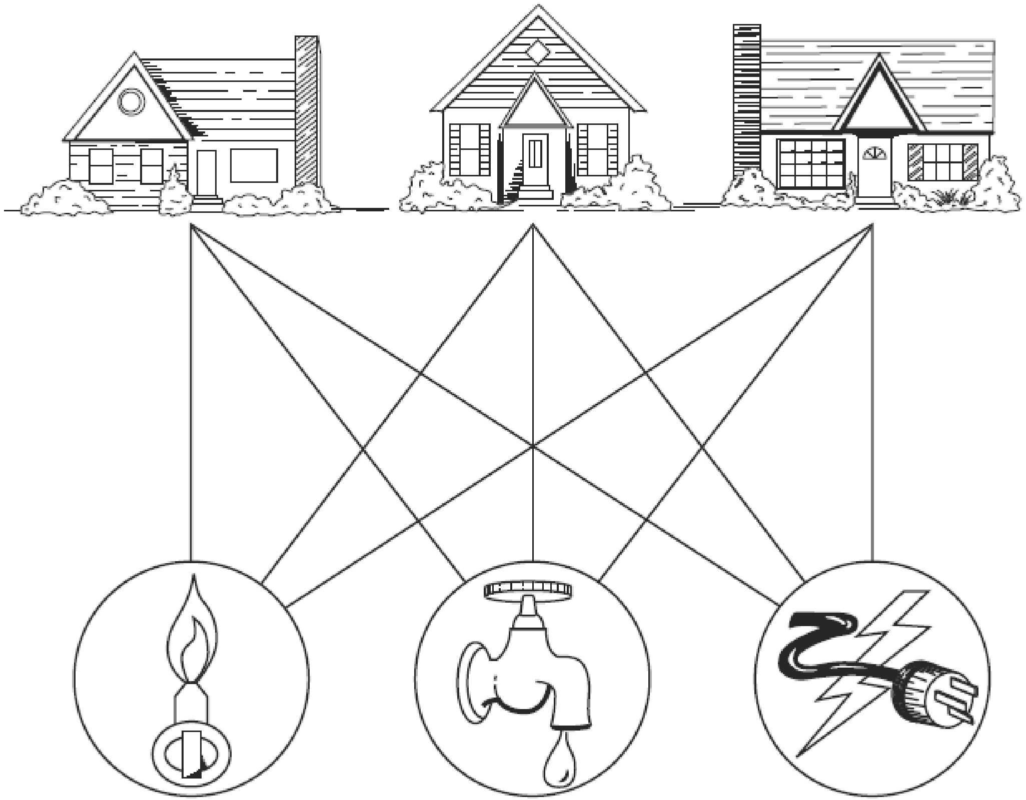
平面图

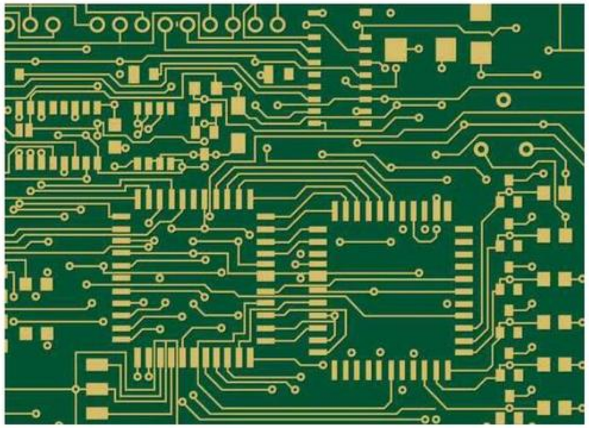
市政管道布线

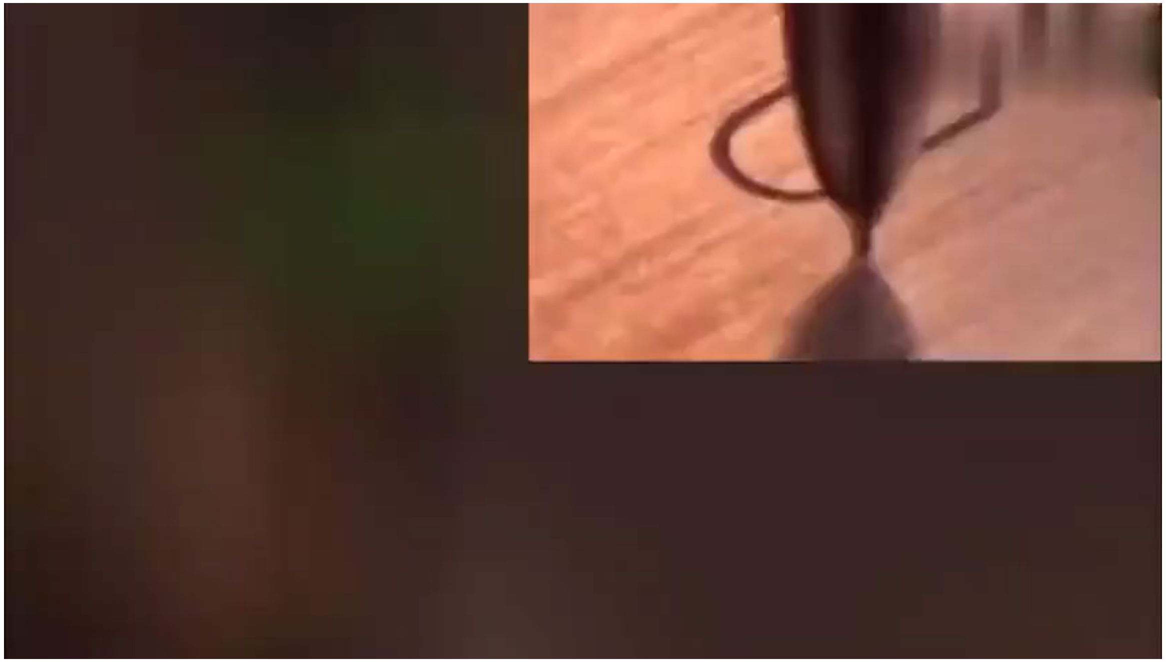
- 市政管道布线
  - 不同的管线需要避开



集成电路板印刷

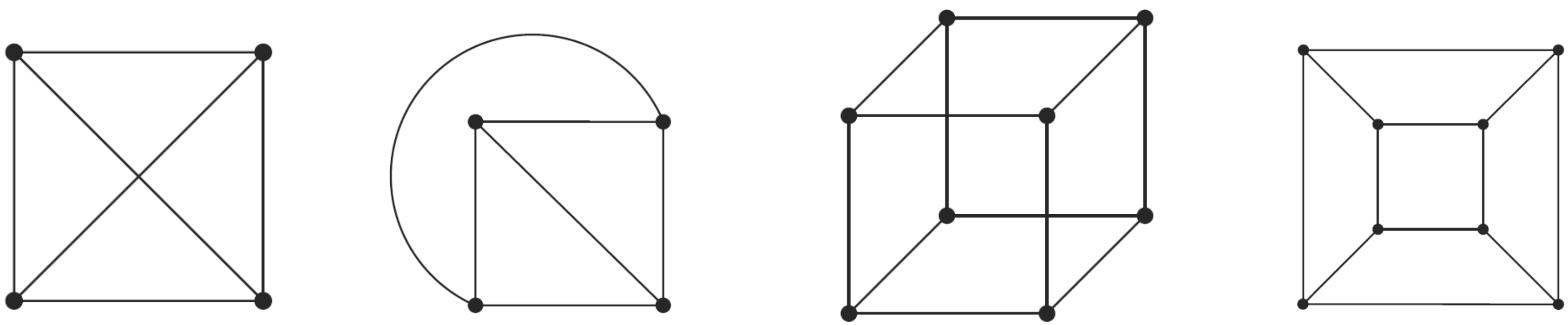
- 集成电路板
  - 电路之间不能误接触





平面图（planar graph）

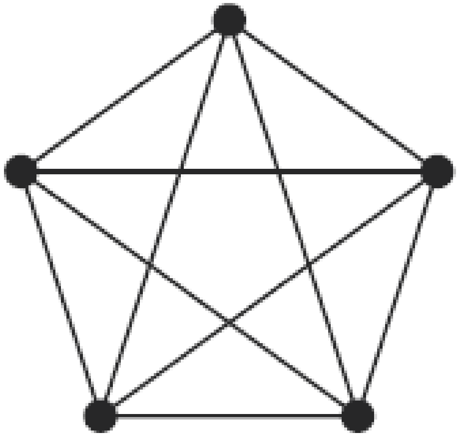
- 定义：设无向图G=<V, E>，如果图G
- （1）所有顶点都嵌入到欧氏空间的二维平面上，
- （2）对于E中的每条边，都在平面上有一条（曲）线段连接其两个顶点，这些曲线段除在顶点处外无其他交叉
- 则称G是平面图。否则，称G是非平面图。



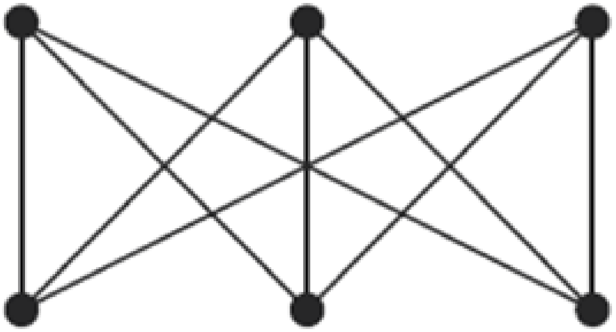
两个特殊的非平面图

- K_5（完全图）是顶点数最少的非平面图
- $K_{3,3}$（完全二分图）是边数最少的非平面图
- 从图K_5或$K_{3,3}$中删除一条边，得到的都是平面图
