数学分析公式结论总结

Information

- 维护者：Phinney
- 版本：0.2 β
- 仓库链接：https://github.com/BUAAMogician/Mathematical-Analysis-Reference-for-BUAA
- 参考文献：

  - [1]杨小远.工科数学分析教程(上册)[M].北京：科学出版社，2018.

目录

§ 0.常用公式表

三角函数

和差化积

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

积化和差

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

半角公式

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
\tan\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\
\tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

倍角公式

$$
\begin{gathered}
\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha\\
1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\\
\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\\
\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}\\
\sec 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha-\sec^2\alpha} = \frac{\sec^2\alpha\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha-\sec^2\alpha}\\
\csc 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}{2\sec\alpha\csc\alpha} = \frac{\sec\alpha\csc\alpha}{2}\\
(\cos\theta+\imath\sin\theta)^n = \cos n\theta+\imath\sin n\theta
\end{gathered}
$$

万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

其他

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\qquad \text{余切}$$
$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\qquad \text{余割}$$
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\qquad \text{正割}$$

§1.数列极限

常用公式\结论

- 指数相关:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0(c\neq 0)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{c^n}=0(\alpha>0,c>1)$$

- 调和-几何-算术平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$$

- 伯努利不等式

$$(1+x)^n\geq 1+nx\quad(\forall x>-1,n\in\mathbb{N}^*)$$

- 柯西不等式

$$(\sum_{i=1}^n a_ib_i)^2\leq(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$$

- 二项式展开

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

- 因式分解

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

- 闵科夫斯基不等式(可以通过几何意义来记忆)

$$(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2)^{\frac{1}{2}}\leq(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p)^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

符号/定义

- $\forall$：任意选取 $\exists$：存在 冒号：满足的结论
- $n!! = \begin{cases} 2\cdot 4\cdot 6\cdots n & n\ mod\ 2 = 0 \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdots n & n\ mod\ 2 = 1 \end{cases}$
- 无穷小/无穷小量：如果数列a_n的极限为零，那么称数列a_n为无穷小（量）
- 欧拉常数(γ)：$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\gamma+\epsilon(n)$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon(n)=0$；即调和级数与自然对数的差值的极限
- 上/下确界：$sup\ E=\alpha, inf\ E=\beta$
- 上/下极限：设E为$\{a_n\}$中所有子列极限（包含$\pm\infty$）构成的集合，则数列的上下极限 $\lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n = a^* = sup\ E$, $\lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n = a_* = inf\ E$

  并有定理 $\lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n = \lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

数列极限定义

$$\forall\epsilon>0, \exists N(\epsilon)\in\mathbb{N}^*, \forall n>N: |a_n-a|<\epsilon$$

数列极限的保序性(取0时为保号性)

(1)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \alpha<a<\beta$,则存在$N\in\mathbb{N}^*$,使得当$n>N$时,有$\alpha<a_n<\beta$

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,且$a<b$,则存在$N\in\mathbb{N}^*$,使得当$n>N$时,有$a_n<b_n$

(3)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,若存在$N\in\mathbb{N}^*$,使得当$n>N$时,有$a_n\le b_n$,则$a\le b$

自然常数

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = \mathrm{e}$$

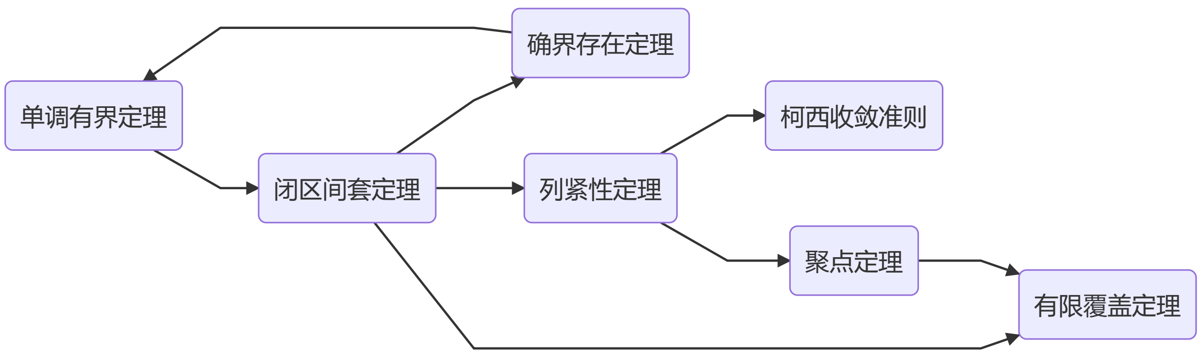
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=\mathrm{e}^k, \qquad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n=\mathrm{e}^{-k} \quad (k\in\mathbb{N}^*)$$

