$ 的非负整数解个数为

$F(3,7)=36$

四 解：设 $B' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$ A_1=B'的 10 组合中 b 的个数≥4

A_2=B'的 10 组合中 c 的个数≥6 A_3=B'的 10 组合中 d 的个数≥8

则有：$\left|\overline{A} \cap_1 \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right| = F(4,10) - F(4,6) - F(4,4) - F(4,2) + 1 = 158$

五 解：设所求排列数为 a_r，则序列$(a_0, a_1 a_2 \ldots a_r \ldots)$的指母函数为：

$$f_e(x)=(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)^2(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^2$$

$$=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2(\frac{e^x+e^{-x}}{2})e^{2x}$$

$$=\frac{1}{8}(e^{5x}+e^{-x})$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{r=0}^{\infty}[5^r+(-1)^r]\cdot\frac{x^r}{r!}$$

$$\therefore \quad ar=\frac{1}{8}[5^r+(-1)^r]$$

六 证明：(1).考虑从 2n 个不同元素中选取 n 个元素的组合数为：$\binom{2n}{n}$。

$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$，当$n\geq 4$时，易证:$2^n\left|(n!)^2\right.$，命:$(n!)^2=k\cdot 2^n \quad (k\in N)$

则:$(2n)!=2^n\cdot k\binom{2n}{n}$，有 $\frac{(2n)!}{2^n}=k\binom{2n}{n}$，即证:$\frac{(2n)!}{2^n}$为整数。

(2)由于重集$B=\{3a_1,3a_2,\cdots 3a_n\}$的排列数为:$\frac{(3n)!}{\underbrace{3!\cdot 3!\cdots 3!}_{有n个}}=\frac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$

所以,$\frac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$为整数。

七 解：坐法数为 12

八 解：设$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\cdot\frac{x_n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{n!}\cdot x_n$

$$则\sum_{n=1}^{\infty}(D_n-n\cdot D_{n-1})\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$得G(x)\cdot(1-x)=e^{-x}\Rightarrow G(x)=\frac{e^x}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\Rightarrow\frac{D_n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$即D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)。$$

九 .由欧姆定律得递推公式：$\begin{cases}\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2R+R_{n-1}}\\ R_1=1\end{cases}$

命$R_n=\frac{a_n}{b_n}$ 则$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}\\ b_n=a_{n-1}+3b_{n-1}\\ a_1=b_1=1\end{cases}$

设$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot x^n,B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot x^n\Rightarrow A=\frac{x\cdot(1-x)}{1-4x+x^2},B(x)=\frac{x}{1-4x+x^2}$

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n-(2+\sqrt{3})^{n-1}+-(2-\sqrt{3})^{n-1}\right.$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$$

$$R_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{3}-1-(5-3\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^{n-1}}{1-(7-4\sqrt{3})^n}$$

十　解：求出的最优可行解为：(20,20,0,0)，极大值为 200

十一　解：导出的齐次关系为：$a_n-2a_{n-1}=0$，其特征方程为 x-2=0。

因而齐次方程通解为：$a_n^* = c2^n$

由于$f(x)$=1，可设特解为$\bar{a}_n = A$，得：A=2A+1，A= -1

于是通解为：$a_n = c2^n - 1$，由初始条件得：$a_n = 2^n - 1$

十二　解：设 a_n 为所求，则$\{a_n\}$的母函数为：

$$f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty} 2F(2,n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{4}(2n+3) + \frac{(-1)^n}{4} \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

华师大组合数学及其参考答案

第一题（10 分）　10 个男孩和 5 个女孩站成一排。如果没有两个女孩相邻，问有多少方法？
答案： N=P(10 , 10)*P(11 , 5)

第二题（10 分）　证明 ：C(2n , 2)=2C(n , 2)+n^2。这里，C(m , n)表示从 m 个对象中取 n 个的方法数。
答案：等式左边表示从 2n 个不同的球中取两个球的方法数。我们把 2n 个球平均分成 A，B 两组，选球的方法有以下两类：去同一组的选法数为 N^1=2C(n , 2)；取自不同组的球的方法数为 N^2=[C(n , 1)]^2=n^2

第三题（10 分）　（3x-2y）^{20}　的展开式中 $x^{10}y^{10}$ 的系数是什么？
答案： C(20 , 10)*3^{10}*$(-2)^{10}$

第四题（10 分）　（a+b+c+d）^{100} 的展开式在合并同类项后一共有多少项？
答案： C(100+4-1 , 100).

第五题（10 分）　用非降路径法证明：

C(m+n , n)=C(m+n-1 , n-1) + C(m+n-1 , n),

这里，C(m , n) 表示从 m 个对象中 n 取个元素的方法数。
答案：（0,0）到（m,n）的路径数为 C(m+n , n)；又，(0,0)到(m,n) 的任一路径必过(m-1,n)或 (m,n-1)。故，等式成立；

第六题（10 分）求重集 S={20a, 14b, 20c}**的 10-组合数。**
答案： C(10+3-1 , 10)

第七题（10 分）试求 1 **到** 1000 **之间不能被** 5 **，** 6 **，或** 8 **整除的自然数的个数。**
答案： 600

第八题（10 分）求不多于四位的二进制数的个数。
答案： 16

第九题（10 分）证明：边长为 4 的正三角形内任意 5 个点必有两点其距离不超过 2。
答案：取个边中点将三角形等分为四个边长为 2 的三角形。则 5 个点中必然有两个落在同一个三角形内。

第十题（10 分）解递归关系： $H(n)=4H(n-1)-4H(n-2)$, $H(0)=1$, $H(1)=3$.
答案：解特征方程 $x^2-4x-4=0$ $x_1=x_2=2$. **得** $H(n)=2^n\{1+n/2\}$

某校组合数学期末试卷和参考答案

期末试卷（A卷）

2009 — 2010 学年第 二 学期

课程：组合数学　　专业：数学与应用数学　　年级：2007

本试卷共 2 页　满分：100 分　考试时间：120 分钟　考试方式：闭卷

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分	核分人
题满分	10	10	10	20	32	18	100	
得 分								
评卷人								

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1、在5×3棋盘中选取两个相邻的方格（即有一条公共边的两个方格），有________种不同的选取方法。

2、将 5 封信投入 3 个邮筒，有_______种不同的投法。

3、含 3 个变元x,y,z的一个对称多项式包含 9 个项，其中 4 项包含x，2 项包含xyz，1 项包含常数项，求包含xy的项有______个.

