2-8章复习课

知识结构

计数技巧

什么是组合数学

排列与组合

鸽巢原理

排列存在性

二项式系数

生成排列和组合

构造算法

容斥原理及应用

递推关系和生成函数

特殊计数序列

第2章　排列与组合

- 主要内容
  - 两个基本计数原理：加法原理、乘法原理
  - 集合的排列
    - 线性排列与循环排列
    - 多重集的排列
  - 集合的组合
    - 多重集的组合

第2章基本公式
第6章相对禁止问题的排列
第8章第一类Stirling数

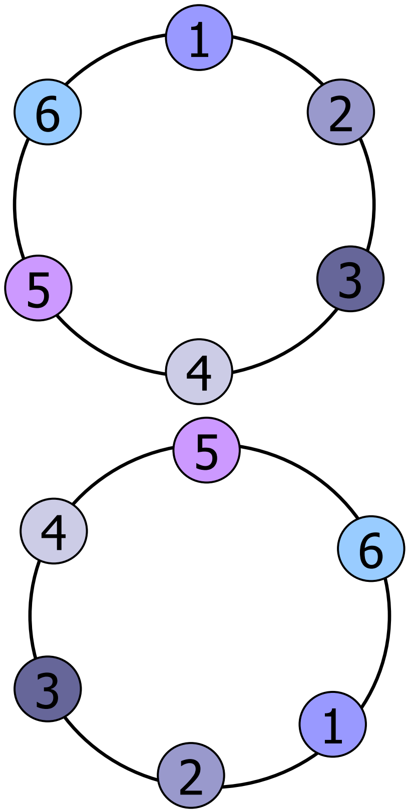
第2章基本公式
第7章指数型生成函数

第2章基本公式
第6章容斥原理
第7章生成函数

循环排列—基本公式

- 把元素排成首尾相连的一个圈，只考虑元素间的相对顺序的排列。
- ***n***个元素集合的循环***r***排列个数为

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$



- ***n***元素的循环全排列个数=**(*n*–1)!**

多重集的排列

- 无限重元素的排列计数
  - 设有多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2\ \ldots, \infty\cdot a_k\}$，则$S$的$r$-排列个数为$k^r$。
- 多重集的（全）排列计数
  - 设有多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2\ \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，则$S$的全排列数等于 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$
- 多重集的r-排列计算
  - 设有多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2\ \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，则S的r-排列数$h_n$可由指数生成函数求出，其中 $r<n$

多重集的组合

- 无限重数多重集组合：
  ① 设有多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2 \ldots, \infty\cdot a_k\}$，则$S$的$r$-组合数为

  $$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

  ② 设有多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$，若对任意的$1\leq i\leq k$，有$r\leq n_i$，则$S$的$r$-组合数为$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$
- S的r-组合个数等于方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数
  - 可用生成函数求解（特别是对a_i在组合中出现次数有约束时）

多重集组合（续）

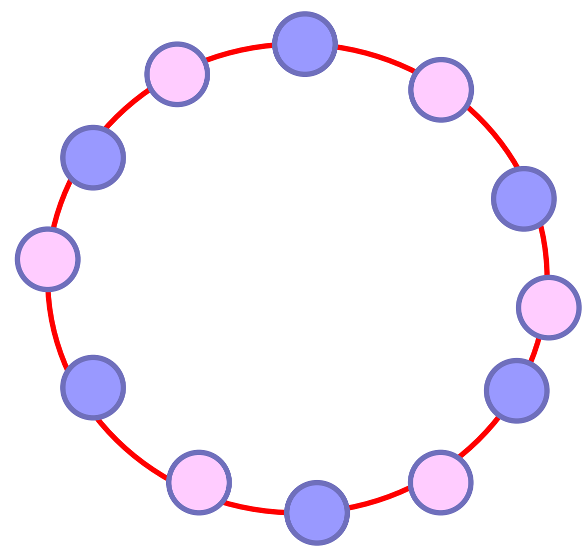
- 设有多重集$S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$，若存在$1 \le i \le k$，使得$r > n_i$，则$S$的$r$-组合数可由容斥原理求出。
  - 容斥原理方法
  - 生成函数方法（特别是对a_i在组合中出现次数有约束时）

习题2.7-8. 6名男士和6名女士围着一张圆桌就座, 如果男士和女士交替就座,一共有多少种就座方法

解：首先确定一位男士作为固定点，则6名男士共有5！种座法。

剩下的6位女士的座法为6！。

因此一共有5!*6! 种就座方法。



10. 从拥有10名男会员和12名女会员的一个俱乐部选出一个5人委员会。

(1)如果至少要包含2位女士，能够有多少种方法形成这个委员会?

(2)此外，如果俱乐部里某位男士和某位女士拒绝进入该委员会一起工作，形成委员会的方式又有多少?

解: (1)设满足条件的方法数为 a, 则

$$a=\binom{12}{2}\binom{10}{3}+\binom{12}{3}\binom{10}{2}+\binom{12}{4}\binom{10}{1}+\binom{12}{5}$$

$$=\binom{22}{5}-\binom{10}{5}-\binom{12}{1}\binom{10}{4}$$

(2) 满足条件的方法数为 $a-\binom{11}{1}\binom{9}{2}-\binom{11}{2}\binom{9}{1}-\binom{11}{3}$

11. 1到20之间没有两个连续整数的3整数集合有多少个？

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

解：所有3整数集合个数：$\binom{20}{3}$

只有两个连续整数的3整数集合个数：

(1) 两个连续整数为1，2, 此时3整数集合个数为17；

(2) 两个连续整数为19，20，此时3整数集合个数为17

(3) 两个连续整数为i, j, $1<i<j<20$, 此时3整数集合个数为17*16.

三个连续整数的3整数集合个数：18

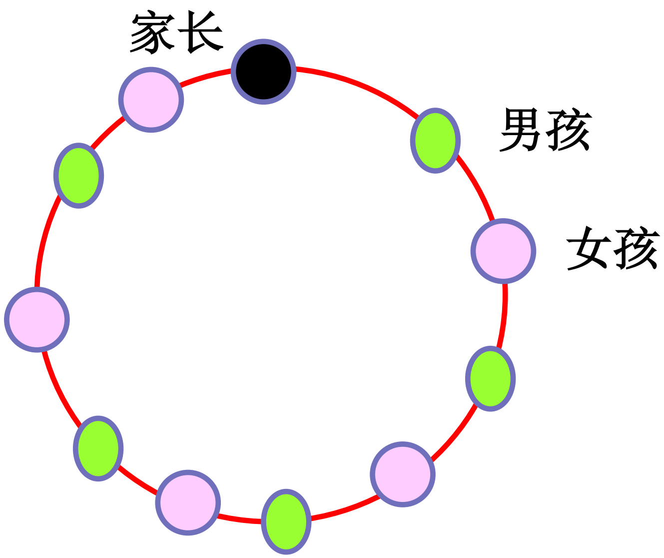
因此，满足题意的3整数集合有$\binom{20}{3}$- (17+17+16*17)-18 个。

30. 我们要围着一张桌子一圈给5个男孩、5个女孩和一名家长安排座位。

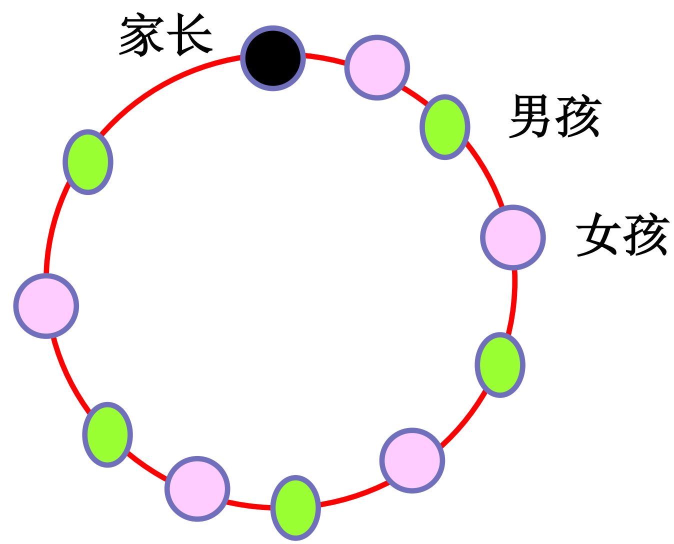
(1) 如果男孩不坐在男孩旁边，女孩不坐在女孩旁边，那么有多少种座位安排方式?