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n\text{单调递增}, y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}\text{单调递减}$$

$$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1} \iff n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \iff \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}$$

六大定理关系



其他

(1)对$x \geq 0, y \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$,有

$$\begin{aligned} (x+y)^n \geq x^n + y^n, \qquad (x^n+y^n)^{\frac{1}{n}} \leq x+y \\ (x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}, \qquad |x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}| \leq |x-y|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = s \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = 0$$

(3)

$$n < \sqrt{(n-1)(n+1)} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}) = \begin{cases} \text{不存在} & \alpha = 1 \\ \text{存在} & \alpha > 1 \end{cases}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n} = \frac{4}{\mathrm{e}}$$

$\S\,2$.函数极限与连续

集合

集合的差：设$B \subset A$，$A \setminus B = \{x | x \in A,\text{且} x \notin B\}$

余集（补集）：$B^c = U \setminus B (B \subset U)$

直积：$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$，例如$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$，即笛卡尔积

集合的势

- 集合的势：如果存在A与B之间的双射（一一对应），则称集合A与集合B等势，记作$A \sim B$
- 可数集：若$A \sim \mathbb{N}^*$，则称A为可数集（属于无限集）
- 至多可数集：有限集与可数集合称至多可数集
- 阿列夫零：在众多无限集中，最小的势是可数集的势$\aleph_0$（即阿列夫零）
- 定理（集合的性质）：
  - 可数集的任何无限子集是可数集
  - 设$\{E_n\}, n = 1,2,3,\cdots$是可数集序列，则$S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$是可数集
  - 实数集不是可数集
  - 有理数集是可数集

符号/定义

- $\equiv$：恒等于
- 邻域与去心邻域：$U(x_0;\delta) = \{x | |x-x_0| < \delta\} \qquad U^o(x_0;\delta) = \{x | 0 < |x-x_0| < \delta\}$
- $\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
- $\min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$
- $[x]$：不超过x的最大整数，有$x-1 < [x] \leq x$
- $\delta(\epsilon)$：δ与ϵ有关

函数极限

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$f(x_0)$**无关**，与在该点是否有定义也**无关**
- 函数极限为局部性质
- 有理函数：形如$\frac{p(x)}{q(x)}$的函数，其中都是$p(x),q(x)$多项式
- 海涅原理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff$ 当$x\to x_0$时$f(x)$的任何子列$f(x_n)$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$
- 海涅原理应用：两个子列极限不同⇒该点极限不存在
- 柯西收敛定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\iff \forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in U^o(x_0;\delta):|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$
- 柯西收敛定理（否定）：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

  $\iff \exists\epsilon>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in U^o(x_0;\delta):|f(x_1)-f(x_2)|\geq\epsilon$

函数连续

- $C(I)$表示区间I上连续函数全体组成的集合
- $f(x)$在x_0处连续的条件：$f(x)$在x_0处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在且等于$f(x_0)$
- 间断点：
  - 第一类间断点：跳跃间断点（$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$）和可去间断点（$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$或$f(x)$在该点无定义）的统称
  - 第二类间断点：$f(x)$在点x_0的左右极限至少有一个不存在（趋向于无穷或上下震荡）