- K_5 和 $K_{3,3}$ 都是 Kuratowski 发现的非平面图，因此又称为 Kuratowski 图

Kazimierz Kuratowski
（1896-1980）
波兰数学家、逻辑学家
Kuratowski定理（关于平面图与K_5和$K_{3,3}$）



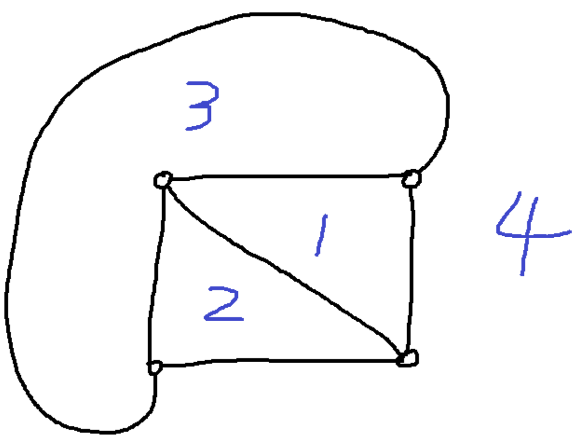
K_5

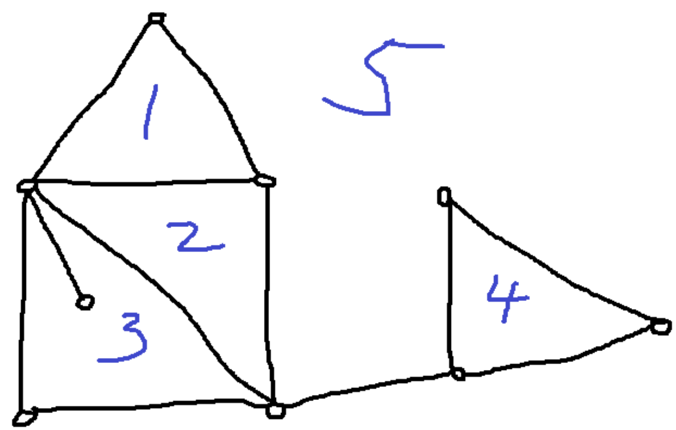


$K_{3,3}$

平面图的面

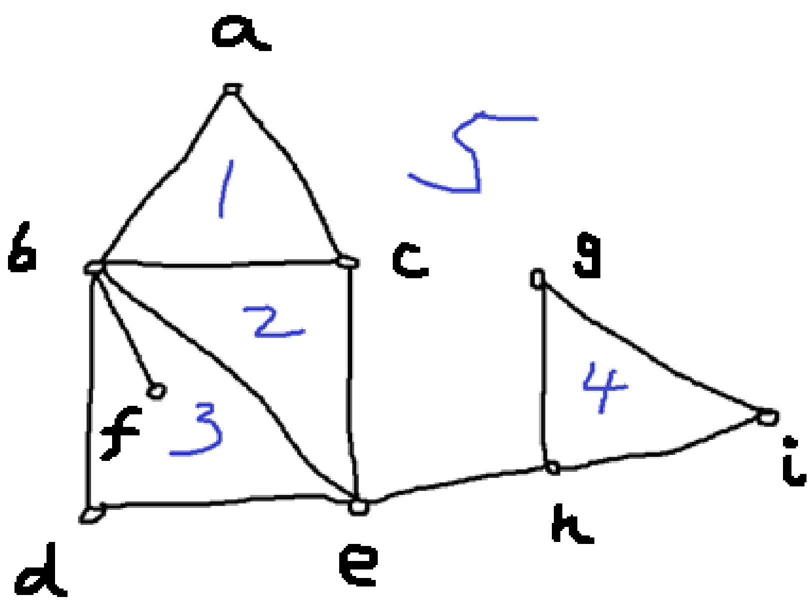
- 定义：在把一个连通的可平面图G嵌入到平面上，且使得任意两条边除了在顶点处外均无交叉，G的边将把平面分割成多个区域。每个区域都称为G的一个面。
  - G的面不包括G的顶点和边
- 定义：平面图的面可以分成有限面和无限面。
  - 有限面：封闭区域，在平面图的内部
  - 无限面：开放区域，在平面图的外部
  - 任何平面图都有恰好一个无限面





平面图上面的周界

- 定义：在平面图中，围成一个面的各边构成的闭合链，称为这个面的周界。
- 一般来说，面的周界是一个圈
- 特殊情况
  - 悬挂边：在所围的面的周界上出现两次
  - 桥：在所围的面的周界上出现两次