(2)如果有两名家长，又有多少种座位安排方式?

解：(1) 一名家长：先排家长，再排男孩，最后排女孩。



5!*5！种方法



5!*5！种方法

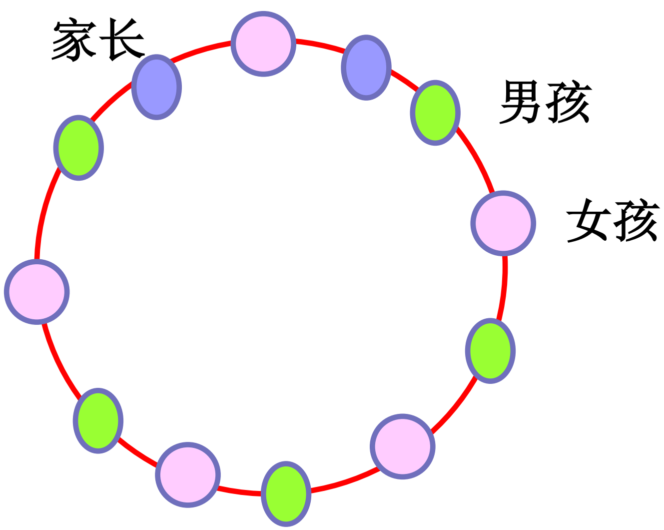
因此，一共有2*5!*5！种方法。

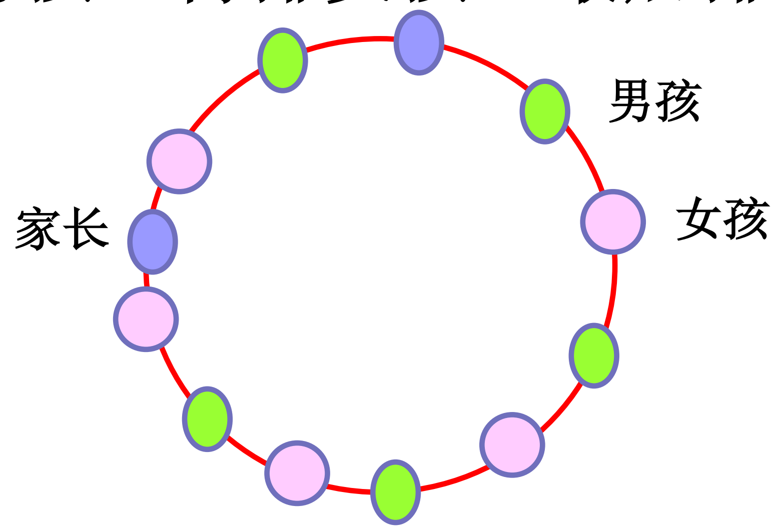
30. 我们要围着一张桌子一圈给5个男孩、5个女孩和一名家长安排座位。

(1) 如果男孩不坐在男孩旁边，女孩不坐在女孩旁边，那么有多少种座位安排方式？

(2)如果有两名家长，又有多少种座位安排方式？

解：(1) 两名家长：先排男孩，再排女孩，最后排家长





4!*5!*10*11种方法

$4!*\binom{5}{2}*\frac{5!}{(5-4)!}*2*2$种方法

相加得：30*5!5!种方法

38. 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ 有多少 $x_1\geq 2, x_2\geq 0, x_3\geq -5, x_4\geq 8$的整数解。

解：令 $y_1=x_1-2, y_2=x_2, y_3=x_3+5, y_4=x_4-8$，则方程变换为：

$$y_1+y_2+y_3+y_4=25,\ y_i\geq 0,\ i=1, 2, 3, 4$$

且与原方程的整数解个数相等。

因此，原方程的整数解个数为 $\binom{25+4-1}{25}=\binom{28}{3}$。

40. 有n根棍子列成一行，并将从中选出k根。

(a) 有多少种选择？

(b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的，那么又有多少种选择？

(c) 如果在每一对所选的棍子之间必须至少有l根棍子，有多少种选择？

解：(a) $\binom{n}{k}$种选择。

(b) 记选出的k根棍子为$l_1,\ldots,l_k$。

相当于用$l_1,\ldots,l_k$分隔剩下的n-k根棍子，使得l_i与l_{i+1}之间至少有一根棍子，$i=1,\ldots,k-1$。

设l_1左边的棍子数为x_0, l_i与l_{i+1}之间的棍子数为x_i, $i=1,\ldots,k-1$，l_k右边的棍子数为x_k,则选择个数为以下方程的解的个数：$x_0+x_1+\ldots+x_k=n-k$，其中$x_0\geq 0$, $x_i\geq 1$ $(i=1,\ldots,k-1)$, $x_k\geq 0$。（略）

40. 有n根棍 子列成一行，并将从中选出k根。

(a) 有多少种选择？

(b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的，那么又有多少种选择？

(c) 如果在每一对所选的棍子之间必须至少有l根棍子，有多少种选择？

解: (c) 记选出的k根棍子为$l_1,\ldots, l_k$。

相当于用$l_1,\ldots, l_k$分隔剩下的n-k根棍子，使得l_i与l_{i+1}之间至少有l根棍子，$i=1,\ldots,k-1$。

设l_1左边的棍子数为x_0, l_i与l_{i+1}之间的棍子数为x_i, $i=1,\ldots, k-1$，l_k右边的棍子数为x_k,则选择个数为以下方程的解的个数：$x_0+x_1+\ldots+x_k = n-k$，其中$x_0 \geq 0$, $x_i \geq l$ $(i=1,\ldots, k-1)$, $x_k \geq 0$。（略）

47. 有2n+1本相同的书要放入带有3层搁板的书柜中，如果每一对搁板放置的书总是多于另一层搁板上放置的书，那么有多少种方法可把书放入书柜中？

解：（减法原理）设x_1, x_2, x_3表示放入三层的书的数目，则$x_1+x_2+x_3=2n+1$. 因此，放法的总数为方程$x_1+x_2+x_3=2n+1$的解的个数，其中$0\le x_1, x_2, x_3 \le 2n+1$。

即是多重集$\{\infty.a, \infty.b, \infty.c\}$的2n+1组合的个数，为

$$\binom{2n+1+3-1}{2n+1}=\binom{2n+3}{2}=2n^2+5n+3。$$

47. 有2n+1本相同的书要放入带有3层搁板的书柜中，如果每一对搁板放置的书总是多于另一层搁板上放置的书，那么有多少种方法可把书放入书柜中？

解：不满足条件的放法中，肯定有一层且只有一层放入书的数目至少为n+1。

因此不满足条件的放法数目为

$$3\cdot\sum_{i=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1-i+2-1}{2n+1-i}=1/2\cdot(3(n+1)(n+2)).$$

得满足条件的放法数目为

$$2n^2+5n+3-1/2\cdot(3(n+1)(n+2)) = n(n+1)/2。$$

第三章 鸽巢原理

- 主要内容
  - 鸽巢原理的简单形式
  - 鸽巢原理的加强形式
  - Ramsey定理

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。

定理3.2.1 令q_1，q_2，…，q_n为正整数.若将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

个物体被放进n个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有q_1个物体，
- 或者第2个盒子至少含有q_2个物体，…，
- 或者第n个盒子至少含有q_n个物体。

平均原理：设**m**和**n**都是正整数。如果**m**个物体放入**n**个盒子，则至少有一个盒子包含至少**[m/n]**个物体。

1. 证明：在n+2个任选的正整数中，存在两个数，或者其差能被2n整除，或者其和能被2n整除。

证明：已知所有正整数除以2n的余数的取值只能为0, 1, 2, …, 2n-1。

把以上余数构造以下n+1个子集：

{1, 2n-1}, {2, 2n-2}, …, {n-1, n+1}, {n, n}, {0, 0}。

任选n+2个正整数，由鸽巢原理知，一定存两个数，其除以2n的余数来自同一个子集，设为A。

(1)若A是前n-2个子集中一个，则这两个数的和能被2n整除；

(2)若A是最后2个子集中一个，则这两个数的差能被2n整除。

2. 一间房屋内有10个人，他们当中没有人超过60岁（年龄只能以整数给出)，但又至少不低于1岁。证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的10能换成更小的数吗?

