

数学分析公式结论总结

Information

- 声明：本仓库目前为个人维护，暂无校对，如有疏漏，欢迎指正，感谢理解！
- 维护者：Phinney
- 鸣谢：WY，对部分内容的纠正
- 版本：0.5 β
- 仓库链接：<https://github.com/BUAAMogician/Mathematical-Analysis-Reference-for-BUAA>
- 参考文献：
 - [1]杨小远.工科数学分析教程(上册)[M].北京：科学出版社，2018.

目录

- [数学分析公式结论总结](#)
 - [Information](#)
 - [目录](#)
 - [§ 0.常用公式表](#)
 - [三角函数](#)
 - [和差化积](#)
 - [积化和差](#)
 - [半角公式](#)
 - [倍角公式](#)
 - [万能公式](#)
 - [其他](#)
 - [§ 1.数列极限](#)
 - [常用公式\结论](#)
 - [符号/定义](#)
 - [数列极限定义](#)
 - [数列极限的保序性\(取0时为保号性\)](#)
 - [自然常数](#)
 - [六大定理关系](#)
 - [其他](#)
 - [§ 2.函数极限与连续](#)
 - [集合](#)
 - [集合的势](#)
 - [符号/定义](#)
 - [函数极限](#)
 - [函数连续](#)
 - [一致连续](#)
 - [无穷小与无穷大阶](#)
 - [常用极限/结论](#)
 - [有限闭区间上连续函数的整体性质](#)
 - [§ 3.导数的计算与应用](#)
 - [常见导数公式](#)
 - [导数的定义](#)
 - [高阶导数](#)
 - [微分中值定理](#)
 - [函数的单调性与极值](#)

- [凹凸函数](#)
- [洛必达法则](#)
- § 4. [泰勒公式](#)
 - [微分](#)
 - [带佩亚诺余项的泰勒公式](#)
 - [带拉格朗日余项的泰勒公式](#)
 - [应用](#)

§ 0. 常用公式表

三角函数

和差化积

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

积化和差

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

半角公式

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}\end{aligned}$$

倍角公式

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} \\ \sec 2\alpha &= \frac{\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha}{\csc^2 \alpha - \sec^2 \alpha} = \frac{\sec^2 \alpha \csc^2 \alpha}{\csc^2 \alpha - \sec^2 \alpha} \\ \csc 2\alpha &= \frac{\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha}{2 \sec \alpha \csc \alpha} = \frac{\sec \alpha \csc \alpha}{2} \\ (\cos \theta + \imath \sin \theta)^n &= \cos n\theta + \imath \sin n\theta\end{aligned}$$

万能公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \tan \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

其他

$$\begin{aligned}\cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} && \text{余切} \\ \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} && \text{余割} \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} && \text{正割}\end{aligned}$$

§ 1.数列极限

常用公式\结论

- 指数相关：

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} &= 0 (c \neq 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{c^n} &= 0 (\alpha > 0, c > 1)\end{aligned}$$

- 调和-几何-算术平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

- 伯努利不等式

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\forall x > -1, n \in \mathbb{N}^*)$$

- 柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

- 二项式展开

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

- 因式分解

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

- 闵科夫斯基不等式(可以通过几何意义来记忆)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

符号/定义

- \forall : 任意选取 \exists : 存在 冒号: 满足的结论
- $n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n & n \bmod 2 = 0 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n & n \bmod 2 = 1 \end{cases}$
- 无穷小/无穷小量: 如果数列 a_n 的极限为零, 那么称数列 a_n 为无穷小(量)
- 欧拉常数(γ): $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma + \epsilon(n)$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$; 即调和级数与自然对数的差值的极限
- 上/下确界: $\sup E = \alpha, \inf E = \beta$
- 上/下极限: 设 E 为 $\{a_n\}$ 中所有子列极限(包含 $\pm\infty$)构成的集合, 则数列的上下极限
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a^* = \sup E, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a_* = \inf E$
并有定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

数列极限定义

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*, \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

数列极限的保序性(取0时为保号性)

