

班号\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

## 《离散数学(2)》期末考试卷

注意事项：1、请大家仔细审题

2、千万不能违反考场纪律

题目：

### 一、判断题

(每小题 2 分, 共 20 分)

- ( ) 1. 若  $C \subseteq A$  且  $C \subseteq B$ , 则  $C \subseteq A \cap B$ 。
- ( ) 2. 若  $A \cap B = A \cap C$  且  $\sim A \cap B = \sim A \cap C$ , 则  $B = C$ 。
- ( ) 3. 设  $A$ 、 $B$  为任意两个集合, 则  $\rho(A) \cup \rho(B) = \rho(A \cup B)$ 。
- ( ) 4. 设集合  $A$  上的二元关系  $R$  是传递的, 则  $R \circ R$  也是传递的。
- ( ) 5. 若  $R$  是集合  $A$  上的二元关系, 则  $st(R) = ts(R)$ 。
- ( ) 6. 设  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\leq$  是  $\Sigma^+$  上的字典序, 则  $\langle \Sigma^+, \leq \rangle$  是良序结构。
- ( ) 7. 集合  $A$  上的单射  $f: A \rightarrow A$  必为满射。
- ( ) 8. 设  $R$  为实数集合, 则  $R \times R$  与  $R$  等势。
- ( ) 9. 任何阶大于 1 的简单无向图必有两个结点的度相等。
- ( ) 10.  $n$  阶树至少有两个端点。

### 二、设 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系 $R$ 定义如下：

(10 分)

$$R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

试指出  $R$  所具有的性质 (即是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性这五种性质)。

### 三、构造从集合 $A$ 到集合 $B$ 的双射：

(10 分)

- a)  $A = R, B = (0, \infty)$ ;
- b)  $A = [-1, 1), B = (5, 100]$ 。

### 四、设 $R$ 为集合 $A$ 上的二元关系, 证明: $R$ 是传递的 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。(10 分)

### 五、若 $\leq$ 为集合 $P$ 上的偏序关系, 则 $\leq$ 为 $P$ 上良序关系, 当且仅当

- 1)  $\leq$  为  $P$  上的全序关系;
- 2)  $P$  的每个非空子集都有极小元。

(12 分)

### 六、设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$

- 1) 若  $f$  和  $g$  都是满射, 则  $g \circ f$  也是满射;
- 2) 若  $f$  和  $g$  都是单射, 则  $g \circ f$  也是单射;

(10 分)

七、试求叶的权分别为 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。 (12 分)

八、设  $n$  阶连通无向图  $G$  恰有  $n-1$  条边，直接用归纳法证明： $G$  是非循环的。 (10 分)

九、设  $n$  阶简单有向图  $G = \langle V, E, \psi \rangle$  的基础图为简单完全无向图，证明：

$$\sum_{v \in V} (d_G^+(v))^2 = \sum_{v \in V} (d_G^-(v))^2。 \quad (6 \text{ 分})$$