4、若$\Delta^k f(n)$不恒等于零，而$\Delta^{k+1} f(n)$恒等于零，则$f(n)$是 n 的____次多项式。

5、把 9 个相同的球放入 3 个相同的盒，不允许空盒，则有______种不同方式。

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1、不定方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=r\left(r\ge n\right)$正整数的解的个数为多少？（　　）

A. $\binom{r-1}{r-n}$　　B. $\binom{r}{r-n}$

C. $\binom{n+r-1}{r}$　　D. $\binom{n+r-1}{r-n}$

2、从 1 至 1000 的整数中，有多少个整数能被 5 整除但不能被 6 整除？（　　）

A.167　　B.200　　C.166　　D.33

3、对于第一类 stirling 数，且（n≥2），下列等式正确的是（　　）

A. $s_1(n,1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $s_1(n,2)=(-1)^{n-1}(n-2)!$

D. $s_1(n,n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$　　C. $s_1(n,3)=(-1)^{n-1}(n-3)$

4、$f(n)=\frac{1}{n},n\ne0$，则$\Delta^k f(n)$等于（　　）

A. 0　　B. $\frac{k!}{n^2+3n}$　　C. $\frac{(k+1)!}{n^2+3n}$　　D. $\frac{k!(-1)^k}{(n)(n+1)\cdots(n+k)}$

5、期末考试有六科要复习，若每天至少复习完一科（复习完的科目不再复习），5 天里把全部科目复习完，则有多少种不同的安排？（　　）

A. 9　　B. 16　　C.90　　D.1800

请考生将以上各选择题答案填入下表：

题号	1	2	3	4	5
答案					

三、判断题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

判断下列各题正误，正确的在题后括号内打“√”，错误的打“×”。

1、$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$　　$n>k\ge1$　　（　　）

2、α是$P_n(x)=0$的m重根，则有$P_n(\alpha)=P_n'(\alpha)=\ldots\ldots=P_n^{(m-1)}(\alpha)=0$，　　（　　）

但$P_n^{(m)}(\alpha)\ne0$。

3、数列$\left\{(\lg5)^n\right\}$的指数生成函数为e^{5t}。　　（　　）

4、对$\forall n,k$，$S_2(n,k)=S_2(n-1,k-1)+S_2(n-1,k)$。　　（　　）

5、若$B(t)$存在逆元，则恒有$\frac{A(t)}{B(t)}=A(t)\cdot B(t)$。　　（　　）

四、计算题（本大题共3小题，分值分别为6、6、9分，共21分）

计算下列各题，并在答题纸上写出解题过程及结果。若只写出计算结果而无解题过程则该题得分为零。

1、求$(1+2x+x^2)^n$的展开式中x^5的系数其中$n\geq 3$。

2、求$a_n=n+5$的常生成函数。（$n\geq 0$）

3、解递推关系$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+n+2$，$a_1=\frac{27}{4}, a_1=\frac{49}{4}$，（$n\geq 2$）

五、应用题（本大题共5小题，分值分别为5、6、6、7、9分，共33分）

解下列各题，并在答题纸上写出解题过程及结果。若只写出计算结果而无解题过程则该题得分为零。

1、把4个人分成两组，每组至少一人，求不同的分组方法？

2、一次宴会，5位来宾寄存他们的帽子，在取帽子的时候有多少种可能使得没有一位来宾取回的是他自己的帽子？

3、平面上有$n(n\geq 2)$个圆，任何两个圆都相交但无3个圆共点，求这n个圆把平面划分成多少个不连通的区域。

4、用17张100元钱买3支股票，不要求每支股票都买，但要求买A股钱数必须是200的倍数，买B股钱数是400的倍数，求有多少种买法？

5、有个猎人有个习惯，卖完小鸟后的第一天抓2只小鸟，第n天抓$a_n=a_{n-1}+n$只小鸟，并每天把它们随机的放在20个大鸟笼里喂养，有人知道猎人这种习惯，便问猎人什么时候才拿鸟去卖，猎人回答：当有一个鸟笼里至少有15只小鸟时。请问猎人多少天后才拿小鸟去卖？

六、证明题（本大题共2小题，分值分别为6、10分，共16分）

证明下列各题，并在答题纸上写出证明过程。

1、F_n为Fibonacci数，$n\geq 1$，试证：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$。

2、用两种不同方法证明：$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

组合数学参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）：

1、22　解：用加法原则：5×（3-1）+3×（5-1）=22。

2、243　解：每封信都有 3 个选择，信与信之间是分步关系。所以分步属于乘法原则，即
3×3×3×3×3=81×3=243。

3、2　解：设 S 为 9 个项构成的集合，设 a 表示含有 x 这一性质，设 b 表示含有 y 这一性质，⋯，设 c 表示含有 z 这一性质，所求为：$N(ab)$，而：

$$|S| = N_0 + N(a)+N(b)+N(c)-N(ab)-N(bc)-N(ac)+N(abc)$$

（其中 N_0 为常数项个数）. 再由对称性有：$N(a)=N(b)=N(c)$，

$N(ab)=N(bc)=N(ac)$，又 $|S|=9, N(a)=4, N(abc)=2$

得：$N(ab)=2$。

4、k　解：多项式的差分定理 3.6。

5、7　解：等价于正整数 9 的 3-部无序分拆数 $P_3(9)$。

由定理 $\mathrm{P}_r(n)=\sum_{k=1}^{r} P_k(n-r)$　$(n>r)$ 得：

$$P_3(9)=\sum_{k=1}^{r} P_k(6)=P_1(6)+P_2(6)+P_3(6)$$

$=1+3+P_3(6)=4+P_1(3)+P_2(3)+P_3(3)=4+1+1+1=7$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）：

1、A　解：课本推论 1.3。

2、A　解：设所求为 N，令 S={1,2，……，1000}，以 A、B 分别表示 S 中能被 5 和能被 6 整除的整数所成之集，则：
N=｜A-B｜=｜A｜-｜A∩B｜
=[1000/5]-[1000/5×6]=200-33=167。

3、A　解：$\mathrm{S}_1(n,1)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$　（n≥2）

五、应用题：

1、7 不同的分组方法。

解：设所求为 N。以甲乙丙丁表示 4 个人，则满足本题题意的 N 种分组方法可分成如下两类：

（1）有一组仅有 1 人的分组方法。
因为在一人组中的人可以是甲乙丙丁这四人中的任何一个人，
故 4 种分组方法。………（2 分）

（2）两个组各有 2 个人的分组方法。
因为甲所在的组确定之后，另一组也确定了，而与甲同组的人可以是乙丙丁这 3 个人中任何一人，故 3 分组方法。………（4 分）
则 N=4+3=7　　………（5 分）

2、**44** 种可能使得没有一位来宾取回的是他自己的帽子。

解：属于重排问题，所求为 D_5。$\mathrm{D}_5=5!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})=44$ ………（6 分）

3、这 n 个圆把平面划分成 n^2-n+2 不连通的区域。

解：设这 n 个圆分平面为 a_n 个不连通区域，若再增加一个圆，则增加的圆与原来的圆共有 $2n$ 个交点，也就分成了 $2n$ 段，每一段分所在区域为两个区域，即增加了 $2n$ 个区域.