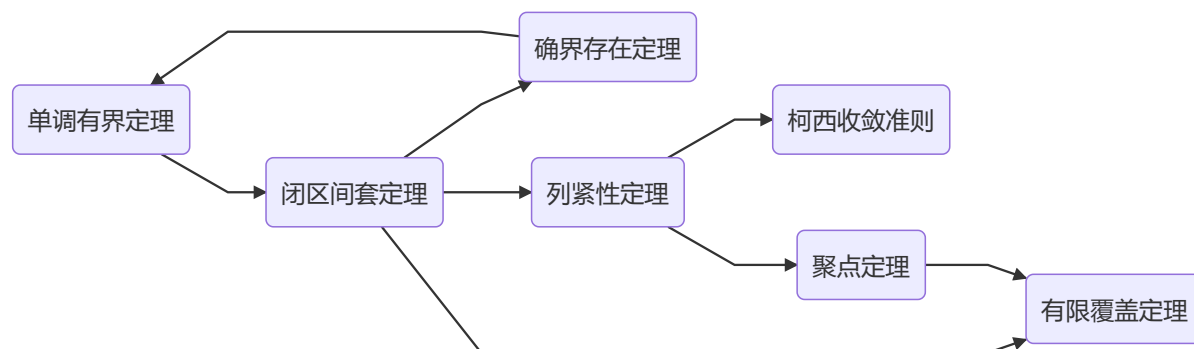
- (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \alpha < a < \beta$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $\alpha < a_n < \beta$
- (2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 且 $a < b$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b_n$
- (3) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 若存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n \leq b_n$, 则 $a \leq b$

自然常数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ 单调递增}, y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ 单调递减}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \iff \frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$
$$\frac{k}{n+k} < \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$$

六大定理关系



其他

(1) 对 $x \geq 0, y \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}(x+y)^n &\geq x^n + y^n, & (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} &\leq x + y \\ (x+y)^{\frac{1}{n}} &\leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}, & |x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}| &\leq |x - y|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

(3)

$$n < \sqrt{(n-1)(n+1)} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \begin{cases} \text{不存在} & \alpha = 1 \\ \text{存在} & \alpha > 1 \end{cases}$$

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}}{n} = \frac{4}{e}$$

§ 2. 函数极限与连续

集合

集合的差: 设 $B \subset A$, $A \setminus B = \{x | x \in A, \text{且} x \notin B\}$

余集 (补集): $B^c = U \setminus B (B \subset U)$

直积: $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$, 例如 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, 即笛卡尔积

集合的势

- 集合的势: 如果存在 A 与 B 之间的双射 (一一对应), 则称集合 A 与集合 B 等势, 记作 $A \sim B$
- 可数集: 若 $A \sim \mathbb{N}^*$, 则称 A 为可数集 (属于无限集)
- 至多可数集: 有限集与可数集合称至多可数集
- 阿列夫零: 在众多无限集中, 最小的势是可数集的势 \aleph_0 (即阿列夫零)
- 定理 (集合的性质):
 - 可数集的任何无限子集是可数集
 - 设 $\{E_n\}, n = 1, 2, 3, \cdots$ 是可数集序列, 则 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是可数集
 - 实数集不是可数集
 - 有理数集是可数集

符号/定义

- \equiv : 恒等于
- 邻域与去心邻域: $U(x_0; \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}$ $U^o(x_0; \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
- $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$
- $[x]$: 不超过 x 的最大整数, 有 $x - 1 < [x] \leq x$
- $\delta(\epsilon)$: δ 与 ϵ 有关

函数极限

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ **无关**，与在该点是否有定义也**无关**
- 函数极限为局部性质
- 有理函数：形如 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 的函数，其中都是 $p(x), q(x)$ 多项式
- 海涅原理： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的任何子列 $f(x_n)$ ，都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$
- 海涅原理应用：两个子列极限不同 \Rightarrow 该点极限不存在
- 柯西收敛定理： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in U^o(x_0; \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
- 柯西收敛定理（否定）： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在 $\iff \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in U^o(x_0; \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$

