数学分析公式结论总结 ——*HYX_v1.0*

§ 0.常用公式表

三角函数

和差化积

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta&=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

积化和差

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\
\sin\alpha\sin\beta&=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$
$$\sec 2\alpha=\frac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha-\sec^2\alpha}=\frac{\sec^2\alpha\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha-\sec^2\alpha}$$
$$\csc 2\alpha=\frac{\sec^2\alpha+\csc^2\alpha}{2\sec\alpha\csc\alpha}=\frac{\sec\alpha\csc\alpha}{2}$$
$$(\cos\theta+\imath\sin\theta)^n=\cos n\theta+\imath\sin n\theta$$

万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

其他

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\qquad\text{余切}$$
$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\qquad\text{余割}$$
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\qquad\text{正割}$$

§ 1.数列极限

常用公式\结论

- 指数相关:

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0(c\neq 0)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{c^n}=0(\alpha>0,c>1)$$

- 调和-几何-算术平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad (a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$$

- 伯努利不等式

$$(1+x)^n \ge 1+nx \quad (\forall x>-1, n\in\mathbb{N}^*)$$

- 柯西不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

- 二项式展开

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

- 因式分解

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

- 闵科夫斯基不等式(可以通过几何意义来记忆)

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

符号/定义

- $\forall$：任意选取 $\exists$：存在 冒号：满足的结论
- $n!! = \begin{cases} 2\cdot4\cdot6\cdots n & n\ mod\ 2=0 \\ 1\cdot3\cdot5\cdots n & n\ mod\ 2=1 \end{cases}$
- 无穷小/无穷小量：如果数列a_n的极限为零，那么称数列a_n为无穷小（量）
- 欧拉常数(γ)：$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\gamma+\epsilon(n)$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon(n)=0$；即调和级数与自然对数的差值的极限
- 上/下确界：$sup\ E=\alpha, inf\ E=\beta$
- 上/下极限：设E为$\{a_n\}$中所有子列极限（包含$\pm\infty$）构成的集合，则数列的上下极限 $\lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n=a^*=sup\ E, \lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n=a_*=inf\ E$

  并有定理$\lim\limits_{n\to\infty} inf\ a_n=\lim\limits_{n\to\infty} sup\ a_n=a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

数列极限定义

$$\forall\epsilon>0, \exists N(\epsilon)\in\mathbb{N}^*, \forall n>N: |a_n-a|<\epsilon$$

数列极限的保序性(取0时为保号性)

(1)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \alpha<a<\beta$,则存在$N\in\mathbb{N}^*$,使得当$n>N$时,有$\alpha<a_n<\beta$

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$,且$a<b$,则存在$N\in\mathbb{N}^*$,使得当$n>N$时,有$a_n<b_n$

(3)设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$,若存在$N\in\mathbb{N}^*$,使得当$n>N$时,有$a_n\le b_n$,则$a\le b$

自然常数

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=\mathrm{e}$$

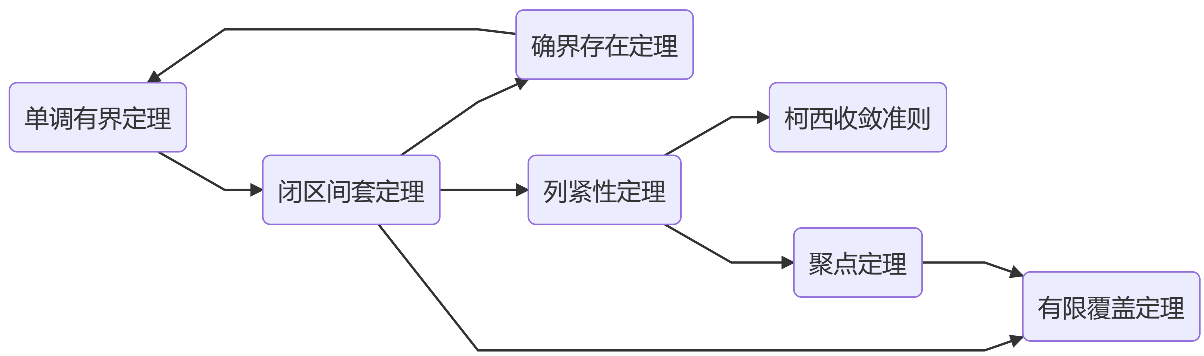
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=\mathrm{e}^k,\qquad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n=\mathrm{e}^{-k}\quad(k\in\mathbb{N}^*)$$

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n\text{单调递增},y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}\text{单调递减}$$

$$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}\iff n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\iff\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}$$

六大定理关系



其他

(1)对$x\geq 0,y\geq 0,n\in\mathbb{N}^*$,有

$$(x+y)^n\geq x^n+y^n,\qquad (x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}\leq x+y$$
$$(x+y)^{\frac{1}{n}}\leq x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}},\qquad |x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}}|\leq|x-y|^{\frac{1}{n}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=s\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$$

(3)

$$n<\sqrt{(n-1)(n+1)}\Rightarrow\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}\quad(n\in\mathbb{N}^*)$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha})=\begin{cases}\text{不存在} & \alpha=1\\ \text{存在} & \alpha>1\end{cases}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}=\frac{4}{\mathrm{e}}$$