所以 $a_{n+1}=a_n+2n$

$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$　　　(1)

………

$a_2=a_1+2\times 1$　　　$(n-1)$　　………（3 分）

将以上 (1) 至 $(n-1)$ 等式相加得：

$a_n=a_1+n(n-1)=2+n(n-1)=n^2-n+2$。　………（6 分）

4、25 种买法。

解：此题等同于求方程 $x_1+2x_2+4x_3=17$ 的非负整数解的个数。　………（1 分）

方程通过换元可变为：$y_1+y_2+y_3=17$，其中 y_1 为非负整数，y_2 为非负偶数，y_3 为非负的 4 的倍数的整数。………（3 分）

由此构造常生函数：$(1+t+t^2+\cdots)(1+t^2+t^3+\cdots)(1+t^4+t^8+\cdots)$ 所求为常生成函数的 t^{17} 的系数，化简生成函数为：

$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1-t^4}=(1+t)(1+t^2)(1-t^4)^{-2}$，可求得公式得 t^{18} 的系数为 25。……（6 分）

5、猎人 11 天后才拿小鸟去卖。

解：$a_n=a_{n-1}+n=a_{n-2}+(n-1)+n=\cdots\cdots=a_1+2+3+\cdots n$，

因此 $a_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$　$(n\geq 1)$。　………（2 分）

n 天后猎人共抓 S_n 只小鸟，$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_k=n+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}$，

设 $f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$，$f(n)$ 是 n 的 2 次多项式，因此

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\sum_{k=0}^{2}\binom{n+1}{k+1}\Delta^k f(0)。\text{………（4 分）}$$

因为 $f(0)=0,\Delta f(0)=1,\Delta^2 f(0)=1$，因此

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\sum_{k=0}^{2}\binom{n+1}{k+1}\Delta^k f(0)=0+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

因此 $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+n$　　………（6 分）

因为当必有一个鸟笼里至少有 15 只小鸟时猎人才拿小鸟去卖，利用鸽笼原理，有：

$$\left[\frac{S_n-1}{20}\right]+1\leq 15$$

由此可知 $280<S_n<301$，即 $280<\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+n<301$，n 为整数，解得 n=11

因此猎人 11 天后将小鸟拿去卖。　………（9 分）

试卷编号：5079　　　　　　　　　**座位号**

浙江广播电视大学 2006 年春季学期开放教育本科期末考试

《组合数学》试题

2006 年 7 月

题 号	一	二	三	四	总 分
得 分					

得 分	评卷人

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．每位上的数字互异且非零的两位数共有____________个。

2．现在有 10 双不同的鞋。为了保证能够有一双鞋被选出，至少要从这 20 只鞋中取出____________只鞋。

3．$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^7$ 展开式中 $x_1^2x_3x_4^3x_5$ 的系数为____________。

4．序列 1, c, c^2, …, c^n, …的生成函数是______________________________________。

5．数值函数 f 和 g 的卷积 f *g 的通项 f *g (r) =________________________。

得 分	评卷人

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．在 100 和 999 之间有（　　）个每位上的数字均不同的奇数。

(A) 280　　(B) 320　　(C) 360　　(D) 720.

2．以下公式正确的是（　　）。

(A) $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$　　　(B) $\max\limits_{0\le i\le n}\left\{\binom{n}{i}\right\}=\binom{n}{\frac{n}{2}}$

(C) $\max\limits_{0\le i\le n}\left\{\binom{n}{i}\right\}=\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$　　　(D) $\binom{n}{\frac{n}{2}-1}<\binom{n}{\frac{n}{2}}>\binom{n}{\frac{n}{2}+1}$.

3．在一个圆盘的四周画上四种不同的图案，共有（　　　）种画法。

(A) 24　　(B) 12　　(C) 6　　(D) 3.

4、$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=$（　　　）。

(A) 2^n　　(B) 0　　(C) $n2^{n-1}$　　(D) 1.

5．设 S={1,2,3,4,5,6,7}，按字典序 5-组合 12367 的下一个组合是（　　　）.

(A) 12567　　(B) 12376　　(C) 12467　　(D) 12456.

得 分	评卷人

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1．平面上给出 25 个点，其中没有任何 3 个点共线。这些点能确定多少条直线？多少个三角形？

2．一个面包店有 6 种不同类型的面包，这些面包以每打 12 个为单位向外出售。这个面包店能装配成多少打不同的面包（不考虑面包的顺序）？如果在每打中每种类型的面包至少有一个，那么又能装配成多少打不同的面包？

3．试用生成函数求下式之和：$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}$.

4．网络专业的学生选修 C++ 的有 38 人，选修 VB 的有 15 人，选修 DELPHI 的有 20 人，选修这三门课的同学总数为 58 人，且其中只有 3 人同时选修这三门课，试求同时选修两门课的同学有几人？

5．在一次聚会上有 10 位男士和 10 位女士。这 10 位女士能够有多少种方法选择男舞伴开始第一次跳舞？如果每个人必须换舞伴，那么第二次跳舞又有多少种选择方法？

6．求解满足初始值 $h_0=1, h_1=2, h_2=0$ 的递推关系

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2} - 2h_{n-3} \qquad n \geq 3.$$

得 分	评卷人

四、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

任取 11 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 10 的倍数。

浙江广播电视大学 2006 年春季学期开放教育本科期末考试
《组合数学》试题答案及评分标准
2006 年 7 月

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 72;　2. 11;　3. 420; 4.　;　5.　.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B;　2. C;　3. C;　4. B　5. D.