- 面1的周界：{a, b, c, a}
- 面3的周界：{b, f, b, e, d, b}
  - 边 b-f 出现两次
- 面5的周界：{a, c, e, h, g, i, h, e, d, b, a}
  - 边 e-h 出现两次

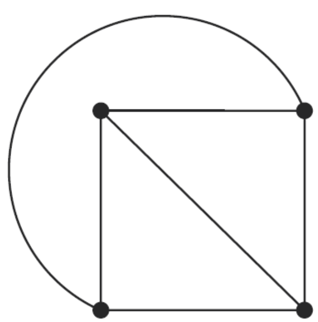
平面图中面的次数

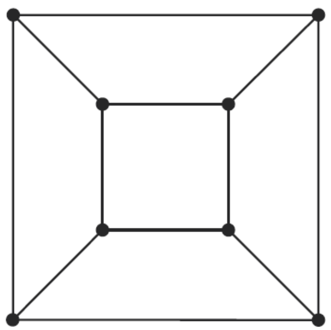
- 定义：在平面图中，一个面的周界中所包含的边数，称为该面的次数。
- 对于不是悬挂边和桥的边，必定是两个面的公共边
- 对于悬挂边或桥，必定在某个面的周界上出现两次

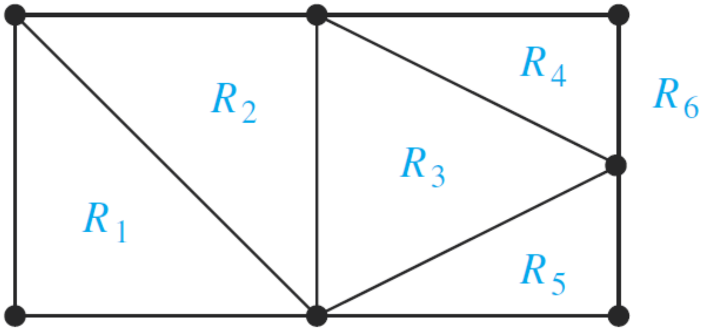
- 定理：平面图的所有面的次数之和，等于边数的两倍
- 证明：略

平面图的欧拉公式

- 平面图的顶点数、边数以及面数之间的数量关系
- 例子中的数量
  - 4——6——4
  - 8——12——6
  - 6——10——6







欧拉公式

- 定理：若G为平面连通图，并且有n个顶点，m条边以及r个面，则$n-m+r=2$
- 证明：对边数m使用数学归纳法。
- $m=0$时，G为孤立顶点，$n=1$，$k=1$，显然成立
- 假设定理对于$m-1$条边成立。下面证明 m 的情形。
- （1）G中存在度为1的顶点u。此时u仅与另一顶点v连接，显然 u-v 是悬挂边，而且不在任何的圈上。如果去掉u和边u-v，得到一个新的图，而且新图仍然是平面连通图，但边数为 $m-1$、顶点数为 $n-1$、面数为 r。由于新图有

$$(n-1)-(m-1)+r=2$$

- 这意味着对于原图G，有 $n-m+r=2$

欧拉公式

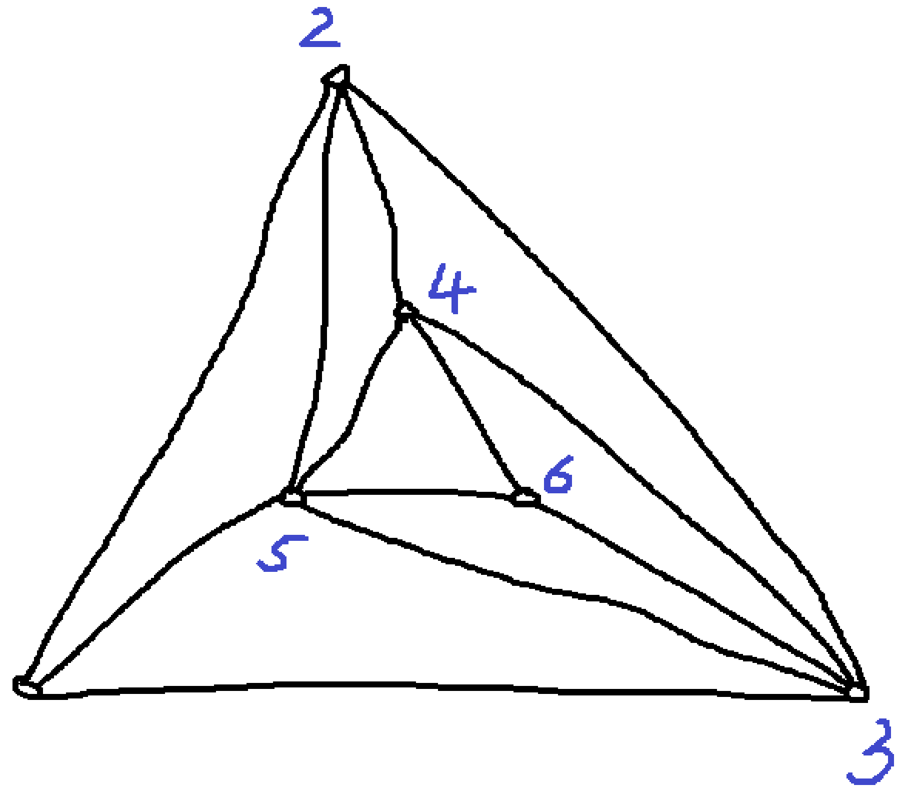
- 定理：若G为平面连通图，并且有n个顶点，m条边以及r个面，则$n-m+r=2$
- 证明：对边数m使用数学归纳法。
- $m=0$时，G为孤立顶点，$n=1$，$k=1$，显然成立
- 假设定理对于$m-1$条边成立。下面证明 m 的情形。
- （2）G中不存在度为1的顶点u。此时从任意的顶点出发，由于G的有限性、所有顶点度都大于1，必然会找到一个圈。由于圈的存在性，因此G必然有有限面。任取一个有限面，从面的周界上去掉任意一条边 u-v，将得到一个新图。显然，新图仍然是平面连通图，而且其顶点数不变，边数为$m-1$，面数也减少1（即为$r-1$）。因此对于新图，有

$$n-(m-1)+(r-1)=2$$

- 这意味着对于图G，有$n-m+r=2$。

极大平面图

- 定义：若在简单平面图G中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边，所得的图都是非平面图，则称G为极大平面图
- 例子：极大平面图



极大平面图定理

- 定理：设G是至少有三个顶点的极大平面图，则G的所有面都是K_3
- 证明：用反证法。
- 假设G中有某个面F不是K_3，因此F的周界C是至少由四条边构成的圈，记圈的前四个顶点为a, b, c, d。
- （1）如果a和c不邻接，则由于圈C围成F，因此在F中连接顶点a和c，并不会和任何边交叉，也就是加上边a-c后的新图仍然是平面图，这与G的极大性矛盾；
- （2）如果a与c邻接，那么边a-c必然在F之外。接下来讨论顶点b和d，如果b和d不邻接，那么就可以在F中加上边b-d，并且仍然得到一个平面图，矛盾；
- （3）如果a与c邻接，而且b和d也邻接。根据上面的讨论，边a-c和b-d都在面F之外，但是此时两条边就会出现交叉（太不严谨，需结合拓扑学），这与G是平面图矛盾。