一致连续

- 一致连续：设$f:E\to\mathbb{R}$，若$\forall\epsilon>0,\exists\delta(\epsilon)>0,\forall x_1,x_2\in E,|x_1-x_2|<\delta:|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$，则称$f$在$E$上一致连续。
- 一致连续的δ与x无关，可能与$\epsilon,|x_1-x_2|$有关
- 若$f(x),g(x)$在I上一致连续，则：
  - 若$f(x),g(x)$在I上有界，则$f(x)g(x)$在I上一致连续
  - 若$f(x),g(x)$在I上有界，$|g(x)|$在I上有非零的下界，则$\frac{f(x)}{g(x)}$在I上一致连续
- Lipschitz条件（比一致连续更强的条件）：设函数$f:I\to\mathbb{R}$，若存在正常数L，使得$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|$对任何$x,y\in I$成立，则称$f$在$I$上满足Lipschitz条件。

无穷小与无穷大阶

- 无穷大量是一种特殊的无界变量，无界变量未必是无穷大量（如$x\to 0$时$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$）
- 设$f(x),g(x)$在$x\to x_0$时是无穷小/大量
  - 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小/大量
  - 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$，则称$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小/大量；当$l=1$时，则称$f(x)$是$g(x)$的等价无穷小/大量，记作$f\sim g(x\to x_0)$
  - 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=l\neq 0$，则称$f(x)$是$x\to x_0$时的$k$阶无穷小量（$x\to\infty$时选$\frac{1}{x^k}$为标准）
  - 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{-k}}=l\neq 0$，则称$f(x)$是$x\to x_0$时的$k$阶无穷大量（$x\to\infty$时选$x^k$为标准）
- 无穷小阶运算性质：
  - 定义：

    $o()$**是高阶无穷小，**$O()$**是有界量**（具体参阅）

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=0\Rightarrow f(x)=o(g(x))$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0\Rightarrow f(x)=O(g(x))$$

$$\lim f(x)=0\Rightarrow f(x)=o(1)$$

- 设$x\to 0,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha>0,\beta>0$，则

$$o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^{\min(\alpha,\beta)}),\qquad o(x^\alpha)\times o(x^\beta)=o(x^{\alpha+\beta})$$
$$O(x^\alpha)+O(x^\beta)=O(x^{\min(\alpha,\beta)}),\qquad O(x^\alpha)\times O(x^\beta)=O(x^{\alpha+\beta})$$

- 无穷大阶运算性质：
  - 设$x\to\infty,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha>0,\beta>0$，则

$$O(x^\alpha)+O(x^\beta)=O(x^{\max(\alpha,\beta)}),\qquad O(x^\alpha)O(x^\beta)=O(x^{\alpha+\beta})$$

常用极限/结论

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\qquad \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-1}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

- 幂指函数极限（$\lim u(x)^{v(x)}\quad(u(x)>0)$）：

$$\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}\qquad(0^0,1^\infty,\infty^0\Rightarrow 0\cdot\infty)$$
$$\lim u^v=\lim\left((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v}=\lim\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{(u-1)v}=\mathrm{e}^{\lim(u-1)v}\qquad(1^\infty\Rightarrow 0\cdot\infty)$$

- 等价无穷小（等价替换定理）：
  - 当$x\to 0$时，

$$\sin x\sim x\qquad \tan x\sim x\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\qquad \arcsin x\sim x\qquad \arctan x\sim x$$
$$\mathrm{e}^x-1\sim x\qquad \ln(1+x)\sim x\qquad a^x-1\sim x\ln a\qquad (1+x)^a-1\sim ax$$

  - **等价无穷小传递中被替换的项在原函数中一定以乘积项的形式在分子/分母中出现，即只能是原函数的因子**
- 压缩数列的收敛性质：若数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}-x_n|\le k|x_n-x_{n-1}|,0<k<1,n=1,2,3,\cdots$，则$\{x_n\}$的极限存在
- 压缩映射原理：
  - 不动点：设$f(x)$在$[a,b]$上有定义，则$f(x)=x$在$[a,b]$上的解称为$f(x)$在$[a,b]$上的不动点
  - 压缩映射：若$f(x):E\to E$满足$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|\quad(\forall x,y\in E,0<k<1)$，则称$f(x)$为$E$上的压缩映射
  - 内容：若$f(x)$为下列闭区间上的压缩映射：$E=[a,b]/[a,+\infty)/(-\infty,a]/(-\infty,+\infty)$，则存在唯一不动点$\alpha\in E,\alpha=f(\alpha)$

