离散数学 2-往年试题参考解答

Yuwei Yin 阴昱为

School of Computer Science and Engineering, Beihang University

Email: yuweiyin@buaa.edu.com

1　2007 级离散数学（2）期终考试试题（A 卷）

一、判断题（每题 2 分，共 20 分）

（×）1. 若 $A - B = \emptyset$，则 $A = B$。

（√）2. 若 $A \subseteq B$，则 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$，其中 $\mathscr{P}(A)$ 为 A 的幂集。

（×）3. 若集合 A 上的二元关系 R 是反对称的，则 R^2 也是反对称的。

（×）4. 若 R 是集合 A 上的二元关系，则 $st(R) = ts(R)$。

（×）5. 良序关系的逆关系必为良序关系。

（√）6. 有限集 A 上的满射 $f : A \to A$ 必为双射。

（√）7. 自然数的幂集 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 的基数等于实数 $\mathbb{R}$ 的基数。

（√）8. 任何图均有偶数个奇结点。

（×）9. 无向图 G 有欧拉闭路，当且仅当 G 是欧拉图。

（√）10. 若 T 为阶大于 2 的树，则 T 至少有一个结点的度数大于等于 2。

9 题注解：每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图，每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。有定理：设 G 是**连通**无向图，G 是欧拉图当且仅当 G 有欧拉闭路。不连通的无向图就不适用于此定理了。

二、(16 **分**)

设 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下:

$$R_1=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>\}$$

$$R_2=I_A\cup\{<a,b>,<b,a>,<c,d>,<d,c>\}$$

i)试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质(即是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性这五种性质)。

ii)试求出 R_1^2,$R_1\circ R_2$ 和 R_2^+。

解答:

i)R_1 具有反自反性、反对称性。

R_2 具有自反性、对称性、传递性。

ii)$R_1^2=\{<a,c>,<b,d>,<c,a>,<d,b>\}$。

$R_1\circ R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,d>,<c,c>,<c,d>,<d,a>,<d,b>\}$。

$R_2^+=t(R_2)=R_2=I_A\cup\{<a,b>,<b,a>,<c,d>,<d,c>\}$。

三、(16 **分**)

设 R 为集合 A 上的二元关系,证明:

1)若 R 既是自反的,又是传递的,则 $R^2=R$。

2)若 R 是传递的,则 R^2 也是传递的。

解答:

1) 因为 R 是自反的,所以 $\forall x\in A$ 有 $<x,x>\in R$。因为 R 是传递的,所以若 $<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$ 有 $<x,z>\in R$。要证明集合相等 $R^2=R$,即证明二者互相包含,即 $R^2\subseteq R\wedge R\subseteq R^2$。

用元素分析法,$\forall<x,z>\in R^2$(x 与 z 可以相等也可以不相等),则 $\exists y\in A$ 有 $<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$,根据传递性,有 $<x,z>\in R$。故 $R^2\subseteq R$。

另一方面,$\forall<x,y>\in R$,若 $x=y$,则显然有 $<x,y>\in R^2$。若 $x\neq y$,$\forall<y,z>\in R$,根据传递性有 $<x,z>\in R$,根据关系的合成有 $<x,z>\in R^2$。由于 R 具有自反性,因此 $<y,y>\in R\wedge<z,z>\in R$,又因为前述已有 $<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R$,根据关系的合成有 $<x,y>\in R^2\wedge<y,z>\in R^2$。故有 $R\subseteq R^2$。

综上,有 $R^2\subseteq R\wedge R\subseteq R^2$,故 $R^2=R$,证毕。

2) $\forall<x,y>\in R^2\wedge<y,z>\in R^2$,由关系的合成,$\exists p,q\in R$ 有 $<x,p>,<p,y><y,q><q,z>\in R$。又因为 R 具有传递性,则 $<$

$x, y >\in R \wedge < y, z >\in R$。再根据关系的合成，有 $< x, z >\in R^2$，故 R^2 也具有传递性，证毕。

四、(16 分)

设 $< A, \leq >$ 为偏序结构，函数 $f : A \to \mathscr{P}(A)$ 定义如下:

$$f(a) = \{x|x \in A\text{且}x \leq a\}，\text{其中}a \in A$$

试证明:

1）f 为单射;

2）对任意 $a, b \in A$，若 $a \leq b$，则 $f(a) \leq f(b)$。

其中 $\mathscr{P}(A)$ 为 A 的幂集。

证明:

1）由 $< A, \leq >$ 为偏序结构，则 $\forall a \in A$，有 $< a, a >\in\leq$，根据函数 f 的定义，故有 $a \in f(a)$。

