第二章 文法和语言的概念和表示

2.1 预备知识

一、字母表和符号串

字母表： 符号的非空有限集　　例：∑={a，b，c}

符号： 字母表中的元素　　例： a，b，c

符号串： 符号的有穷序列　　例：a, aa, ac, abc，..

空符号串： 无任何符号的符号串(ε)

符号串的形式定义

有字母表∑，定义：

（1） ε 是∑上的符号串；

（2）若x是∑上的符号串，且a∈∑，则ax或xa是∑上的符号串；

（3）y是∑上的符号串，iff（当且仅当）y可由（1）和（2）产生。

符号串集合： 由符号串构成的集合。

二、符号串和符号串集合的运算

1. **符号串相等**：若x、y是集合上的两个符号串，则x = y iff（当且仅当）组成x的每一个符号和组成y的**每一个**符号依次相等。

2. **符号串的长度**：x为符号串，其长度|x|等于组成该符号串的符号个数。

例： x = STV， |x|=3。

3. 符号串的联接：若x、y是定义在Σ上的符号串，且x = XY，y = YX，则 x 和 y 的联接 xy = XYYX也是Σ上的符号串。

注意：一般$xy \neq yx$，而$\varepsilon x = x\varepsilon$

4. 符号串集合的乘积运算：令A、B为符号串集合，定义

$$AB = \{ xy \mid x \in A, y \in B \}$$

例：A = {a,b}，B={c,d}，　AB= ？　　{ac，ad，bc，bd}

因为$\varepsilon x = x\varepsilon = x$，所以$\{\varepsilon\}A = A\{\varepsilon\} = A$

5. 符号串集合的幂运算：有符号串集合A，定义

$A^0=\{\varepsilon\}$，　$A^1=A$,　$A^2=AA$,　$A^3=AAA$, ……

…… $A^n = A^{n-1}A=AA^{n-1}$ ，$n>0$

6. 符号串集合的闭包运算：设A是符号串集合，定义

$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots\ldots \cup A^n \cup \ldots\ldots$

称为集合A的正闭包。

$A^* = A^0 \cup A^+$

称为集合A的闭包（克林闭包）。

例：$A=\{x,y\}$

$A^+ = \{\underbrace{x,y}_{A^1},\ \underbrace{xx,xy,yx,yy}_{A^2},\ \underbrace{xxx,xxy,xyx,xyy}_{A^3},\ \ldots\ldots\}$

$A^* = \{\underbrace{\varepsilon}_{A^0},\ \underbrace{x,y}_{A^1},\ \underbrace{xx,xy,yx,yy}_{A^2},\ \underbrace{xxx,xxy,xyx,xyy}_{A^3},\ \ldots\ldots\}$

★ 为什么对符号、符号串、符号串集合以及它们的运算感兴趣?

若A为某语言的基本字符集

$A = \{a, b, \ldots, z, 0, 1, \ldots, 9, +, -, \times, /, (,), =, \ldots\}$

B为单词集

B = {begin, end, if, then, else, for, …, <标识符>, <常量>, …}

则$B \subset A^*$。

语言的句子是定义在B上的符号串。

若令C为句子集合，则$C \subset B^*$，程序$\subset C$。

2.2文法的非形式讨论

1.什么是文法：文法是对语言结构的定义与描述。即从形式上用于描述和规定语言结构的称为“文法”（或称为“语法”）。

例：有一句子：“我是大学生”。这是一个在语法、语义上都正确的句子，该句子的结构（称为语法结构）是由它的语法决定的。在本例中它为“主谓结构”。

如何定义句子的合法性？
- 有穷语言
- 无穷语言

2. 语法规则：我们通过建立一组规则，来描述句子的语法**结构**。规定用“::=”表示“由……组成”。

<句子>::=<主语><谓语>

<主语>::=<代词>|<名词>

<代词> ::=你|我|他

<名词>::= 王民|大学生|工人|英语

<谓语>::=<动词><直接宾语>

<动词>::=是|学习

<直接宾语>::=<代词>|<名词>

3. **由规则推导句子**：有了一组规则之后，可以按照一定的方式用它们去推导或产生句子。

推导方法：从一个要识别的符号开始推导，即用相应规则的右部来替代规则的左部，每次仅用一条规则去进行推导。

<句子> => <主语><谓语>

<主语><谓语> => <代词><谓语>

…… ……

这种推导一直进行下去，直到所有带< >的符号都由终结符号替代为止。

推导方法：从一个要识别的符号开始推导，即用相应规则的右部来替代规则的左部，每次仅用一条规则去进行推导。

<句子>::=<主语><谓语>

<主语>::=<代词>|<名词>

<代词> ::=你|我|他

<名词>::= 王民|大学生|工人|英语

<谓语>::=<动词><直接宾语>

<动词>::=是|学习

<直接宾语>::=<代词>|<名词>

<句子> => <主语><谓语>

=> <代词><谓语>

=>我<谓语>

=>我<动词><直接宾语>

=>我是<直接宾语>

=>我是<名词>

=>我是大学生

例：有一英语句子：The big elephant ate the peanut.

<句子>: : =<主语><谓语>

<主语>: : =<冠词><形容词><名词>

<冠词> : : =the

<形容词>: : =big

<名词>: : =elephant

<谓语>: : =<动词><宾语>

<动词>: : =ate

<宾语>: : =<冠词><名词>

<名词> : : =peanut

<句子>::=<主语><谓语>

<主语>::=<冠词><形容词><名词>

<冠词> ::=the

<形容词>::=big

<名词>::=elephant | peanut

<谓语>::=<动词><宾语>

<动词>::=ate

<宾语>::=<冠词><名词>

<句子> => <主语><谓语>

=> <冠词><形容词><名词><谓语>

=> the <形容词><名词><谓语>

=> the big <名词> <谓语>

=> the big elephant <谓语>

=> the big elephant <动词><宾语>

=> the big elephant ate <宾语>

=> the big elephant ate <冠词><名词>

=> the big elephant ate the <名词>

=> the big elephant ate the peanut

最左推导！

<句子>: : =<主语><谓语>
<主语>: : =<冠词><形容词><名词>
<冠词> : : =the
<形容词>: : =big
<名词>: : =elephant | peanut
<谓语>: : =<动词><宾语>
<动词>: : =ate
<宾语>: : =<冠词><名词>