函数连续

- $C(I)$ 表示区间 I 上连续函数全体组成的集合
- $f(x)$ 在 x_0 处连续的条件： $f(x)$ 在 x_0 处有定义， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且等于 $f(x_0)$
- 间断点：
 - 第一类间断点：跳跃间断点（ $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ ）和可去间断点（ $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在该点无定义）的统称
 - 第二类间断点： $f(x)$ 在点 x_0 的左右极限至少有一个不存在（趋向于无穷或上下震荡）

一致连续

- 一致连续：设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ，若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in E, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ ，则称 f 在 E 上一致连续。
- 一致连续的 δ 与 x 无关，可能与 $\epsilon, |x_1 - x_2|$ 有关
- 若 $f(x), g(x)$ 在 I 上一致连续，则：
 - 若 $f(x), g(x)$ 在 I 上有界，则 $f(x)g(x)$ 在 I 上一致连续
 - 若 $f(x), g(x)$ 在 I 上有界， $|g(x)|$ 在 I 上有非零的下界，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 上一致连续
- Lipschitz条件（比一致连续更强的条件）：设函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ，若存在正常数 L ，使得 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ 对任何 $x, y \in I$ 成立，则称 f 在 I 上满足Lipschitz条件。

无穷小与无穷大阶

- 无穷大量是一种特殊的无界变量，无界变量未必是无穷大量（如 $x \rightarrow 0$ 时 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ ）
- 设 $f(x), g(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时是无穷小/大量
 - 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小/ $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷大
 - 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ ，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小/大量；当 $l = 1$ 时，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小/大量，记作 $f \sim g(x \rightarrow x_0)$
 - 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^k} = l \neq 0$ ，则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的 k 阶无穷小量（ $x \rightarrow \infty$ 时选 $\frac{1}{x^k}$ 为标准）
 - 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{-k}} = l \neq 0$ ，则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的 k 阶无穷大量（ $x \rightarrow \infty$ 时选 x^k 为标准）
- 无穷小阶运算性质：
 - 定义：
 - $o()$ 是**高阶无穷小**， $O()$ 是**有界量**（[具体参阅](#)）

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = o(1)$$

- 设 $x \rightarrow 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0$, 则

$$\begin{aligned} o(x^\alpha) + o(x^\beta) &= o(x^{\min(\alpha, \beta)}), & o(x^\alpha) \times o(x^\beta) &= o(x^{\alpha+\beta}) \\ O(x^\alpha) + O(x^\beta) &= O(x^{\min(\alpha, \beta)}), & O(x^\alpha) \times O(x^\beta) &= O(x^{\alpha+\beta}) \end{aligned}$$

- 无穷大阶运算性质:

- 设 $x \rightarrow \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0$, 则

$$O(x^\alpha) + O(x^\beta) = O(x^{\max(\alpha, \beta)}), \quad O(x^\alpha)O(x^\beta) = O(x^{\alpha+\beta})$$

常用极限/结论

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

- 幂指函数极限 ($\lim u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$):

$$\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim v \ln u} \quad (0^0, 1^\infty, \infty^0 \Rightarrow 0 \cdot \infty)$$

$$\lim u^v = \lim ((1 + (u-1))^{\frac{1}{u-1}})^{(u-1)v} = \lim ((1+t)^{\frac{1}{t}})^{(u-1)v} = e^{\lim (u-1)v} \quad (1^\infty \Rightarrow 0 \cdot \infty)$$

- 等价无穷小 (等价替换定理):

- 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin x \sim x & \quad \tan x \sim x & 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} & \quad \arcsin x \sim x & \quad \arctan x \sim x \\ e^x - 1 \sim x & \quad \ln(1+x) \sim x & a^x - 1 \sim x \ln a & \quad (1+x)^a - 1 \sim ax \end{aligned}$$

- 等价无穷小传递中被替换的项在原函数中一定以乘积项的形式在分子/分母中出现, 即只能是原函数的因子

- 压缩数列的收敛性质: 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $\{x_n\}$ 的极限存在

- 压缩映射原理:

- 不动点: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 则 $f(x) = x$ 在 $[a, b]$ 上的解称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的不动点
- 压缩映射: 若 $f(x): E \rightarrow E$ 满足 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (\forall x, y \in E, 0 < k < 1)$, 则称 $f(x)$ 为 E 上的压缩映射
- 内容: 若 $f(x)$ 为下列闭区间上的压缩映射: $E = [a, b]/[a, +\infty)/(-\infty, a]/(-\infty, +\infty)$, 则存在唯一不动点 $\alpha \in E, \alpha = f(\alpha)$

有限闭区间上连续函数的整体性质

- 康托尔 (Cantor) 定理:

- 内容: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续

- 推论:

- $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续 $\iff f(x)$ 在 (a, b) 上连续且 $f(a+0), f(b-0)$ 存在
- 有限区间 (a, b) 上有限个一致连续函数的加、减、乘在此区间上仍是一致连续的

- 有界定理: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界

- 最大值最小值定理: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必能取到最大值 (x^*) 和最小值 (x_*)

- 零点定理 (零点存在定理):

- 内容: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

- 推论:

- 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \mp\infty$, 则 $f(x)$ 一定存在零点
- 若 $f(x) \in C(a, +\infty), \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且异号, 则 $f(x)$ 一定存在零点
- 若 $f(x) \in C(a, b), \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ 存在且异号, 则 $f(x)$ 一定存在零点
- 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界

- 介值定理：
 - 内容：若 $f(x) \in C[a, b]$, λ 是介于 $f(a), f(b)$ 之间的任意实数, 则存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = \lambda$
 - 广义介值定理：若 $f(x) \in C[a, b]$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, 任意正实数满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, 则存在一点 η , 使得 $f(\eta) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$
 - 推论：若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 f 能取到最大值 M 和最小值 m 之间的任何值
- 其他结论：
 - 最值：
 - 若 $f(x) \in C(a, b)$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = -\infty$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在最大值
 - 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在最大值
 - 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在最小值
 - 一致连续：
 - 若 $f(x) \in C(I)$, $I = I_1 \cup I_2$, $f(x)$ 在 I_1, I_2 上一致连续, 则 $f(x)$ 在 I 上一致连续
 - 若 $f(x) \in C[a, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续
 - 若 $f(x) \in C(-\infty, b]$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上一致连续
 - 若 $f(x) \in C(a, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续
 - 若 $f(x) \in C(-\infty, b)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 上一致连续

§ 3. 导数的计算与应用

常见导数公式

$$\begin{aligned}
 (C)' &= 0 & (x^\mu)' &= \mu x^{\mu-1} & (a^x)' &= a^x \ln a & (e^x)' &= e^x & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \\
 (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & (\operatorname{arccot} x)' &= \frac{-1}{1+x^2} \\
 (\tan x)' &= \sec^2 x & (\cot x)' &= -\csc^2 x & (\sec x)' &= \sec x \tan x & (\csc x)' &= -\csc x \cot x
 \end{aligned}$$

$$(u(x)^{v(x)})' = (e^{v(x) \ln u(x)})' = e^{v(x) \ln u(x)} (v(x) \ln u(x))'$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x \pm 1}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x \pm 1)^{n+1}} \quad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(a^{\lambda x})^{(n)} = a^{\lambda x} \cdot (\lambda \ln a)^n (a > 0) \quad (e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \quad (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

导数的定义

- 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0; \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内有定义, 如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 该极限为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'(x)|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

高阶导数

- 莱布尼茨 (Leibniz) 公式：设 f, g 在 I 上有 n 阶导数, 则 $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} \cdot f^{(i)} g^{(j)}$
- 参数方程求导：
 - 设 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

