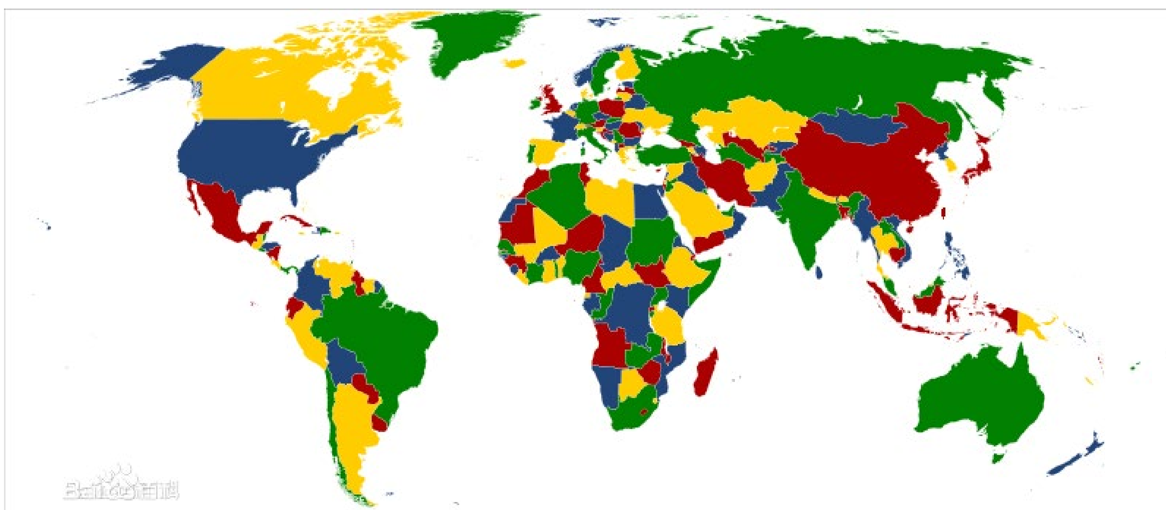
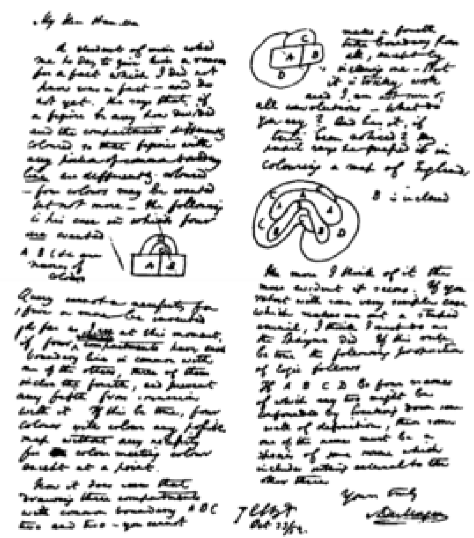
图着色

四色问题

- 1852年，Francis Guthrie在绘制英格兰分郡地图时，发现可以只用四种颜色着色。 Francis 告诉了在伦敦大学学院学习的弟弟Fredrik Guthrie，Fredrik告诉了老师Augustus De Morgan（德.摩根），正式成为数学研究问题
  - 正式表述：在没有飞地的地图上对不同区域染色，使得相邻区域颜色不同
  - 德.摩根写信给（我们的老朋友）哈密顿（图见下右），但后者不感兴趣
- 1976年，爱普尔(K. I. Apple)、黑肯(W. Haken)和考西(J. Koch)利用电子计算机，证明了4种颜色可对任何地图着色
  - 由于无法手工直接验证，证明最开始并未被完全接受。随着计算机辅助证明的普及，绝大多数数学家接受了该证明。仍有人认为应找到不借助计算机的证明
- 卡普（Karp）证明，图的染色（最少色数）是NP完全问题