证明: (1) 10个人构成的子集一共是$2^{10}=1024$个，去除掉空集与全集，一共1022个子集可以是找出的两组人中的一组。

又这些子集的年龄和最小为1岁，且不超过 60*9=540岁。

因此，由鸽巢原理知，至少有两组人的年龄和相同，去除这两组人的相同人后，所得的两组人满足题目要求。

2. 一间房屋内有10个人，他们当中没有人超过60岁（年龄只能以整数给出)，但又至少不低于1岁。证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的10能换成更小的数吗？

证明: (2)当考虑9 个人时，9个人构成的子集一共是$2^9=512$个，去除掉空集与全集，一共510个子集可以是找出的两组人中的一组。

又这些子集的年龄和最小为1，最大为60*8=480。

因此，由鸽巢原理知，至少有两组人的年龄和相同，去除这两组人的相同人后，所得的两组人满足题目要求。

3. 证明：对任意正整数n, 必存在由0和3组成的正整数能被 n 整除。

证明：设有n+1个数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, 其中$a_i=33\ldots3$, 由$i$个3构成 (i=1,…, n+1)。

由于任何正整数除以n的余数有0, 1, …, n-1，共n种情况。由鸽巢原理知，一定存在两个数整除n后的余数相同。

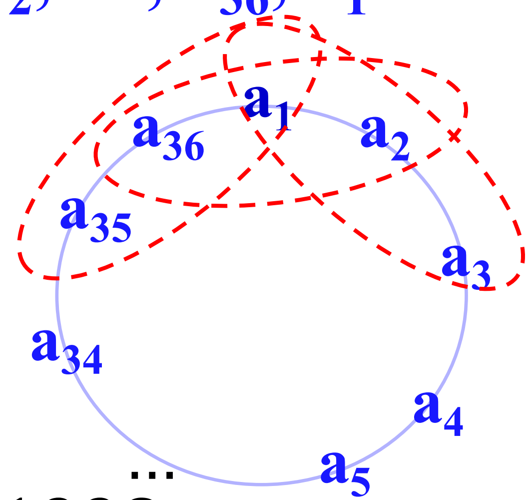
假设这两个数为a_i, a_j，且$a_i > a_j$，则$a_i - a_j$能被n整除，且是由0和3组成的正整数。

4. 一个圆周被分成 36 段，在36段上按任意方式分配数字1, 2, ..., 36，证明存在三个相邻段，使得分配给他们的数字之和至少是56。

证明：设36个数围成的圆圈为$a_1, a_2, \ldots, a_{36}, a_1$。

令 $b_i=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$，$i=1, 2, \ldots, 34$,

$b_{35}=a_{35}+a_{36}+a_1$，$b_{36}=a_{36}+a_1+a_2$。



则$b_1+b_2+\ldots+b_{36}= 3(1+2+\ldots+36)$

$=3*666=1998$。

由鸽巢原理知，必存在某个$b_i \geq \left\lceil \frac{1998}{36} \right\rceil = \lceil 55.5 \rceil = 56$。

27. {1, 2, …, n}的子集的一个集合具有如下性质：每一对子集至少有一个公共元素。证明：在该子集的集合中最多存在2^{n-1}个子集。

证明：(反证法) 记满足性质的集合为S, 且S包含超过2^{n-1}个子集。不失一般性，假设S包含$2^{n-1}+1$个集合A_i, $i=1,\ldots, 2^{n-1}+1$。设集合T包含所有子集A_i的补集，则S∪T包含2^n+2个子集。由于{1, 2, …, n}一共只包含2^n个子集，由鸽巢原理的加强形式知，一定有$\left\lceil \frac{2^n+2}{2^n} \right\rceil=2$个子集相等。

由于A_i互不相等，因此A_i的补集互不相等，$i=1,\ldots, 2^{n-1}+1$，则存在$1\leq j<k \leq 2^{n-1}+1$，使得A_j与A_k的补集相等，从而A_j与A_k相交为空，矛盾。

因此假设不成立，即S最多存在2^{n-1}个子集。

第4章：生成排列和组合

- 排列生成算法
  - 递归方法
  - 邻位替换
  - 逆序生成算法
- 生成组合算法
  - 一字典序
  - 一组合压缩序
  - 一反射Gray序（逐次法）
- 生成r-组合算法
  - 字典序r-组合生成算法

$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{4}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}$ 的下一个排列

排列 361245的所有逆序/逆序列

逆序列 2 2 0 1 1 0对应的排列

第五章 生成排列与组合

- 帕斯卡三角形
- 二项式定理
- 二项式系数的单峰性
- 多项式定理
- 牛顿二项式定理

- PASCAL公式: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$
- 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

- 令 α 是一个实数, 那么对于所有满足 $0\le|x|<|y|$ 的变量x, y有

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\mathbf{x}^{k}\mathbf{y}^{\alpha-k}$$

其中 $\binom{\alpha}{k}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

- 用组合证明方法证明等式
- 链与反链

令S是n个元素的集合, C 是S的子集的集合

- 若C中任意两个子集都存在包含关系, 则称C是S的一个链。
- 若C中任意一个子集都不包含在其他子集内，即任意两个子集都不存在包含关系，则称C是S的一个反链。

二项式系数的单峰性

设S是为n个元素的集合，

- 如果n是偶数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$的唯一的反链是所有n/2子集的反链；
- 如果n是奇数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$的反链有两个：
  - ✓ 所有(n-1)/2子集的反链；
  - ✓ 所有(n+1)/2子集的反链。

例：令S ={a, b, c, d}，找出S的所有反链。

几个公式

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad (|z|<1)$$

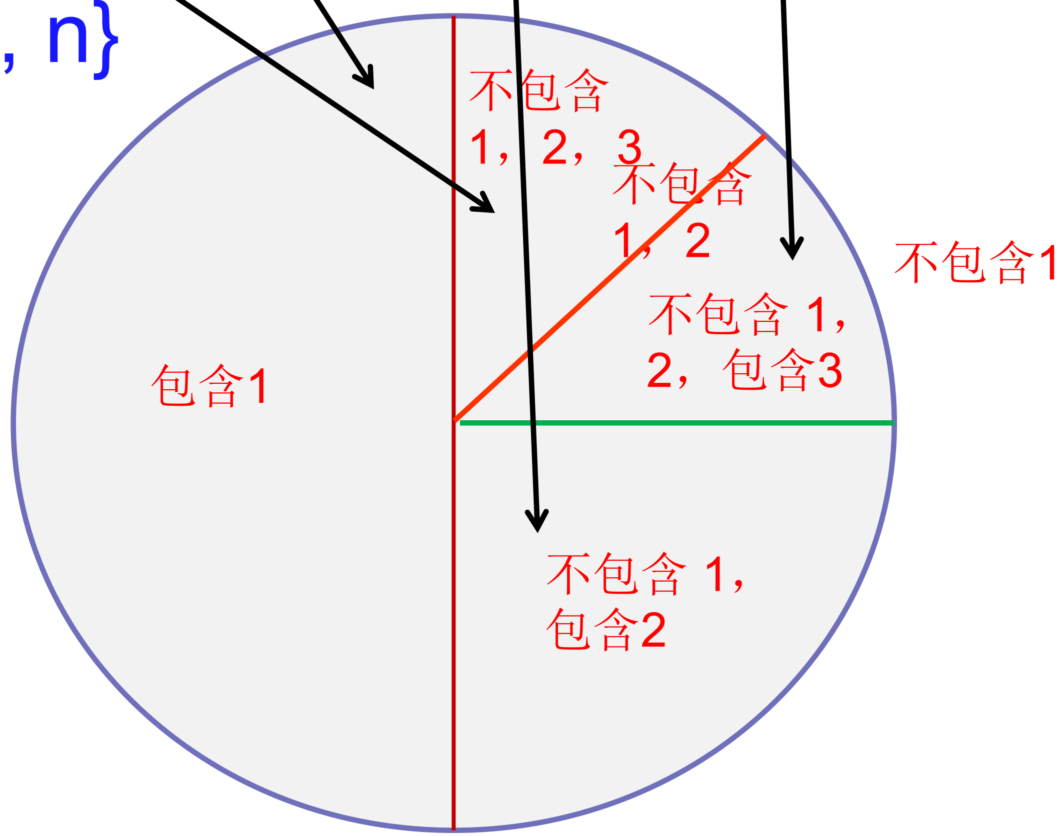
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z|<1)$$