<句子> => <主语> <谓语>
=> <主语> <动词> <宾语>
=> <主语> <动词> <冠词> <名词>
=> <主语> <动词> <冠词> peanut
=> <主语> <动词> the peanut
=> <主语> ate the peanut
=> <冠词> <形容词> <名词> ate the peanut
=> <冠词> <形容词> elephant ate the peanut
=> <冠词> big elephant ate the peanut
=> the big elephant ate the peanut

最右推导！

上述推导可写成<句子> $\overset{+}{\Rightarrow}$ the big elephant ate the peanut

说明:

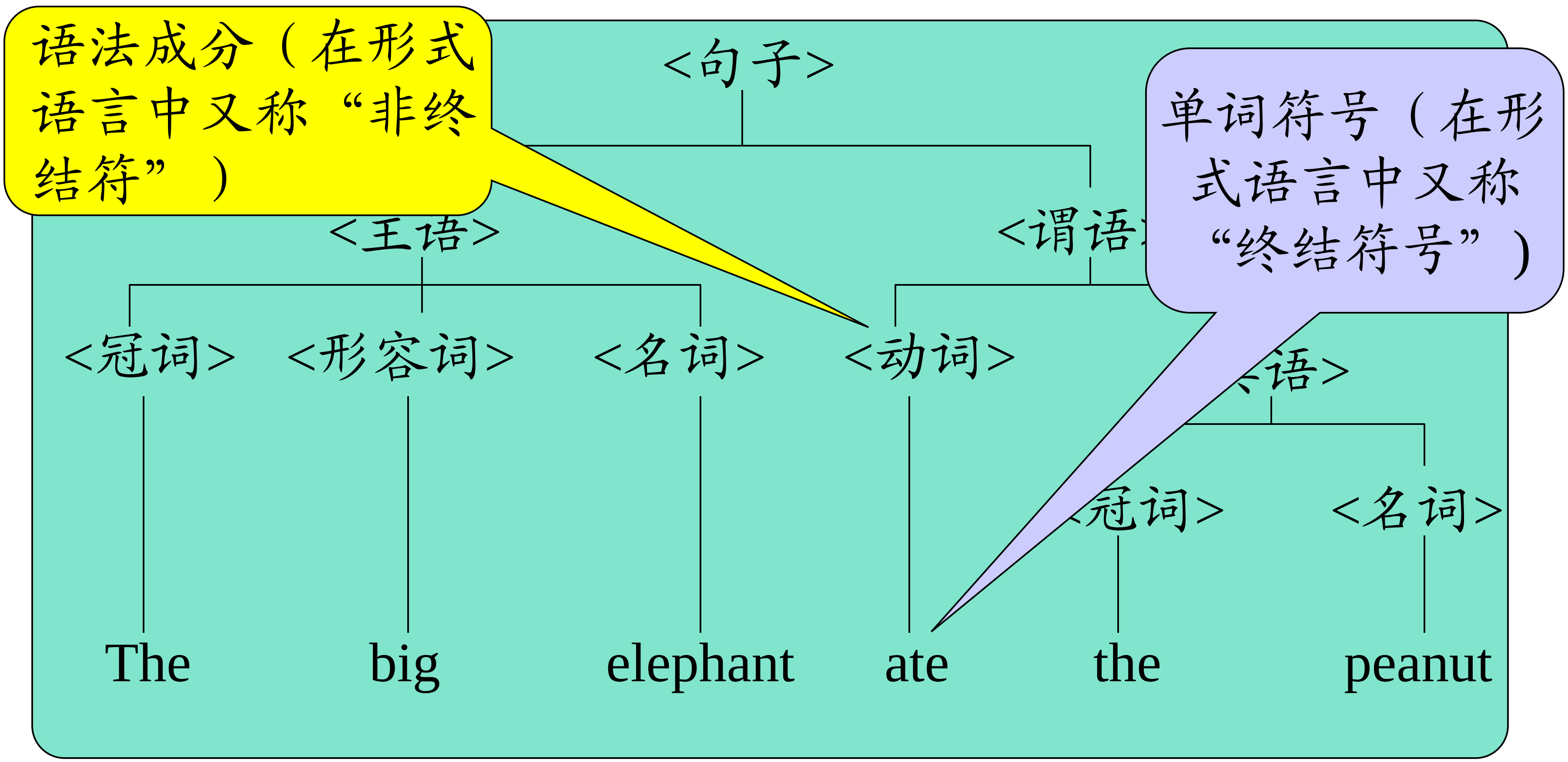
(1) 有若干语法成分同时存在时，我们总是从最左的语法成分进行推导，这称之为最左推导。类似地还有最右推导（一般推导）。

(2) 除了最左和最右推导，还可能存在其它形式的推导。

(3) 从一组规则可推出不同的句子，如以上规则还可推出“大象吃象”、“大花生吃象”、“大花生吃花生”等句子，它们在语法上都正确，但在语义上都不正确。

所谓文法是在形式上对句子结构的定义与描述，而未涉及语义问题。

4. 语法树：我们用语法树来描述一个句子的语法结构。



2.3 文法和语言的形式定义

2.3.1 文法的定义

$V = Vn \cup Vt$
称为文法的字汇表

定义1. 文法G =（Vn，Vt，P，Z）
Vn：非终结符号集
Vt：终结符号集
P：产生式或规则的集合
Z：开始符号（识别符号） $Z \in Vn$

规则：$U ::= x$
$U \in Vn$，$x \in V^*$

补: 规则的定义
规则是一个有序对(U, x), 通常写为: $U ::= x$ 或 $U \to x$
$|U| = 1 \quad |x| \geq 0$

例：无符号整数的文法:

G[<无符号整数>]=（Vn，Vt，P，Z）

Vn = {<无符号整数>,<数字串>, <数字>}

Vt = { 0, 1, 2, 3, … 9 }

P = {<无符号整数> → <数字串>

<数字串> → <数字串> <数字>

<数字串> → <数字>

<数字> →0

<数字> →1

…………

<数字> →9 }

Z = <无符号整数>

★ 几点说明:

产生式左边符号构成集合Vn，且 Z ∈ Vn

有些产生式具有相同的左部，可以合在一起。

文法的BNF表示

例、<无符号整数> → <数字串>

<数字串> → <数字串> <数字> | <数字>

<数字> →0 | 1 | 2 | 3 | …… | 9

给定一个文法，实际只需给出产生式集合，并指定识别符号。（识别符号一般约定为第一条规则的左部符号）

例、 G[<无符号整数>]

<无符号整数> → <数字串>

<数字串> → <数字串> <数字> | <数字>

<数字> →0 | 1 | 2 | 3 | …… | 9

2.3.2 推导的形式定义

定义2：文法G：$v = xUy$，$w = xuy$,

其中x、$y \in V^*$，$U \in V_n$, $u \in V^*$,

若$U ::= u \in P$，则$v \underset{G}{\Rightarrow} w$。

若$x = y = \varepsilon$，有$U ::= u$，则$U \underset{G}{\Rightarrow} u$

例如：G[<无符号整数>]

(1) <无符号整数> → <数字串>

(2) <数字串> → <数字串><数字>

(3) <数字串> → <数字>

(4) <数字> →0

(5) <数字> →1

…………

(13) <数字> →9

例如： G[<无符号整数>]

(1) <无符号整数> → <数字串>

(2) <数字串> → <数字串><数字>

(3) <数字串> → <数字>

(4) <数字> →0

(5) <数字> →1

…………

(13) <数字> →9

<无符号整数> ==>(1) <数字串> ==>(2) <数字串><数字>

==>(3) <数字><数字> ==>(4) **1** <数字>

==>(5) **1 0**

当符号串已没有非终结符号时，推导就必须终止。因为终结符不可能出现在规则左部，所以将在规则左部出现的符号称为非终结符号。

定义3：文法G，$U_0, U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n \in V^+$

if $v = U_0 \underset{G}{\Longrightarrow} U_1 \underset{G}{\Longrightarrow} U_2 \underset{G}{\Longrightarrow} \ldots\ldots \underset{G}{\Longrightarrow} U_n = w \quad (n>0)$

则 $v \overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$

$\overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$

例：<无符号整数>==> <数字串> ==> <数字串> <数字>

==> <数字><数字> ==>1 <数字>

==>1 0

即 <无符号整数> $\overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ 10

定义4：文法G， v，w $\in V^+$

if $v \overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$，或 $v = w$，则$v \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$ 。

$\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$

定义5：规范推导：有$xUy \Longrightarrow xuy$，if $y \in V_t^*$，则此推导为规范的，记为$xUy =|\Rightarrow xuy$ 。

$=|\Rightarrow$

直观意义：规范推导 = 最右推导

最右推导：若符号串中有两个以上的非终结符时，先推右边的。

最左推导：若符号串中有两个以上的非终结符时，先推左边的。

若有$v =|\Rightarrow U_0 =|\Rightarrow U_1 =|\Rightarrow U_2 =|\Rightarrow \ldots\ldots =|\Rightarrow U_n =|\Rightarrow w$，则 $v \overset{+}{=|\Rightarrow} w$。

2.3.3 语言的形式定义

文法G[Z]所产生的所有句子的集合

定义6：文法G[Z]

（1）句型：x是句型 $\Leftrightarrow$ $Z \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, 且$x \in V^*$;

（2）句子：x是句子 $\Leftrightarrow$ $Z \stackrel{+}{\Rightarrow} x$, 且$x \in V_t^*$;

（3）语言：$L(G[Z]) = \{x \mid x \in V_t^*, Z \stackrel{+}{\Rightarrow} x\}$;

形式语言理论可以证明以下两点:

（1）G $\rightarrow$L(G);

（2）L(G)$\rightarrow$G1，G2，……，Gn;

已知文法，求语言，通过推导;

已知语言，构造文法，无形式化方法，更多是凭经验。

例：$\{ab^n a \mid n \geq 1\}$，构造其文法

$G_1[Z]$:　$Z \rightarrow aBa$

$B \rightarrow b \mid bB$

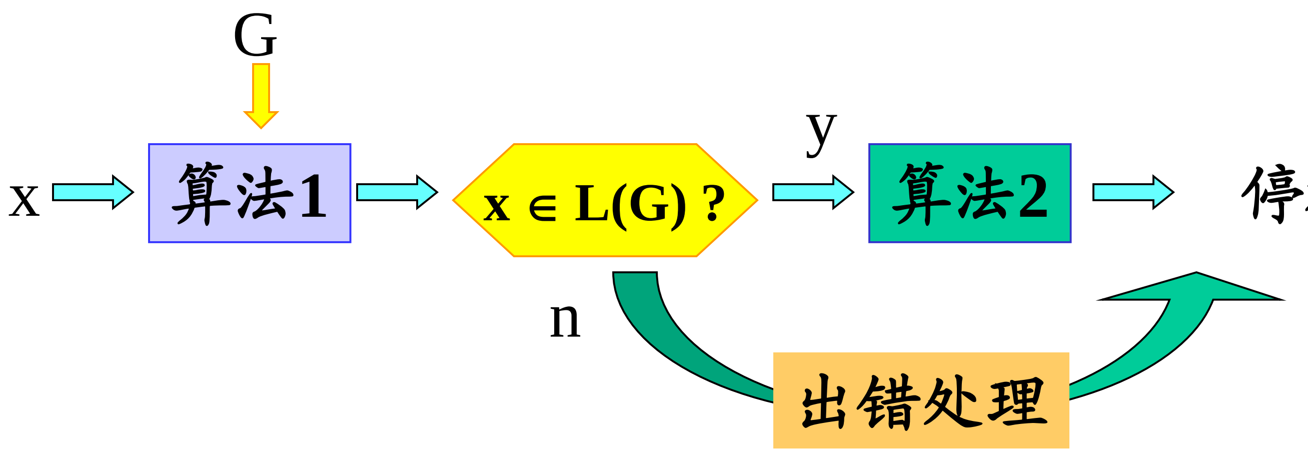
$G_2[Z]$:　$Z \rightarrow aBa$

$B \rightarrow b \mid Bb$

定义7. G和G'是两个不同的文法，若 L(G) = L(G')，则G和G'为等价文法。

编译感兴趣的问题是:

- 给定x, G, 求$x \in L(G)$?