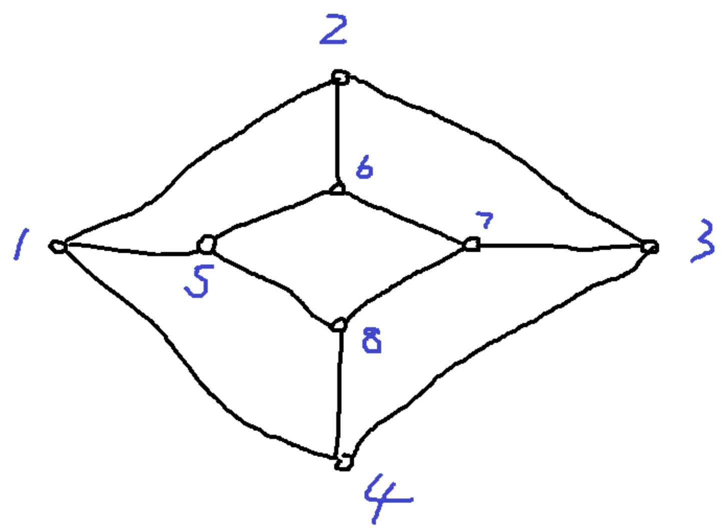
图的染色

- 定义（染色）：给定一个无向图G＝（V, E），如果对每个顶点指定一种颜色，而且使得任何相邻顶点的颜色不同，则称为是图G的一个正常染色。
  - 顶点同色关系是等价关系
  - 四色问题的表述：任意无飞地的地图，其对偶图色数不多于4

- 定义（色数）：在图G的所有正常染色方案中，所用的最少颜色数量称为G的色数，记为$\chi(G)$。

图的独立集

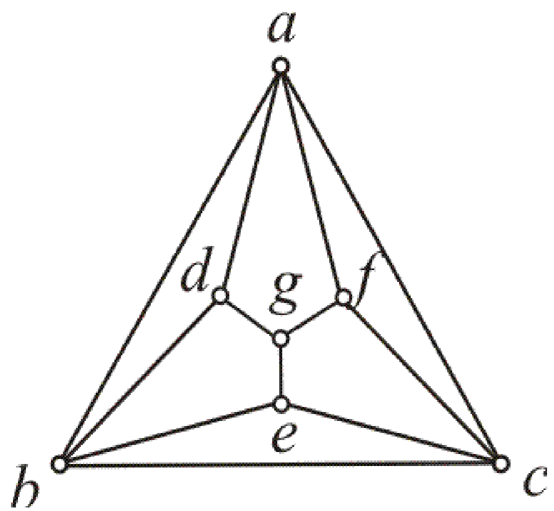
- 定义（独立集）：对于图G和正常染色方案，按照顶点之间同色的（等价）关系，可以将顶点分成不同的子集，使得每个子集中的顶点都不邻接。每个顶点子集称为是独立集。
- 定义（极大独立集）：对于图G的某个独立集，如果任意增加某个顶点都不再是独立的，则称其为极大独立集。
  - 极大独立集可能不是唯一的