$$(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \quad (|z|<1)$$

11. 使用组合推理证明以下等式：

$$\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}$$

A={1,2,3,…, n}



A的k子集的数目

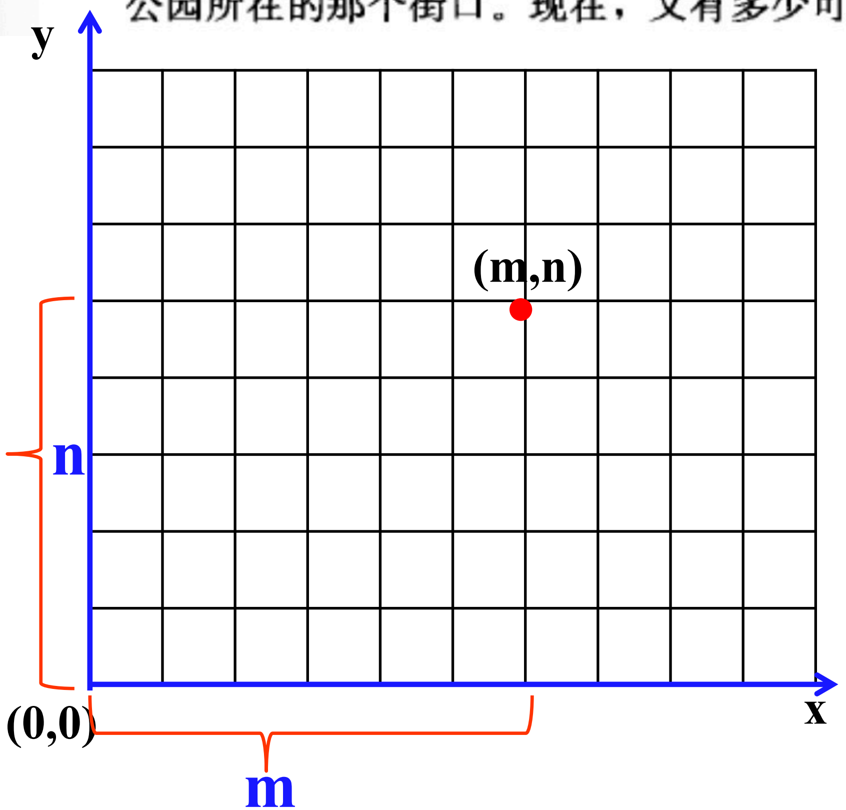
23. 一名学生每天都从家步行到学校，学校位于其家以东 10 个街区及以北 14 个街区处。她总是选择有 24 个街区的一条最短的路径。

(a) 有多少可能的路径?

(b) 设在她家以东 4 个街区及以北 5 个街区处住着她最好的朋友，她每天都在去学校的路上遇见这位朋友。此时，又有多少可能的路径?

(c) 此外，再设在她的朋友家以东 3 个街区和以北 6 个街区处有一个公园，这两个女孩每天都停在那里休息和游戏。此时，又有多少可能的路径?

(d) 由于在公园休息和游戏，这两个学生常常上学迟到。为避免公园的诱惑，这两个学生决定不通过公园所在的那个街口。现在，又有多少可能的路径?



按照向右、向上方向从点(0,0)到点(m,n)的路径条数为$\binom{m+n}{m}$。

28. 设n和k是正整数。给出下列恒等式的一个组合推理证明：

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

解：设有n位男同学，n位女同学，从中选出一支由n位同学组成队伍参加运动会开幕式，其中，队伍中一位男生担任旗手。有两种选法：

(1) **先选k个男生，再选n-k个女生，再从选中的k个男生中选出一名旗手，其中k=1, 2, …, n，则队伍的选择方法数为**

$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$；

(2) **先从男生中选出一名旗手，再从剩下的2n-1个同学中选n-1名同学组成队伍，则队伍的选择方法数为**$n\binom{2n-1}{n-1}$**。**

证毕。

29. 寻找并证明下面这个数的公式：

$$\sum_{\substack{r,s,t\geq 0 \\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}。$$

其中，上式的求和是对所有满足r+s+t=n的非负数r, s, t进行的。

解：设一个袋子里有m_1个红球，m_2个蓝球，m_3个黄球，从袋中选出n个球，则有$\binom{m_1+m_2+m_3}{n}$种方法。

第6章 容斥原理及应用

- 主要内容
  - 容斥原理：
    - 解决具有重叠集合的并集的计数原理
    - 集合交、并的计数
  - 容斥原理的应用
    - 多重集组合计数
    - 特殊问题排列计数：错位排列、（绝对、相对）禁止位置排列

容斥原理

设集合S是全集，S的子集A_i是具有性质P_i的物体的个数

- 集合S 不具有性质$P_1,P_2,\ldots,P_m$的物体的个数：

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

其中，

第一个和对$\{1,2,\ldots,m\}$的所有的1子集$\{i\}$进行，

第二个和对$\{1,2,\ldots,m\}$的所有的2集合$\{i, j\}$进行,依此类推.

- 集合S中至少具有性质$P_1,P_2,\ldots,P_m$之一的对象的个数：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

容斥原理在多重集组合计数应用

- 设有多重集$S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$，若存在$1 \le i \le k$，使得$r > n_i$，则$S$的$r$-组合数可由容斥原理求出。
  - 容斥原理方法
  - 生成函数方法（特别是对a_i在组合中出现次数有约束时）

错位排列

- 设$X=\{1,2,\ldots,n\}$，它的排列用$i_1\ i_2\ldots\ i_n$表示，错位排列是使得 $i_1\neq 1,\ i_2\neq 2,\ldots,\ i_n\neq n$ 的排列。用D_n表示错位排列个数。

- 错位排列计数：

$$D_n=n!\,(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

- D_n满足如下递推关系：
  - $D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$，$(n=3,4,\ldots)$
  - $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$，$(n=2,3,\ldots)$

绝对禁止位置排列

- 令$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是$\{1, 2, \ldots, n\}$的子集(可以为空集)，用$P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$表示$\{1,2,\ldots,n\}$的排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的集合，使得：

X_j是i_j的禁止位置

$$i_1\text{不在}X_1\text{内，}\quad i_2\text{不在}X_2\text{内，}\quad \ldots,\quad i_n\text{不在}X_n\text{内}$$

- 带禁止位置的“非攻击型车”

相对禁止位置排列

- $\mathbf{Q_n}$：{1, 2,…, n}的排列中没有12, 23, …, (n-1)n 这些模式出现的排列的个数

- 对于$n\geq1$，$Q_n = n!+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$

$$= n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

Q_n与D_n的关系

- $D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$
- $Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k}(n-k)!$
- $Q_n = D_n + D_{n-1}$

2. 求从1到10,000中不能被4，6，7，或10整除的整数个数。

解：设集合A, B, C, D分别表示能被4，6，7，10整除的整数集合，则满足题意的整数个数为$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}|$。

计算得： $|A|=10000/4=2500$, $|B|=\left\lfloor\frac{10000}{6}\right\rfloor=1666$,

$|C|=\left\lfloor\frac{10000}{7}\right\rfloor=1428$, $|D|=10000/10=1000$

$|A\cap B|=\left\lfloor\frac{10000}{12}\right\rfloor=833$, $|A\cap C|=\left\lfloor\frac{10000}{28}\right\rfloor=357$, $|A\cap D|=10000/20=500$,

$|B\cap C|=\left\lfloor\frac{10000}{42}\right\rfloor=238$, $|B\cap D|=\left\lfloor\frac{10000}{30}\right\rfloor=333$, $|C\cap D|=\left\lfloor\frac{10000}{70}\right\rfloor=142$,

$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{10000}{84}\right\rfloor=119$, $|A\cap B\cap D|=\left\lfloor\frac{10000}{60}\right\rfloor=166$,

$|A\cap C\cap D|=\left\lfloor\frac{10000}{140}\right\rfloor=71$, $|B\cap C\cap D|=\left\lfloor\frac{10000}{210}\right\rfloor=47$,

$|A\cap B\cap C\cap D|=\left\lfloor\frac{10000}{420}\right\rfloor=23$.