平面图的必要条件

- 引理：极大平面图必然有 $m = 3n - 6$
- 证明：
  - 设图 G 有 k 个面，根据前一定理，每个面的次数都是3，因此所有面的次数之和为3k，也就是边数为 3k/2，所以 $k = 2m/3$。根据欧拉公式，得到

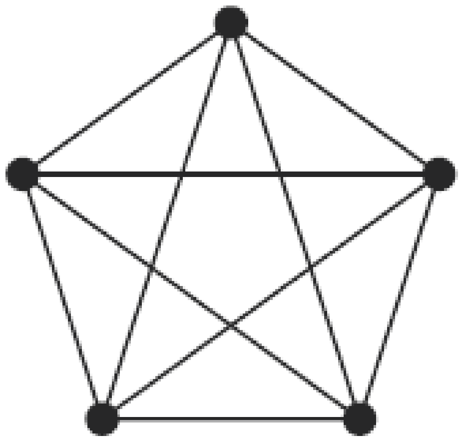
$$n - m + 2m/3 = 2$$

  - 化简得到 $m = 3n - 6$。

- 定理：对于任意至少有三个顶点的简单平面连通图G，都有 $m \leqslant 3n - 6$
- 证明：
  - 如果G不是极大平面图，则可以增加一些边，使之变成极大平面图，而且顶点数n1、边数m1和面数r1满足上一定理。显然，和原图G相比，有 $n1 = n$ 和 $m < m1$。所以有：$m < m1 = 3n - 6$
  - 综合上一定理，有 $m \leqslant 3n - 6$

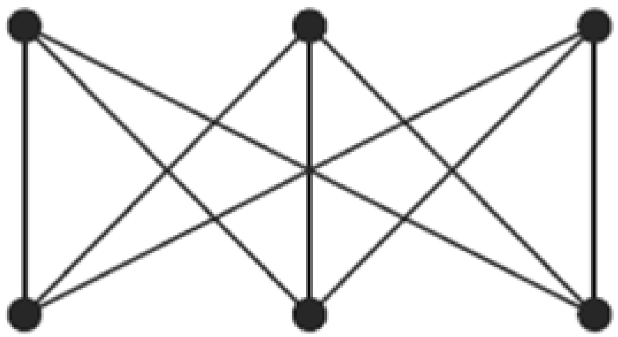
平面图必要条件的应用

- 1、K_5 可平面性的判定
  - 顶点数：5
  - 边数：10
  - 边数 > 3 X 顶点数 － 6
  - 因此不是平面图



K_5

- 2、$K_{3,3}$ 可平面性的判定
  - 顶点数：6
  - 边数：9
  - 边数 < 3 X 顶点数 － 6
  - 无法判定是否为平面图

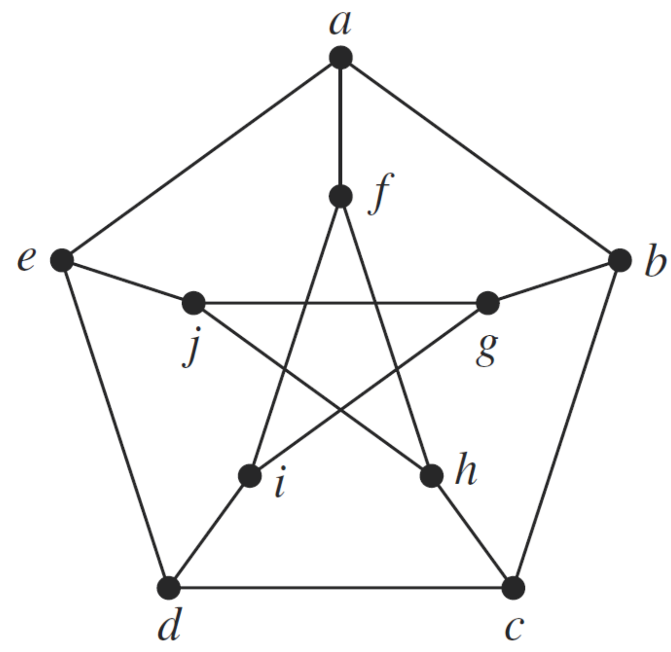


$K_{3,3}$

彼得森图上的应用

- 彼德森图
  - 顶点数：10
  - 边数：15

  - 边数＜3 X 顶点数 － 5
  - 无法判定是否为平面图



可平面图的必要条件：推论

- 定理：对于连通平面图G，其顶点的度的最小值不超过5
- 证明：
- 对于 $n \leqslant 6$ 的情形，可以直接得到结论
- 对于 $n > 6$ 的情形，如果G顶点的度的最小值大于6，设边数为 m，顶点数为 n，则有

$$2m = \text{所有顶点的度之和} \geqslant 6n$$

- 因此有 $m \geqslant 3n$。这与前面的定理矛盾。

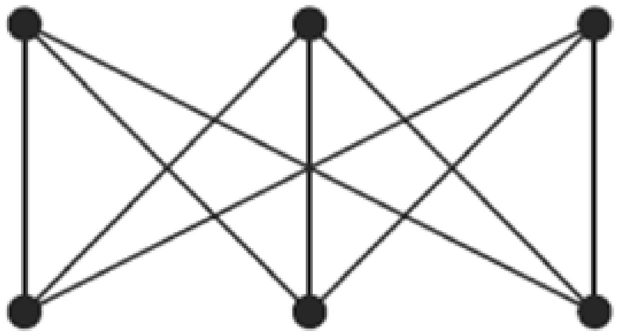
可平面图的必要条件：扩展

- 定理：对于每个面的周界都至少包括4条边的连通平面图G，记其顶点数为n，边数为m，则有 $m \leqslant 2n - 4$
- 证明：
  - 假设图 G 有 r 个面，由于每个面的次数都至少为4，因此所有面的次数之和至少为 4r。
  - 另一方面，所有面的次数之和等于 2m，因此有 $4r \leqslant 2m$，即 $r \leqslant m / 2$。
  - 代入到欧拉公式，有 $2 = n + r - m \leqslant n - m / 2$。
  - 整理得到：$m \leqslant 2n - 4$

- 思考：对于每个面的周界的次数都不小于5、6、...的情形，应如何推导一般性的公式?
  - 对于一般的k：$m \leqslant (n - 2) \cdot k/(k - 2)$

