2016《离散数学（2)》期末考试卷（A 卷）

一、 判断题

（T ）1. 若 A ⊕ B = A ⊕ C，则 B = C。

（T）2. A×B = ∅ 当且仅当 A = ∅ 或 B = ∅。

（ F ）3. 设 A、B 为任意两个集合，则 ρ（A）∪ρ（B）= ρ（A ∪ B）。

（ F ）4. 若 R 是集合 A 上的二元关系，则 st (R) = ts (R)。

（F）5. 设 A 上的二元关系 R_1、R_2 是等价关系，则 $R_1 \circ R_2$ 也是等价关系。

（ F ）6. 设 Q_+ 为正有理数集合，则 < Q_+，≤ > 是良序结构。

（ T）8. 自然数的幂集 P (N) 的基数等于实数 R 的基数。

（ F）9. 任何图均有偶数个奇结点。

（ T ）10. n 阶二叉树有 (n −1) / 2 个分支结点。

二、设 A = {1, 2, 3, 4}上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下:

R_1 = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 1>}

R_2 = {<1, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 3>, <4, 4>}

1） 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质（即是否具有自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性这五种性质）。

解：R_1 不具有这五种性质中的任何一种；

R_2 具有自反性，反自反性，对称性和传递性。

2） 试求出 R1^2, $R_1 \circ R_2$ 和 R_2^+ 。

解：$R_1 \circ R_2 = \{<1,1>,<1,2><1,3>,<1,4>,<2,1><2,3>,<3,4),<4,1>,<4,3>\}$

$$R_1^+ = \begin{Bmatrix} <1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,2>, \\ <2,3>,<2,4>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,<3,4> \\ ,<4,1>,<4,2>,<4,3>,<4,4> \end{Bmatrix}$$

三、设 A 上的二元关系 R 是全序，证明：RoR 也是全序。 （14 分）

证明：欲证 RoR 是全序，只需证明 RoR 是偏序，且对任意的两个元素 $x \in A, y \in A$，都有 xR^2y 或者 yR^2x 。

全序 R 显然是自反的、反对称的、传递的。

先证 RoR 是 A 上的偏序关系：

1）RoR 的自反性：因 R 是自反的，所以$\forall x \in A$都有$<x,x>\in R$，

由$<x,x>\in R$，$<x,x>\in R$得到$<x,x>\in R\circ R$

因此$R\circ R$有自反性

2）RoR 的反对称性：假设有$<x,y>\in R\circ R$且$<y,x>\in R\circ R$

则$\exists r$ 使得$<x,r>\in R,<r,y>\in R$

$\exists s$ 使得$<y,s>\in R,<s,x>\in R$

因为 R 具有传递性，所以有$<s,r>\in R,<r,s>\in R$

而 R 为反对称的，则$r=s$

$\therefore <x,r>,<r,y>,<y,r>,<r,x>\in R$

又因为 R 是具有传递性，所以有$<x,y>\in R,<y,x>\in R$

又因为 R 是反对称的，所以$x=y$

$\therefore R\circ R$有反对称性

3）RoR 的传递性：假设有$<x,y>\in R\circ R$且$<y,z>\in R\circ R$

则$\exists r$ 使得$<x,r>\in R,<r,y>\in R$

$\exists s$ 使得$<y,s>\in R,<s,z>\in R$

因为 R 具有传递性，所以有$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$

所以有$<x,z>\in R\circ R$

$\therefore R\circ R$有传递性

所以，RoR 是 A 上的偏序关系。

再证明对任意的两个元素$x\in A,y\in A$，都有xR^2y或者yR^2x

证明：$\forall x,y\in A$，由于 R 为全序，则$<x,y>\in R$或$<y,x>\in R$

若$<x,y>\in R$，则由$<y,y>\in R$可得到$<x,y>\in R\circ R$

若$<y,x>\in R$，则由$<x,x>\in R$可得到$<y,x>\in R\circ R$

所以对任意的两个元素$x\in A,y\in A$，都有xR^2y或者yR^2x

综上所述：$R\circ R$为 A 上的全序关系。

四、设 f：X → Y 和 g：Y → Z （16 分）

1）若 f 和 g 都是单射，则 g o f 也是单射；

2）若 g o f 是单射，则 f 是单射。

1）证明：若 x_1，$x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$

$$\Downarrow \text{ f 单射}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Downarrow \text{ g 单射}$$

$$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

即 $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$

故 g o f 为单射

2）证明：反证法：

假设 f 不是单射，则有 x_1，$x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 使

$$f(x_1) = f(x_2),$$

因此 $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$，

这与 g o f 为单射矛盾。所以假设不成立，即 f 为单射。

五、试求叶的权分别为 5,10,17,37,23,29,41,49 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。

590

六、设 n 阶连通无向图 G 恰有 n－1 条边，直接用**归纳法**证明：G 是非循环的。（10 分）

证明：施归纳于 n：

当 n =1 时，由 G 有 n－1 条边可知：G 有 0 条边，即 G 没有自圈，G 是**非循环的**，因此命题为真。

假设对任意 k≥1，当 n =k 时命题为真。

当 n =k+1 时：因 G 为**连通的**，有 k 条边，故任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq$

1。

若 G 中任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq 2$，则 G 的度≥ 2(k+1)，则 G 中边的个数≥ 2k+1；这与 G 有 **k 条边**的条件**矛盾！**因此，G 中必有**结点** v_1 的度数 $d_G(v_1)=1$。

显然，k 阶无向图 G － v_1 连通且有 k － 1 条边，由归纳假设 G 是非循环的。设与 v_1 相邻的结点为 v_2，v_1 与 v_2 的连接边为 e，G 可由 G － v_1 添加结点 v_1 与连接边 e 得到，所以 G 也是是**非循环的**，即 n =k+1 时命题亦为真。

综上所述，命题为真。

七、设 n 阶简单有向图 G = ⟨V，E，ψ⟩ 的**基础图**为简单**完全**无向图，证明：

$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v\in V}(d_G^-(v))^2 \text{。}$$ （8 分）

证明：对 n 阶简单有向图 G 有：

$$\sum_{v\in V}d_G^+(v)=\sum_{v\in V}d_G^-(v)$$

即：$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))=0$$

又因为 G 的基础图为简单完全无向图，则

$$d_G^+(v)+d_G^-(v)=\text{n-1}$$

故：$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))(d_G^+(v)+d_G^-(v))=\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))(n-1)=0$$

因此：$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v\in V}(d_G^-(v))^2$$