2.3.4 递归文法

1.递归规则：规则右部有与左部相同的符号

对于 U::= xUy

若x= ε，即U::= Uy，左递归；

若y= ε，即U::= xU，右递归。

2.递归文法：文法G，存在U ∈Vn

if $U \stackrel{+}{\Longrightarrow} \ldots U \ldots$，则G为递归文法(自嵌入递归)；

if $U \stackrel{+}{\Longrightarrow} U \ldots$，则G为左递归文法；

if $U \stackrel{+}{\Longrightarrow} \ldots U$，则G为右递归文法。

会造成死循环（后面将详细论述）

3. 左递归文法的缺点：不能用自顶向下的方法来进行语法分析

4. 递归文法的优点：可用有穷条规则，定义无穷语言

例：对于前面给出的无符号整数的文法是有递归文法，用13条规则就可以定义出所有的无符号整数。若不用递归文法，那将要用多少条规则呢?

<无符号整数> → <数字串>
<数字串> → <数字串><数字> | <数字>
<数字> →0 | 1 | 2 | 3 | …… | 9

2.3.5 句型的短语、简单短语和句柄

定义8. 给定文法G[Z], $w = xuy \in V^+$，为该文法的句型,

若 $Z \overset{*}{\Longrightarrow} xUy$, 且$U \overset{+}{\Longrightarrow} u$, 则u是句型w相对于U的短语;

若 $Z \overset{*}{\Longrightarrow} xUy$, 且$U \Longrightarrow u$, 则u是句型w相对于U的简单短语。

其中$U \in V_n$，$u \in V^+$，$x, y \in V^*$ 针对句型看简单短语

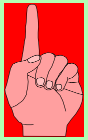
直观理解：短语是前面句型中的某个非终结符所能推出的符号串。

任何句型本身一定是相对于识别符号Z的短语。

定义9. 任一句型的最左简单短语称为该句型的句柄。

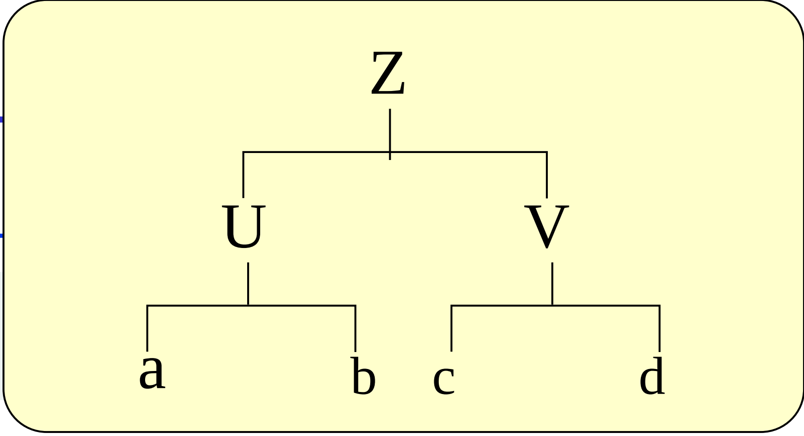
给定句型找句柄的步骤:

短语 → 简单短语 → 句柄



注意:短语、简单短语是相对于句型而言。一个句型可能有多个短语、简单短语,但句柄只能有一个。

2.4 语法树与二义性文法



2.4.1 推导与语法树

（1）语法树：句子结构的图示表示法，它是一种有向图，由结点和有向边组成。

结点：符号

根结点：识别符号
中间结点：非终结符
叶结点：终结符或非终结符

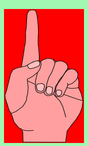
有向边：表示结点间的派生关系。

(2) 句型的推导及语法树的生成（自顶向下）

给定G[Z]，句型w:

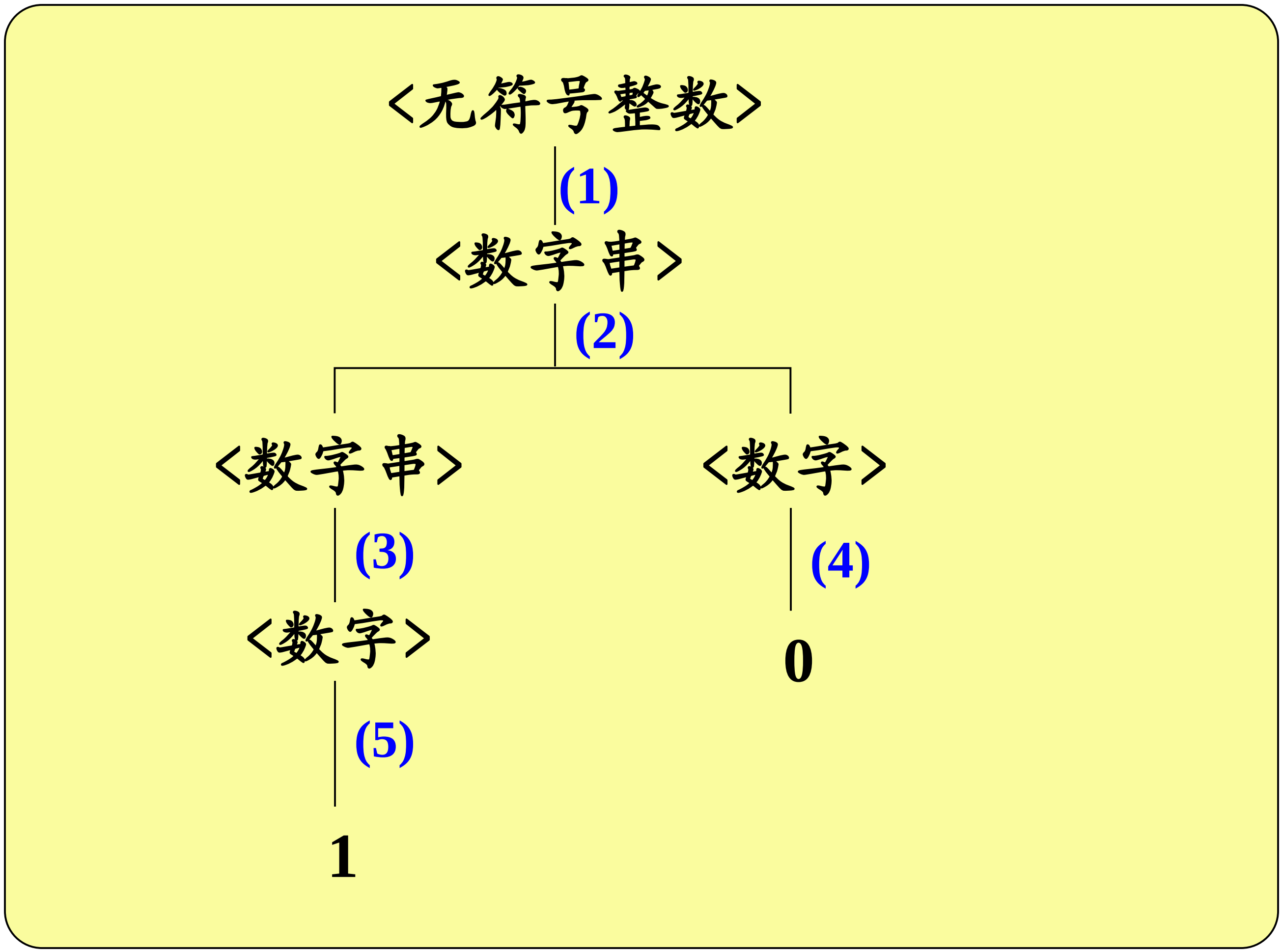
可建立推导序列，$Z \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$

