Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmische Graphentheorie

Sommersemester 2021

1. Vorlesung

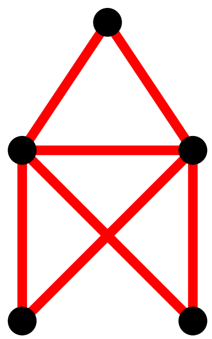
Rundreiseprobleme: Teil I – Eulerkreise

Lehrstuhl für Informatik I

Alexander Wolff

Übersicht

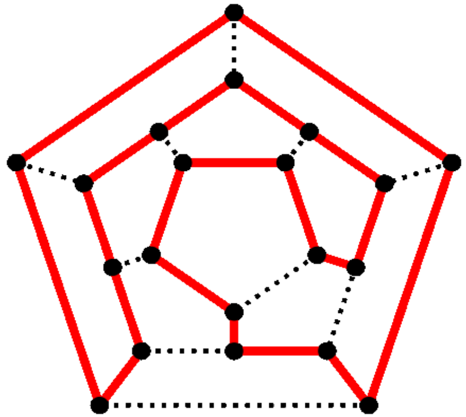
I) Eulerkreise



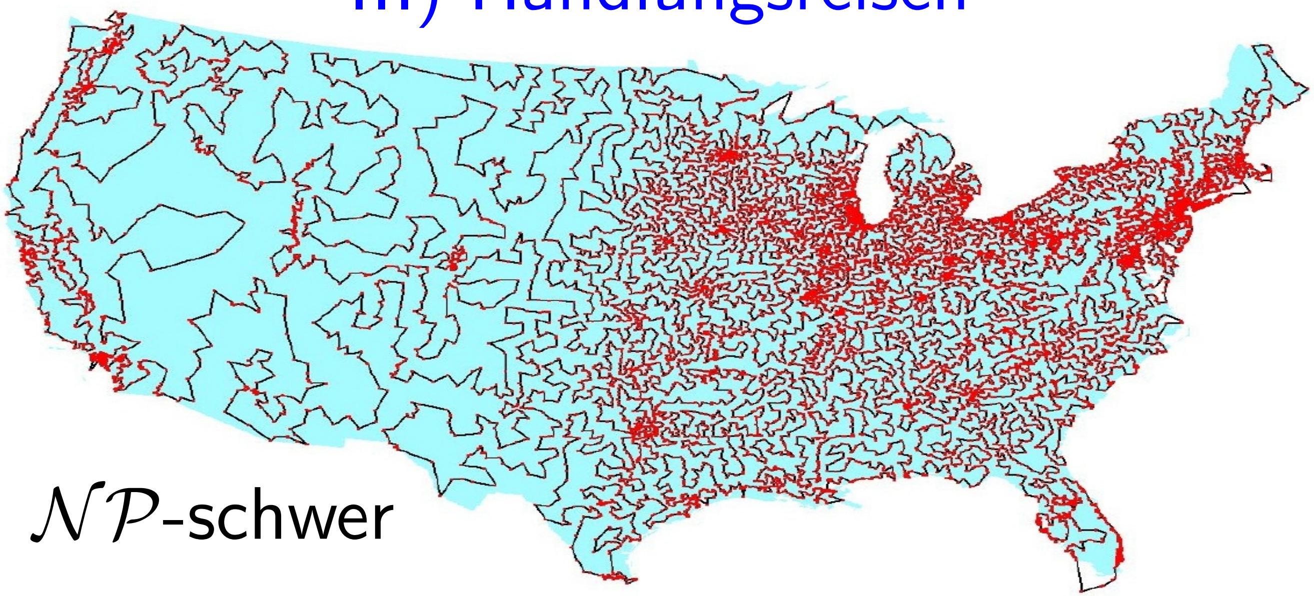
$\mathcal{P}$

II) Hamiltonkreise

$\mathcal{NP}$-schwer



III) Handlungsreisen



$\mathcal{NP}$-schwer

I) Eulerkreise

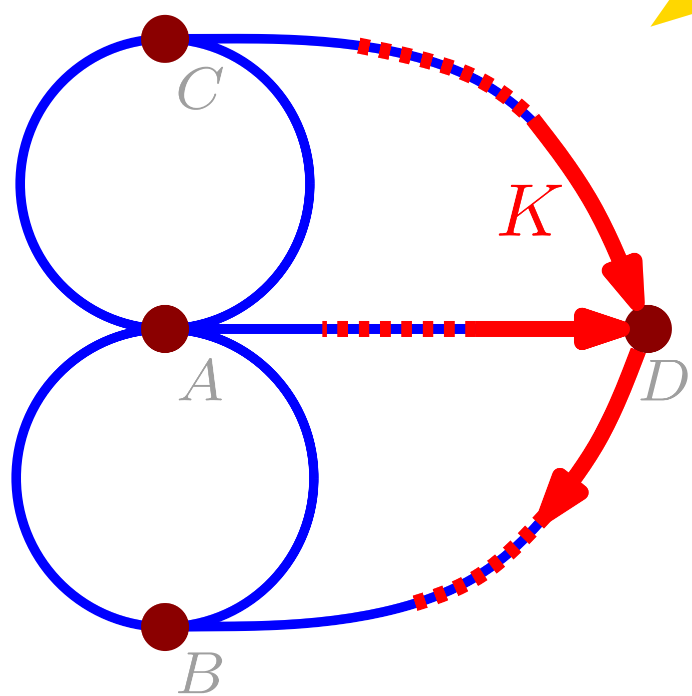
Def. Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
Ein *Eulerkreis* (*-weg*) in G ist ein Kreis (Weg), der jede Kante genau einmal durchläuft.

Ein Graph heißt *eulersch*, falls er einen Eulerkreis enthält.

