A

班号__________　学号__________　姓名________　成绩________

# 《离散数学（2）》期末考试卷

注意事项：1、请大家仔细审题

2、千万不能违反考场纪律

题目：

## 一、判断题　　（每小题 2 分，共 20 分）

（√ ）1. 若 $A \oplus B = \varnothing$，则 $A = B$。

（√ ）2. $A \times B = \varnothing$ 当且仅当 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$。

（× ）3. 设 A，B 为任意两个集合，则 $\boldsymbol{\rho}(A) \cup \boldsymbol{\rho}(B) = \boldsymbol{\rho}(A \cup B)$。

（× ）4. 设 $R_1$、$R_2$ 为 A 上的等价关系，则 $R_1 \circ R_2$ 也为 A 上的等价关系。

（× ）5. 若 R 是集合 A 上的二元关系，则 $st(R) = ts(R)$。

（× ）6. 设 $\subseteq$ 为 A 的幂集 $\boldsymbol{\rho}(A)$上的包含关系，则$< \boldsymbol{\rho}(A), \subseteq >$ 是全序结构。

（× ）7. 设 $\boldsymbol{Q}_+$为正有理数集合，则 $< \boldsymbol{Q}_+, \leq >$ 是良序结构。

（√ ）8. 自然数的幂集 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{N})$ 与实数集 $\boldsymbol{R}$ 等势。

（× ）9. 任何图均有奇数个偶结点。

（√ ）10. n 阶二叉树有 $(n-1)/2$ 个分支结点。

**错一道，扣 2 分**

## 二、设 A = {1, 2, 3, 4}上的二元关系 $R_1$ 和 $R_2$ 定义如下：　　（20 分）

$R_1$ = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 1>}

$R_2$ = {<1, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 3>, <4, 4>}

1） 试分别指出 $R_1$ 和 $R_2$ 所具有的性质（即是否具有自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性这五种性质）。

2） 试求出 $R_1^2$，$R_1 \circ R_2$ 和 $R_2^+$。

解：

1） **$R_1$ 不具有这五种性质中的任何一种；(5 问，错一问，扣 1 分)**

**$R_2$ 具有自反性，反对称性和传递性。(5 问，错一问，扣 1 分)**

2） 试求出 $R_1^2$，$R_1 \circ R_2$ 和 $R_2^+$。（分别为 **3 分，3 分，4 分** ）

解：$R_1^2$={ $<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,4>,<3,1>,<4,1>,<4,2>$ }