可建立语法树，以Z为树根结点，每步推导生成语法树的一枝，最终可生成句型的语法树。

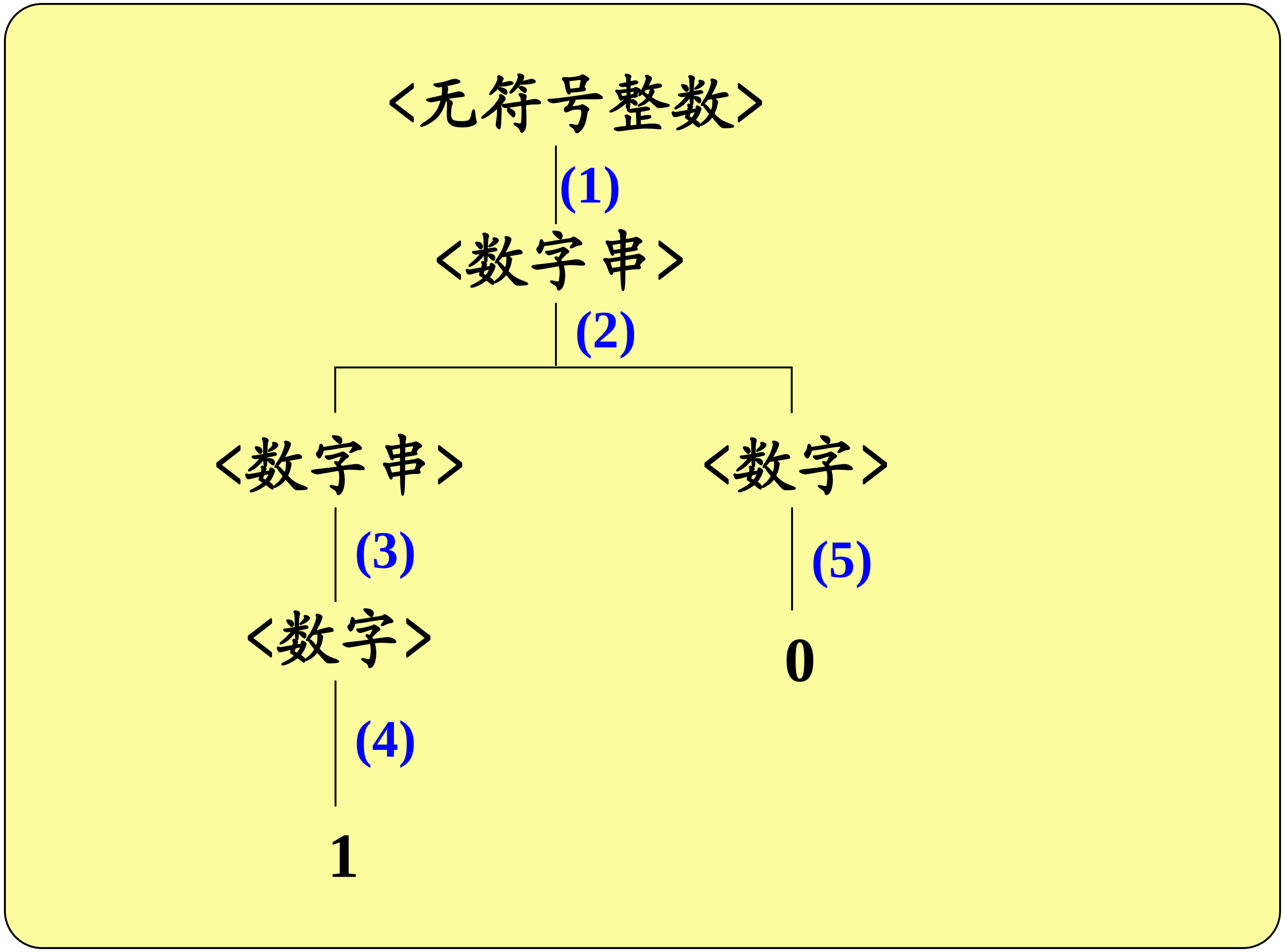


注意一个重要事实：文法所能产生的句子，可以用不同的推导原则（使用产生式顺序不同）将其推导出来。语法树的生成规律不同，但最终生成的语法树形状完全相同。某些文法有此性质，而某些文法不具有此性质。