有限闭区间上连续函数的整体性质

- 康托尔（Cantor）定理：
  - 内容：若$f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续
  - 推论：
    - $f(x)$在(a,b)一致连续$\iff$ $f(x)$在(a,b)上连续且$f(a+0),f(b-0)$存在
    - 有限区间(a,b)上有限个一致连续函数的加、减、乘在此区间上仍是一致连续的
- 有界定理：若$f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上有界
- 最大值最小值定理：若$f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上必能取到最大值（x^*）和最小值（x_*）
- 零点定理（零点存在定理）：
  - 内容：若$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)f(b)<0$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$
  - 推论：
    - 若$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\mp\infty$，则$f(x)$一定存在零点
    - 若$f(x)\in C(a,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to a+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在且异号，则$f(x)$一定存在零点
    - 若$f(x)\in C(a,b)$，$\lim\limits_{x\to a+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b-}f(x)$存在且异号，则$f(x)$一定存在零点
    - 若$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$均存在，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有界

- 介值定理：
  - 内容：若$f(x)\in C[a,b]$，λ是介于$f(a),f(b)$之间的任意实数，则存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)=\lambda$
  - 广义介值定理：若$f(x)\in C[a,b],x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，任意正实数满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，则存在一点$\eta$，使得$f(\eta)=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$
  - 推论：若$f(x)\in C[a,b]$，则f能取到最大值M和最小值m之间的任何值
- 其他结论：
  - 最值：
    - 若$f(x)\in C(a,b),\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)=-\infty$，则$f(x)$在$(a,b)$上存在最大值
    - 若$f(x)\in C(-\infty,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在最大值
    - 若$f(x)\in C(-\infty,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在最小值
  - 一致连续：
    - 若$f(x)\in C(I),I=I_1\cup I_2,f(x)$在$I_1,I_2$上一致连续，则$f(x)$在$I$上一致连续
    - 若$f(x)\in C[a,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续
    - 若$f(x)\in C(-\infty,b],\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在，则$f(x)$在$(-\infty,b]$上一致连续
    - 若$f(x)\in C(a,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a+}f(x)$存在，则$f(x)$在$(a,+\infty)$上一致连续
    - 若$f(x)\in C(-\infty,b),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to b-}f(x)$存在，则$f(x)$在$(-\infty,b)$上一致连续

$\S\,3$.导数的计算与应用

常见导数公式

$$(C)'=0\qquad(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}\qquad(a^x)'=a^x\ln a\qquad(e^x)'=e^x\qquad(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$
$$(\ln x)=\frac{1}{x}\qquad(\sin x)'=\cos x\qquad(\cos x)'=-\sin x\qquad(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(\operatorname{arccot} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x\qquad(\cot x)'=-\csc^2 x\qquad(\sec x)'=\sec x\tan x\qquad(\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$(u(x)^{v(x)})'=(\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)})'=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$$

$$(\sin\alpha x)^{(n)}=\alpha^n\sin(\alpha x+\frac{n\pi}{2})\qquad(\cos\alpha x)^{(n)}=\alpha^n\cos(\alpha x+\frac{n\pi}{2})$$
$$(\frac{1}{x\pm1})^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x\pm1)^{n+1}}\qquad(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$
$$(a^{\lambda x})^{(n)}=a^{\lambda x}\cdot(\lambda\ln a)^n(a>0)\qquad(\mathrm{e}^{\lambda x})^{(n)}=\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}\qquad(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

导数的定义

- 设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0;\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$内有定义，如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称$y=f(x)$在点$x_0$处可导，该极限为$f(x)$在点$x_0$处的导数，记作$f'(x_0)$或$y'(x)|_{x=x_0}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$