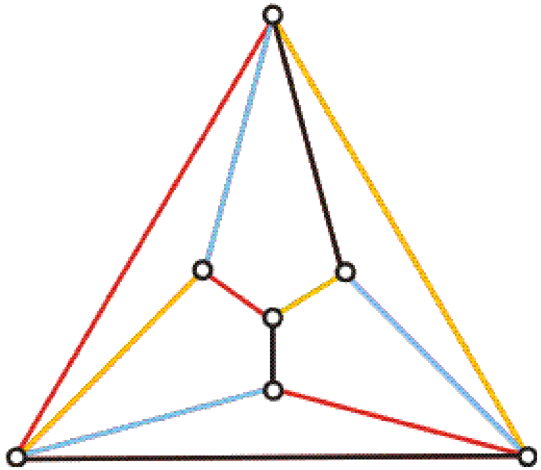


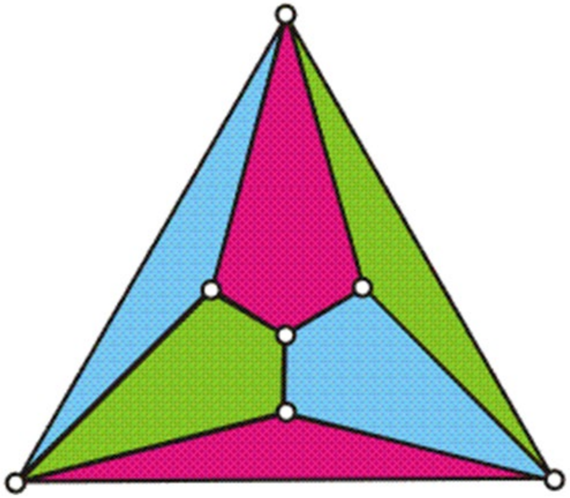
  - {2, 8}和{2, 4, 5, 7}都是极大独立集

（平面图）顶点染色的扩展

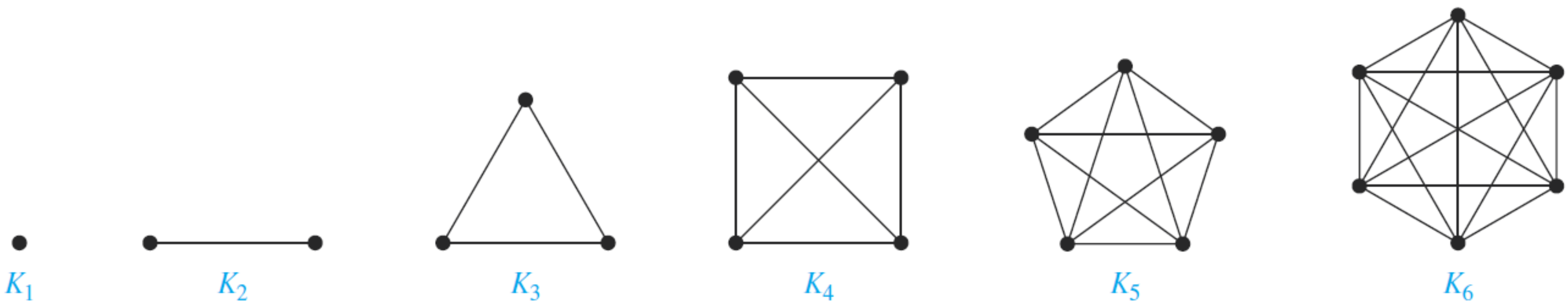
- 图的点色数 χ, 边色数 χ', 以及面色数 χ^*.





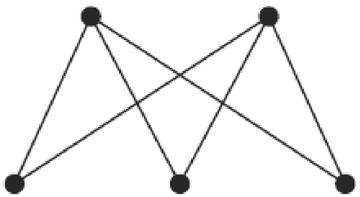


特殊图的染色：完全图

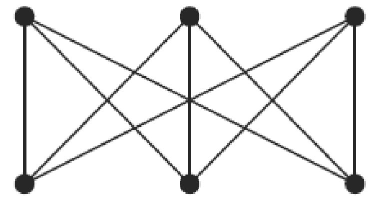


- 定理：设G是K_n完全图，则$\chi(G)=n$。

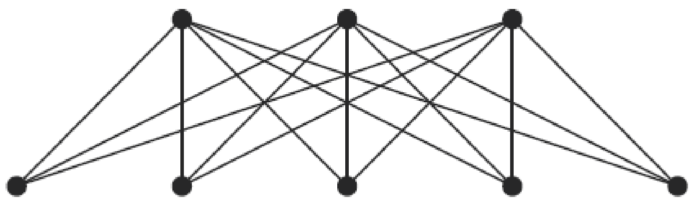
特殊图的染色：二部图



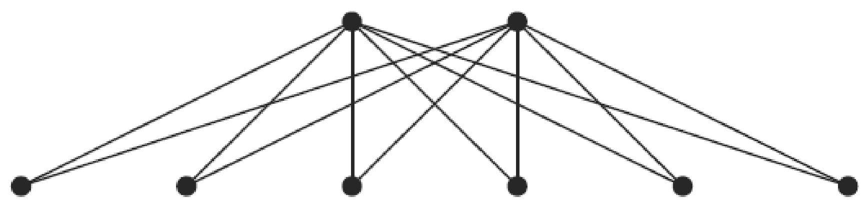
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