Geburtsstunde der Graphentheorie!

Königsberger Brückenproblem [Euler, 1741]

Basel 1707 – St. Petersburg 1783



Angenommen ja.

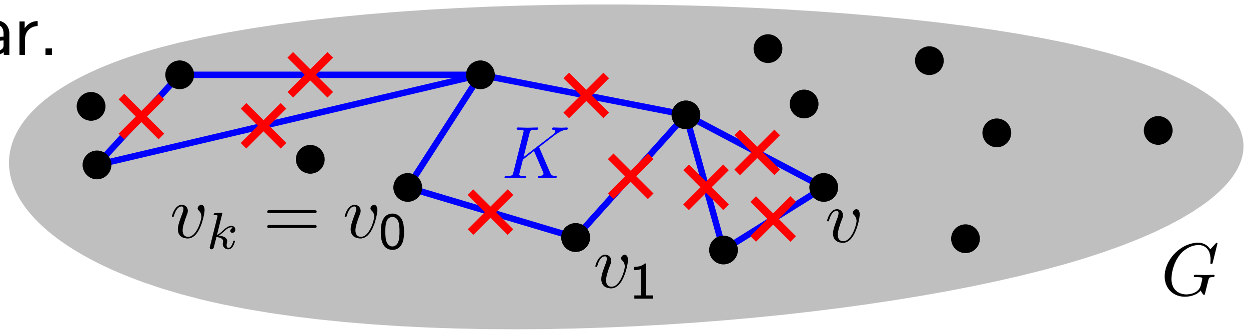
$\Rightarrow$ Es gibt einen Eulerkreis K.

Aber $\deg(D) = 3$, also ungerade.

Satz von Euler für ungerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ungerichteter und zshg. Graph. Dann gilt:
G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad.

Beweis. „$\Rightarrow$" klar.



„$\Leftarrow$" Sei $v_0 \in V$. Wähle einen Nachbarn $v_1 \in \mathrm{Adj}[v_0]$.

Markiere die Kante v_0v_1 als gebraucht.

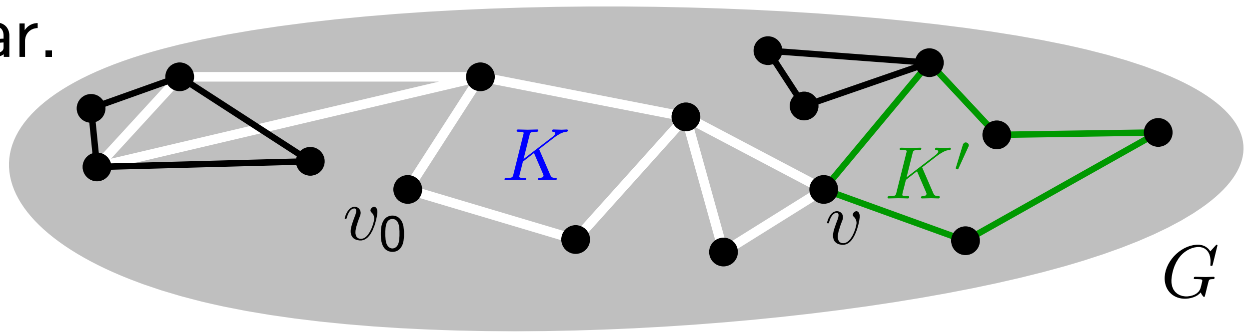
Wiederhole diesen Schritt, bis aktueller Knoten v_k nur noch zu gebrauchten Kanten inzident ist.