故 $\forall a_1, a_2 \in A$，有 $a_1 \in f(a_1)$ 且 $a_2 \in f(a_2)$，若 $a_1 \neq a_2$，则有 $a_1 \in f(a_1) \wedge a_1 \notin f(a_2)$ 且 $a_2 \in f(a_2) \wedge a_2 \notin f(a_1)$，故有 $f(a_1) \neq f(a_2)$，这意味着函数 f 为单射。

2) 由 $< A, \leq >$ 为偏序结构, 故在集合 A 上的关系 $\leq$ 具有自反性、反对称性和传递性。$\forall a, b \in A$, 对 $\forall x \leq a$, 根据函数 f 的定义, 有 $x \in f(a)$。若 $a \leq b$, 由传递性, 根据 $x \leq a \wedge a \leq b$ 有 $x \leq b$, 故 $x \in f(b)$, 故 $f(a) \subseteq f(b)$。

定义 $\mathscr{P}(A)$ 上的二元关系 $\preccurlyeq$ 为子集包含关系 $\subseteq$。$\forall f(a) \in \mathscr{P}(A)$ 有 $f(a) \preccurlyeq f(a)$，故 $\preccurlyeq$ 具有自反性。$\forall f(a_1), f(a_2) \in \mathscr{P}(A)$，若 $f(a_1) \preccurlyeq f(a_2) \wedge f(a_2) \preccurlyeq f(a_1)$ 则有 $f(a_1) = f(a_2)$,故 $\preccurlyeq$ 具有反对称性。$\forall f(a_1), f(a_2), f(a_3) \in \mathscr{P}(A)$，若 $f(a_1) \preccurlyeq f(a_2) \wedge f(a_2) \preccurlyeq f(a_3)$，则有 $f(a_1) \preccurlyeq f(a_3)$，故 $\preccurlyeq$ 具有传递性，故二元关系 $\preccurlyeq$ 时 $\mathscr{P}(A)$ 上的偏序关系。

综上，对任意 $a, b \in A$，若 $a \leq b$，则 $f(a) \preccurlyeq f(b)$。

五、（10 分）求出下图 G 的一个最小生成树。

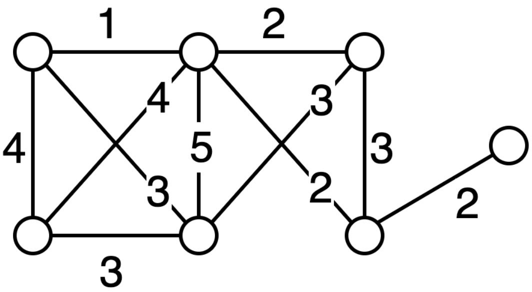

图 1: 2007 级离散数学（2）期终考试试题-第 5 题-图 G

解答:

如下图中的左图或右图均可。

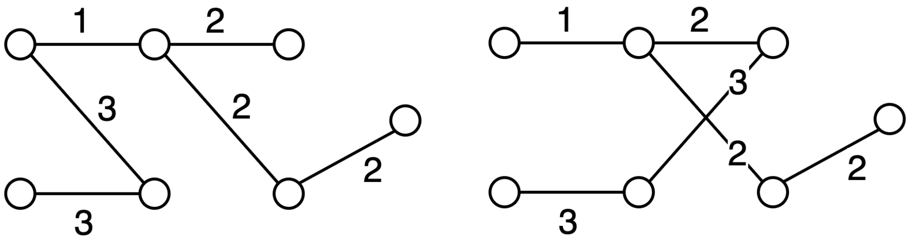

图 2: 2007 级离散数学（2）期终考试试题-第 5 题-图 G 的最小生成树

六、（16 分）试求叶的权分别为 $2,3,5,8,13,21,34$ 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。

解答:

最优叶加权二叉树如下图所示，叶加权路径长度为分支结点的权值之和，即为 $5+10+18+30+51+85=199$。

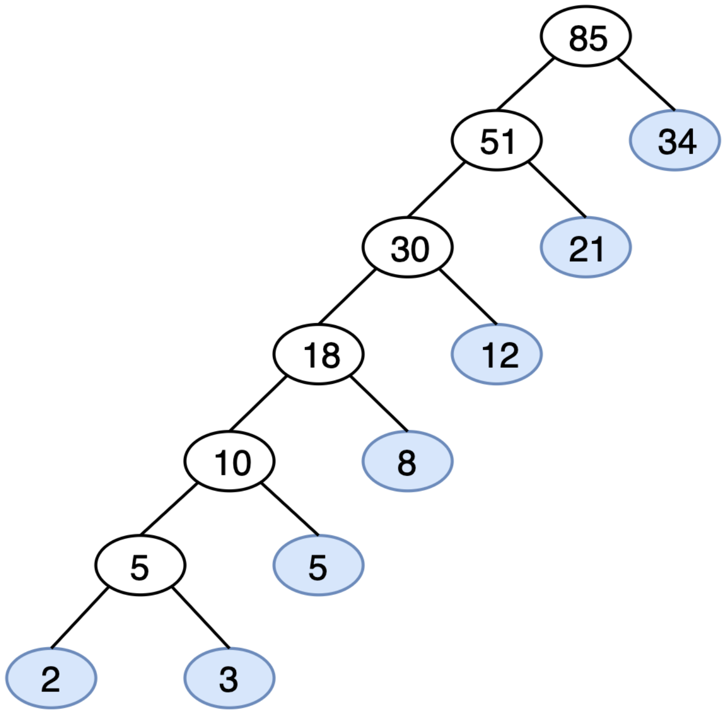

图 3: 2007 级离散数学（2）期终考试试题-第 6 题-最优叶加权二叉树

七、任选一小题（6 分）

1）设 A 为有限集，$f: A \to A$ 为双射。证明：存在自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$。

2）设 n 阶简单无向图 G 的边数 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$。证明：$G$ 必为连通的。

1）证明：

反证法，假设原命题为假，即 $\forall n \geq 1$，均有 $f^n \neq I_A$。这意味着对任何自然数 n 而言，$x \in A \wedge f^n(x) \neq x$。

因为 $f: A \to A$ 为双射，故 $\forall x \in A$，$\exists! y \in A$ 有 $f(x) = y$。由反证法假设，$f(x) = y \neq x$。继续考察 y 的函数值，$f(y) = z \neq y$，并且 $f(y) = f^2(x) = z \neq x$。以此类推，$\forall p \in A, n \in \mathbb{N}$，函数值 $f^n(p)$ 既不等于 p，也不等于集合 A 中除了 p 之外的任何数（A 为有限集），这意味着 $\exists q \notin A$，$f(p) = q$。这与 f 的值域为 A 相矛盾，故假设不成立，原命题为真，证毕。

2）证明：

记该 n 阶简单无向图为 $G =< V, E, \Psi >$。由握手定理，有总度数 $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| > (n-1)(n-2)$。设 V 中度数最大的结点为 v_0，因为 G 是 n 阶简单无向图，所以 $d_G(v_0) \leq n-1$。

若 $d_G(v_0) \leq n-3$，则总度数至多为 $n(n-3) = n^2 - 3n$，这与总度数 $\sum_{v \in V} d_G(v) > (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$ 相矛盾，故 $d_G(v_0) \geq n-2$。

若 $d_G(v_0) = n-1$，则表示结点 v_0 与其它 $n-1$ 个结点均关联，故 G 连通。

若 $d_G(v_0) = n-2$，则表示结点 v_0 与其它 $n-2$ 个结点均关联，仅有 1 个结点未与 v_0 关联，记为 v_1。考察 v_1 的度数，若 $d_G(v_1) = 0$，此时总度数为 $(n-1)(n-2)$，与 $\sum_{v \in V} d_G(v) > (n-1)(n-2)$ 相矛盾，故 $d_G(v_1) \geq 1$，这表明 v_1 与除 v_0 之外的某个结点相关联，故图 G 连通。

综上，G 是连通图，原命题成立，证毕。

2 2008 级离散数学（2）期终考试试题（A 卷）

一、判断题（每题 2 分，共 20 分）

（$\surd$）1. 若 $A \oplus B = A \oplus C$，则 $B = C$。

（$\surd$）2. $A \subseteq C$ 且 $b \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$。

（$\surd$）3. 设 A、B 为任意两个集合，则 $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$。

（$\surd$）4. 设 R 为集合 A 上的等价关系，则 R^2 也为 A 上的等价关系。

（$\times$）5. 若 R 是集合 A 上的二元关系，则 $str(R)$ 是 A 上的等价关系。

（$\times$）6. 设 $\mathbb{Q}_+$ 为正有理数集合，则 $<\mathbb{Q}_+, \leq>$ 是良序结构。

（$\surd$）7. 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集合，则 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 等势。

（$\times$）8. 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$，若 $g \circ f$ 是满射，则 f 是满射。

（$\surd$）9. 若简单图 G 中任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq 2$，则 G 中必存在回路。

（$\surd$）10. n 阶二叉树有 $(n-1)/2$ 个分支结点。

二、(20 分)

设 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：

$$R_1 = \{<a, b>, <a, d>, <c, b>, <c, d>\}$$

$$R_2 = \{<a, b>, <b, a>, <c, d>, <d, a>, <d, c>\}$$

i）试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质（即是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性这五种性质）。

ii）试求出 R_1^2，$R_1 \circ R_2$ 和 R_2^+。

解答：

i）R_1 具有反自反性、反对称性、传递性。

R_2 具有反自反性。

ii）$R_1^2 = \emptyset$。

$R_1 \circ R_2 = \{<a, a>, <a, c>, <c, a>, <c, c>\}$。

$R_2^+ = t(R_2) = I_A \cup \{<a, b>, <b, a>, <c, a>, <c, b>, <c, d>, <d, a>, <d, b>, <d, c>\}$。