平面图必要条件的应用

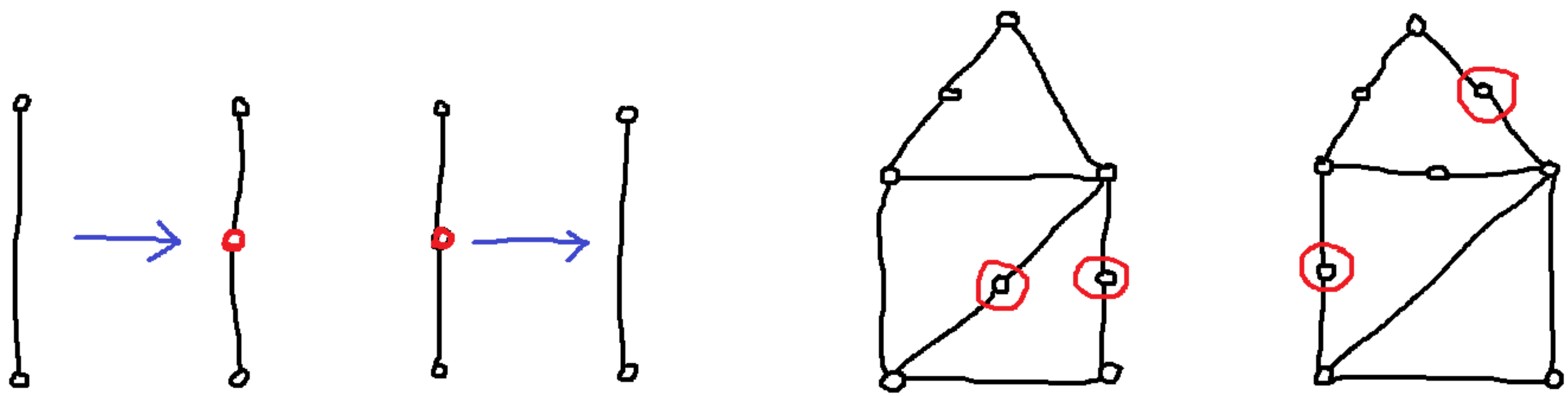
- $K_{3,3}$ 可平面性的判定
  - 顶点数：6
  - 边数：9
  - 注意到，$K_{3,3}$是二分图，因此它的每个圈都至少包括4条边
    - 为什么?
  - 所以，如果$K_{3,3}$可平面的话，它的每个面的周界的次数都不会小于4
  - 边数 > 2 X 顶点数 – 4
  - 因此不是平面图



$K_{3,3}$

图的同胚

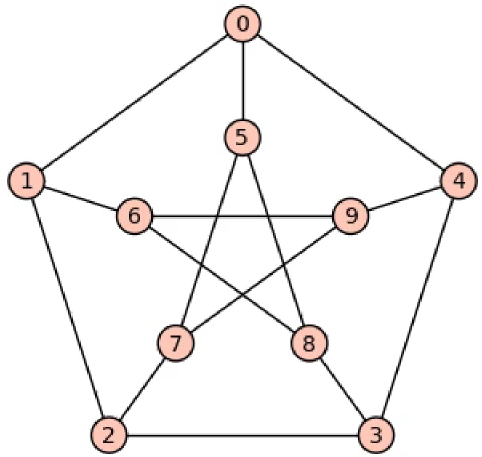
- 定义：两个无向图G_1和G_2，如果是同构的，或者经过一系列的插入（删除）度为2的顶点后变成同构图，则称它们同胚。
  - 很显然，同胚图的可平面性是一致的

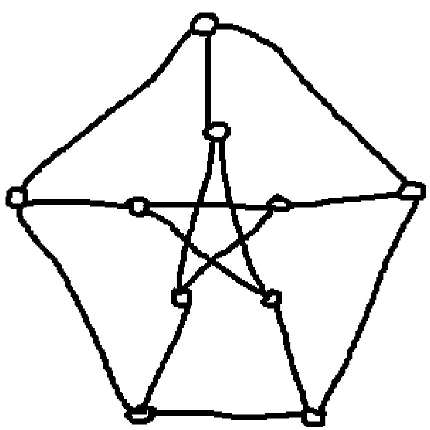


- 同胚（homeomorphism）是拓扑学概念，直观理解就是经过拉伸和变形可以互相变形到对方
  - 严格定义：两个拓扑空间之间存在连续双射

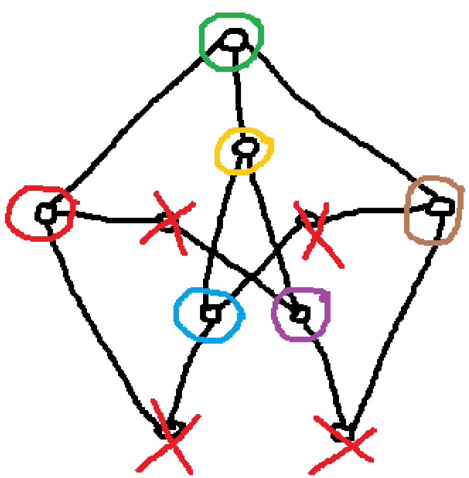
库拉图斯基定理

- Kuratowski定理：图G是平面图，当且仅当G不包含同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。
- 证明：（比较复杂，略）
- 彼得森图的非平面性判定

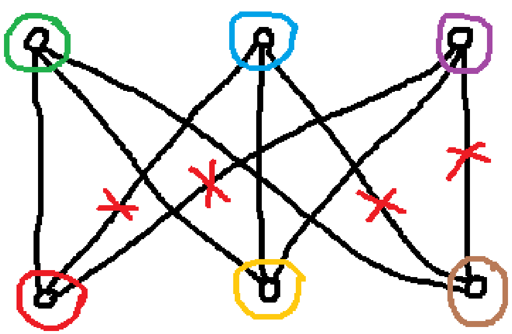




原图



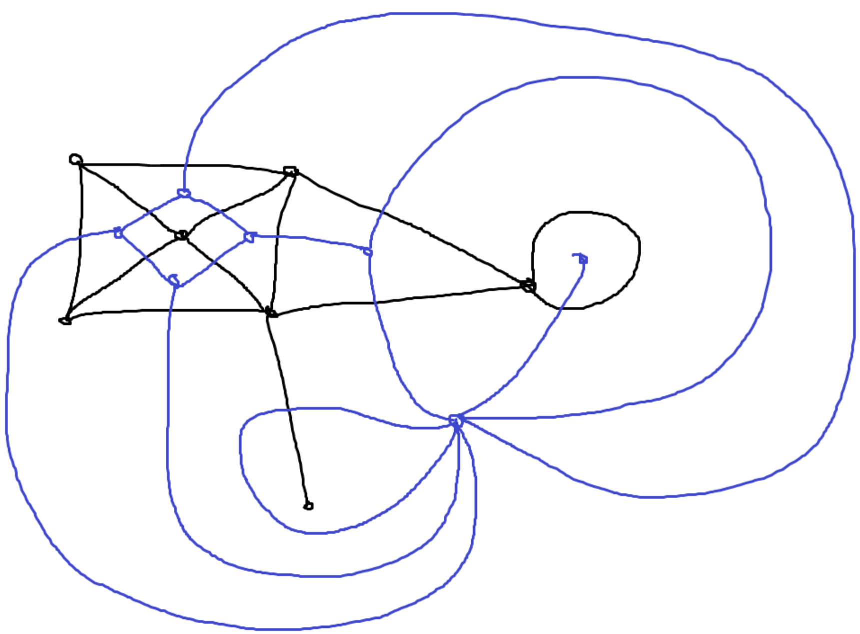
子图



$K_{3,3}$

平面图的对偶图

- 定义：图G是平面图，具有k个面F_1、…、F_k，其中包括无限面。按照下面的方式构造图G*：
  - 在G的每个面F_i中取一个点f_i，作为G*的一个顶点
  - 对G的每条边e，在G*中加入一条边，连接e两侧面对应的顶点
    - 如果e是G的两个不同的面Fi、Fj的公共边，则加入一条连接fi和fj的边
    - 如果e仅在某一个面的周界（e是G的悬挂边或桥），在G*中加入自环
- 称图G*为图G的对偶图。
- 注意：画对偶图时，每条边都要与原图中的边恰好相交一次