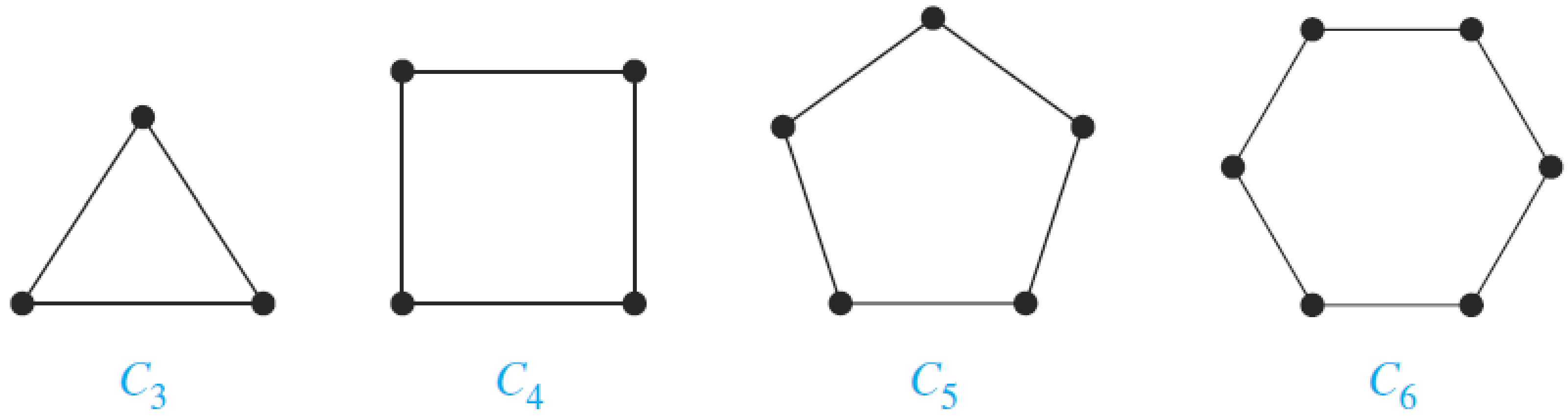
$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