§ 2.函数极限与连续

集合

集合的差：设$B\subset A$，$A\setminus B=\{x|x\in A,\text{且}x\notin B\}$

余集（补集）：$B^c=U\setminus B(B\subset U)$

直积：$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$，例如$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$，即笛卡尔积

集合的势

集合的势：如果存在A与B之间的双射（一一对应），则称集合A与集合B等势，记作$A \sim B$

可数集：若$A \sim \mathbb{N}^*$，则称A为可数集（属于无限集）

至多可数集：有限集与可数集合称至多可数集

阿列夫零：在众多无限集中，最小的势是可数集的势$\aleph_0$（即阿列夫零）

定理（集合的性质）：

- 可数集的任何无限子集是可数集
- 设$\{E_n\}, n = 1, 2, 3, \cdots$是可数集序列，则$S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$是可数集
- 实数集不是可数集
- 有理数集是可数集

符号/定义

- $\equiv$：恒等于
- 邻域与去心邻域：$U(x_0;\delta) = \{x||x - x_0| < \delta\} \qquad U^o(x_0;\delta) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta\}$
- $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
- $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$
- $[x]$：不超过x的最大整数，有$x - 1 < [x] \le x$
- $\delta(\epsilon)$：δ与ϵ有关

函数极限

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$与$f(x_0)$无关，与在该点是否有定义也无关
- 函数极限为局部性质
- 有理函数：形如$\frac{p(x)}{q(x)}$的函数，其中都是$p(x), q(x)$多项式
- 海涅原理：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff$ 当$x \to x_0$时$f(x)$的任何子列$f(x_n)$，都有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$
- 海涅原理应用：两个子列极限不同⇒该点极限不存在
- 柯西收敛定理：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in U^o(x_0;\delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
- 柯西收敛定理（否定）：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在

  $\iff \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in U^o(x_0;\delta) : |f(x_1) - f(x_2)| \ge \epsilon$

函数连续

- $C(I)$表示区间I上连续函数的集合
- $f(x)$在x_0处连续的条件：$f(x)$在x_0处有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在且等于$f(x_0)$
- 间断点：
  - 第一类间断点：跳跃间断点（$f(x_0 + 0) \ne f(x_0 - 0)$）和可去间断点（$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \ne f(x_0)$或$f(x)$在该点无定义）的统称
  - 第二类间断点：$f(x)$在点x_0的左右极限至少有一个不存在（趋向于无穷或上下震荡）

一致连续

- 一致连续：设$f : E \to \mathbb{R}$，若$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in E, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$，则称$f$在$E$上一致连续。
- 一致连续的δ与x无关，可能与$\epsilon, |x_1 - x_2|$有关
- 若$f(x), g(x)$在I上一致连续，则：
  - 若$f(x), g(x)$在I上有界，则$f(x)g(x)$在I上一致连续
  - 若$f(x), g(x)$在I上有界，$|g(x)|$在I上有非零的下界，则$\frac{f(x)}{g(x)}$在I上一致连续
- Lipschitz条件（比一致连续更强的条件）：设函数$f : I \to \mathbb{R}$，若存在正常数L，使得$|f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2|$对任何$x, y \in I$成立，则称$f$在$I$上满足Lipschitz条件。

无穷小与无穷大阶

- 设$f(x), g(x)$在$x \to x_0$时是无穷小/大量
    - 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小/大量
    - 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$，则称$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小/大量；当$l = 1$时，则称$f(x)$是$g(x)$的等价无穷小/大量，记作$f \sim g(x \to x_0)$
    - 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^k} = l \neq 0$，则称$f(x)$是$x \to x_0$时的$k$阶无穷小量（$x \to \infty$时选$\frac{1}{x^k}$为标准）
    - 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^{-k}} = l \neq 0$，则称$f(x)$是$x \to x_0$时的$k$阶无穷大量（$x \to \infty$时选$x^k$为标准）
- 无穷小阶运算性质：
    - 定义：

$$\begin{gathered}
\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x)) \\
\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \\
\lim f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = o(1)
\end{gathered}$$

    - 设$x \to 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0$，则

$$\begin{aligned}
o(x^\alpha) + o(x^\beta) &= o(x^{\min(\alpha,\beta)}), \qquad & o(x^\alpha) \times o(x^\beta) &= o(x^{\alpha+\beta}) \\
O(x^\alpha) + O(x^\beta) &= O(x^{\min(\alpha,\beta)}), \qquad & O(x^\alpha) \times O(x^\beta) &= O(x^{\alpha+\beta})
\end{aligned}$$

常用极限/结论

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

- 幂指函数极限（$\lim u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$）：

$$\lim u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{\lim v \ln u} \qquad (0^0, 1^\infty, \infty^0 \Rightarrow 0 \cdot \infty)$$

$$\lim u^v = \lim ((1 + (u-1))^{\frac{1}{u-1}})^{(u-1)v} = \lim ((1+t)^{\frac{1}{t}})^{(u-1)v} = \mathrm{e}^{\lim (u-1)v} \qquad (1^\infty \Rightarrow 0 \cdot \infty)$$

- 等价无穷小（等价替换定理）：
    - 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x \qquad \tan x \sim x \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \arcsin x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x \qquad a^x - 1 \sim x \ln a \qquad (1+x)^a - 1 \sim ax$$