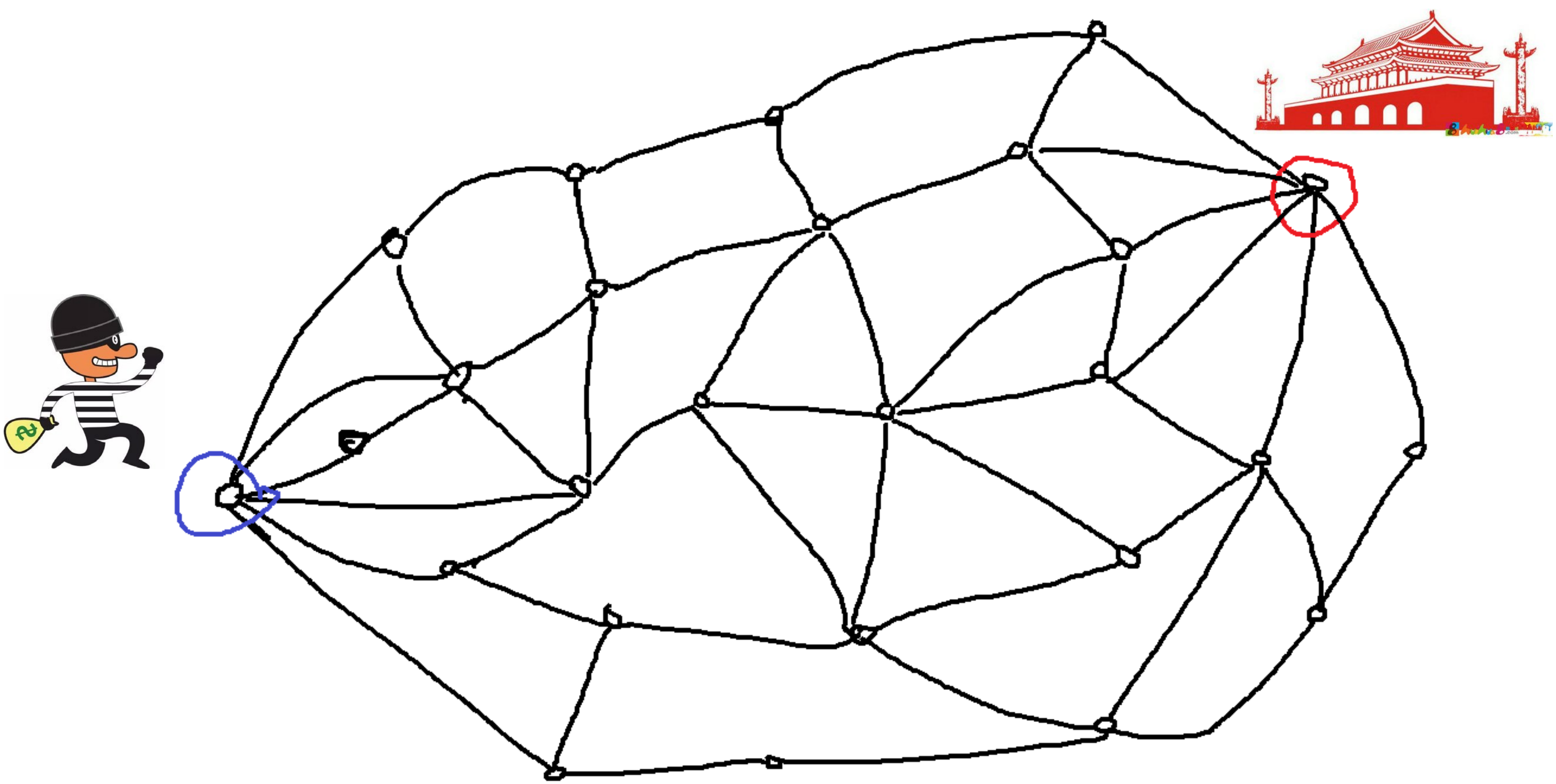
平面图的对偶图

- 平面图对偶图的简单性质：
  - G的面与G*的顶点一一对应
  - G的边与G*的边一一对应
  - 任何平面图的对偶图总是连通平面图

- 此外，对于连通平面图G
  - G的顶点与G*的面一一对应
  - G与G*互为对偶图

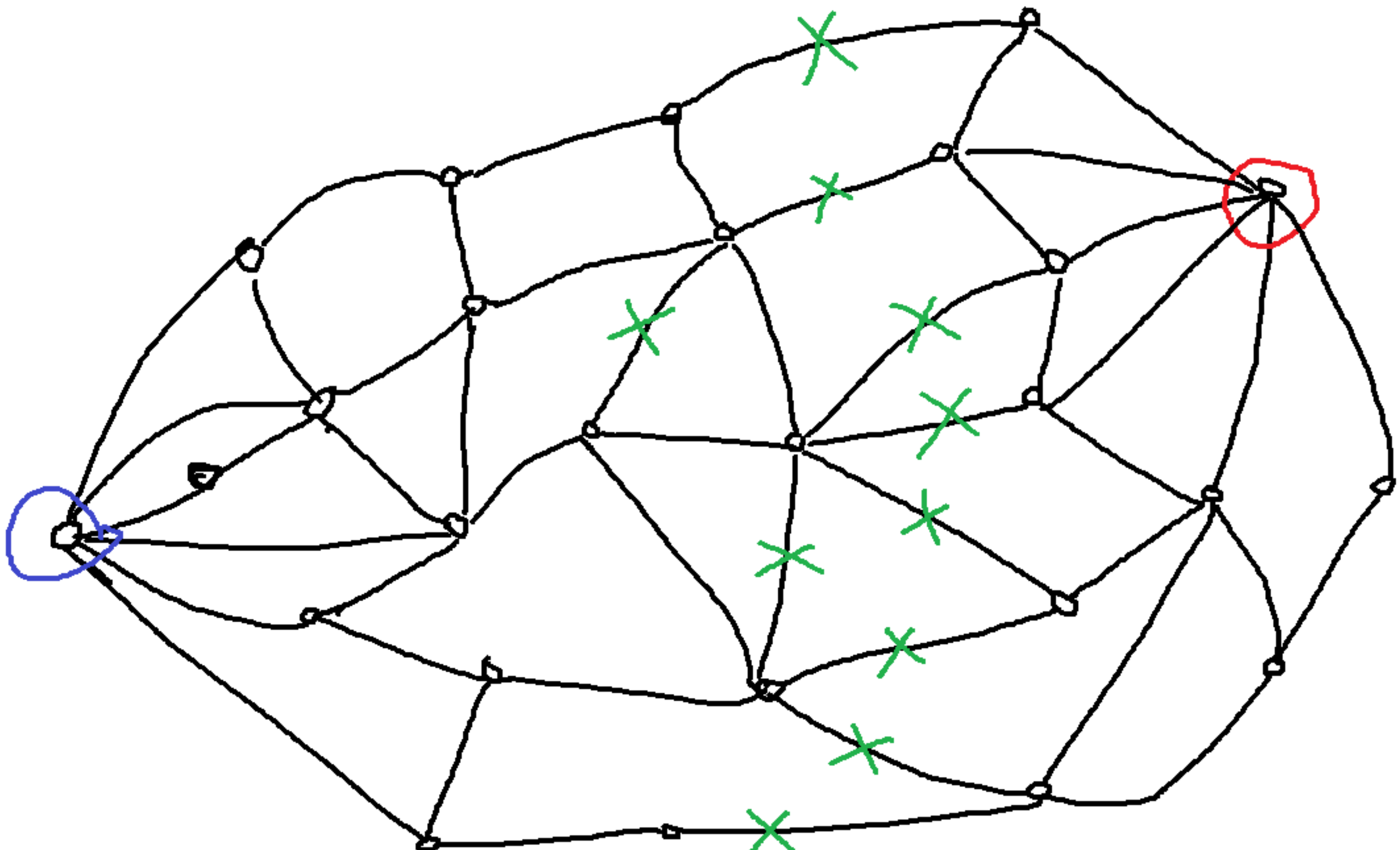