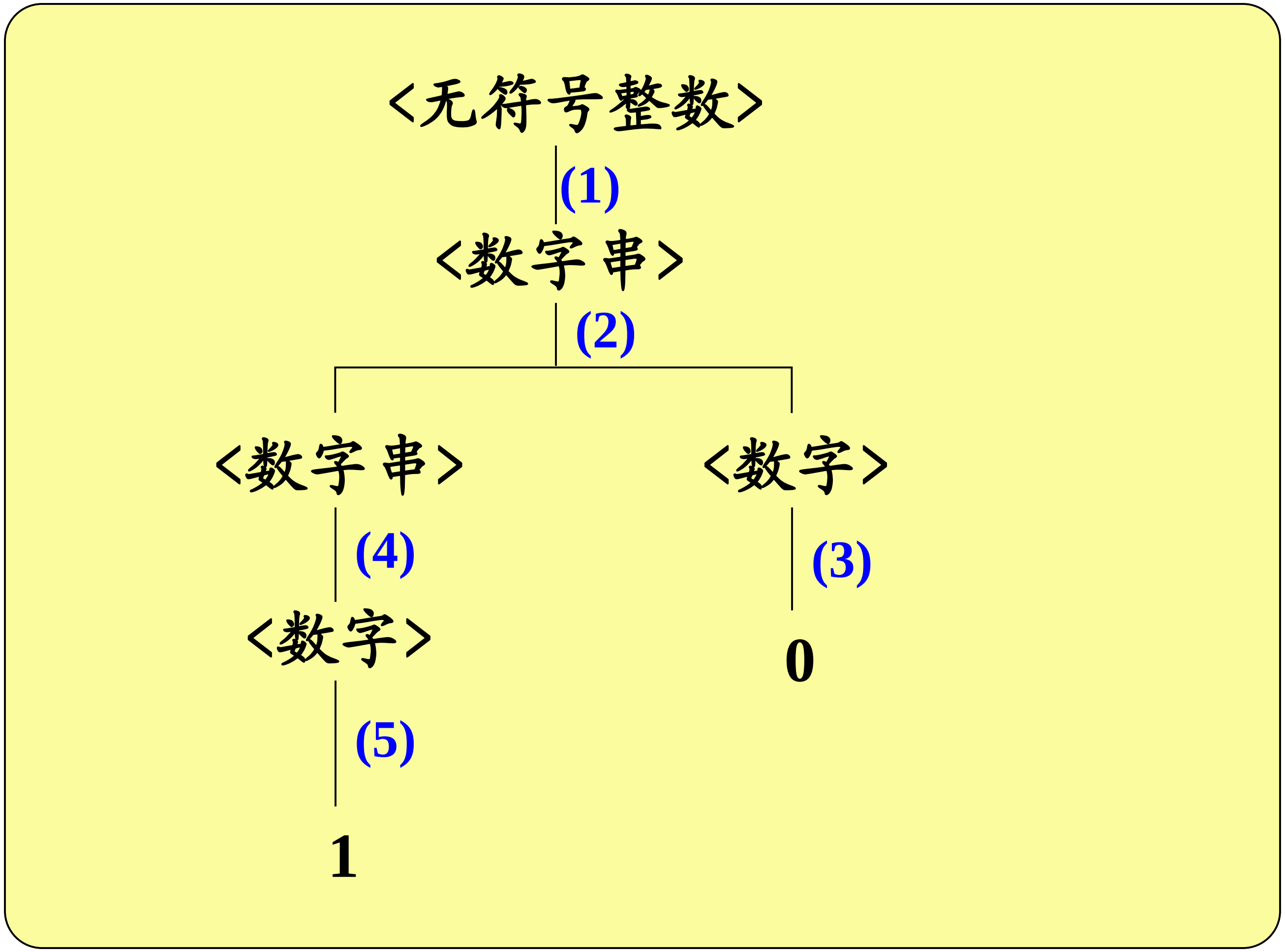
一般推导:



最左推导:



最右推导:



(3) 子树与短语

子树：语法树中的某个结点（子树的根）连同它向下派生的部分所组成。

定理 某子树的末端结点按自左向右顺序为句型中的符号串，则该符号串为该句型的相对于该子树根的短语。

只需画出句型的语法树，然后根据子树找短语→简单短语→句柄。

（4）树与推导

句型推导过程<==>句型语法树的生长过程

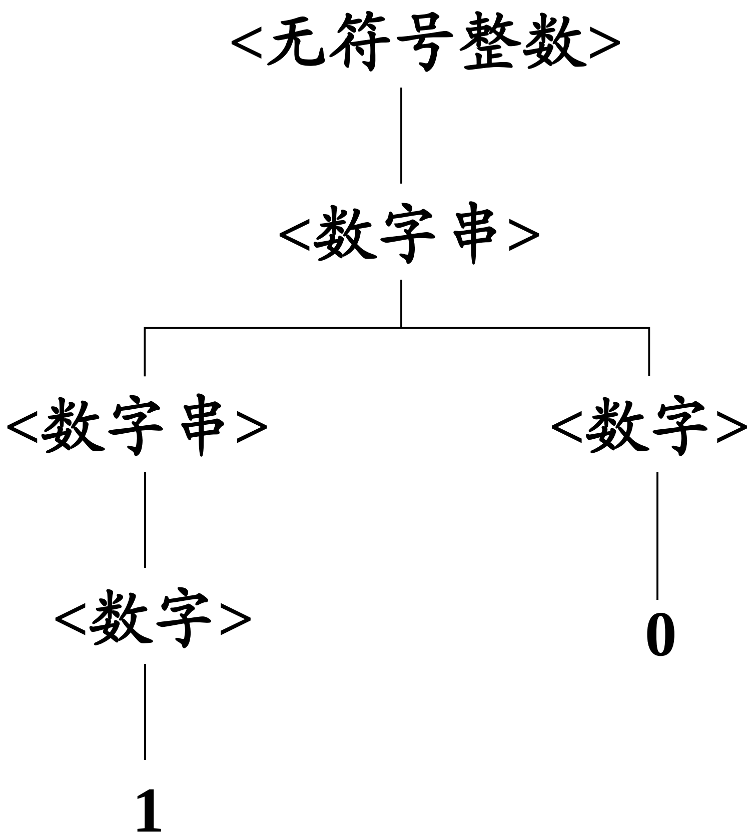
1 由推导构造语法树

从识别符号开始，自右向左建立推导序列。

↓

由根结点开始，自上而下建立语法树。

例：G[<无符号整数>]　　句型10



<无符号整数> =|=> <数字串>

=|=> <数字串> <数字>

=|=> <数字串> 0

=|=> <数字> 0

=|=> 10

规范推导

2 由语法树构造推导

自下而上地修剪子树的末端结点，直至把整棵树剪掉（留根），每剪一次对应一次规约。

↓

从句型开始，自左向右地逐步进行规约，建立推导序列。

定义12. 对句型中最左简单短语（句柄）进行的规约称为规范规约。

规范规约与规范推导互为逆过程

<无符号整数>

<无符号整数>

⇒ <数字串>

⇒ <数字串> <数字>

⇒ <数字串> 0

⇒ <数字> 0

⇒ 10

定义13.通过规范推导或规范规约所得到的句型称为规范句型。

<数字><数字>

不是规范推导！

2.4.2 文法的二义性

定义14.1 若对于一个文法的某一句子存在两棵不同的语法树，则该文法是二义性文法，否则是无二义性文法。

换而言之，无二义性文法的句子只有一棵语法树，尽管推导过程可以不同。

下面举一个二义性文法的例子:

G[E]: E:= E+E | E*E | (E) | i

Vn={E}

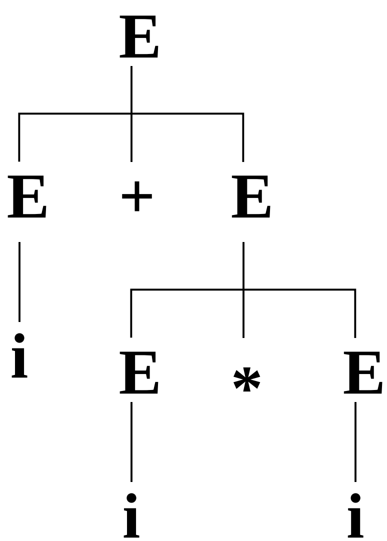
Vt={ +, * , (,) , i }

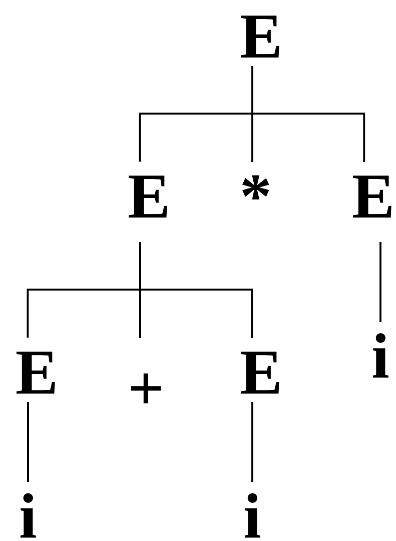
对于句子 S = i + i * i ∈ L(G[E])，存在不同的规范推导：

(1) E ⇒ E+E ⇒ E+E*E ⇒ E+E*i ⇒ E+i*i ⇒ i+i*i

(2) E ⇒ E*E ⇒ E*i ⇒ E+E*i ⇒ E+i*i ⇒ i+i*i

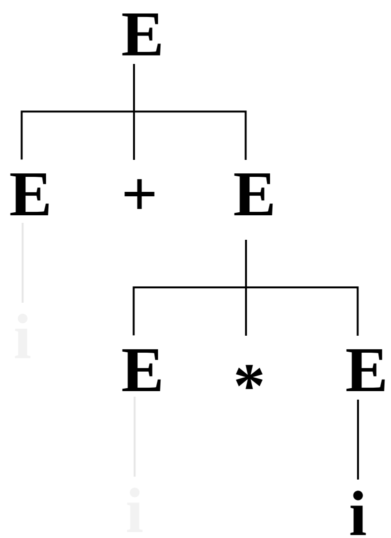
这两种不同的推导对应了两种不同的语法树

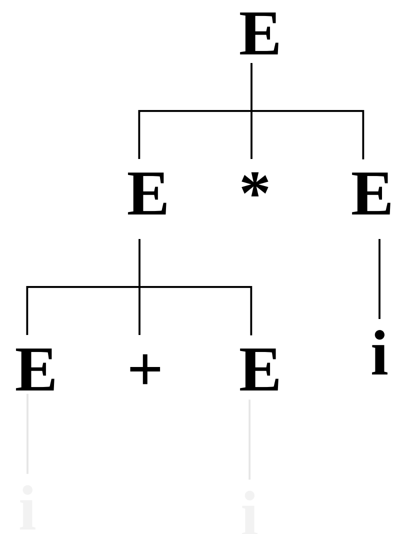




定义14.2 若一个文法的某句子存在两个不同的规范推导，则该文法是二义性的，否则是无二义性的。

以上是自顶向下来看文法的二义性，我们还可以自底向上来看文法的二义性。上例中，规范句型E+E*i 是由i + i * i通过两步规范规约得到的，但对于同一个句型E+E* i，它有两个不同的句柄（对应上述两棵不同的语法树）：i 和 E + E。因此语法的二义性意味着句型的句柄不唯一。





句柄：i

句柄：E + E

定义14.3 若一个文法的某规范句型的句柄不唯一，则该文法是二义性的，否则是无二义性的。

若文法是二义性的，则在编译时就会产生不确定性。

遗憾的是在理论上已经证明：文法的二义性是不可判定的，即不可能构造出一个算法，通过有限步骤来判定任一文法是否有二义性。

现在的解决办法是：提出一些限制条件，称为无二义性的充分条件。当文法满足这些条件时，就可以判定文法是无二义性的。

由于无二义性文法比较简单，我们也可以采用另一种解决办法：即不改变二义性文法，而是确定一种编译算法，使该算法满足无二义性充分条件。

例: 算术表达式的文法

- **E::= E + E | E * E | (E) | i**

- **E ::= E + T | T**
- **T ::= T * F | F**
- **F ::= (E) | i**

例: Pascal 条件语句的文法

<条件语句>::= If <布尔表达式>then<语句> |

If <布尔表达式> then <语句> else <语句>

<语句> ::= <条件语句> | <非条件语句> |……

If B then If B then stmt else stmt

2.5 有关文法的实用限制

若文法中有如U::=U的规则，则这就是有害规则，它会引起二义性。

例如存在U::=U， U::= a | b, 则句子a有两棵语法树:

多余规则:

（1）在推导文法的所有句子中，始终用不到的规则。即该规则的左部非终结符不出现在任何句型中。

（2）在推导句子的过程中，一旦使用了该规则，将推不出任何终结符号串。即该规则中含有推不出任何终结符号串的非终结符。

例如给定G [Z]，若其中关于U的规则只有如下一条:

U::= x U y

该规则是多余规则。

若还有U::= a，则此规则并非多余

若某文法中无有害规则或多余规则，则称该文法是压缩过的。

例:

① $S \rightarrow Be$
② $S \rightarrow Ec$
③ $A \rightarrow Ae$
④ $A \rightarrow e$
⑤ $A \rightarrow A$
⑥ $B \rightarrow Ce$
⑦ $B \rightarrow Af$
⑧ $C \rightarrow Cf$
⑨ $D \rightarrow f$

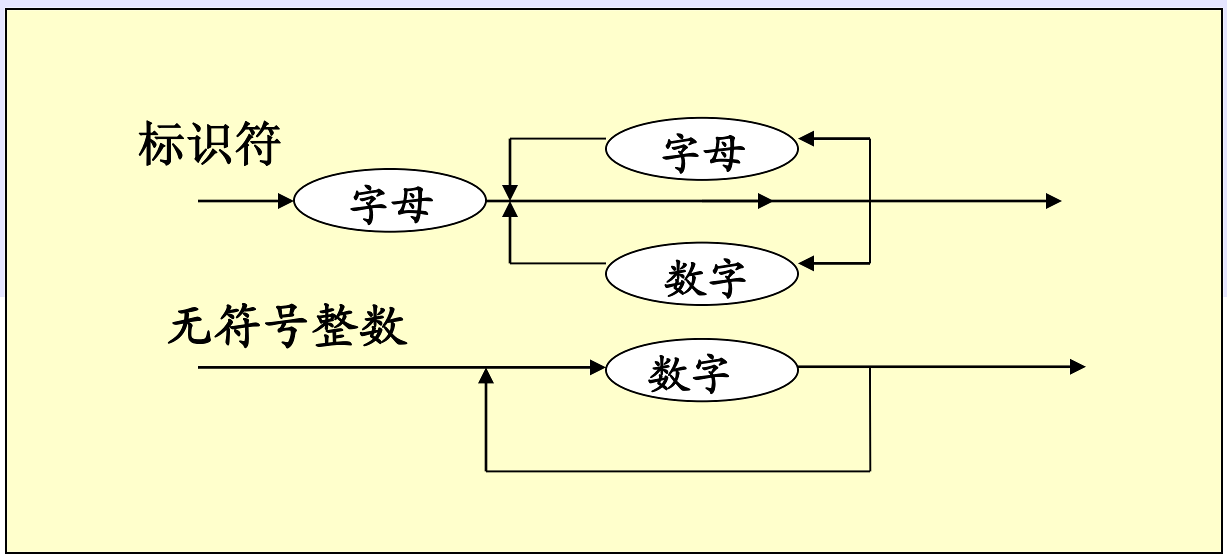
① $S \rightarrow Be$
② $B \rightarrow Af$
③ $A \rightarrow Ae$
④ $A \rightarrow e$

2.7 文法的其它表示法

1、扩充的BNF表示(Backus Normal Form)

- BNF的元符号： <, >, ::=, |
- 扩充的BNF的元符号： <, >, ::=, |, {, }, [,], (,)

2、语法图



2.8 文法和语言分类

形式语言：用文法和自动机所描述的没有语义的语言。

语言定义： $L(G[Z]) = \{ x \mid x \in Vt^*, Z \overset{+}{\Longrightarrow} x \}$

文法定义：乔姆斯基将所有文法都定义为一个**四元组**：

G=（Vn，Vt，P，Z）

Vn：非终结符号集

Vt：终结符号集

P：产生式或规则的集合

Z：开始符号（识别符号） $Z \in Vn$

文法和语言分类：0型、1型、2型、3型

这几类文法的差别在于对产生式施加不同的限制。

0型：　P:　u::=v

其中$u \in V^+$，$v \in V^*$

0型文法称为短语结构文法。规则的左部和右部都可以是符号串，一个短语可以产生另一个短语。

0型语言：L0　这种语言可以用图灵机(Turing)接受。

1型：　　P:　xUy::= xuy

其中 U∈Vn，

x、y、u∈V*

称为上下文敏感或上下文有关。也即只有在x、y这样的上下文中才能把U改写为u。

这类文法的任何产生式α::=β 均满足|α|≤|β|（其中|α|和|β|分别为α和β的长度）；仅仅S ::=ε例外，但S不得出现在任何产生式的右部。也就是说，一般不允许把u替换成空串ε。

1型语言：L1 这种语言可以由一种线性界限自动机接受。

2型：　P:　U::= u

其中 U∈Vn，

u∈V*

称为上下文无关文法。也即把 U 改写为 u 时，不必考虑上下文。

注意：2型文法与BNF表示相等价。

2型语言：L2　这种语言可以由下推自动机接受。

3型文法:

（左线性）

P:　U::=T

或　U::=wT

其中 U、w∈Vn

T∈Vt

（右线性）

P:　U::=T

或　U::=Tw

其中 U、w∈Vn

T∈Vt

3型文法称为正则文法。它是对2型文法进行进一步限制。

3型语言：L3　又称正则语言、正则集合

这种语言可以由有穷自动机接受。

根据上述讨论，L0 ⊃L1⊃ L2 ⊃L3

0型文法可以产生L0、L1、L2、L3，但 2 型文法只能产生L2，不能产生L1。

小 结

- 掌握符号串和符号串集合的运算、文法和语言的定义。
- 几个重要概念：递归、短语、简单短语和句柄、语法树、文法的二义性、文法的实用限制等。
- 掌握文法的表示：BNF、扩充的BNF范式、语法图。
- 了解文法和语言的分类。

本 章 作 业

- P29 第3、4题
- P38 第1、2、4、5、6、7题
- P46 第1、5、6、8、9
- P53 第2题

做i + i * i或i + i + i其中一个即可