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1．解：由于没有 3 个点共线，所以每对点就确定一条直线，而直线的确定与两个点的次序无关，属组合问题，直线的总数为

每三个点确定一个三角形，因此所确定的三角形总数为

2．解：假设面包店每种面包都有很多（每种至少 12 个），由于每打中的面包与顺序无关，故为组合问题，能装配成不同的面包的打数即为 6 种类型的多重集（无穷重数）的 12-组合数，其值为

种。

如果在每打中每种类型的面包至少有一个，那么能装配成不同的面包的打数可以看成为 6 种类型的多重集（无穷重数）的 6-组合数，其值为

种。

3．解：设

两边求导再乘 x 得:

令 x = 1 得:

.

4．解：设 A, B, C 分别为选修 C++, VB, DELPHI 的同学的集合，则由

|A B C| = |A| + |B| + |C| (|A B| + |A C| +|B C|) + | A B C|
得
(|A B| + |A C| +|B C|) = |A| + |B| + |C| + | A B C| |A B C|
= 38 + 15 + 20 + 3 58
= 18
同时选修两门课的同学有 18 人。

5．解：对于第一次跳舞，可以对 10 位男士和 10 位女士并排排列，如果 10 位男士不改变次序，10 位女士一个全排列就是一种配对方式，共存在 10! = 3628800 可能的选择；

对于第二次跳舞，每位女士必须选择一位不是第一次与她跳舞的男舞伴，因此可能的选择方法数为移位排列数

= 1334961.
即第二次跳舞有 1334961 种选择方法。

6．解：这个递推关系的特征方程

的 3 个根为 1, 1, 2，递推关系的解为

利用初始条件得 c1, c2, c3 满足的方程组为

解得 ，因此递推关系的解为

.

四、证明题（每小题 10 分，共 10 分）
证明：设这 11 个整数为 a1, a―2, …, a11,它们被 10 除之后其余数为 0 ~ 9 之间的整数，将 0 ~ 9 当作抽屉，由抽屉原理可知，在这 11 个整数中必有两个数，不妨设为 ai, aj, 它们二者的余数相等，从而 ai aj =10 n (n 为一个整数)，即 ai 与 aj 的差是 10 的倍数。

科目序号：B

浙江广播电视大学开放教育本科期末考试

计算机科学与技术专业组合数学模拟试题

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 $\binom{7}{2,0,1,3,1}$ = ______ 。

2、 边长为 1 的正三角形内任意取 5 个点，则至少有 ______ 个点它们的距离小

于或等于 1/2。

3、为求二阶常系数线性非齐次递推关系 f(n)－f(n－2)＝$3r^2$ 特征方程的特解，可设其特解为________________。

4、从 2 个红球、1 个黑球和 3 个黄球中任选 2 个球有________种选法。

5、按定义数值函数 f 的前向差$\Delta f=$________________（r≥0）。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\dots+n\binom{n}{n}=$（　）

A、0　　B、$n(n+1)2^{n-2}$　　C、$n2^{n-1}$　　D、$n(1+x)^{n-1}x$.

2、数值函数 $f=\{1,2,2^2,2^3,\dots,2^r,\dots\}$的指数生成函数是（　）。

A、e^x　　B、e^{2x}　　C、$\frac{1}{1-2x}$　　D、$\frac{1}{1+2x}$.

3、用 3 个“-”和 2 个“•”组成的序列，能传递（　）种不同信息。

A、5　　B、6　　C、10　　D、120

4、设 S={1,2,3,4}仅有 2 个定位的(2 定位)排列数为（　）。

A、0　　B、2　　C、6　　D、12

5、设 S={1,2,3,4,5,6,7}，4-组合 1467 的下一个组合是（　）.

A、1567　　B、1376　　C、1467　　D、1456

三、解答题（每小题 10 分，共 70 分）

1. **5 个男孩和 4 个女孩排成一行，在任何两个男孩都不相邻的情况下各有多少种不同排法？**
2. **汽车牌照是由 26 个英文字母中的两个(排在前面)和 10 个数字中的 4 个(排在后面)组成，共有多少个不同的牌照。**
3. **按照字典序写出集合 S ={1, 2, 3}的所有全排列。**
4. **证明边长为 2 的正方形内任意 5 个点必有两点，其距离不超过 $\sqrt{2}$ 。**
5. **设数值函数 $a_r=\begin{cases}2 & 0\le r\le 3\\ 2^{-r}+5 & r\ge 4\end{cases}$，求前向差 Δa.**
6. **设数值函数 f = $\{1,2,2^2,2^3,...\}$，g = $\{1,3,3^2,3^3,...\}$，求 3f-5g 的生成函数。**
7. **设初始值 h(0) = 0, h(1) = 1，h(2) = 2，求解递推关系**
   h(n) = h(n－1)+9h(n－2)－9h(n－3).　　(n = 3,4,...)

浙江广播电视大学开放教育本科期末考试

计算机科学与技术专业组合数学模拟试题参考答案

一、　**填空题**（每小题 3 分，共 15 分）

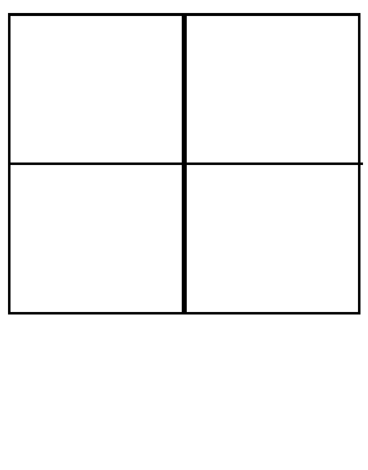
1、420；　2、2；　3、$p_0+p_1r+p_2r^2$；　4、5 ；
5、f (r+1) - f (r).