平面图的对偶图：最小割

- 在交通网上设置检查站，防止A地犯人流窜到B地：
  - 为避免扰民，不能设置在城市，只能设置在路上
  - 减少成本，检查站数量最少

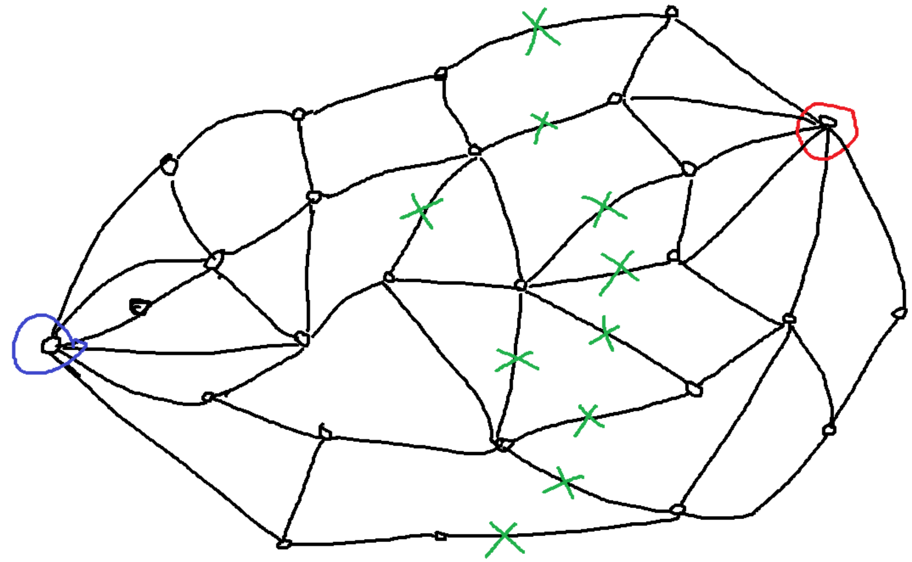


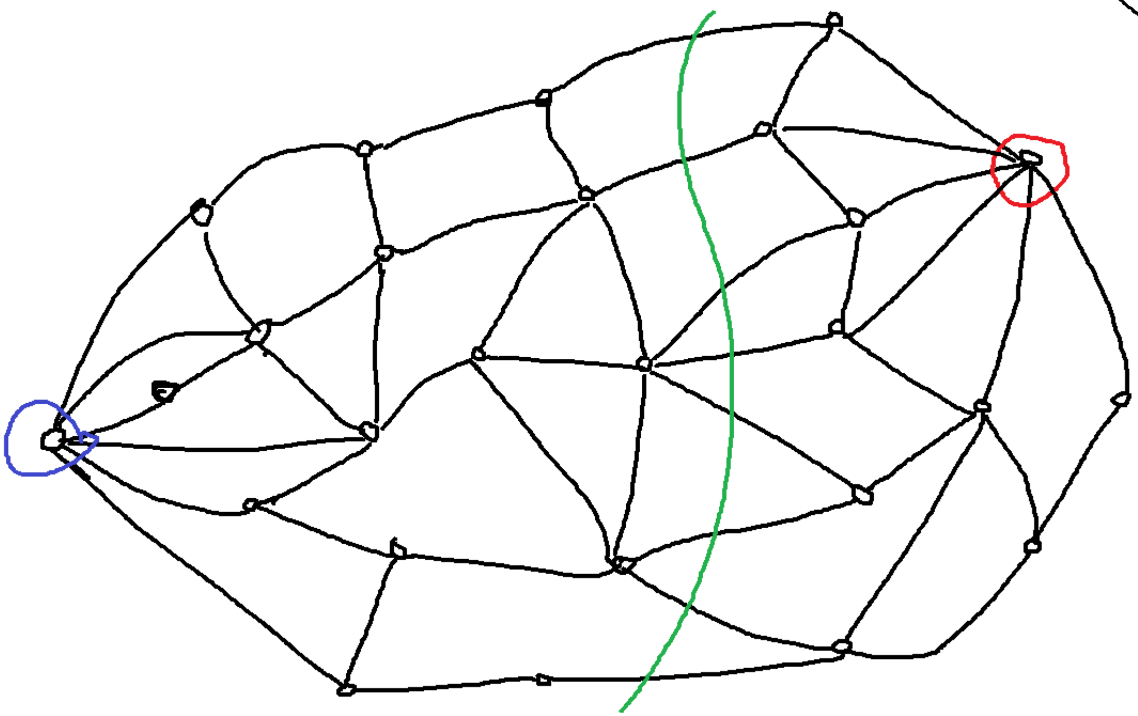
平面图的对偶图：最小割

- 思考：在下面的检查站中，哪些是不必要的?
- 有什么启发?