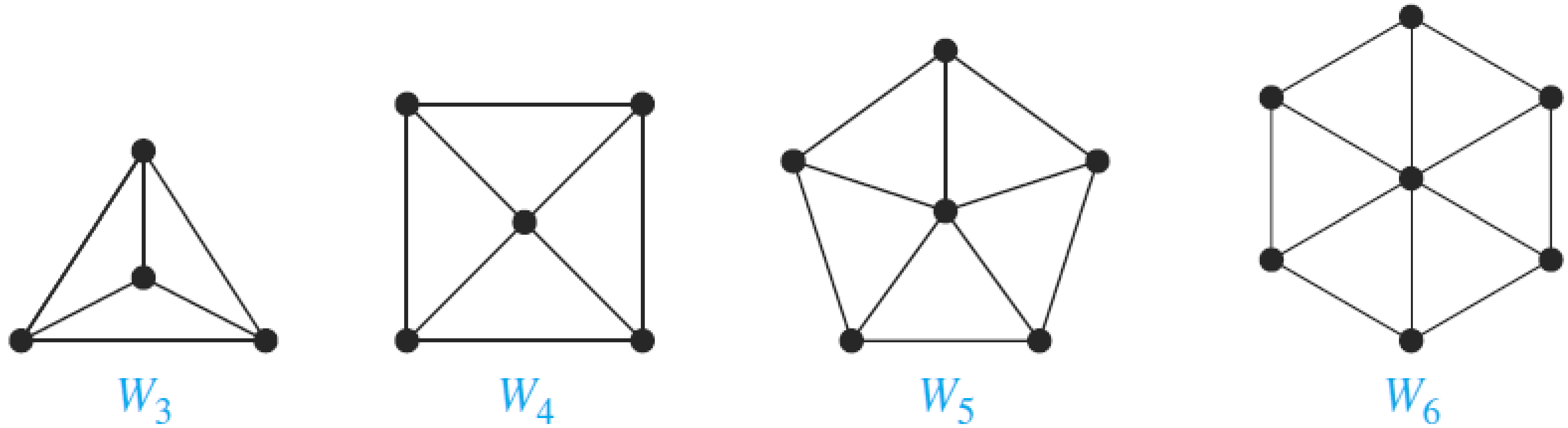
- 定理：设G是二分图，则其色数$\chi(G)=2$。

特殊图的染色：圈图



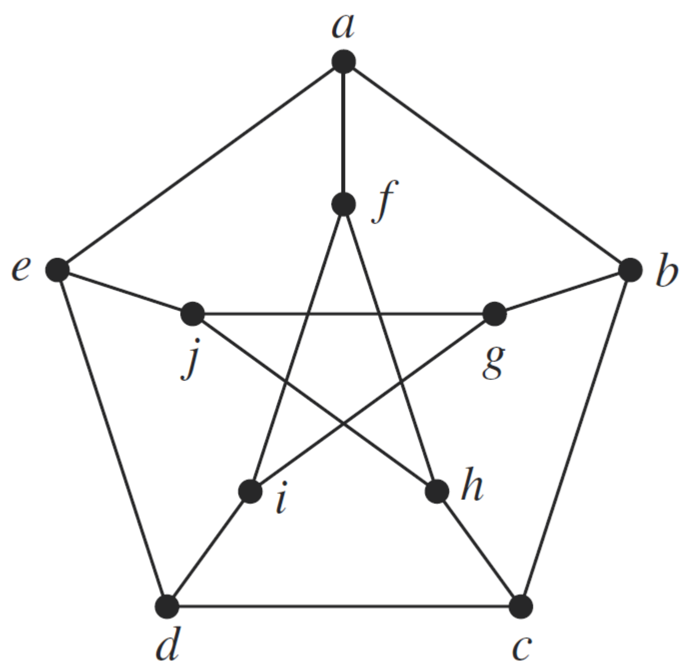
- 定理：设G是圈图C_n
  - 若n是偶数，则$\chi(G)=2$
  - 若n是奇数，则$\chi(G)=3$

特殊图的染色：轮图



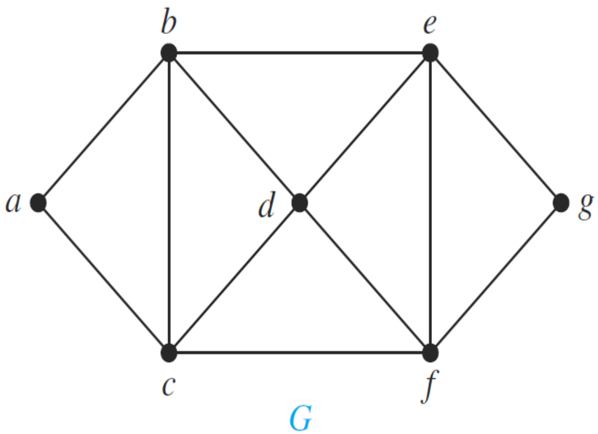
- 定理：设G是轮图$\mathbf{W_n}$
  - 若G为奇轮图，则χ(G)=4
  - 若G为偶轮图，则χ(G)=3