2. 求从1到10,000中不能被4，6，7，或10整除的整数个数。

解：（续）由鸽巢原理知，

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| = 10000-2500-1666-1428-1000$$
$$+ 833+357+500+238+333+142$$
$$- 119-166-71-47$$
$$+23$$
$$= 5429。$$

4. 确定多重集合S={4·a, 3· b, 4 ·c, 5 ·d}的12组合数。

解：令多重集 {∞·a, ∞·b, ∞·c, ∞·d}的所有12子集的集合为T，

A, B, C, D分别是是S中包含多于4个a，3个b，4个c和5个d的12子集的集合。则S的12组合数为$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}|$。

计算得：$|T|=\binom{12+4-1}{12}=\binom{15}{3}$，

由于A中的每个子集中a至少出现5次，剩下7个元素可以是T的任何7-组合，因此$|A|=\binom{7+4-1}{7}=\binom{10}{3}$，

由于B中的每个子集中a至少出现4次，剩下8个元素可以是T的任何8-组合，因此$|B|=\binom{8+4-1}{8}=\binom{11}{3}$，

同理得：$|C|=\binom{7+4-1}{7}=\binom{10}{3}$, $|D|=\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{3}$。

4. 确定多重集合S={4·a, 3· *b*, 4 ·c, 5 ·d}的12组合数。

解：令多重集 {∞·a, ∞·b, ∞·c, ∞·d}的所有12子集的集合为T，

A, B, C, D分别是是S中包含多于4个a， 3个b， 4个c和5个d的12子集的集合。则S的12组合数为$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}|$。

由于A ∩ B中至少包含5个a, 4个b，因此剩余3个元素是T的3-组合，

因此，$|A\cap B|=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}$，

同理可得，$|A\cap C|=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}$, $|A\cap D|=\binom{1+4-1}{1}=\binom{4}{1}$,

$|B\cap C|=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}$, $|B\cap D|=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}$, $|C\cap D|=\binom{1+4-1}{1}=\binom{4}{1}$,

4. 确定多重集合S={4·a, 3· b, 4 ·c, 5 ·d}的12组合数。

解：令多重集 {∞·a, ∞·b, ∞·c, ∞·d}的所有12子集的集合为T，

A, B, C, D分别是是S中包含多于4个a， 3个b， 4个c和5个d的12子集的集合。则S的12组合数为$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}|$。

由于A∩B∩C中至少包括5个a, 4个b, 5个c，显然不可能，因此

|A∩B∩C |= 0。

同理可得，|A∩B∩D |= |A∩C∩D |= |B∩C∩D |= |A∩B∩C ∩D |=0。

由鸽巢原理知，S的12组合个数为

$$\begin{aligned}|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}| &= \binom{15}{3} - \binom{10}{3} - \binom{11}{3} - \binom{10}{3} - \binom{9}{3} \\ &\quad + \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \\ &= 34.\end{aligned}$$

9. 确定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ 满足 $1\le x_1\le 6$, $0\le x_2\le 7$, $4\le x_3\le 8$, $2\le x_4\le 6$的整数解的数目。

解：令$y_1=x_1-1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3-4$, $y_4=x_4-2$，则满足题意的整数解的个数等于 方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=13$, $0\le y_1\le 5$, $0\le y_2\le 7$, $0\le y_3\le 4$, $0\le y_4\le 4$的整数解的数目。

令 A, B, C, D分别表示$y_1+y_2+y_3+y_4=13$ 满足 $y_1\ge 6$, $y_2\ge 8$, $y_3\ge 5$, $y_4\ge 5$的整数解的个数，则满足题意的整数解个数为

$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}|$。

(略)

14. 确定计数集合{1, 2, …, n}的排列中恰有k个整数在它们的自然位置上的排列数的一般公式。

解： $\binom{n}{k}\boldsymbol{D_{n\text{-}k}}$。

16. 用组合推理导出下面的等式：

$$n! = \binom{n}{0}D_n + \binom{n}{1}D_{n-1} + \binom{n}{0}D_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}D_1 + \binom{n}{n}D_0$$

（这里D_0定义为1。）

解：设S是集合{1, 2, …, n}的所有排列的集合，则|S|=n!

又设S_k是{1, 2, …, n}的排列中恰好有k个整数在它们的自然位置上的排列的集合，则 $|S_k|=\binom{n}{k}D_{n-k}$

又因为 $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$，且 对任意的$i, j, i \neq j$，$S_i \cap S_j = \emptyset$。

因此，$n!=|S|=|S_1|+|S_2|+\ldots+|S_n|=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k}$。

25. 计数$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$的排列$i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$的个数，其中$i_1 \neq 1, 5$; $i_3 \neq 2, 3, 5$; $i_4 \neq 4$以及; $i_6 \neq 5, 6$。

解：设A_1表示$i_1=1$或$i_1=5$的排列集合，

A_2表示$i_3=2, 3$或 5的排列集合，

A_3表示$i_4=4$的排列集合，

A_4表示$i_6=5$或$i_6=6$的排列集合。

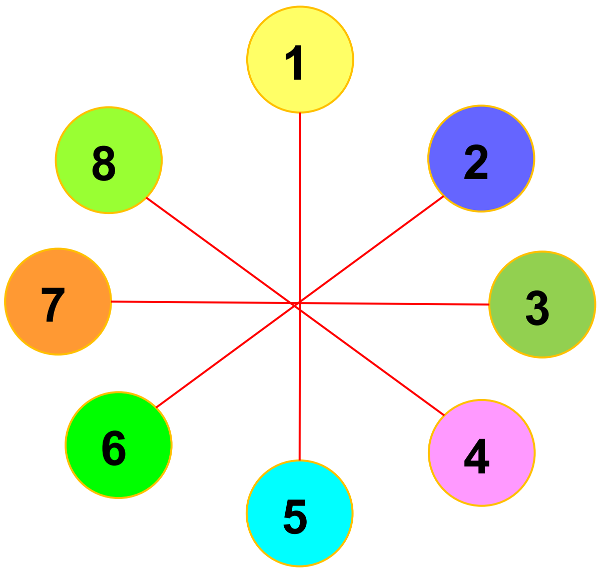
则由容斥原理知，满足条件的排列个数为

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|。$$

$|A_1|=\binom{2}{1}5!$, $|A_2|=\binom{3}{1}5!$, $|A_3|=5!$, $|A_4|=\binom{2}{1}5!$,

$|A_1 \cap A_2|=(\binom{3}{1}+\binom{2}{1})4!$, $|A_1 \cap A_3|=\binom{2}{1}4!$ （略）

27.旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个女孩脸朝前围坐在旋转木马上，使得每一个女孩看到另一个女孩的后背。他们能够有多少种方法改变座位使得每人前面的女孩都与原先的不同？



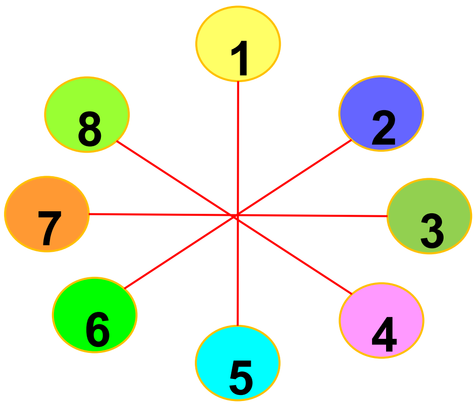
解：设用数字**1,2,…, 8**分别表示**8**位女孩，

(*i*, *j*)表示第***j***个女孩在第***i***个女孩后面。

假设$\mathbf{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8}$分别表示仍然有**(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (8,1)**出现的坐法的集合。

则使得每人前面的女孩都与原先的不同的坐法的数目为：$|\cap_{i=1}^{8} \overline{A}_i|$。

27.旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个女孩脸朝前围坐在旋转木马上，使得每一个女孩看到另一个女孩的后背。他们能够有多少种方法改变座位使得每人前面的女孩都与原先的不同？



计算$|A_1|$：因为每个座位都代表一种不同的动物，因此$|A_1|=8*6!$。

显然，由于对称性，$|A_i|= 8*6!, i=1,\ldots, 8.$

计算$|A_1\cap A_2| =8*5!, |A_1 \cap A_3 |=8*5!$

同样，由对称性，$|A_i\cap A_{i+1}|=8*5!$。

$|A_1\cap A_2 \cap A_3 |=8*4!$，$|A_1\cap A_2 \cap A_4 |=8*4!$，$|A_1\cap A_3 \cap A_5 |=8*4!$，

由对称性，$|A_i\cap A_j \cap A_k |= 8*4!$。

类似可得 $|A_{i1}\cap A_{i2} \cap\ldots \cap A_{ik} |=8(8-k)!, k=1,\ldots, 7$

$|\cap_{i=1}^{8} A_i|= 8$。 由容斥原理可得满足条件的坐法数=13000。（略）

当座位相同时，坐法数=13000/8=1625。

第7章　递推关系和生成函数

- 从具体问题求递推关系
- 从递推关系求解一般项h_n
  - 迭代法
  - 常系数线性齐次递推关系
    - 特征方程方法
    - 生成函数法
  - 常系数线性非齐次递推关系
    - 特征方程方法
    - 生成函数法

常系数线性齐次递推关系

常系数线性齐次递推关系：

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k)$$

- 特征方程法
  - 求特征方程 $x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\ldots-a_k=0$ 的特征根；
  - 分互异根及重根两种情形。
- 生成函数法
  - 求生成函数形如$p(x)/q(x)$
  - 生成函数的展开式，通常化为代数分式和形式：$c/(1-rx)^t$, 利用牛顿二项式展开。

常系数线性齐次递推关系的解

定理7.4.1：令q为一个非零数，则 $h_n=q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\dots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q是多项式方程

$$x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\dots-a_{k-1}x-a_k=0 \quad (2)$$

的一个根.