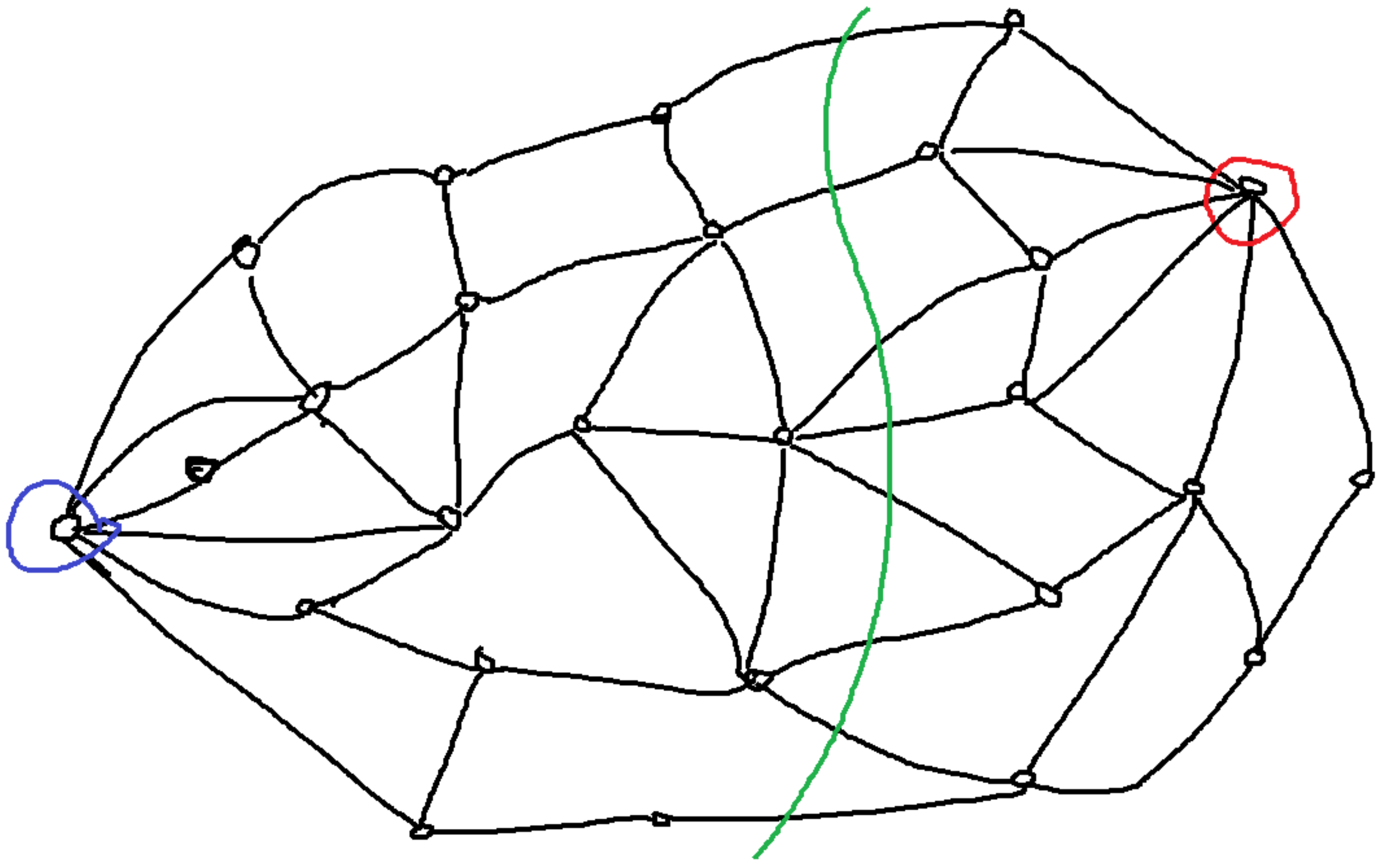
平面图的对偶图：最小割





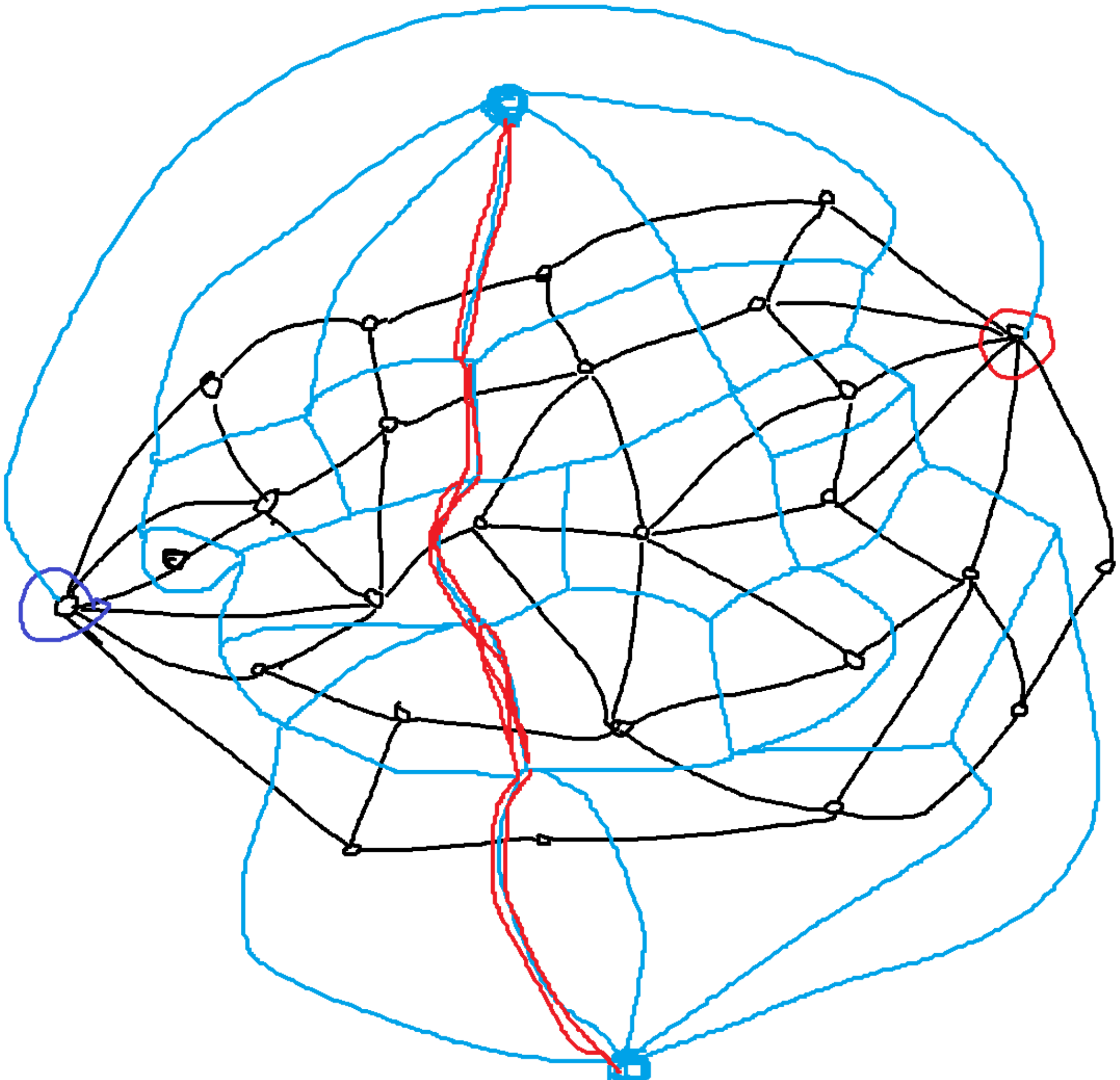
平面图的对偶图：最小割

- 怎么和已有的问题联系起来?
  - 提示：对偶图



平面图的对偶图：最小割

- 对偶图上的最短路



作业

- 离散数学（尹宝林等编著）第三版
- 第十五章课后习题
  - 必做：2、3、4、5、6、7、9、10
- 证明：连通平面图的对偶图的面，与平面图的顶点是一一对应的，而不连通的平面图则不一定。
  - 思路：考察连通平面图与其对偶图的欧拉公式。


谢谢