数学分析公式结论总结 ——*HYX_v1.0*

§0.常用公式表

三角函数

和差化积：

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

积化和差：

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\
\sin\alpha\sin\beta&=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

倍角公式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$
$$\sec 2\alpha=\frac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha-\sec^2\alpha}=\frac{\sec^2\alpha\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha-\sec^2\alpha}$$
$$\csc 2\alpha=\frac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}{2\sec\alpha\csc\alpha}=\frac{\sec\alpha\csc\alpha}{2}$$
$$(\cos\theta+\imath\sin\theta)^n=\cos n\theta+\imath\sin n\theta$$

万能公式：

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

其他：

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$$
$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}$$
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}$$

§ 1.数列极限

调和-几何-算术平均值不等式：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$$

伯努利不等式：

$$(1+x)^n\ge 1+nx\quad(\forall x>-1,n\in\mathbb{N}^*)$$

柯西不等式：

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

二项式展开：

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

因式分解：

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

闵科夫斯基不等式（可以通过几何意义来记忆）：

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

结论：

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0(c \ne 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{c^n} = 0(\alpha > 0, c > 1)$$

符号/定义：

- $\forall$：任意选取 $\exists$：存在 冒号：满足的结论
- $n!! = \begin{cases} 2\cdot 4\cdot 6\cdots n & n\ mod\ 2 = 0 \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdots n & n\ mod\ 2 = 1 \end{cases}$
- 无穷小/无穷小量：如果数列a_n的极限为零，那么称数列a_n为无穷小（量）
- 欧拉常数(γ)：$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma + \epsilon(n), 其中 \lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$；即调和级数与自然对数的差值的极限
- 上/下确界：$sup\ E = \alpha, inf\ E = \beta$

数列极限定义：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*, \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

数列极限的保序性（取0时为保号性）：

(1)设$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \alpha < a < \beta$,则存在$N \in \mathbb{N}^*$,使得当$n > N$时,有$\alpha < a_n < \beta$

(2)设$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$,且$a < b$,则存在$N \in \mathbb{N}^*$,使得当$n > N$时,有$a_n < b_n$

(3)设$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$,若存在$N \in \mathbb{N}^*$,使得当$n > N$时,有$a_n \le b_n$,则$a \le b$

自然常数：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=\mathrm{e}$$

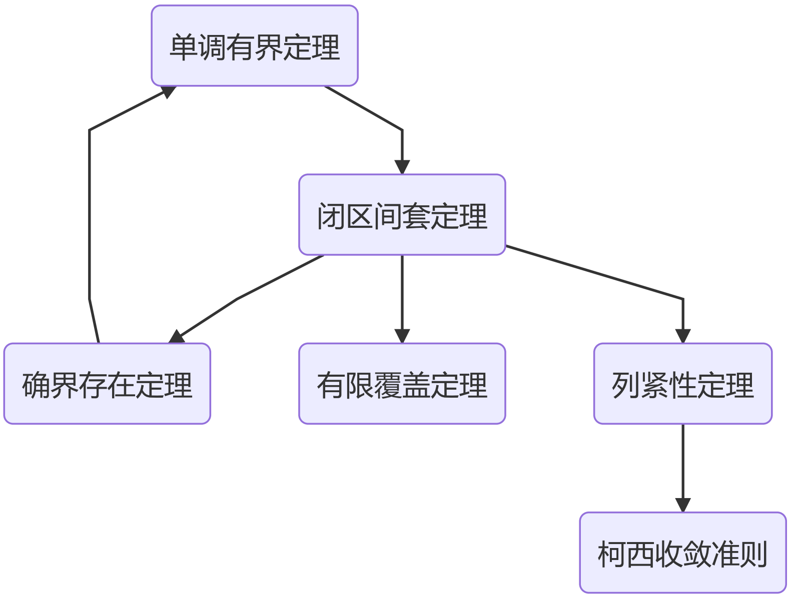
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=\mathrm{e}^k,\qquad\lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n=\mathrm{e}^{-k}\quad(k\in\mathbb{N}^*)$$

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n\text{单调递增},y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}\text{单调递减}$$

$$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}\iff n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\iff\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}$$

六大定理关系：



其他：

(1)对$x\geq0,y\geq0,n\in\mathbb{N}^*$,有

$$(x+y)^n\geq x^n+y^n,\qquad(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}\leq x+y$$
$$(x+y)^{\frac{1}{n}}\leq x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}},\qquad|x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}}|\leq|x-y|^{\frac{1}{n}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=s\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$$

(3)

$$n<\sqrt{(n-1)(n+1)}\Rightarrow\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}\quad(n\in\mathbb{N}^*)$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha})=\begin{cases}\text{不存在} & \alpha=1\\ \text{存在} & \alpha>1\end{cases}$$

§ 2.函数极限与连续