若多项式方程(2)有k个不同的根$q_1, q_2,\dots, q_k$, 则

$$h_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\dots+c_kq_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解：任意给定初始值h_0, h_1, $\dots,h_{k-1}$, 都存在c_1, $c_2,\dots$, c_k使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列.

定理7.4.2 令$q_1, q_2,\ldots,q_t$为常系数线性齐次递推关系:

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (n\geq k) \quad (1)$$

的特征方程的互异的根。如果q_i是(1)的特征方程的s_i重根，那么该递推关系的通解中对应于q_i的部分为 $H_n^{(i)}=c_1q_i^n+c_2nq_i^n+\ldots+c_{s_i}n^{s_i-1}q_i^n$,

且该递推关系的通解为:

$$h_n= H_n^{(1)} + H_n^{(2)} +\ldots+ H_n^{(t)}$$

常系数线性非齐次递推关系

非齐次线性递推关系：

$$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \ldots + a_k h_{n-k} + b_n, \quad (a_k, b_n \neq 0, n \geq k)$$

- 特征函数法

(1) 求齐次关系的一般解

(2) 求非齐次关系的一个特解

(3) 将一般解和特解结合,通过初始条件确定一般解中出现的常系数值

- 生成函数法

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

生成函数

- 令h_0, $h_1,\ldots,h_n\ldots$为一无穷数列，其生成函数**g(x)**定义为：$g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots$
  - 生成函数的一般形式
  - 求解递推式
- 用生成函数求解多重集的组合
  - 特殊形式的生成函数

生成函数与多重集组合

- 设k是正整数, g(x)是数列$h_0, h_1, \ldots, h_n \ldots$的生成函数, 其中$h_n$等于方程$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$的非负整数解个数.
  - 设多重集合S={∞·a_1, ∞·a_2, …, ∞·a_k}， e_i表示在一个n组合中a_i出现的次数

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}\quad=(\sum_{e_1=0}^{\infty}x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty}x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty}x^{e_k})$$

$$=\sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty}x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$$

其中， x_n前的系数即为 h_n

  - 当n组合中a_i的出现次数有约束时，将反映到第i个因子中

指数生成函数

- 数列$h_0,h_1,h_2,\ldots,\ h_n$的指数生成函数定义为

$$g^{(e)}(x)=h_0+\frac{h_1}{1!}x+\frac{h_2}{2!}x^2+\frac{h_3}{3!}x^3+\cdots+\frac{h_k}{k!}x^k+\cdots$$

  - 指数生成函数的一般形式

- 用指数生成函数求解多重集的排列
  - 特殊形式的生成函数

指数生成函数与多重集排列

- 设有多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，其中$n_1, n_2, \ldots, n_k$是非负整数。设$h_n$是S的n排列数。则数列$h_0, h_1, \ldots, h_n,\ldots$ 的指数型生成函数$g^{(e)}$为

$$g^{(e)}(x)=f_{n_1}(x)\, f_{n_1}(x)\ldots f_{n_k}(x),$$

其中，对于$i=1,2,\ldots,k$，有

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{ni}}{n!},$$

- 当n排列中a_i的出现有约束时，将反映到第i个因子中
- 可推广到无穷重数

指数生成函数与多重集排列

- 多重集合S={∞· a_1, ∞·a_2,…, ∞·a_k}的n排列数为h_n, 求数列h_0, h_1,.., h_n,…的指数生成函数为

$$g^{(e)}(x) = h_0 + \frac{h_1}{1!}x + \frac{h_2}{2!}x^2 + \frac{h_3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{h_k}{k!}x^k + \cdots$$

$$= f_\infty(x) f_\infty(x) \ldots f_\infty(x)$$（k个因子）

其中，$f_\infty(x)$= 1+x+x_1/2!+…+ x_n/n!+…=e^x

  - 当n排列中a_i的出现有约束时，将反映到第i个因子中

18. 确定下面方程的非负整数解的个数h_n的生成函数：

$$2e_1+5e_2+e_3+7e_4=n$$

解：令$f_1=2e_1, f_2=5e_2, f_3=e_3, f_4=7e_4$，则原方程转化为

$$f_1+f_2+f_3+f_4=n$$

其中，f_1是偶数，f_2是5的倍数，f_4是7的倍数。

因此，h_n的生成函数为

$$g(x) = (1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots.)(1+x+x^2+\ldots)(1+x^7+x14+\ldots)$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^7}。$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^a} = 1+x^a+x^{2a}+\ldots x^{na}+\ldots}$$

25. 设h_n表示在满足下面条件之下给1×n棋盘着色的方法数：用红色、黄色、蓝色、绿色着色，其中红格数是偶数，黄格数是奇数。确定这个数列 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的指数生成函数。然后求出$h_n$的一个简单的公式。

解：问题等价于多重集{∞·R, ∞·Y, ∞·B, ∞·G}的n排列个数，其中R出现偶数个，Y出现奇数个。

指数生成函数为：

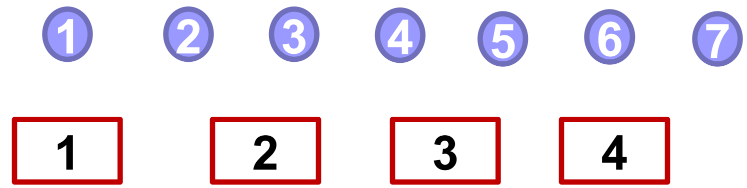
$$g^e(x) = \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^2$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^x-e^{-x}}{2}e^x=\frac{e^{4x}-1}{4}$$

$$=x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{4^2x^3}{3!}+\ldots+\frac{4^{n-1}x^n}{n!}+\ldots.$$

得 $h_n=4^{n-1}, n\geq 1, h_0=0$。

例： 7个有区别的球放进4个有标志的盒子里，要求第1，2两个盒子必须有偶数个球，第3个盒子有奇数个球，求不同的方案个数。



解：每个方案相当于为1-7号球中的每个球选取1, 2, 3, 4号盒子中的一个，相当于4个盒子的一个7排列。

因此，不同方案个数相当于对多重集合S={∞·1, ∞·2, ∞·3, ∞·4}取7排列的个数，且满足1，2出现偶数次，3出现奇数次。

设h_n为S的n排列的个数，则数列$h_1,h_2,\ldots, h_n,\ldots$所对应的指数生成函数为:

$$g^{(e)}(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)e^x$$

例：　7个有区别的球放进4个有标志的盒子里，要求1，2两个盒子必须有偶数个球，第3个盒子有奇数个球，求不同的方案个数。

证：(续)

$$\mathbf{g}^{(e)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8}(e^{4x} - 1 + e^{2x} - e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{8}\left\{-1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[4^n + 2^n - (-2)^n\right]\frac{x^n}{n!}\right\}.$$

因此　$h_n = \frac{1}{8}\left[4^n + 2^n - (-2)^n\right],$

$$h_7 = \frac{1}{8}\left[4^7 + 2^7 - (-2)^7\right] = 2080.$$

30. 设用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数，且至少有一个蓝格的着色个数是h_n，求出h_n满足的递推关系，并求出h_n。

解：设g_n表示用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数的着色数，f_n表示用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数，但蓝色不出现，则$h_n=g_n-f_n$。