二、　**单项选择题**（每小题 3 分，共 15 分）

1、C ；　2、B ；3、C ；　4、C ；　5、A ；

三、　**解答题**（每小题 10 分，共 70 分）

1. **解：**先把 4 个女孩排成一行，每两个女孩之间留一个空位置，含两头，共有 5 个空位置，如下图　　×o×o×o×o×　　有 5！4！＝2 880 种排法（10 分）
2. **解：**分别构成 2 个字母和 4 个数字的重复排列。即有
   $26^2\times10^4$＝6760000 种　　　　（10 分）
3. **解：**按照字典序排列算法，集合 S ={1, 2, 3}的所有全排列为：
   123－>132－>213－>231－>312－>321　　（10 分）
4. **证：**构造抽屉如图，将 5 个点放在 4 个边长为 1 小正方形内，由抽屉原理，必有一个小正方形内至少有两个点，这两个点的距离就小于或等于 $\sqrt{2}$ 。
   （10 分）



5. **解：设数值函数 $a_r=\begin{cases}2 & 0\le r\le 3\\ 2^{-r}+5 & r\ge 4\end{cases}$，求前向差 Δa.**

$$\Delta a_r = 2-2=0 \quad 0\le r\le 2$$

$$\Delta a_3 = 2^{-4} + 5 - 2 = 3\frac{1}{16}$$

$$\Delta a_r = 2^{-(r+1)} + 5 - 2^{-r} + 5 = -2^{-r-1} \quad r \geq 4$$

$$\therefore \Delta a = \{0, 0, 0, 3\frac{1}{16}, -2^{-5}, -2^{-6}, ..., -2^{-r-1}, ...\}$$

6. 解：数值函数 f = {1,2,22,23,...}和 g = {1,3,32,33,...}的生成函数

$$F(x) = 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + ... = 1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + ...$$

$$= \frac{1}{1-2x}.(|2x| < 1)$$

$$G(x) = 1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + ... = 1 + (3x) + (3x)^2 + (3x)^3 + ...$$

$$= \frac{1}{1-3x}.(|3x| < 1)$$

所以$3f - 5g$的生成函数为

$$3F(x) - 5G(x) = \frac{3}{1-2x} - \frac{5}{1-3x}.$$

7. **解：**特征方程为：$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$
解得特征根为 1, 3,-3.因此
$$h(n) = A1^n + B3^n + C(-3)^n$$
为一般解，由边界条件得

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 3B - 3C = 1 \\ A + 9B + 9C = 2 \end{cases}$$

解此线性方程组得唯一解

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{1}{12}$$

因此所求的解为

$$h(n) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 3^n - \frac{1}{12}(-3)^n \qquad (10 分)$$

组合数学期末考查卷

一、选择题。（每小题 3 分，共 24 分）

1. 在组合数学的恒等式中 $\binom{n}{k}=$

A　$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}(n>k\geq 1)$　　B　$\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k-1}(n>k\geq 1)$

C　$\binom{n}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}(n>k\geq 1)$　　D　$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}(n>k\geq 1)$

2、$x_1+x_2+x_3=14$ 的非负整数解个数为（　　）。

A.120　　B.100　　C.85　　D.50

3、$P_4(9)=(\ )$。

A. 5　　B. 8　　C. 10　　D. 6

4、递推关系 $a_n=4a_{n-1}-3a_{n-2}+2^n(n\geq 2)$ 的特解形式是（a 为待定系数）()

A、$an2^n$　　B、$a2^n$　　C、$an^3 2^n$　　D、$an^2 2^n$

5、错排方式数 $D_n=$（）

A　$nD_n+(-1)^{n+1}$　B　$(n+1)D_n+(-1)^n$　C　$nD_{n-1}+(-1)^n$　D　$(n+1)D_n+(-1)^{n+1}$

6、将 n 个不同的球放入 m 个不同的盒子且每盒非空的方式数为（　　）。

A $\binom{n}{m}$　　B $P(n,m)$　　C m！S_2（n，m）　　D $\binom{n}{m}$ m！

7、有 100 只小鸟飞进 6 个笼子，则必有一个笼子至少有（　　）只小鸟。

A　15　B　16　C　17　D　18

8、若颁发 26 份奖品给 4 个人，每人至少有 3 份，有（　　）种分法

A　55　B　40　C　50　D　39

二、填空。（每小题 4 分，共 20 分）

1、现有 7 本不同的书，要分给 6 个同学，且每位同学都要有书，有________________种不同的分法

2、设 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 是 n 个正整数，如果将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 件东西放入 n 个盒子里，则必存在一个盒子 j_0，$1\leq j_0\leq n$，使得第 j_0 个盒子里至少装有 q_{j_0} 件东西，我们把该定理称为________________。

3、S_1（n，n-1）=________________。

4、Fibbonacci 数 f(9)= ______

5、数列 {1, 2, 3, 4, . . .} 的生成函数为________________。

三、计算题。(1,2,3,4 小题，每小题 6 分。其余的每小题 8 分，共 40 分)

1、10 个节目中有 6 个演唱、4 个舞蹈。今编写节目单，要求任意两个舞蹈之间至少有 1 个演唱，问可编写出多少种不同的演出节目单？

2、求 $M=\{5a,3b\}$ 的 6 排列数。

3、求 $\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)^6$ 展开式中 x^5 的系数。

4、从 1 至 2000 的整数中，至少能被 2,3,5 中的两个数整除的整数有多少个？

5、已知 $f(n)$ 是 n 的3次多项式且 $f(0)k=1, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=19,$

确定 $f(n)$ 并求 $\sum_{k=0}^{n} f(k)$。

6、(河内宝塔问题) 有三根和 n 个大小递增的在一根木桩上的环形盘子，最大盘子在底部。这些盘子可一次一个地从一个木桩转移到另一个木桩，但不允许较大的盘子放在较小的盘子上面。现在把 n 个盘子从木桩 A 全部转移到木桩 B，问必须移动的次数是多少？

四、证明题。(每小题 8 分，共 16 分)

1、F（m＋n）＝F（m）F（n）＋F（m－1）F（n－1）

2、证明下列组合恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$$

《组合数学》期末考查卷答案

一、选择题。(每小题 3 分，共 24 分)

1 A　2 A　3 D　4 B　5 C　6 C　7 C　8 A

二、填空题（(每小题 4 分，共 20 分)

1　15120　　2 抽屉原理（的一般形式）　　3 $-\binom{n}{2}$

4 55 5 $\frac{x}{(1-x)^2}$

三、解答题。（1,2,3,4 小题，每小题 6 分。其余的每小题 8 分，共 40 分）

1、解：设可编写出 N 种不同的演出节目单。可依如下三个步骤去编写节目单：

① 作 6 个演唱节目的全排列，有 $6!=720$ 种方法；

② 从作成的排列的左边、右边及 6 个元素形成的 7 个空挡中选出 4 个位置，有 $\binom{7}{4}=35$ 种方法；

③ 把 4 个舞蹈节目放在已选出的 4 个位置上，每个位置放一个舞蹈节目，有 4！=24 种方法。

由乘法原则得

$$N=720\times 35\times 24=604800$$

2、 解：根据题意有：$M_1=\{5a,b\}$，$M_2=\{4a,2b\}$，$M_3=\{3a,3b\}$.