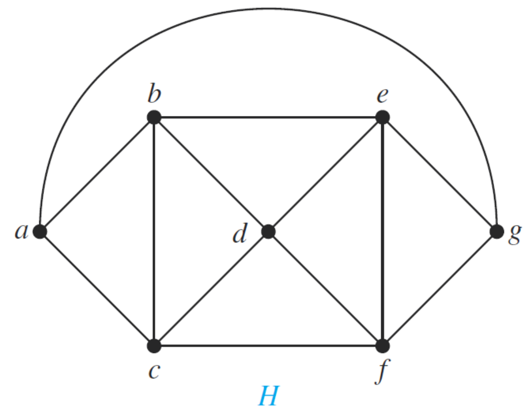
特殊图的染色：彼德森图

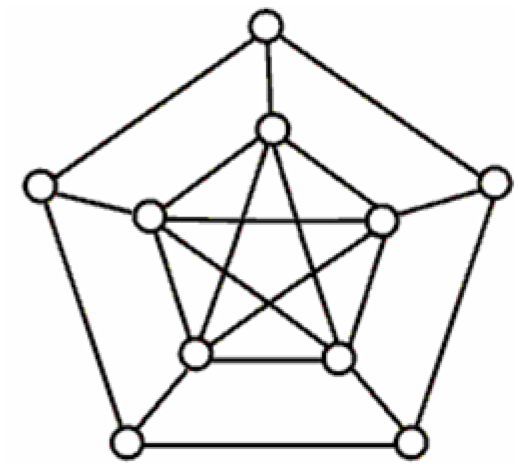


- 定理：设G是彼德森图，则$\chi(G)=3$

其他图的色数







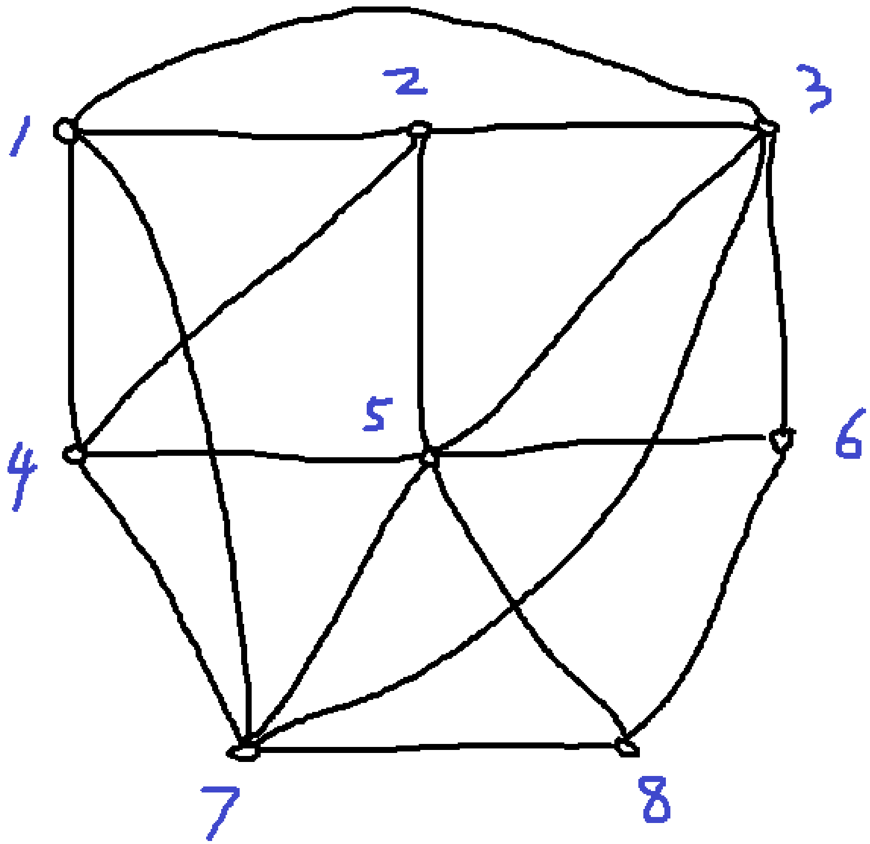
- 图G的色数χ(G)=3
- 图H的色数χ(G)=4
- χ(G)=5

Welch-Powell染色算法

- 目前还没有简单的（多项式算法）可以确定任意图的色数
- 算法流程：
- （1）按照度数的递减顺序，对图中所有顶点进行排序；
- （2）取第一种颜色来染第一个顶点；
- （3）遍历顶点序列
  - 用这种颜色，依次染与已涂该色顶点不邻接的顶点
- （4）如果所有顶点都已染色，则算法停止；否则
- （5）取所有未染色的顶点，构成新的序列，再回到步骤2

Welch-Powell染色算法

- 顶点度数排序：5 3 7 1 2 4 6 8
- 对应顶点度数：6 5 5 4 4 4 3 3
- 注意：顶点 1、2、3 构成完全图 K_3，因此色数至少为3



五色定理