三、(10 分) 设集合 A 上的二元关系 R 是自反的。证明: R 为等价关系的充要条件是: 若 $<a,b>,<a,c>\in R$, 则 $<b,c>\in R$。

证明:

<u>必要性</u>。R 为等价关系, 满足自反性、对称性和传递性。若 $<a,b>,<a,c>\in R$, 根据对称性, $<b,a>\in R$。又根据传递性, $<b,a>,<a,c>\in R\to<b,c>\in R$。故必要性得证。

<u>充分性</u>。若 $<a,b>,<a,c>\in R$, 则 $<b,c>\in R$。已知二元关系 R 是自反的, 故有 $<a,a>,<b,b>,<c,c>\in R$。根据充分条件, 有 $<a,b>,<a,a>\in R\to<b,a>\in R$, 同理有 $<a,c>,<a,a>\in R\to<c,a>\in R$ 和 $<b,c>,<b,b>\in R\to<c,b>\in R$, 这意味着若 $<x,y>\in R$ 则有 $<y,x>\in R$, 故 R 具有对称性。若 $<x,y>,<y,z>\in R$, 根据对称性有 $<y,x>\in R$, 根据充分条件有 $<y,x>,<y,z>\in R\to<x,z>\in R$, 故 R 具有传递性。又因为已知 R 具有自反性, 故 R 为等价关系。故充分性得证。

综上, 原命题成立, 证毕。

四、(12 分) 任给 52 个整数, 证明其中必有 <u>两数之和</u> 或 <u>两数之差</u> 能被 100 整除。

证明:

设 r 为任意整数 n 被 100 除的余数, 则 r 满足 $0\le r\le 99$。这些余数可以构成 51 个 "抽屉" 如下: $(0,0),(1,99),(2,98),(3,97),...,(49,51),(50,50)$。根据抽屉原理, 任给 52 个整数, 则必存在两个整数 a 和 b 的余数 r_a 和 r_b 落在同一个抽屉中。

若 r_a 和 r_b 落在 $(0,0)$ 或 $(50,50)$ 中, 则 a 和 b 之和、之差均能被 100 整除。

若 r_a 和 r_b 落在 $(i,100-i)$ 抽屉中, 其中 $1\le i\le 49$。则当 $r_a=r_b$ 时、二者之差能被 100 整除; 当 $r_a\neq r_b$ 时、二者之和能被 100 整除。

综上, 原命题成立, 证毕。

五、(12 分)试求叶的权分别为 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$ 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。

解答:

最优叶加权二叉树如下图所示，叶加权路径长度为分支结点的权值之和，即为 $5 + 14 + 30 + 55 + 85 + 140 = 329$。

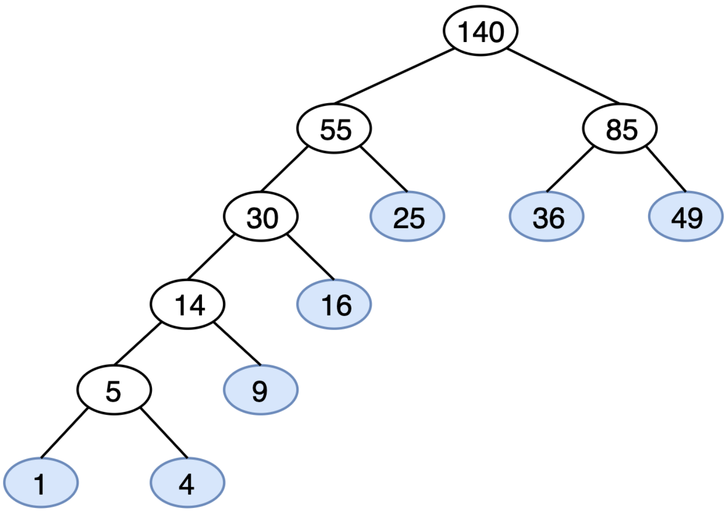

图 4: 2008 级离散数学(2)期终考试试题-第 5 题-最优叶加权二叉树

六、(10 分)设 n 阶连通无向图 G 为非循环的，直接用归纳法证明: G 有 $n-1$ 条边。

证明:

<u>第二类归纳法</u>。施归纳于连通无向图 G 的阶数 n。(本题默认 G 为简单无向图，即不含自圈和平行边。)