$$N_1=\frac{6!}{5!}=6, N_2=\frac{6!}{4!2!}=15, N_3=\frac{6!}{3!3!}=20$$

则 $M=\{5a,3b\}$ 全排列数 $N=N_1+N_2+N_3$=6+15+20=41

3、解：

$$\begin{aligned}
&\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)^6\\
&=\left[(1+x)^2+2x^2(1+2x)\right]^6\\
&=(1+x)^{12}+12x^2(1+x)^{10}(1+2x)+60x^4(1+x)^8(1+2x)^2\\
&+160x^6(1+x)^6(1+2x)^3+\cdots
\end{aligned}$$

所以 $\left(1+2x+3x^2+4x^3\right)^6$ 的展开式中 x^5 系数为

$$\begin{aligned}
&\binom{12}{5}+12\left[\binom{10}{3}+\binom{10}{2}\bullet 2\right]+60\times\left[\binom{8}{1}+2\bullet 2\right]\\
&=792+25200+720\\
&=26772
\end{aligned}$$

4、解：设 a 为具有能被 2 整除的性质；设 b 为具有能被 3 整除的性质； 设 c 为具有能被 5 整除的性质；

则所求为:N (2) + N (3)

而$N\binom{2}{2}N_2-\binom{3}{2}N_3, N(3)=\binom{3}{3}N_3$

又$N_2 = N(ab)+N(ac)+N(bc) = \left[\frac{2000}{2\times 3}\right]+\left[\frac{2000}{2\times 5}\right]+\left[\frac{2000}{3\times 5}\right] = 666$

$N_3 = N(abc) = \left[\frac{2000}{2\times 3\times 5}\right] = 66$

$\therefore$原式$=534$

5、解：数列$\{f(n)\}_{n\geq 0}$的查分表为

1	1	3	19	……
0	2	16	……	
2	14	……		
12	……			
……				

因为$f(n)$是n的3次多项式，所以当$k\geq 4$时，$\Delta^k f(n)=0(n=0,1,2,\cdots)$，于是

$$f(n)=\sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}\Delta^k f(0)$$
$$=1+2\binom{n}{2}+12\binom{n}{3}=2n^3-5n^2+3n+1$$
$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{j=0}^{3}\binom{n+1}{j+1}\Delta^j f(0)$$
$$=n+1+2\bullet\binom{n+1}{3}+12\bullet\binom{n+1}{4}$$
$$=\frac{(n+1)(3n^3-7n^2+4n+6)}{6}$$
$$=\frac{1}{2}n^4-\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{3}n+1$$

6、解　令$H(n)$表示把n个盘从一个木桩移到另一木桩所必须的移动次数。显然有

$H(0)=0$，$H(1)=1$。

对于n个盘，先把木桩A上的$n-1$个盘套到木桩C上而保持相对位置不变，需用$H(n-1)$次。再把木桩A上的最大的盘套到B上，用1次。然后再把C上的盘套回到B上，又用$H(n-1)$次。所以有

$H(n)=2H(n-1)+1$

迭代此关系式得

$$
\begin{aligned}
H(n) &= 2H(n-1)+1 \\
&= 2^2 H(n-2)+2+1 \\
&\cdots\cdots \\
&= 2^n H(0)+2^{n-1}+\cdots\cdots 2^2+2+1 \\
&= 2^{n-1}+2^{n-2}\cdots\cdots 2^2+2+1
\end{aligned}
$$

所以有 $H(n)=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

四、证明题。（每小题 8 分，共 16 分）

证明：当m＝1时，F（1）F（n）＋F（1）F（n－1）

＝F（n）＋F（n－1）

＝F（n＋1）

等式成立；

假设当m≤k时，等式成立；

当m＝k＋1时，

F（k＋1＋n）＝F（k＋n）＋F（k－1＋m）

＝F（k）F（n）＋F（k－1）F（n－1）

＋F（k－1）F（n）＋F（k－2）F（n－1）

＝F（k＋1）F（n）＋F（k）F（n－1）

等式成立；

所以，F（m＋n）＝F（m）F（n）＋F（m－1）F（n－1）

2、证明：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} \\
&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)(n+2)}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} \\
&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2} \\
&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=2}^{n+2}\binom{n+2}{j} \\
&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n+2}{j}-(n+2)-1\right] \\
&=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

一份组合数学试卷（含解析）

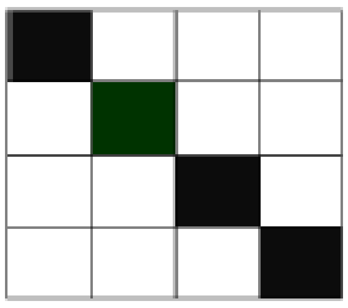
一.A,B,C,D 四人组对参加 4×100 接力比赛, 教练认为 A 不适合跑第 4 棒, B 不适合跑第 3 棒, C 不适合跑第 2 棒, D 不适合跑第 1 棒, 求满足教练要求的比赛方案数.

解: 方法一,错排数

$4!(1-1/1!+1/2!-1/3!+1/4!)=9$

方法二,有禁区的排列

D　C　B　A



禁区的棋盘多项式为 $1+C(4,1)x+C(4,2)x^2+C(4,3)x^3+C(4,4)x^4$,

所以满足要求的方案数为:

$4!-C(4,1)3!+C(4,2)2!-C(4,3)1!+C(4,4)\,0!=9$

二.考虑字典序下 1,2,…,8 的全排列, 例如字典序下序号是 1,2 的排列分别是 12345678 和 12345687. (1) 求序号为 2003 的排列. (2) 求 54862371 的序号.

解: (1) $2002\div2=1001$ 余 0, $1001\div3=333$ 余 2, $333\div4=83$ 余 1,

$83\div5=16$ 余 3, $16\div6=2$ 余 4,

所以 $2002=2\times6!+4\times5!+3\times4!+1\times3!+2\times2!+0\times1!$

所以字典序下第 2003 个排列是 14763825

(2) 54862371 前面的排列有

第一位是 1,2,3,4 的排列:$4\times7!$个

第一位是 5,第二位是 1,2,3 的排列:$3\times6!$个

第一二位是 54,第三位是 1,2,3,6,7 的排列:$5\times5!$个

第一~三位是 548,第四位是 1,2,3 的排列:$3\times4!$个

第一~四位是 5486,第五位是 1 的排列:$1\times3!$个

第一~五位是 54862,第六位是 1 的排列:$1\times2!$个

第一~六位是 548623,第七位是 1 的排列:$1\times1!$个

所以 54862371 的序号是

$$4\times7!+3\times6!+5\times5!+3\times4!+1\times3!+1\times2!+1\times1!+1=23002$$

三.求 1~1000 中不能被 3,5,7 整除的整数个数.