- 定理（希伍德 Heawood，五色定理，1890）：任何平面图都是 5 可着色的。
  - 先证明一条引理，再证明定理。

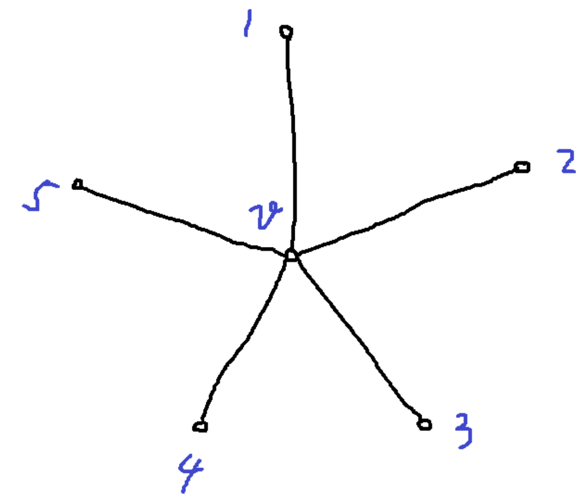
- 引理：如果G是（n,m）连通的简单平面图，则G中必然存在某个顶点，其度数不超过5。
- 证明：
- 如果所有顶点的度都大于5，则有 $2m \geqslant 6n$，因此 $m \geqslant 3n$。这与前面的定理矛盾（$m \leqslant 3n - 6$）。

五色定理

- 定理（希伍德 Heawood，五色定理，1890）：任何平面图都是 5 可着色的。
- 证明：（归纳法）
- （1）$n \leqslant 5$时，显然结论成立
- （2）设$n = k$（$k \geqslant 5$）时结论成立
- 考虑$n = k + 1$的情形。根据前一引理，G中必然存在某个顶点 v，其度数不超过5。
- 对于 v 的度数不大于 4 的情形：根据归纳假设，对于图G − v，必然存在某个使用最多 5 种颜色进行染色的方案。此时再加入顶点 v：由于顶点 v 至多有 4 个邻接顶点，因此可以选择不同于这 4 个顶点的颜色进行染色；