初始条件：$f_0=g_n=h_n=0$。当n≥1时，

(1)由于f_n即是用红色、黄色给1×n棋盘着色，且红色为偶数的着色数。

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1}}$$

30. 设用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数，且至少有一个蓝格的着色个数是h_n，求出h_n满足的递推关系，并求出h_n。

解：设g_n表示用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数的着色数，f_n表示用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数，但蓝色不出现，则$h_n=g_n-f_n$。

初始条件：$f_0=g_n=h_n=0$。当$n\geq 1$时，

(1)由于f_n即是用红色、黄色给$1\times n$棋盘着色，且红色为偶数的着色数。

首先对前$n-1$个格子着色，此时，每个格子可任意着红色或黄色。若红色格子为偶数个，则第n个格子只能着黄色；若红色格子为奇数个，则第n个格子只能着红色，因此$f_n=2^{n-1}$。

30. 设用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数，且至少有一个蓝格的着色个数是h_n，求出h_n满足的递推关系，并求出h_n。

解：设g_n表示用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数的着色数，f_n表示用红色、黄色和蓝色给1×n棋盘着色，红格数是偶数，但蓝色不出现，则$h_n=g_n-f_n$。

初始条件：$f_0=g_n=h_n=0$。当n≥1时，

(2) 令b_n表示是用红色、黄色、蓝色给1×n棋盘着色，且红色为奇数的着色数，则$g_n+b_n=3^n$。

首先对第一个格子着色，

(a) 若第一个格子着黄色或蓝色，则着色数为$2g_{n-1}$；

(b) 若第一个格子着红色，则着色数为$b_{n-1}=3^{n-1}-g_{n-1}$。

得$g_n=2g_{n-1}+3^{n-1}-g_{n-1}=3^{n-1}+g_{n-1}$。

解得：$g_n=\dfrac{3^n-1}{2}$。

综上，得 $h_n=g_n-f_n=\dfrac{3^n-1}{2}-2^{n-1}=\dfrac{3^n-2^n+1}{2}, n\geq 1$

37. 确定（由0，1，2组成的）长度为n且不包含两个连续0或连续1的三进制串的个数a_n的递推关系，然后求出a_n的公式。

解: 假设*i*满足条件的三进制串中第1位为0，1，2的三进制串个数分别为b_n, c_n, d_n，则$a_n=b_n+c_n+d_n$ (1)

若第1位为2，则第$a_{n-1}=d_n$ (2)

若第1位为0，则第2位只能为1或2，得 $b_n=c_{n-1}+d_{n-1}$ (3)

若第1位为1，则第2位只能为0或2，得 $c_n=b_{n-1}+d_{n-1}$ (4)

(3)+(4) 得 $b_n+ c_n = b_{n-1} +c_{n-1}+2d_{n-1}$。

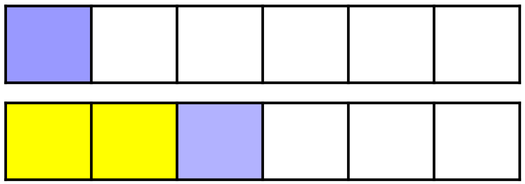
由(1)与(2) 知 $b_n+c_n = a_n- d_n = a_n- a_{n-1}$。

得 $a_n- a_{n-1}= a_{n-1}- a_{n-2} +2 a_{n-2}$，故 $a_n =2a_{n-1} + a_{n-2}$。

初始值为$a_0= 1, a_1= 3$。

(求解a_n略)

39. 设h_n表示用单牌和多米诺骨牌以下述方式完美覆盖$1\times n$棋盘的方法数：任何两张多米诺骨牌都不相邻。找出h_n满足的递推关系和初始条件，但不对其求解。



h_{n-1}

h_{n-3}

解：若首先用单牌进行覆盖，则$h_n=h_{n-1}$。

若首先用多米诺骨牌进行覆盖，则它占两个棋格，此时第3个格子只能是单牌，有$h_n=h_{n-3}$。

因此，h_n满足的递推关系为 $h_n=h_{n-1}+h_{n-3}$，$n\geq 3$，

初始条件为 $h_0=1, h_1=1, h_2=2$。

50. 称集合{1, 2, …, n}的子集非凡，如果它的最小整数等于它的大小：$\min\{x \mid x \in S\} = |S|$。例如S={3, 7, 8}是非凡的。设$g_n$是{1, 2, …, n}的非凡子集的个数。证明$g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$ ($n\geq 3$), 且$g_1=1$, $g_2=1$。

证明: (1) 集合{1}的非凡子集就是它自己，因此$g_1=1$。

(2) 集合{1, 2}的非凡子集只有{1}, 因此$g_2=1$。

(3) 当$n\geq 3$时，考虑以下两种情形：

(a) 若n不是{1, 2, …, n}的任意非凡子集中的元素，则 $g_n=g_{n-1}$。

(b) 否则，假设若n是{1, 2, …, n}的非凡子集S中的元素，

50. 称集合{1, 2, …, n}的子集非凡，如果它的最小整数等于它的大小：min{x| x∈S}=|S|。例如S={3, 7, 8}是非凡的。设g_n是{1, 2, …, n}的非凡子集的个数。证明

$g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$ (n≥3), 且$g_1=1$, $g_2=1$。

证明：(3) 当n≥3时，考虑以下两种情形：

(b) 否则，若*n*是{1, 2, …, *n*}的非凡子集S中的元素，

显然 1∉S，因此 S中的最小值至少为2。

令T={x-1| x∈S且x≠n}，则|T|=|S|-1。

记S, T的最小值分别为a, b, 则 b=a-1=|S|-1=|T|，因此T是一个非凡子集，且T⊆{1, 2, …, n-2}。

反过来，对任意一个{1, 2, …, n-2}的非凡子集T，显然，

S={x+1| x∈T}∪{n}是{1, 2, …, *n*}的一个包含n的非凡子集。

因此，{1, 2, …, *n*}的包含n非凡子集个数等于{1, 2, …, n-2}的非凡子集个数，即 g_{n-2}。

综上，{1, 2, …, *n*}的非凡子集个数 $g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$，n≥3 。

第八章 特殊计数序列

- 知识要点
  - Catalan数、拟Catalan数
  - 差分序列
  - Stirling数（第二类、第一类）、Bell数
  - 分拆数

- 差分数/序列
  - 计算一般项是多项式的序列的部分和
- 第二类Stirling数$S(p, k)$：把p个元素的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数
- $S^{\#}(p, k)$：把p元素划分到k个非空、可区分的盒子的划分数
- BELL数将p个元素的集合分成非空、不可区分盒子的划分数
- 第一类Stirling数$s(p, k)$是将p个物体排成k个非空的循环排列方法数

Catalan数

- Catalan数列是序列C_0, C_1,…, C_n,…, 其中

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n=0,1,2,\ldots$$

是第n个Catalan数。

满足递归式：$C_n= C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+ C_{n-1}C_0$

- 考虑由n个+1和n个-1构成的2n项 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$，其部分和满足：$a_1+a_2+\cdots+a_k\geq 0$ (k=1,2,…,2n) 的数列的个数等于第n个Catalan数

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\quad (n\geq 0)$$

差分序列

- 设序列的通项h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\triangle^{p+1} h_n = 0$

- 差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \quad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：
$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots\ldots + c_p\binom{n}{p}$$
的关于n的p次多项式。

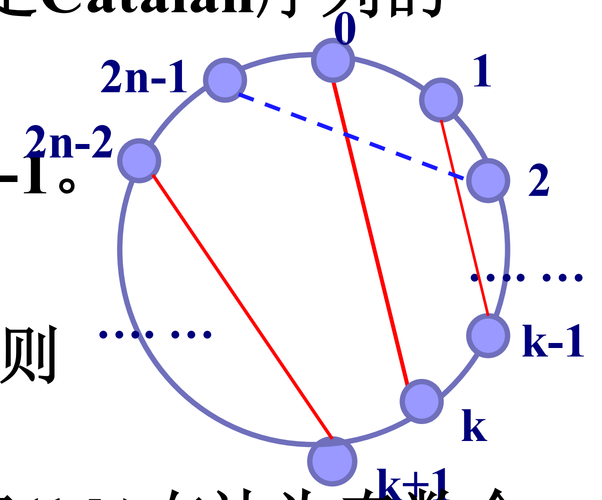
- 差分表用于求一般项为多项式的序列的部分和

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \ldots + c_p\binom{n+1}{p+1}$$