高阶导数

- 莱布尼茨（Leibniz）公式：设f,g在I上有n阶导数，则$(f\cdot g)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}g^{(k)}=\sum\limits_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}\cdot f^{(i)}g^{(j)}$
- 参数方程求导：
  - 设$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$
  - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

- $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}$

微分中值定理

- 费马引理：设f定义在I上，x_0为I的内点，若f在$x=x_0$处可导且x_0为极值点（极值点不能是边界点），则$f'(x_0)=0$
  - 驻点：满足$f'(x)=0$的点
  - 可导的极值点必是驻点，驻点未必是极值点
- 罗尔定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$
  - 注意，闭区间上连续、开区间内可导、区间端点函数值相等均为充分条件而非必要条件（如$f(x)=x^3$在$[-1,1]$上）
  - 推广：若$f(x)$上有n个零点，且$n-1$阶可导，则$f'(x)$至少有$n-1$个零点，$f''(x)$至少有$n-2$个零点，$\cdots$，$f^{(n-1)}(x)$至少有1个零点
- 达布定理（导函数介值定理）：若f在$[a,b]$上可导，且$f'(a+0)\neq f'(b-0)$，k为介于$f'(a+0),f'(b-0)$之间任一实数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=k$
- 拉格朗日中值定理：
  - 内容：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$或$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
  - 推论：设$f(x)$在$[a,+\infty)$上具有n阶导数，满足：$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$且$\forall x\in(a,+\infty),f^{(n)}(x)>0$，则有$\forall x\in(a,+\infty),f(x)>0$
  - 导函数没有第一类间断点
- 柯西中值定理：设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，且$g'(x)\neq0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
- 三大中值定理关系：

柯西中值定理 → 拉格朗日中值定理 → 罗尔定理 → 费马引理

函数的单调性与极值

- 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$f(x)$在$[a,b]$上递增（递减）的充要条件是$f'(x)\geq0(\leq0),x\in(a,b)$
  - 注：$>0(<0)$只是充分条件，比如$y=x^3$在$[-1,1]$的单调性
- 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内除了有限个点外$f'(x)>0(<0)$，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增（递减）
- 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增（递减）的充要条件是：$\forall x\in(a,b),f'(x)\geq0(\leq0)$且在$(a,b)$内的任何子开区间上$f'(x)$不恒为零
- 一些定义：
  - 单调区间分界点：导数等于零的点和不可导点，**可能**是单调区间分界点
  - 拐点（反曲点）：改变曲线向上/向下方向的点，即函数凹凸的分界点
- 极值判定定理：
  - 设f在(a,b)上可导，$x_0\in(a,b)$，若存在$\delta>0$，当$x\in(x_0-\delta,x_0)\subset(a,b)$时，有$f'(x)\geq0$，当$x\in(x_0,x_0+\delta)\subset(a,b)$时，有$f'(x)\leq0$，则$x_0$是$f$的极大值点，$f(x_0)$是极大值 （极小值同理）
  - 设f在(a,b)上可导，存在$x_0\in(a,b),f'(x_0)=0,f''(x_0)$存在，则：
    - 若$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$是极大值
    - 若$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$是极小值
    - 若$f''(x_0)=0$，则$f(x_0)$不定
- 函数f在$[a,b]$上连续，其最大值（最小值）存在于：驻点（$f'(x_0)=0$）、不可导点、区间端点

凹凸函数

- 凸函数定义：设f在I上有定义，若对任意$x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$，任意$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$
  - $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$，则称$f$在$I$上为凸函数
  - $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$，则称$f$在$I$上为严格凸函数
  - 注意：**下凸上凹**，与惯性思维不同
- 詹森不等式：函数f定义在I上，任取$\{x_i\}_{i=1}^n \in I$和任取一组正实数$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$，满足$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,$
  - 若f在I上为凸函数，则有$f(\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$
  - 若f在I上为严格凸函数，且$x_1, x_2, \cdots, x_n$不全相等，则有$f(\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i) < \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$
- 凹凸函数判定定理：f在I上为凸函数的充要条件是
  $\forall x_1 < x < x_2 \in I, \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$
  - 注意：严格凸只需把上述$\leq$改为$<$；图像上表现为三角形三边的斜率比较
- 若f在I上可导，则：$f(x)$在I上为（严格）凸函数 $\iff$ $f'(x)$在I上（严格）单调递增
- 若f在I上二阶可导，则：
  - $f(x)$在I上为凸函数 $\iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$
  - $f(x)$在I上为严格凸函数 $\iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$，且在$I$的任意开子区间内，$f''(x)$不恒为零
- 若f在$U(x_0, \delta)$上二阶可导且$(x_0, f(x_0))$为拐点，则$f''(x_0) = 0$