<u>基础项</u>。当 $n = 1$ 时，G 为平凡图，有 $1 - 1 = 0$ 条边，成立。当 $n = 2$ 时，G 有且仅有 2 个结点，记为 v_1 和 v_2，为使 G 连通，必有一条边 (v_1, v_2)，故此时总共有 $2 - 1 = 1$ 条边，成立。

<u>归纳假设</u>。假设当非循环的连通无向图 G 的阶数 $n \leq k$ 时，均满足 G 有 $n - 1 = k - 1$ 条边。

<u>归纳项</u>。当非循环的连通无向图 $G =< V, E, \Psi >$ 的阶数 $n = k + 1$ 时。由于图 G 是非循环的，即 G 中不存在回路，故 G 中每个子图也都不存在回路，即也为非循环图。

设 G 的任意 k 阶子图为 $G_k =< V_k, E_k, \Psi_k >$，结点 v 为 $V - V_k$ 内

的唯一结点。若 G_k 有 t 个连通分支，显然 $1 \leq t \leq k$，记这些连通分支为 $G_k^i =< V_k^i, E_k^i, \Psi_k^i >$，其中 $1 \leq i \leq t$。

对每个连通分支而言，阶数均不大于 k，而且是非循环图。由归纳假设，所有这些连通分支的边数之和为 $\sum_{i=1}^{t} |E_k^i| = \sum_{i=1}^{t}(|V_k^i| - 1) = k - t$。因为此时 G 是连通图，故结点 v 要将这 t 个连通分支连接起来，故每个分支均至少有一个结点与 v 关联。

若某连通分支 $G_k^i =< V_k^i, E_k^i, \Psi_k^i >$ 有超过 1 个结点与 v 关联，设有 v_p 和 v_q 与 v 关联，有边 (v, v_p) 和 (v, v_q)。又因为分支 G_k^i 是连通的，故存在从结点 v_p 到 v_q 的路径，因此存在从 v 出发回到 v 的回路，这与母图 G 是非循环图相矛盾，所以任意连通分支 G_k^i 有且仅有一个结点与 v 关联。

所以母图 G 总共有 $(k - t) + (t) = k$ 条边，归纳项成立。

综上，根据归纳法，原命题成立，证毕。

七、（8 分）设 R 为集合 A 上的二元关系，证明 $t(R) = R^+$。其中 $t(R)$ 为 R 的传递闭包，$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$。

证明：

为证明集合相等 $t(R) = R^+$，即证明二者互相包含，即 $t(R) \subseteq R^+ \wedge R^+ \subseteq t(R)$。

若 $< x, y >, < y, z > \in R^+$，根据关系的合成，必 $\exists m, n \in I_+$ 使 $< x, y > \in R^m$ 且 $< y, z > \in R^n$，故 $< x, z > \in R^{m+n} \subseteq R^+$，即 R^+ 是传递的，因此有 $t(R) \subseteq R^+$。

采用归纳法证明 $R^+ \subseteq t(R)$，施归纳于关系合成的幂次 n。

<u>基础项</u>。当 $n = 1$ 时，$R^1 = R \subseteq t(R)$，成立。

<u>归纳假设</u>。假设当 $n = k$ 时有 $R^k \subseteq t(R)$。

<u>归纳项</u>。$\forall < x, z > \in R^{k+1}$，因为 $R^{k+1} = R \circ R^k$，根据关系的合成，$\exists y \in A$ 使 $< x, y > \in R$ 且 $< y, z > \in R^k$。根据基础项以及归纳假设，有 $R \subseteq t(R)$ 且 $R^k \subseteq t(R)$。又因为 $t(R)$ 是传递的，所以 $< x, z > \in t(R)$，故 $R^{k+1} \subseteq t(R)$，归纳项成立。

综上，根据归纳法，有 $R^+ \subseteq t(R)$。又已证 $t(R) \subseteq R^+$，故 $t(R) = R^+$，证毕。

八、（8 分）设函数 $f: X \to Y$ 且 $g: Y \to X$，若令 $A = \{a \in X | g(f(a)) = a\}$ 且 $B = \{b \in Y | f(g(b)) = b\}$，则 $f[A] = B$。

证明：

证明集合相等 $f[A] = B$，即需证明二者互相包含，即 $f[A] \subseteq B \wedge B \subseteq f[A]$。

用元素分析法，$\forall x \in f[A]$，若 $f(a) = x$，即 x 关于 f 的原像是 a，则由集合 A 的定义，有 $g(x) = a$。故 $f(g(x)) = f(a)$，而前面已设 $f(a) = x$，因此有 $f(g(x)) = x$ 且 $x \in f[A] \subseteq Y$，故 x 满足集合 B 的元素定义，故 $x \in B$。因此有 $f[A] \subseteq B$。

