数学分析公式结论总结

Information

- 声明：本仓库目前为个人维护，暂无校对，如有疏漏，欢迎指正，感谢理解！
- 维护者：Phinney
- 鸣谢：WY，对部分内容的纠正
- 版本：0.5 β
- 仓库链接：https://github.com/BUAAMogician/Mathematical-Analysis-Reference-for-BUAA
- 参考文献：

    - [1]杨小远.工科数学分析教程(上册)[M].北京：科学出版社，2018.
    - [2]
    - [3]

目录

§ 0.常用公式表

§ 1.数项级数

数项级数

数项级数的定义

- 定义：设$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$是一个数列，将"和式"$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$称为一个数项级数，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，也叫无穷级数，简称级数。
- 级数前n项的部分和$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

级数的敛散

- 若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，并称$S$为该级数的和，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S$
  - 级数收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
- 若部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散

正项级数

- 定义：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$中的所有项$x_n$都非负，则该级数为一个正项级数
  - 一个级数若从某一项开始，其通项均非负，也可以被视作正项级数
- 收敛的充要条件：正项级数的部分和数列$\{S_n\}$有上界
- 正项级数敛散性的判别法：
  - 1.比较判别法：
    - 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$是两正项级数，且$0 \leq x_n \leq y_n, n = 1, 2, \cdots$，则
      - 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛
      - 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$发散
    - 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$是两正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$，则
      - 若$l = 0$，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛
      - 若$0 < l < +\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$同敛散
      - 若l为$+\infty$，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散
  - 2.根值判别法（柯西判别法）
    - 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$是正项级数
      - 若$\exists 0 < q < 1, N \in \mathbb{N}^*$，使得$\forall n > N, \sqrt[n]{x_n} \leq q$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛
      - 若存在无穷多个n，使得$\sqrt[n]{x_n} \geq 1$成立，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散

        - 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，$q=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$（$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$指$\{x_n\}$所有收敛子数列的极限值的上确界）
            - $q<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
            - $q>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散
    - 3.比值判别法（达朗贝尔判别法）
        - 引理：设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是两正项级数，若$\exists N\in\mathbb{N}^*$使得$\forall n>N,\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{y_{n+1}}{y_n}$，则
            - 当$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
            - 当$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$发散
        - 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数
            - 若$\exists 0<q<1,N\in\mathbb{N}^*$，使得$\forall n>N,\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq q$，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
            - 若$\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得$\forall n>N,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散
        - 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，若$q=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在
            - $q<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
            - $q>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散
    - 4.积分判别法（柯西积分判别法）
        - 设$f(x)$是定义在$[1,+\infty)$上的非负递减函数，则$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$敛散性相同
    - 5.拉贝判别法
        - 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，若$q=\lim_{n\to\infty}n(\frac{x_n}{x_n+1}-1)$存在
            - $q>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
            - $q<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散
    - 6.贝特朗判别法
        - 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是正项级数，若$q=\lim_{n\to\infty}\ln n[n(\frac{x_n}{x_n+1}-1)-1]$存在
            - $q>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
            - $q<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散

- 任意收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$，都存在一个收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$，使得$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$
    - 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$部分和序列$\{S_n\},r_0=S,r_n=S-S_n$，y_n可以是$\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$

一般项级数的敛散性

- 级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛的充要条件（柯西收敛原理）
    - $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，使得$\forall m>n>N,|\sum_{i=n+1}^{m}x_i|<\epsilon$
- 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$绝对收敛；若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛但级数$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$条件收敛
- 交错级数：
    - 定义：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,u_n>0(n=1,2,\cdots)$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$为交错级数
    - 莱布尼茨判别法
        - 若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$有$u_n$单调递减收敛于0，则称其为莱布尼茨级数。莱布尼茨级数均收敛
- 分部求和公式：$A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k,\sum_{k=1}^{p}a_kb_k=A_pb_p+\sum_{n=1}^{p-1}A_k(b_k-b_{k+1})$
- 阿贝尔引理：对于实数列$\{a_k\},\{b_k\},A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，若$\{b_k\}$单调且$\exists M>0,\forall k\in\mathbb{N}^*,|A_k|\le M$，则$\forall p\in\mathbb{N}^*,|\sum_{k=1}^{p}a_kb_k|\le M(|b_1|+2|b_p|)$
- 狄利克雷判别法
    - 对于实数列$\{x_n\},\{y_n\},S_n=x_1+x_2+\cdots+x_k$，若
        - $\{y_n\}$单调且$\lim_{n\to\infty}y_n=0$
        - $\exists M>0,\forall n\in\mathbb{N}^*,|S_n|\le M$
    - 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n$收敛
- 阿贝尔判别法
    - 对于实数列$\{x_n\},\{y_n\}$，若
        - $\{y_n\}$单调有界
        - 级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛
    - 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n$收敛

更序问题和级数乘法

- 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$绝对收敛，则任意调整级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$中各项次序得到的新级数也收敛
- 黎曼重排定理：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$条件收敛，则对于任意给定的$\alpha, -\infty \leq \alpha \leq +\infty$，总可以适当地调整$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$中各项的次序得到一个新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$，使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛到$\alpha$
- 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$均绝对收敛，则将$x_i y_j (i = 1, 2, \cdots; j = 1, 2, \cdots)$任意排列再求和得到的级数都是绝对收敛的，且其和为$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n)(\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n)$