Alle Knotengrade gerade $\Rightarrow$ $v_k = v_0$, d.h.
$K := \langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ ist Kreis.
$\Rightarrow$ in $(V, E(K))$ haben alle Knoten geraden Grad.

Satz von Euler für ungerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ungerichteter und zshg. Graph. Dann gilt:
G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad.

Beweis. „$\Rightarrow$“ klar.



„$\Leftarrow$“ Im Restgraphen $(V, E \setminus E(K))$ haben alle Knoten geraden Grad – aber er muss nicht zshg. sein!

Durchlaufe K noch einmal.

Wenn ein Knoten $v \in K$ noch eine unbenutzte Kante besitzt, finde einen neuen Kreis K' von v zu v und füge ihn in K ein.

Durchlaufe weiter den neuen Kreis K (bis v_0). $\square$

Beweis konstruktiv. Laufzeit der Konstruktion?

Eulerkreis, ganz schnell

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zshg. Graph.

(i) Man kann in $O(E)$ Zeit testen, ob G eulersch ist.

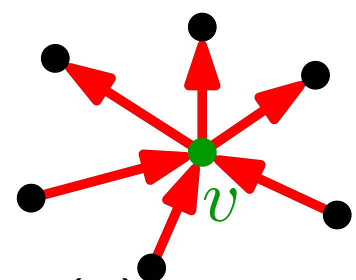
(ii) Falls G eulersch ist,
so kann man in $O(E)$ Zeit einen Eulerkreis finden.

Beweis. (ii) Implementiere den Beweis des Satzes von Euler.

Trick: Verwalte in jedem Knoten v einen Zeiger curr$[v]$, der auf den ersten Nachbarn w zeigt mit vw unbenutzt; falls alle zu v inzidenten Kanten benutzt sind, sei curr$[v] = nil$.

Beispiel:

Anzahl der Änderungen von curr$[v] = \deg(v)$



curr$[v]$
$= nil$

Gesamtanzahl der Zeigeränderungen
$= \sum_{v \in V} \deg(v)$
$= 2|E|$ $\square$

Eulerkreis, ganz schnell (Forts.)

Die Verwendung der curr-Zeiger stellt sicher, dass wir in jedem Knoten in *amortisiert konstanter* Zeit den "Ausgang" finden.

Das bedeutet, dass unser Aufwand für den ersten Kreis K proportional zur Länge $|K|$ von K ist.

Aber falls $K \neq E$, wie finden wir schnell einen Knoten in K, der inzident zu nicht markierten Kanten ist?

Dazu verwalten wir in jedem Knoten v ein *Flag* v.*erledigt*, das auf *wahr* gesetzt wird, wenn die letzte zu v inzidente Kante markiert wird.

Wenn also $K \neq E$, dann gehen wir mit einem neuen Zeiger z (beginnend mit v_0) durch K, bis wir den ersten noch nicht erledigten Knoten finden.

Eulerkreis, ganz schnell (Forts.)

Dort finden wir den nächsten Kreis K', fügen ihn in K ein und bewegen dann unseren Zeiger bis zum nächsten noch nicht erledigten Knoten weiter – bis $K = E$.

Im Laufe der Zeit geht der Zeiger z durch K, bis er wieder beim Startknoten v_0 ist, also genau $1\times$ über jede Kante.

Aufwand für das Vorrücken des Zeigers z:	$O(E)$
Aufwand für die Aufrechterhaltung der erledigt-Flags:	$O(V)$
Extraaufwand (außer der Konstruktion von K):	$O(E)$

Bem. In zusammenhängenden Graphen gilt $|E| \geq |V| - 1$, also $O(V) \subseteq O(E)$. $\square$

Satz von Euler für gerichtete Graphen

Satz. Sei G ein ~~un~~gerichteter $\overbrace{\text{und zshg.}}^{\text{schwach}}{}^{\star}$ Graph. Dann:

G eulersch $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{für jeden Knoten } v \text{ gilt:}\\ \text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v).\end{array}}$

Satz. Sei $G = (V, E)$ ein ~~un~~gerichteter $\overbrace{\text{und zshg.}}^{\text{schwach}}$ Graph.

(i) Man kann in $O(E)$ Zeit testen, ob G eulersch ist.

(ii) Falls G eulersch ist,
so kann man in $O(E)$ Zeit einen Eulerkreis finden.

Beweis. Im Prinzip wie im ungerichteten Fall.

Man muss einen curr-Zeiger allerdings nur dann weiterrücken, bevor man die aktuelle Kante benutzt.

Kosten fürs Zeigerbewegen: $\sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) = |E|$.

$\square$