另一方面，$\forall y \in B$，由 $g: Y \to X$ 是定义在 Y 上的全函数，故 $\exists a \in X$ 有 $g(y) = a$。由集合 B 的定义，$f(g(y)) = y$，故 $f(a) = y$。又前面已设 $g(y) = a$，故 $g(f(a)) = a$，故 a 满足集合 A 的元素定义，故 $a \in A$。而 $f(a) = y$，故 $y \in f[A]$。因此有 $B \subseteq f[A]$。

综上，有 $f[A] \subseteq B \wedge B \subseteq f[A]$，故 $f[A] = B$。

3 2009 级离散数学（2）期终考试试题（A 卷）

一、判断题（每题 2 分，共 20 分）

（$\surd$）1. 若 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$，则 $C \subseteq A \cap B$。

（$\surd$）2. 若 $A \cap B = A \cap C$ 且 $\sim A \cap B = \sim A \cap C$，则 $B = C$。

（$\times$）3. 设 A、B 为任意两个集合，则 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$。

（$\surd$）4. 设集合 A 上的二元关系 R 是传递的，则 $R \circ R$ 也是传递的。

（$\times$）5. 若 R 是集合 A 上的二元关系，则 $st(R) = ts(R)$。

（$\times$）6. 设 $\Sigma = \{a, b\}$，$\leq$ 是 Σ^+ 上的**字典序**，则 $< \Sigma^+, \leq >$ 是良序结构。

（$\surd$）7. 集合 A 上的单射 $f : A \to A$ 必为满射。

（$\surd$）8. 设 $\mathbb{R}$ 为实数集合，则 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 等势。

（$\surd$）9. 任何阶大于 1 的简单无向图必有两个结点的度相等。

（?）10. n 阶树至少有两个端点。

二、（10 分）

设 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系 R 定义如下：

$$R = \{< a, b >, < a, c >, < a, d >, < c, b >, < c, d >\}$$

试指出 R 所具有的性质（即是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性这五种性质）。

解答：

R 具有反自反性、反对称性、传递性。

三、（10 分）构造从集合 A 到集合 B 的双射：

a）$A = \mathbb{R}$，$B = (0, +\infty)$；

b）$A = [-1, 1)$，$B = (5, 100]$。

解答：

a）构造函数 $f(x) = 2^x$。$\forall x, y \in A$，$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$，故 f 为单射；$ran(f) = f[A] = B$，故 f 为满射。

b）构造分段函数如下：

$$f(x) = \begin{cases} -100x, & x \in [-1, 0] \\ 5x, & x \in (0, 1) \end{cases} \tag{1}$$

四、(10 分) 设 R 为集合 A 上的二元关系，证明：R 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$。

证明:

<u>必要性</u>。集合 A 上的二元关系 R 是传递的，即若 $x, y, z \in A \wedge <x, y>, <y, z> \in R$，则有 $<x, z> \in R$。$\forall <a, c> \in R \circ R$，由关系的合成，$\exists b \in A$ 有 $<a, b>, <b, c> \in R$，根据 R 的传递性，有 $<a, c> \in R$，故 $R \circ R \subseteq R$，必要性得证。

<u>充分性</u>。$R \circ R \subseteq R$，即 $\forall <a, c> \in R \circ R$，有 $<a, c> \in R$。根据关系的合成，$\exists b \in A$ 有 $<a, b>, <b, c> \in R$，而又已知 $<a, c> \in R$，故 R 满足传递性，充分性得证。

综上，原命题成立，证毕。

五、(12 分) 若 $\leq$ 为集合 P 上的偏序关系，则 $\leq$ 为 P 上的良序关系，当且仅当：

1) $\leq$ 为 P 上的全序关系；

2) P 的每个非空子集都有极小元。

证明:

良序的定义为：若集合 A 上的二元关系 R 是偏序，且对于 A 的每个非空子集都有最小元。

<u>必要性</u>。$\leq$ 为 P 上的良序关系，根据良序的定义，$\forall x, y \in P$，子集 $\{x, y\}$ 中有最小元。若 $x = min\{x, y\}$，则有 $x \leq y$；若 $y = min\{x, y\}$，则有 $y \leq x$，故 $\leq$ 为 P 上的全序关系，满足 1)。对于 P 的任意非空子集 S，由良序的定义，S 有最小元，则该最小元自然也是 S 中的极小元，满足 2)。必要性得证。

<u>充分性</u>。$\leq$ 满足条件 1) 和 2)。对于 P 的任意非空子集 S，由条件 2) 知 S 有极小元，记为 m。由条件 1)，$\leq$ 为 P 上的全序关系，故 $\forall x \in S$ 有 $m \leq x$ 或 $x \leq m$。若 $x \leq m$，则子集 S 中的极小元 $m = x$，由偏序关系的自反性，此时仍有 $m \leq x$。故总有 $m \leq x$，这意味着 m 为子集 S 的最小元，因此 $\leq$ 满足良序的定义，故 $\leq$ 为 P 上的良序关系。充分性得证。