$\S\, 2.$函数列与函数项级数

函数列与函数项级数的收敛性

逐点收敛

- 基本定义：
  - 函数列：在区间I上的函数序列$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$，简称为函数列，记为$\{u_n(x)\}(n = 1, 2, \cdots)$
  - 函数项级数：函数列的“和式”，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
  - 函数项级数的部分和：$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$
- 逐点收敛
  - 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$定义在区间$I$上，若$\exists x_0 \in I, \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0)$存在，则$x_0$为该函数项级数的一个收敛点
  - 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点全体构成的集合称为该级数的收敛域
  - 设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域$D$，$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in D$，称$S(x)$为该级数的和函数
- 常见函数项级数的收敛域、和函数
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$的收敛域为$(-1, 1)$，和函数为$S(x) = \frac{x}{1-x}$
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$的收敛域为$(0, +\infty)$，和函数为$S(x) = \frac{1}{e^x-1}$
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$的收敛域为$(1, +\infty)$
  - $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^x}$的收敛域为$(1, +\infty)$
- 一致收敛
  - 定义：设$\{S_n(x)\}$是区间I上的函数序列，$S(x)$是区间I上的一个函数，若$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$，则称$\{S_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛于$S(x)$，记为$S_n(x) \overset{\text{uni}}{\to} S(x) \quad (n \to \infty)$
    - ps：关键是N只和ϵ有关，x是多少都无所谓

- 充要条件：
  - 令$\beta_n = \sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛的充要条件是$\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$
  - 柯西收敛原理：函数序列$\{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛的充要条件是$\forall x\in I, \forall\epsilon>0, \exists N(\epsilon)\in\mathbb{N}^*, \forall n,m>N, |S_m(x)-S_n(x)|<\epsilon$
- 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和序列$\{S_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛，则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛
  - 柯西收敛原理推论：若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛，则函数序列$\{u_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛到函数$u(x)\equiv 0$

- 函数列的有界性：设$\{u_n(x\}$是区间I上的一个函数序列
  - 若$\forall x\in I, \exists M(x)>0, \forall n\in\mathbb{N}^*, |u_n(x)|\le M(x)$，则称$\{u_n(x\}$在区间$I$上**逐点有界**
  - 若$\forall x\in I, \exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}^*, |u_n(x)|\le M$，则称$\{u_n(x\}$在区间$I$上**一致有界**
    - ps：控制变量x不变，若每个点的$\{u_n(x)\}$序列都有界，则逐点有界；若所有点存在共同的M，则一致有界

函数项级数一致收敛的判别法

- 魏尔斯特拉斯判别法（Weierstrass判别法）（M-判别法）
  - 若存在一**收敛**的**正项级数**$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使得$\forall x\in I, \forall n\in\mathbb{N}^*, |u_n(x)|\le a_n$，则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛
  - 其中正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$一般被称为该函数项级数的优级数、强级数或控制级数
- 狄利克雷判别法
  - 设区间I上定义的函数$u_n(x), v_n(x)(n=1,2,\cdots), S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$，满足
    - $\forall x\in I, \{v_n(x)\}$单调，且$\{v_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛于0
    - $S_n(x)$在区间I上一致有界
  - 则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在区间$I$上一致收敛
- 阿贝尔判别法
  - 设区间I上定义的函数$u_n(x), v_n(x)(n=1,2,\cdots)$，满足
    - $\forall x\in I, \{v_n(x)\}$单调，且$\{v_n(x)\}$在区间$I$上一致有界
    - 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛
  - 则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在区间$I$上一致收敛

函数项级数的和函数的分析性质

和函数的连续性

- 设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的部分和序列$\{S_n(x)\}$的每一项$S_n(x)$在区间$I$上均连续，且该函数列在区间$I$上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$也在区间$I$上连续
- 迪尼定理：设$S_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间$[a,b]$连续，且函数列$\{S_n(x)\}$逐点收敛到一个连续函数$S(x)$。若$\forall x \in [a,b], \{S_n(x)\}$单调，则函数列$\{S_n(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛到$S(x)$

和函数的可积性

- 设$S_n(x), n=1,2,\cdots$在区间$[a,b]$连续，且函数列$\{S_n(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛到$S(x)$，则$S(x)$亦在区间$[a,b]$上可积，且有：
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x$
  - ps：上述两式等价；因为闭区间内连续必可积，所以$S_n(x), n=1,2,\cdots$在区间$[a,b]$可积

和函数的可微性

- 设$S_n(x), n=1,2,\cdots$均为区间$[a,b]$上的可导函数
  - 若满足：
    - $S_n'(x)$在$[a,b]$上连续
    - 函数列$\{S_n'(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛到一函数$g(x)$
    - $\exists x_0 \in [a,b]$，使得$\{S_n(x_0)\}$收敛
  - 则$\{S_n(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛到一可导函数$S(x)$，且有$S'(x)=g(x)$（也可以写为$(\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x)$）
- 函数项级数的逐项可导定理
  - 若区间$[a,b]$上的函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足：
    - $u_n'(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续
    - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛
    - $\exists x_0 \in [a,b]$，使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛
  - 则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛到一可导函数，且有$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$。满足该等式的函数项级数称作可逐项求导
  - ps：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛无法保证其逐项求导（e.g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$）