- $h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_0$，求 $h_0 + h_1 + \ldots + h_n$
- 放球问题：
  - 把 p 个物品的集合划分到 k 个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数 （第二类Stirling数）
  - 把 p 个物品的集合划分到 k 个不可区分的盒子但可以有空盒子的划分的个数 （Bell数）
  - 把 p 个物品的集合划分到 k 个可区分的盒子但可以有空盒子的划分的个数
  - 将 p 个物品排成 k 个非空的循环排列方法数 （第一类Stirling数）

1. 设在圆上选择2n（等间隔的）点。证明将这些点成对连接起来得到n条不相交线段的方法数等于第n个Catalan数C_n。

证明：设h_n为将圆上2n个点成对连接起来得到n条不相交线段的方法数。下面证明序列$h_0, h_1, h_2, \ldots$满足Catalan序列的递推关系与初始条件。



设圆上的2n个点顺时针依次排列为0, 1, …, 2n-1。假设顶点0与 k 连接，则对任意两个点 *i*, *j*, *i*=k+1, …, 2n-1, *j*=1,…, k-1, *i*不能与 *j*连接，否则会与边(1, k)相交。

下面证明k只能为奇数。假设k为偶数，则连接(1,k)右边为奇数个点，此时无法成对连接，因此k只能为奇数。

假设(1, k)右边的点数为 2i=k-1, 则 (1,k)左边的点数为2n-2i-2=2(n-i-1)。 此时 $h_n=h_ih_{n-i-1}$。因此，当 k从1到2n-1时，*i*从0到n-1。

得 $h_n=h_0h_{n-1}+h_1h_{n-2}+\ldots + h_{n-1}h_0$。

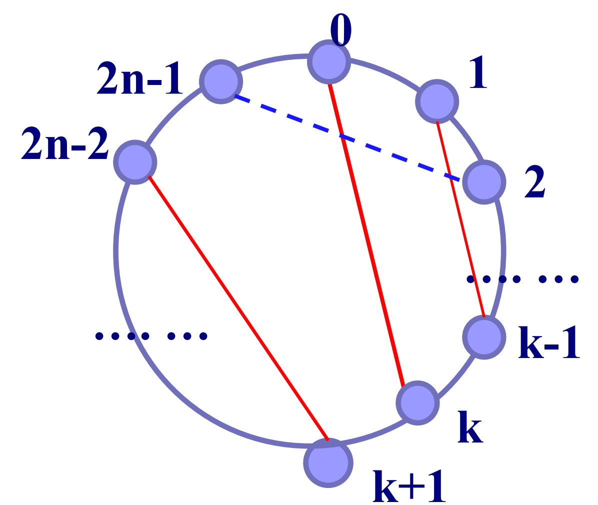
1. 设在圆上选择2n（等间隔的）点。证明将这些点成对连接起来得到n条不相交线段的方法数等于第n个Catalan数C_n。

证明： (续)下面考虑初始情况。

当 n=0时， 令hn=1；

当n=1时，圆上选择2个点，显然只有一种连接方法。

综上所述，h_n是第n个Catalan数C_n。



7. 序列h_n的一般项是n的一个3次多项式。如果其差分表的第0行的前4个数是1， -1， 3， 10，确定h_n和 $\sum_{k=0}^{n} h_k$ 的公式。

解：差分表如下：

$$h_n = c_0\binom{n}{0}+c_1\binom{n}{1}+c_2\binom{n}{2}+\ldots\ldots+c_p\binom{n}{p}$$

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1}+c_1\binom{n+1}{2}+\ldots+c_p\binom{n+1}{p+1}$$

1， -1， 3， 10

-2， 4， 7

6， 3

-3

因此，$h_n=\binom{n}{0}-2\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}-3\binom{n}{3}$，

$$\sum_{k=0}^{n} h_k=\binom{n+1}{1}-2\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}-3\binom{n+1}{4}$$

15. 把n元素集合划分成可区分的k个盒子（其中一些可能是空盒）的划分的个数是k^n。通过用不同的方式计数来证明

$$k^n=\binom{k}{1}1!S(n,1)+\binom{k}{2}2!S(n,2)+\dots+\binom{k}{n}k!S(n,n)$$

（如果k>n，定义S(n, k)为0。）

证明：设S是把n元素集合划分成可区分的k个盒子（其中一些可能是空盒）的划分的集合，则$|S|=k^n$。

又设S_i为把n元素集合划分成可区分的i个盒子，且盒子都不为空的划分的集合, 则 $|S_i|=\binom{k}{i}k!S(n,i)$，$i=1, 2, \dots, n$。

显然，$S=S_1\cup S_2\cup\dots\cup S_n$，且对任意的$i, j, i\neq j$，$S_i\cap S_j=\emptyset$。

因此 $|S|=|S_1|+|S_2|+\dots+|S_n|$。

得 $k^n=\binom{k}{1}1!S(n,1)+\binom{k}{2}2!S(n,2)+\dots+\binom{k}{n}k!S(n,n)$。

19.证明第一类Stirling数满足下面的公式：

(a) **s(n, 1)=(n-1)! (n≥1)**

(b) **s(n, n-1)=**$\binom{n}{2}$ **(n≥1)**

证明： **(a) s(n, 1)是把n个物品排成1个循环排列的排法数，**

因此 **s(n, 1)=**$\frac{n!}{n}$ **= (n-1)!**。

(b) s(n, n-1) 是把n个物品排成n-1个循环排列的排法数。

此时，每种排法中，有**n-2**个物品形成**n-2**个循环，剩下两个物品形成一个循环。

因此 共有$\binom{n}{2}$种排法，即**s(n, n-1)=**$\binom{n}{2}$。

29. 证明把正整数n分拆成每一部分至多是2的分拆数等于$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$。

证明：若n为偶数，设n=2k，则 每一部分至多是2的分拆包括：

$$2^0 1^n, 2^1 1^{n-2}, 2^2 1^{n-4}, \ldots, 2^k 1^0$$

一共有 $k+1$种。

若n为奇数，设n=2k+1，则每一部分至多是2的分拆包括：

$$2^0 1^n, 2^1 1^{n-2}, 2^2 1^{n-4}, \ldots, 2^k 1^1$$

一共有 k+1种。

题型介绍

- 填空题（**10**空，每空**5**分）
- 计算题
- 证明题

男主人有 7 位男性朋友和 5 位女性朋友，女主人有 5 位男性朋友和 7 位女性朋友，要办一个家庭宴会，各邀请 6 位朋友，其中男女各 6 位，一共有______________________________种方案。

对于大小为 $2n$ 的多重集 $\{n\cdot a, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$，它的 n-组合数为______________________________。

已知 $\{1,2,\ldots,8\}$ 的一个排列的逆序列为 5，1，4，0，3，2，1，0，则该排列为______________________________。

8 位男士参加宴会，进场时将帽子随机往帽架上放，散会时又随机拿了 1 顶帽子，问全部拿错的情况有______________________________种，至少有一位男士拿对的情况有______________________________种，至少有三位男士拿对的情况有______________________________种。

1−9999 之间的整数中各位数字之和等于 7 的数共有__________个。

（例如 1231 的各位数字之和为 7）。

已知 S = {a, b, c, d, e}，则 S 的最大反链为____________________

设 h_n 是把 1 行 n 列棋盘的方格用红、黄和蓝色着色，并使得没有着成红色的方格相邻的着色方法数，则 h_n 满足的递推关系为____。

把 n 个不同颜色球分到 k 个无区别的盒子$(n \ge k)$，且盒子允许为空，方案数为____。

二、证明：对任意的 $n+1$ 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ 存在两个整数 a_i 和 a_j，$i \neq j$，使得 $a_i - a_j$ 能够被 n 整除。（10 分）

三、8 个有区别的球放进 4 个有标志的盒子，要求第 1、2 两个盒子必须有奇数个球，第 4 个盒子有偶数个球，一共有多少种放法？（10 分）

四、求解非齐次递推关系 $h_n=h_{n-1}+6h_{n-2}+3^n$，其中 $h_0=5, h_1=2$。（10 分）

五、设 n 和 m 是非负整数且 $m \geq n$。有 $m+n$ 个人站成一队要进入剧场，入场费为 50 元。这 $m+n$ 个人中 m 个人有 50 元纸币，而 n 个人只有 100 元纸币。售票处开门时使用一个空的收银机。求解：这些人以某种方式排列使得在需要的时候总有零钱可以找的队列数目（需要给出计算过程）。（10 分）