解:令 A,B,C 分为 1~1000 中能被 3,5,7 整除的数的集合.

则$|A|=[1000/3]=333$, $|B|=[1000/5]=200$, $|C|=[1000/7]=142$,

$|A\cap B|=[1000/15]=66$, $|A\cap C|=[1000/21]=47$, $|B\cap C|=[1000/35]=28$,

$|A\cap B\cap C|=[1000/3/5/7]=9$,

所以不能被 3,5,7 整除的数的个数是

$$1000-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$$

$$=1000-333-200-142+66+47+28-9$$

$$=457$$

四.任取 8 个整数，求证其中至少有两个数他们的差是 7 的倍数(注:0 是任何非零整数的倍数).

证明：设这 8 个数分别为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$,

令 $b_i = a_i \bmod 7$, $i=1,2,\ldots,8$, b_i 的取值为 0~6,

8 个数有 7 种值，由鸽巢原理至少有两数相等,不妨设为 b_i 与 b_j, $i\neq j$

所以 $a_i-a_j \bmod 7 = b_i-b_j \bmod 7 = 0$，此即 a_i-a_j 是 7 的倍数.

五.一个 $1\times n$ 棋盘用黑白两种颜色着色，不允许相邻两格都着黑色. 求着色方案数.

解：设 n 个格子的棋盘的着色方案数为 a_n，则 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$,

因为若第 1 格是白色,则第 2 格没有限制，于是后面 n-1 格的着色方案数为 a_{n-1};

若第 1 格是黑色,则第 2 格必须是白色,第 3 格没有限制，于是后面 n-2 格的着色方案数是 a_{n-2}.

$a_1=2$, $a_2=3$,

令 $A(x)$是序列 $a_1,a_2,\ldots$的母函数,即

$A(x)= a_1+ a_2x+ a_3x^2+\ldots$

$$\begin{aligned}
A(x) &= a_1+ a_2x+ a_3x^2+ a_4x^3+\ldots \\
-xA(x) &= \quad - a_1x- a_2x^2 - a_3x^3 - \\
-x^2A(x) &= \qquad - a_1x^2- a_2x^3 - \ldots
\end{aligned}$$

将上面 3 式相加得到:

$(1-x-x^2)A(x)= a_1+ (a_2- a_1)x=2+x$

$A(x)=(2+x)/(1-x-x^2)=(2+x)/[(1-\alpha x)(1-\beta x)]$

其中$\alpha=(1+\sqrt{5})/2$, $\beta=(1-\sqrt{5})/2$,

展开得 $A(x)=\sqrt{5}^{-1}\alpha^3/(1-\alpha x)$ - $\sqrt{5}^{-1}\beta^3/(1-\beta x)$

$$=\sqrt{5}^{-1}\Sigma_{k=0}^{\infty}(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})x^k,$$

所以 $a_n=\sqrt{5}^{-1}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})=F_{n+2}$，其中 F_n 是 Fibonacci 数.

六.计算机系有三个运动队，足球队有 38 人，篮球队有 15 人，排球队有 20 人，三个运动队共有 58 人，其中只有 3 人同时是三个队的队员，求恰好参加两个队的人数.

解：设 A,B,C 分别是足球队员,篮球队员,排球队员的集合,则

$|A|=38$, $|B|=15$, $|C|=20$, $|A\cap B\cap C|=3$, $|A\cup B\cup C|=58$,

$$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C| = |A|+|B|+|C|-|A\cup B\cup C|+|A\cap B\cap C|$$

$$=38+15+20-58+3=18$$

恰好参加两队的人数是 $18-C(3,2)\times 3=9$

七.有纪念章 4 枚，纪念册 6 本，赠送给 10 位同学，每人赠送一样，共有多少种不同送法.

解:纪念章视为相同,纪念册视为相同,总方案数为 $C(10,4)=210$.

八.将 a,b,c,d,e,f,g,h 排成一行，要求 a 在 b 的左侧，b 在 c 的左侧，问有多少种排法.

解:先选 3 个位置放 a,b,c，再将其它的元素全排列: $C(8,3)P(5,5)=6720$.

九.一个人攀登 n 级梯子, 如果每一步他能登上一级或两级, 那么有多少种攀登法.

解: 设 n 级梯子有 a_n 种攀登法,则 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$,

因为若第一步上一级,则后面还有 n-1 级台阶,有 a_{n-1} 种攀登法;

若第一步上两级,则后面还有 n-2 级台阶,有 a_{n-2} 种攀登法.

且 $a_1=1$, $a_2=2$,

以下计算与第 5 题类似,得到 $a_n=\sqrt{5}^{-1}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})=F_{n+1}$

十.已知生成矩阵

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

设接收端收到:

0 0 0 0 0, 0 1 0 1 1, 1 1 1 0 1, 1 0 1 1 0

试分别译出他们的原文.

解:校验矩阵是

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

H(0,0,0,0,0)'=(0,0,0)', 传输无误差,原文为 00,

H(0,1,0,1,1)'=(1,0,1)', 传输中第 1 位发生错误,原文为 11,

H(1,1,1,0,1)'=(1,1,0)', 传输中第 2 位发生错误,原文为 10,

H(1,0,1,1,0)'=(0,1,1)', 传输出现至少两次错误,无法译码.

北理工 02 级组合数学试卷

1. (10 分)在平面上任取不同于原点 O 的 9 个点，证明其中必存在两点 A,B 使得程AOB 不大于 45°.

2. (10 分)在 a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k 的全排列中，要求 b 在 a 的右边，c 在 b 的右边，d 在 c 的右边，e 在 d 的右边，但不要求它们一定相邻，问这样的排列有多少个?

3. (10 分)有 5 种感冒药，5 种退烧药，5 种止咳药进行配合试验。找 5 位病人，试验在 5 天内完成。每人每天吃一种感冒药，一种退烧药，一种止咳药，要求每种药每天都有人吃而且每种药所有人都要吃到。给一种设计方案。

4. (15 分) 现有 100 件产品，从中任意抽取 4 件。

(1) 共有多少种抽取方案?