洛必达法则

- 洛必达法则$\frac{0}{0}$型：设$f(x), g(x)$定义在区间$(x_0, x_0 + \delta)$上且$g(x) \neq 0$，满足
  - $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0+} g(x) = 0$
  - $f(x), g(x)$在$(x_0, x_0 + \delta)$内可导且$g'(x) \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$（$a$可为无穷大）

  则有$\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$
- 注意事项：
  - **不能**用等价无穷小替换
  - 洛必达**只能**用于$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$两种未定型（连续洛必达时**每次**都要判定是否为未定型）
  - 洛必达法则只是**充分条件**
  - 对于$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$：
    - $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{1}{\infty} \cdot \infty \qquad 0 \cdot \infty \Rightarrow 0 \cdot \frac{1}{0}$
    - $\infty - \infty \Rightarrow \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$
    - $0^0, 1^\infty, \infty^0$：取对数后变为$0 \cdot \infty$
  - 求极限过程中，若**乘除运算**中某因子的极限已知，可提前求出

§4.泰勒公式

微分

- 微分定义：设$f(x)$定义在$U(x_0; \delta)$上，当$x_0 + \Delta x \in U(x_0; \delta)$时，若
  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$，则称$f(x)$在$x_0$处可微，并称$A \cdot \Delta x$为函数$f(x)$在点$x_0$相应于自变量增量$\Delta x$的微分，记作$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$或$\mathrm{d}f(x_0) = A \cdot \Delta x$
- $f(x)$在点x_0处可微的充要条件时函数$f(x)$在点x_0处可导，且$A = f'(x_0)$
  - 特别地，对于一元函数，可导 $\iff$ 可微
- 微分运算法则：同导数运算法则
- 基本微分公式：同基本导数公式，$\mathrm{d}(f(x)) = f'(x)\mathrm{d}x$
- 高阶微分：$\mathrm{d}^n(f(x)) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$
- 一阶微分形式不变性：若x为中间变量，$x = \phi(t), \phi(t)$可导，则有$\mathrm{d}y = f'(x)\phi'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$

- 二阶及以上的微分不具有形式不变性

带佩亚诺型余项的泰勒公式

- 定义：设$f(x)$定义在$U(x_0;\delta)$上，且在x_0点n阶可导，$x \in U(x_0;\delta)$，则有

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)(x \to x_0)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad R_n(x) = o((x-x_0)^n)$$

  其中$p_n(x)$为$f(x)$在x_0点的n阶或n次泰勒公式，$R_n(x)$为佩亚诺型余项

- 当$x_0 = 0$时，泰勒公式也称为麦克劳林（Maclaurin）公式：$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$

- 常用泰勒展开式（佩亚诺余项）：
  - $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \to 0)$
  - $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0)$
  - $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0)$
    - 注：$\sin x$的佩亚诺余项既可以为$o(x^{2n})$，又可以为$o(x^{2n-1})$, $\cos x$同理（因为该项值等于零）
  - $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0)$
  - $\ln(1-x) = -(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}) + o(x^n) \quad (x \to 0)$
  - $(1+x)^\lambda = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$
    - $\lambda = \dfrac{1}{2}, \sqrt{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$
    - $\lambda = -1, \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \quad (x \to 0), \qquad \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$
      $\lambda = -1, \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0), \qquad \dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0)$
    - $\lambda = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$

带拉格朗日余项的泰勒公式