五色定理

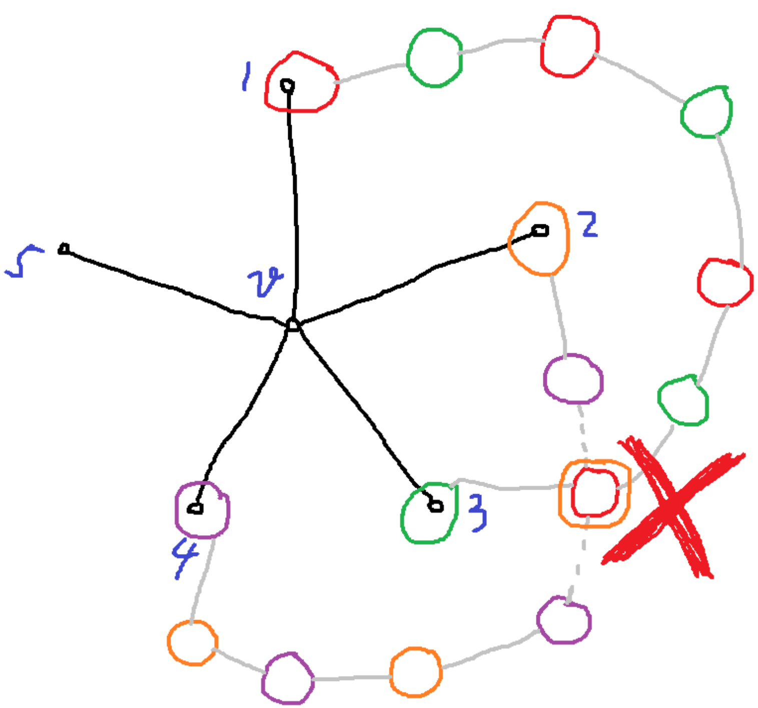
- 考虑 v 的度数为 5 的情形：记 v 的邻接顶点为 u_1 到 u_5，按照顺时针排列如图。
- 在图G − v的 5 色染色方案中，假设这 5 个邻接顶点的颜色依次为 C_1 到 C_5。记 G - v 中颜色为 C_1 或 C_3 的顶点的集合为 V_{13}，而 G_{13} 为V_{13} 的诱导子图。接下来讨论 u_1 和 u_3 在诱导子图 G_{13} 中的连通性。



- （1） u_1 和 u_3 在诱导子图 G_{13} 中不连通：此时它们属于G_{13}的不同连通分支，因此可以做如下调整：将u_1所在的连通分支中染色为 C_3 的顶点改染 C_1，染色为 C_1 的顶点改染 C_3。颜色互换显然不影响C_1、C_3以外的颜色，也不影响u_1 所在连通分支的染色合法性。由于两个连通分支不连通，因此与u_3所在连通分支的染色无关。综合起来，图 G − v 仍然使用 5 种颜色完成了正常的染色。此时u_1 到 u_5 总共使用了 4 种颜色，因此顶点 v 仍然至少还有 1 种颜色可选，从而构造出了图 G 的 5 色染色方案。

五色定理

- （2） u_1 和 u_3 在诱导子图 G_{13} 中连通：此时两个顶点之间必然有基本链，且链上的顶点都涂有颜色 C_1 或 C_3（注意，G_{13} 已经限定了其顶点的涂色）。这条基本链加上u_3-v-u_1构成一个圈 Q。显然，顶点u_2和u_4必然一个在圈内，一个在圈外（此处可以理解，但是不够严格）。
- 再考察 G - v 中颜色为 C_2 或 C_4 的顶点的集合 V_{24}，记 G_{24} 为V_{24} 的诱导子图。很显然，u_2和u_4在G_{24}中必然属于不同连通分支，否则将存在（G_{24}中）某个从u_2到u_4的链，链上的顶点染色只能为C_2或C_4。但是，这条链要连接圈 Q 的内部和外部，因此必然和圈Q在某个顶点处交叉，而这个顶点的颜色将要同时为C_1/C_3和C_2/C_4。矛盾。
- 因此，可以将u_2在G_{24}中的连通分支中的颜色C_2和C_4互换，构造出图 G – v 的合法 5 色染色方案。此时顶点u_2和u_4颜色相同（都为C_4），因此顶点v可以选择颜色C_2，这样就给出了图G的合法 5 色染色方案。



图着色应用

- 调度问题
  - 总共有 n 门课程，每个时段可以安排多门课程考试
  - 有些同学选了多门课程
  - 问题：最少需要安排多少个考试时段?
- 分配问题
  - 总共有 n 个电台
  - 为了防止干扰，距离<150m的电台不能在同一频段
  - 问题：最少需要设置多少个频段?

作业

- 离散数学（尹宝林等编著）第三版
- 第十五章课后习题
  - 必做：11、12


谢谢