$$\circ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\phi'(t)}$$

微分中值定理

- 费马引理：设 f 定义在 I 上， x_0 为 I 的内点，若 f 在 $x = x_0$ 处可导且 x_0 为极值点（极值点不能是边界点），则 $f'(x_0) = 0$
 - 驻点：满足 $f'(x) = 0$ 的点
 - 可导的极值点必是驻点，驻点未必是极值点
- 罗尔定理：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$ ，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$
 - 注意，闭区间上连续、开区间内可导、区间端点函数值相等均为充分条件而非必要条件（如 $f(x) = x^3$ 在 $[-1, 1]$ 上）
 - 推广：若 $f(x)$ 上有 n 个零点，且 $n - 1$ 阶可导，则 $f'(x)$ 至少有 $n - 1$ 个零点， $f''(x)$ 至少有 $n - 2$ 个零点， \dots ， $f^{(n-1)}(x)$ 至少有 1 个零点
- 达布定理（导函数介值定理）：若 f 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'(a+0) \neq f'(b-0)$ ， k 为介于 $f'(a+0)$ ， $f'(b-0)$ 之间任一实数，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = k$
- 拉格朗日中值定理：
 - 内容：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 内可导，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ 或 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$
 - 推论：设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上具有 n 阶导数，满足： $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ 且 $\forall x \in (a, +\infty)$ ， $f^{(n)}(x) > 0$ ，则有 $\forall x \in (a, +\infty)$ ， $f(x) > 0$
 - 导函数没有第一类间断点
- 柯西中值定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， (a, b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$ ，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
- 三大中值定理关系：

柯西中值定理

拉格朗日中值定理

罗尔定理

费马引理

函数的单调性与极值

- 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增（递减）的充要条件是 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ ， $x \in (a, b)$
 - 注： $> 0 (< 0)$ 只是充分条件，比如 $y = x^3$ 在 $[-1, 1]$ 的单调性
- 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内除了有限个点外 $f'(x) > 0 (< 0)$ ，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增（递减）
- 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调递增（递减）的充要条件是： $\forall x \in (a, b)$ ， $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ 且在 (a, b) 内的任何子开区间上 $f'(x)$ 不恒为零
- 一些定义：
 - 单调区间分界点：导数等于零的点和不可导点，**可能是**单调区间分界点
 - 拐点（反曲点）：改变曲线向上/向下方向的点，即函数凹凸的分界点
- 极值判定定理：
 - 设 f 在 (a, b) 上可导， $x_0 \in (a, b)$ ，若存在 $\delta > 0$ ，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset (a, b)$ 时，有 $f'(x) \geq 0$ ，当 $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ 时，有 $f'(x) \leq 0$ ，则 x_0 是 f 的极大值点， $f(x_0)$ 是极大值（极小值同理）
 - 设 f 在 (a, b) 上可导，存在 $x_0 \in (a, b)$ ， $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0)$ 存在，则：
 - 若 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x_0)$ 是极大值
 - 若 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x_0)$ 是极小值
 - 若 $f''(x_0) = 0$ ，则 $f(x_0)$ 不定
- 函数 f 在 $[a, b]$ 上连续，其最大值（最小值）存在于：驻点（ $f'(x_0) = 0$ ）、不可导点、区间端点

凹凸函数

- 凸函数定义: 设 f 在 I 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$, 任意 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$,
 - $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, 则称 f 在 I 上为凸函数
 - $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, 则称 f 在 I 上为严格凸函数
 - 注意: **下凸上凹**, 与惯性思维不同
- 詹森不等式: 函数 f 定义在 I 上, 任取 $\{x_i\}_{i=1}^n \in I$ 和任取一组正实数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$,
 - 若 f 在 I 上为凸函数, 则有 $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$
 - 若 f 在 I 上为严格凸函数, 且 x_1, x_2, \cdots, x_n 不全相等, 则有 $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) < \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$
- 凹凸函数判定定理: f 在 I 上为凸函数的充要条件是
$$\forall x_1 < x < x_2 \in I, \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
 - 注意: 严格凸只需把上述 \leq 改为 $<$; 图像上表现为三角形三边的斜率比较
- 若 f 在 I 上可导, 则: $f(x)$ 在 I 上为 (严格) 凸函数 $\iff f'(x)$ 在 I 上 (严格) 单调递增
- 若 f 在 I 上二阶可导, 则:
 - $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$
 - $f(x)$ 在 I 上为严格凸函数 $\iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$, 且在 I 的任意开区间内, $f''(x)$ 不恒为零
- 若 f 在 $U(x_0, \delta)$ 上二阶可导且 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点, 则 $f''(x_0) = 0$