综上，原命题成立，证毕。

六、(10 分) 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 f 和 g 都是满射，则 $g \circ f$ 也是满射;

2) 若 f 和 g 都是单射，则 $g \circ f$ 也是单射;

证明:

1) 因为 f 是满射, 故 $ran(f) = Y$。又因为 g 是满射, 故 $g[Y] = ran(g) = Z$。因此 $ran(g \circ f) = g[ran(f)] = g[Y] = Z$，故 $g \circ f$ 是满射。

2) $\forall a, b \in X \wedge a \neq b$，因为 f 是单射，故 $f(x_1) \neq f(x_2)$，又因为 g 为单射，故 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$，也即 $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$，故 $g \circ f$ 是单射。

七、(12 分) 试求叶的权分别为 $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29$ 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。

解答:

最优叶加权二叉树如下图所示，叶加权路径长度为分支结点的权值之和，即为 $4 + 8 + 15 + 26 + 44 + 73 = 240$。

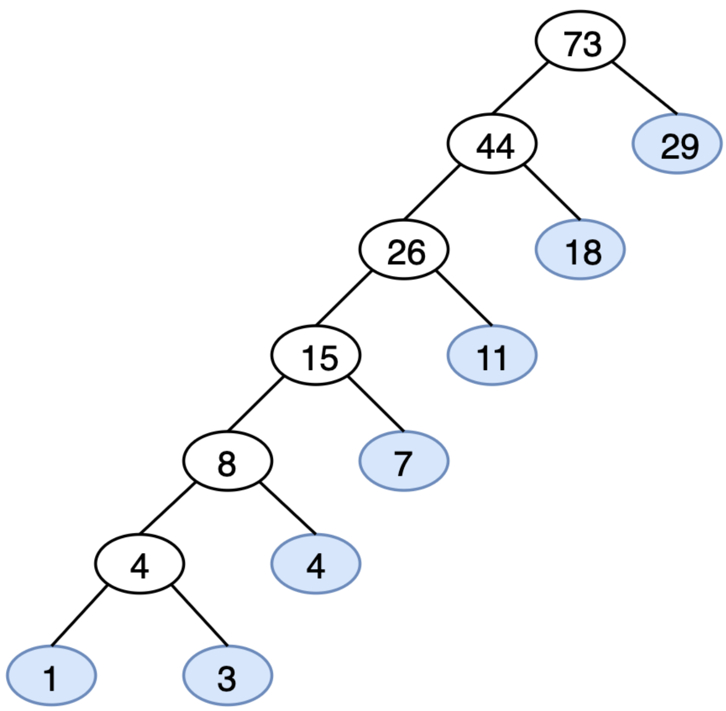

图 5: 2009 级离散数学（2）期终考试试题-第 7 题-最优叶加权二叉树

八、(10 分) 设 n 阶连通无向图 G 恰有 $n-1$ 条边，直接用归纳法证明：G 是非循环的。

采用第二类归纳法证明，施归纳于连通无向图 G 的阶数 n。(本题默认 G 为简单无向图，即不含自圈和平行边。)

基础项。当 $n=1$ 时，G 为平凡图，恰有 $1-1=0$ 条边，没有回路，成立。

归纳假设。假设当 $n \leq k$ 时命题均为真，即 k 阶连通无向图 G 恰有 $k-1$ 条边，且 G 是非循环的。

归纳项。当 $n=k+1$ 时，且 $k+1$ 阶连通无向图 $G=<V,E,\Psi>$ 恰有 $k+1-1=k$ 条边。由于 G 是连通图，不存在孤立点，故 $\forall v \in V$ 有 $d_G(v) \geq 1$。设 $v_0 \in V$ 为 G 中度数最小的结点，若 $d_G(v_0) \geq 2$，则总度数 $\sum_{v \in V} d_G(v) \geq 2(k+1)$，由握手定理，总边数 $|E| \geq (k+1)$，这与已知条件 $|E|=k$ 相矛盾，故 $d_G(v_0)=1$。

记 G 关于结点集 $V-\{v_0\}$ 的生成子图为 $G'=<V',E',\Psi'>$，由于 $d_G(v_0)=1$，所以 $|E'|=|E|-1=k-1$。由归纳假设知 G' 是非循环的，G' 中没有回路，在 G' 的基础上增加一条边即可得到 G，故 G 中也没有回路，故 G 为非循环图。归纳项成立。

综上，根据归纳法，原命题成立，证毕。

九、(10 分) 设 n 阶简单有向图 $G=<V,E,\Psi>$ 的基础图为简单完全无向图，证明：$\sum_{v \in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v \in V}(d_G^-(v))^2$。