(2) 如果 100 件产品中有 3 件次品，抽出产品中有次品的方案有多少种?

(3) 如果 100 件产品中有 3 件次品，求抽出产品中有次品的概率。

5. (10 分)求自然数 1000~10000 中不能被 3,5,7 整除的数的数目。

6. (10 分)有红球 3 个，黄球 2 个，绿球 2 个，从中取出 6 个，同种颜色的球是无区别的，计取球次序，求取球方案数。

北邮组合数学期末试卷

一、（10分）5对夫妻出席一宴会，围一圆桌坐下，试问有几种不同的方案？若要求每对夫妻相邻又有多少种方案？

二、（10分）某学院有7个男教师和6个女教师，现要从中选出8个人表演节目，要求其中男教师的数目为奇数，女教师的数目不少于2个。有多少种不同的选法。

三、（20分）求下列递推关系的一般解：（1）$a_n-3a_{n-1}=(1-2n)3^n$；（2）$a_n-7a_{n-1}+6a_{n-2}=3\times 4^n+2\times 3^n$。

四、（10分）A，B，C，D四种材料用作产品I，II，III，IV的原料，但要求I禁止用B和C作原料，II禁止用B作原料，III禁止用A作原料，IV禁止用A和D作原料。假定每种材料只作一种产品的原料，有多少种安排方案？

五、（10分）求满足条件

$$x_1+x_2+x_3=40,\quad 6\le x_1\le 15,\ 5\le x_2\le 19,\ 10\le x_3\le 24$$

的整数解的数目。

六、（10分）求从10到9999的正整数中是n^2但不是n^3,n^4形式的数的个数。

七、（10分）某校有20位教师，每位教师至少教数学、物理、化学这三门课程中的一门。已知教数学、物理、化学的教师分别有14、12、10位，同时兼教数学和物理的8位，同时兼教数学和化学的6位，同时兼教物理和化学的7位。只教一门课的老师有多少位？只教两门课的老师有多少位？

八、（10分）利用鸽巢原理证明Ramsey数R(3,3)=6。（R(3,3)表示满足条件“对n个顶点构成的完全图的边进行任意红蓝两着色，必定会存在一个红色三角形或者一个蓝色三角形”的最小正整数n。）

九、（10分）用红、黄、绿三种颜色给正五边形的五个顶点着色，要求每种颜色至少出现一次，有多少种不同的方案？刚体运动使之重合的看成是同一种方案。

北邮组合数学期末试卷2

一、（10分）从1到20这20个正整数中每次取出一个并登记，然后放回，连续取5次，得到一个由5个数字组成的数列。按这种方式能够得到多少个严格递减数列？能够得到多少个不减数列？

二、（10分）n对夫妻出席一宴会，围一圆桌坐下，试问有几种不同的方案？若要求每对夫妻相邻又有多少种方案？若要求每对夫妻都不相邻又有多少种方案？

三、（20分）求下列递推关系的一般解：（1）$\begin{cases}a_n-4a_{n-1}=5^n\\ a_1=1.\end{cases}$；（2）$\begin{cases}a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=2^{n+1},\\ a_0=1,\quad a_1=8.\end{cases}$。

四、（10分）设平面内有n条封闭曲线，两两相交于两点，且任意三条封闭曲线不相交于一点。求这样的n条曲线把平面分割成几个部分？

五、（10分）10台相同的计算机分给3个不同的单位，要求每个单位至少分配一台，且第1、2、3个单位的分配量分别不超过3、5、6台，共有多少种分配方案？

六、（10分）求从10到9999的正整数中是n^2但不是n^3,n^4形式的数的个数。

七、（10分）求由a，b，c，d四个字母构成的10位字符串中，b、c、d都至少出现一次的字符串的数目。

八、（10 分）两只大小不同的圆盘，都被均分成 200 个扇形。大盘的 200 个扇形中，任意取 100 个涂黑，另外 100 个涂白；小盘的每个扇形则任意涂黑或白。现将两只盘中心重合，大盘保持不动，转动小盘使小盘上每个扇形都含在大盘的扇形之内。证明：必存在某种转法，使得至少 100 个小盘上的扇形与大盘上对应的扇形颜色相同。

九、（10 分）用红、黄、绿三种颜色给正四面体的四个顶点着色，要求每种颜色至少出现一次，有多少种不同的方案？刚体运动使之重合的看成是同一种方案。

北邮组合数学试卷 3

一、（10 分）从 1 到 10 这 10 个正整数中每次取出一个并登记，然后放回，连续取 5 次，得到一个由 5 个数字组成的数列。按这种方式能够得到多少个严格递减数列？能够得到多少个不减数列？

二、（10 分）7 台不同的计算机分给 3 个不同的单位，要求每个单位至少分配一台，且第 1、2、3 个单位的分配量分别不超过 3、4、5 台，共有多少种分配方案？

三、（10 分）现要把 ABCD 四项任务分配给甲乙丙丁四位工人，要求刚好每位工人一项任务，但甲不安排任务 B 或 C，乙不安排任务 B，丙不安排任务 A，丁不安排任务 A 或 D，有多少种可能的分配方案？

四、（20 分）求下列递推关系的一般解：（1） $a_n-4a_{n-1}=2\times5^n-3\times4^n$；（2） $a_n-6a_{n-1}+9a_{n-2}=3^n$。

五、（10 分）某校有 200 个学生，每位学生至少选数学、物理、化学这三门课程中的一门。已知选数学、物理、化学的学生分别有 140、120、100 个，同时选数学和物理的 80 个，同时选数学和化学的 60 个，同时选物理和化学的 70 个。只选一门课的学生有多少个？只选两门课的学生有多少个？

六、（10 分）求满足条件

$$x_1+x_2+x_3=30,\quad 6\le x_1\le13,\ 0\le x_2\le15,\ 7\le x_3\le17$$

的整数解的数目。

七、（10 分）证明第二类 Stirling 数 $S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$。（$S(m,n)$表示 m 个不同的球放进 n 个相同的盒子里，并要求无一空盒的不同方案数。）

八、（10 分）用红、黄、绿三种颜色给正四面体的四个顶点着色，要求每种颜色至少出现一次，有多少种不同的方案？刚体运动使之重合的看成是同一种方案。

九、（10 分）从 1 到 200 这 200 个自然数中，至少要取出多少个数，才能保证一定存在两个数是互素的？证明你的结论。（两个正整数互素，是指它们没有除 1 以外的正公因数。）