$R_1 \circ R_2 = \{<1,1>,<1,2><1,3>,<1,4>,<2,1><2,3>,<3,4),<4,1>,<4,3>\}$

$R_2^+ = \{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,3>,<4,4>\}$

三、设 A 上的二元关系 $R$ 是全序，证明：$R \circ R$ 也是全序。（14 分）

**证明：**欲证 RoR 是全序，只需**证明 RoR 是偏序，且对任意的两个元素** $x \in A, y \in A$，

**都有** $xR^2y$ **或者** $yR^2x$。

**全序 R 显然是自反的、反对称的、传递的。**

**先证 RoR 是 A 上的偏序关系：**

1） RoR 的自反性：因 R 是自反的，所以 $\forall x \in A$ 都有 $<x,x> \in R$，

由 $<x,x> \in R$，$<x,x> \in R$ 得到 $<x,x> \in R \circ R$

因此，$R \circ R$ **有自反性**　（**3 分**）

2） RoR 的反对称性：假设有 $<x,y> \in R \circ R$ 且 $<y,x> \in R \circ R$

则 $\exists r$ 使得 $<x,r> \in R, <r,y> \in R$

$\exists s$ 使得 $<y,s> \in R, <s,x> \in R$

因为 R 具有传递性，所以有 $<s,r> \in R, <r,s> \in R$

而 R 为反对称的，则 $r = s$

$\therefore <x,r>, <r,y>, <y,r>, <r,x> \in R$

又因为 R 是具有传递性，所以有 $<x,y> \in R, <y,x> \in R$

又因为 R 是反对称的，所以 $x = y$

$\therefore R \circ R$ 有反对称性 （**3 分**）

3） RoR 的传递性：假设有 $<x,y> \in R \circ R$ 且 $<y,z> \in R \circ R$

则 $\exists r$ 使得 $<x,r> \in R, <r,y> \in R$

$\exists s$ 使得 $<y,s> \in R, <s,z> \in R$

因为 R 具有传递性，所以有 $<x,y> \in R$，$<y,z> \in R$

所以有 $<x,z> \in R \circ R$

$\therefore R \circ R$ 有传递性 （**4 分**）

所以，RoR 是 A 上的偏序关系。

**再证明对任意的两个元素** $x \in A, y \in A$**，都有** $xR^2y$ **或者** $yR^2x$

证明：$\forall x, y \in A$，由于 R 为全序，则 $< x, y > \in R$ 或 $< y, x > \in R$

若 $< x, y > \in R$，则由 $< y, y > \in R$ 可得到 $< x, y > \in R \circ R$

若 $< y, x > \in R$，则由 $< x, x > \in R$ 可得到 $< y, x > \in R \circ R$

所以对任意的两个元素 $x \in A, y \in A$，都有 $xR^2y$ 或者 $yR^2x$（**4 分**）

综上所述：$R \circ R$ 为 A 上的全序关系。

四、设 f：X → Y 和 g：Y → Z （16 分）

1）若 f 和 g 都是单射，则 g o f 也是单射；

2）若 g o f 是单射，则 f 是单射。

**证明：**

1）若 $x_1$， $x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$

$\Downarrow$ f 单射

$f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Downarrow$ g 单射

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

即 $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$

故 g o f 为单射 （**8 分**）

2）**证明：用反证法：**

**假设 f 不是单射**，则有 $x_1$， $x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 使

$f(x_1) = f(x_2)$，

因此 $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$，

这与 g o f 为单射矛盾。

所以假设不成立，即 f 为单射。（**8 分**）

五、试求叶的权分别为 5，10，17，23，29，37，41，49 的**最优叶加权二叉树**及其**叶加权路径长度**。 （12 分）

**解：**

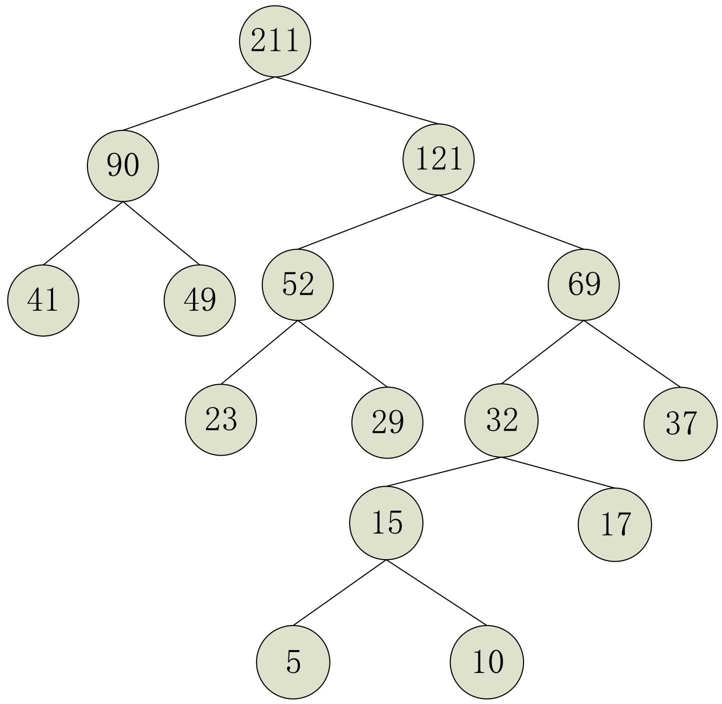
1）最优叶加权二叉树为：

<u>5</u> <u>10</u> 17 23 29 37 41 49

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| <u>15</u> | <u>17</u> | 23 | 29 | 37 | 41 | 49 |
| | 32 | <u>23</u> | <u>29</u> | 37 | 41 | 49 |
| | <u>32</u> | | 52 | <u>37</u> | 41 | 49 |
| | | | 52 | 69 | <u>41</u> | <u>49</u> |
| | | | <u>52</u> | <u>69</u> | | 90 |
| | | | | <u>121</u> | | <u>90</u> |
| | | | | | | <u>211</u> |

（**4 分**）

**最优加权二叉树**




（**4 分**）

2）其叶加权路径长度 L=15+32+69+52+121+90+211=590。（**4 分**）

六、设 n 阶**连通无向图** G 恰有 n–1 条边，直接用**归纳法**证明：G 是**非循环的**。（10 分）

证明：**施归纳于 n：**

当 n =1 时，由 G 有 n–1 条边可知：G 有 0 条边，即 G 没有自圈，G 是**非循环的，**因此命题为真。（**2 分**）

假设对任意 $k\geq1$，当 n =k 时命题为真。（**1 分**）

当 n =k+1 时：因 G 为**连通的，**且有 k 条边，故任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq 1$。若 G 中任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq 2$，则 G 的度$\geq 2(k+1)$，则 G 中边的个数$\geq k+1$；这与 G 有 **k 条边**的条件**矛盾！**因此，G 中必有**结点** $v_1$ 的度数 $d_G(v_1)=1$。（**3 分**）

显然，k 阶无向图 G – $v_1$ 连通且有 k – 1 条边，由归纳假设 G 是非循环的。设与 $v_1$ 相邻的结点为 $v_2$，$v_1$ 与 $v_2$ 的连接边为 e，G 可由 G – $v_1$ 添加结点 $v_1$ 与连接边 e 得到，所以 G 也是是**非循环的**，即 n =k+1 时命题亦为真。（**3 分**）

综上所述，命题为真。（**1 分**）

七、设 n 阶简单有向图 G = <V，E，ψ> 的**基础图**为**简单完全无向图**，证明：

$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v\in V}(d_G^-(v))^2 \text{。}$$ （8 分）

**证明**：对 n 阶简单有向图 G 有：

$$\sum_{v\in V}d_G^+(v)=\sum_{v\in V}d_G^-(v)$$

即：$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))=0$ （**3 分**）

又因为 **G 的基础图为简单完全无向图**，则对 G 中的任意节点 *v*：

$$d_G^+(v)+d_G^-(v)=\text{n-1}$$ （**2 分**）

故：$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))(d_G^+(v)+d_G^-(v))=\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))(n-1)=0$$

$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)^2\text{-}d_G^-(v)^2)=0$$ （**3 分**）

因此：$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v\in V}(d_G^-(v))^2$$