

班号_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

《离散数学(2)》期末考试卷

注意事项：1、请大家仔细审题

2、千万不能违反考场纪律

题目：

一、判断题

(每小题 2 分，共 20 分)

- () 1. 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$ 。
- () 2. 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \cup B \subseteq C$ 。
- () 3. 设 A, B 为任意两个集合, 则 $\rho(A) \cap \rho(B) = \rho(A \cap B)$ 。
- () 4. 设 R 为集合 A 上的等价关系, 则 R^2 也为 A 上的等价关系。
- () 5. 若 R 是集合 A 上的二元关系, 则 $\text{str}(R)$ 是 A 上的等价关系。
- () 6. 设 \mathcal{Q}_+ 为正有理数集合, 则 $\langle \mathcal{Q}_+, \leq \rangle$ 是良序结构。
- () 7. 设 N 为自然数集合, 则 $N \times N$ 与 $N \times N \times N$ 等势。
- () 8. 设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$, 若 $g \circ f$ 是满射, 则 f 是满射。
- () 9. 若 G 中任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq 2$, 则 G 中必存在回路。
- () 10. n 阶二叉树有 $(n-1)/2$ 个分支结点。

二、设 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：

(20 分)

$$R_1 = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, c \rangle \}$$

- 1) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性这五种性质)。
- 2) 试求出 R_1^2 , $R_1 \circ R_2$ 和 R_2^+ 。

三、设集合 A 上的二元关系 R 是自反的。证明：

(10 分)

R 为等价关系的充要条件是：若 $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$, 则 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

四、任给 52 个整数, 证明其中必有两数之和或两数之差能被 100 整除。(12 分)

五、试求叶的权分别为 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。(12 分)

六、设 n 阶连通无向图 G 为非循环的，直接用归纳法证明： G 有 $n - 1$ 条边。
(10 分)

七、设 R 为集合 A 上的二元关系，证明 $t(R) = R^+$ 。 (8 分)

其中， $t(R)$ 为 R 的传递闭包， $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。

八、设函数 $f: X \rightarrow Y$ 且 $g: Y \rightarrow X$ ，若令 (8 分)

$$A = \{ a \in X \mid g(f(a)) = a \} \text{ 且 } B = \{ b \in Y \mid f(g(b)) = b \}$$

则 $f[A] = B$ 。