证明：

由于 $G=<V,E,\Psi>$ 为 n 阶简单有向图，故其出度之和等于入度之和，即 $\sum_{v \in V} d_G^+(v)=\sum_{v \in V} d_G^-(v)$，故 $\sum_{v \in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))=0$。

因为已知 G 的基础图为简单完全无向图，故 $\forall v \in V$ 有 $d_G^+(v)+d_G^-(v)=n-1$。因此 $\sum_{v \in V}(d_G^+(v)+d_G^-(v)) \times (d_G^+(v)-d_G^-(v))=(n-1)\times\sum_{v \in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))=(n-1)\times 0=0$，根据平方差公式有 $\sum_{v \in V}(d_G^+(v))^2-(d_G^-(v))^2=0$，故 $\sum_{v \in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v \in V}(d_G^-(v))^2$，证毕。

4　2014 年离散数学（2）期终考试试题（A 卷）

一、判断题（每题 2 分，共 20 分）

（$\surd$）1. 若 $(A \oplus B) \cup C = \emptyset$，则 $A = B$。

（$\surd$）2. 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$。

（$\times$）3. 若集合 A，B，C 和 D 满足 $A \times B \subseteq C \times D$，则 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$。

（$\times$）4. 设集合 A 上的二元关系 R_1 和 R_2 为传递的，则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的。

（$\times$）5. 若 R 是集合 A 上的二元关系，则 $rst(R)$ 是 A 上的等价关系。

（$\times$）6. 设 $\leq$ 为 $\{a, b\}^*$ 中字符串的**字典序**，则 $< \{a, b\}^*, \leq >$ 是良序结构。注：所谓的 **字典序**是指：$a \leq b$，$a \leq aa$，$abb \leq baa$。

（$\surd$）7. 设 $\mathbb{R}$ 为实数集，则 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 等势。

（$\surd$）8. 设 f 是从 A 到 A 的满射且 $f \circ f = f$，则 $f = I_A$。

（$\surd$）9. 若无向图 G 中任意结点 v 的度数 $d_G(v) \geq 2$，则 G 中必存在回路。

（$\surd$）10. n 阶二叉树有 $(n+1)/2$ 个叶结点。

二、(20 分)

设 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：

$$R_1 = \{< a, b >, < b, a >, < a, c >, < c, a >\}$$

$$R_2 = \{< a, b >, < b, c >, < c, a >\}$$

i）试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质（即是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性这五种性质）。

ii）试求出 R_1^2，$R_1 \circ R_2$ 和 R_2^+。

解答：

i）R_1 具有反自反性、对称性。

R_2 具有反自反性、反对称性。

ii）$R_1^2 = \{< a, a >, < b, b >, < b, c >, < c, b >, < c, c >\}$。

$R_1 \circ R_2 = \{< a, a >, < a, c >, < b, b >, < c, b >\}$。

$R_2^+ = t(R_2) = \{< a, a >, < a, b >, < a, c >, < b, a >, < b, b >, < b, c >, < c, a >, < c, b >, < c, c >\}$。

四、（12 分）试求叶的权分别为 $2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65$ **的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度**。

解答:

最优叶加权二叉树如下图所示，叶加权路径长度为分支结点的权值之和，即为 $7 + 17 + 34 + 60 + 87 + 125 + 212 = 542$。

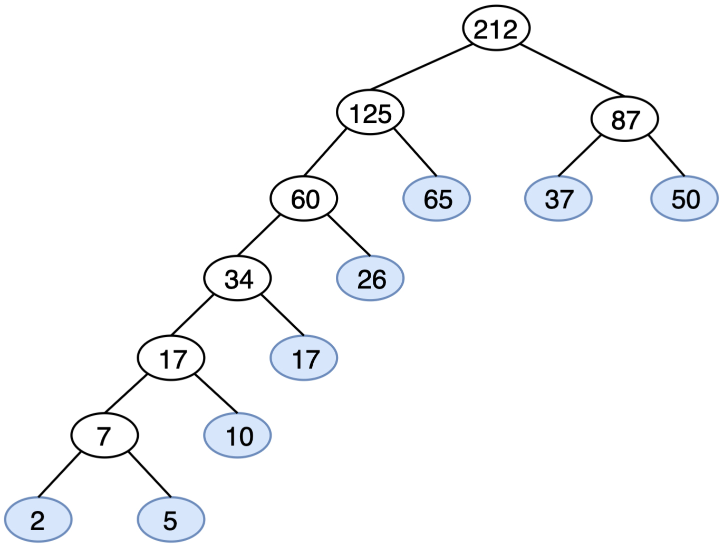

图 6: 2014 年离散数学（2）期终考试试题-第 4 题-最优叶加权二叉树