洛必达法则

- 洛必达法则 $\frac{0}{0}$ 型: 设 $f(x), g(x)$ 定义在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上且 $g(x) \neq 0$, 满足
 - $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0+} g(x) = 0$
 - $f(x), g(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内可导且 $g'(x) \neq 0$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ (a 可为无穷大)则有
$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$$
- 注意事项:
 - 不能用等价无穷小替换**
 - 洛必达只能用于 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 两种未定型 (连续洛必达时**每次**都要判定是否为未定型)
 - 洛必达法则只是**充分条件**
 - 对于 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$:
 - $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{1}{\infty} \cdot \infty \quad 0 \cdot \infty \Rightarrow 0 \cdot \frac{1}{0}$
 - $\infty - \infty \Rightarrow \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}$
 - $0^0, 1^\infty, \infty^0$: 取对数后变为 $0 \cdot \infty$
 - 求极限过程中, 若**乘除运算**中某因子的极限已知, 可提前求出

§ 4. 泰勒公式

微分

- 微分定义: 设 $f(x)$ 定义在 $U(x_0; \delta)$ 上, 当 $x_0 + \Delta x \in U(x_0; \delta)$ 时, 若
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$
则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 并称 $A \cdot \Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 $dy|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$ 或 $df(x_0) = A \cdot \Delta x$
- $f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件时函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$
 - 特别地, 对于一元函数, 可导 \iff 可微
- 微分运算法则: 同导数运算法则
- 基本微分公式: 同基本导数公式, $d(f(x)) = f'(x)dx$
- 高阶微分: $d^n(f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$
- 一阶微分形式不变性**: 若 x 为中间变量, $x = \phi(t), \phi(t)$ 可导, 则有 $dy = f'(x)\phi'(t)dt = f'(x)dx$

- 二阶及以上的微分不具有形式不变性

带佩亚诺型余项的泰勒公式

- 定义：设 $f(x)$ 定义在 $U(x_0; \delta)$ 上，且在 x_0 点 n 阶可导， $x \in U(x_0; \delta)$ ，则有

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

其中 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶或 n 次泰勒公式， $R_n(x)$ 为佩亚诺型余项

- 当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式也称为麦克劳林 (Maclaurin) 公式： $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$

- 常用泰勒展开式 (佩亚诺余项)：

$$\circ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\circ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\circ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

■ 注： $\sin x$ 的佩亚诺余项既可以为 $o(x^{2n})$ ，又可以为 $o(x^{2n-1})$ ， $\cos x$ 同理 (因为该项值等于零)

$$\circ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\circ \ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}) + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\circ (1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\circ \lambda = \frac{1}{2}, \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\circ \lambda = -1, \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0), \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lambda = -1, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0), \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\circ \lambda = -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

带拉格朗日余项的泰勒公式

- 定义：设 $f(x)$ 在 $U(x_0; \delta)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则对 $\forall x \in U(x_0; \delta)$ ，有

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x, x_0 之间， $R_n(x)$ 为拉格朗日余项

- 当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式也称为麦克劳林 (Maclaurin) 公式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \theta < 1$$

- 常用泰勒展开式 (拉格朗日余项)：

$$\circ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \theta < 1$$

$$\circ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\circ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$
- $(1+x)^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}x^k + C_\lambda^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}x^{n+1}$
- 极值点判定：设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有 k 阶导数，且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ ， $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ ，则
 - k 为奇数时， x_0 不是极值点
 - k 为偶数时， x_0 是极值点，当 $f^{(k)}(x_0) > 0$ 时， x_0 为极小值点； $f^{(k)}(x_0) < 0$ 时， x_0 为极大值点

应用

- 带拉格朗日型余项的泰勒公式常用于证明与中值点相关的不等式，其关键在于泰勒公式展开点的选择。一般选择已知区间的端点、中间点、函数的极值点或导数为0的点等。