# Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

20. Juli 2021

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Wichtige Begriffe

**Definition 1**

Ein gerichteter Graph $G$ ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph $G$ ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar $(u, v)$ einen gerichteten Weg von $u$ nach $v$ gibt

**Definition 2: bipartiter Graph**

Ein Graph G wird as bipartit bezeichnet, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen. Zwischen Den Knoten innerhalb dieser Teilmengen dürfen also keine Kanten existieren.

**Definition 3**

Vollständig: $K_n$, n Knoten, alle miteinander verbunden

# 2 Eulerkreise

**Definition 4: Eulerkreis**

Sei $G$ ein (un-)gerichteter Grpah.
Ein Eulerkreis (-weg) in $G$ ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

**Eigenschaft 1: Satz von Euler**

Sei $G$ ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: $G$ eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

### 2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen on G eulersch ist (Knotengrade zählen)
Eulerkreis finden:
Verwalte in jedem Knoten $v$ eien zeiger curr[$v$], der auf den ersten unbenutzten Nachbarn $w$ zeigt

## 3 Hamiltonkreise

**Definition 5: Hamiltonkreis NP-schwer**

Sei $G$ ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in $G$ ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

**Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
Seien $u$ und $v$ nicht-adjazente Knoen von G mit deg($u$) + deg($v$) $\geq n :=$ |V|. Dann gilt:
G hamiltons ⇔ G + $uv$ hamitlonsch

**Eigenschaft 3: Satz von Dirac**

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph mit |V| ≥ 3. Falls jeder Knoten von G Grad ≥ |V| / 2 hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

## 4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp

## 5 Lineare Programmierung

**Definition 6: Knotenüberdeckung**

**Gegeben:** Graph $G = (V, E)$
**Gesucht:** Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante minde-

stens einen Endpunkt in $V'$ hat.
**Ziel:** $|V'|$ minimal

**Definition 7: Clique**

**Gegeben:** ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$
**Gesucht:** Clique in $G$
d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von $V'$ induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist (also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)
Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

**Definition 8: Fluss**

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine funktion $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V | uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum knoten V = Abfluss vom Knoten v, also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

**Definition 9**

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.
Seien durch $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t.

# 6 Flussalgorithmen

**Definition 10: Kapazität eines Schnittes**

G Graph mit Kap. c: $E \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist c(S) := c(Raus(S)) die Kapazität von (S, T)

## 6.1 Flussvergrößernde Wege

1. Residualgraph G' bilden:
    - Hinrichtung: Benutzte Kapazität in G
    - Rückrichtung: Übrige Kapazität der Kante

**Definition 11**

Eins s-t-Weg W in $G_f$ heißt flussvergrößernder Weg für f.
Die Residualkapatziät von W ist

$$\triangle_W := min_{e \in W} c_f(e)$$

Ein zulässiger s-t-Fluss in G ist maximal ⇔ es gibt keinen Flussvergrößenderen Weg in $G_f$

**Definition 12: Max-Flow-Min-Cut-Theorem**

Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Dann sind folgende Bedingugnen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. $G_f$ enthält keine augmentierenden Wege, also Wege über die die Kapazität erhöht werden könnte
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$

Kurz

$$max_{\text{f zulässiger s-t-Fluss}} |f| = min_{\text{(S, T) s-t-Schnitt}} c(S)$$

## 6.2 Algorithmen

**Definition 13: FordFulkerson / EdmonsKarp**

Suche s-t-weg in $G_f$ und füge das dann den Kanten hinzu.
Änderung von EdmonsKarp: Muss der Kürzeste s-t-Weg sein

EdmonsKarp führt O(VE) Flussvergrößerungen durch
EdmonsKarp läuft in $O(VE^2)$

# 7 Matchings

**Definition 14: Matchings**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph
$M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. matching), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben
Falls für jede Kante $e \in M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. maximal)
Falls für alle Parrungen $M'$ in $G$ gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist $M$ eine **größte Paarung** (engl. maximum)
Falls jeder Knoten in $G$ durch $M$ gepaart ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. perfect matching)

**Definition 15: Ganzzahligkeitssatz**

Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c : E \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

**Eigenschaft 4: Satz von Menger**

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Dann ist die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes

**Kardinalität eines s-t-Schnittes**: Anzahl an Kanten die von S nach T Laufen.
$\Rightarrow$ minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts = maximale Anzahl an kantendisjunkter s-t-Wege (die Kapazität aller möglichen s-t-Schnitte ist genau so groß wie die Anzahl an möglichen s-t-Wegen)

**Eigenschaft 5: Auch von Menger**

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V, st \notin E$. Dann ist die maximale Anzahl **knotendisjunkter** s-t-Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt.

**Definition 16: Nachbarschaft**

Nachbarschaft von $v \in V$ ist

$$N(v) := \{u \in V | uv \in E\}$$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

**Definition 17: Heiratssatz (bewiesen von Philip Hall)**

Es existiert ein perfektes Matching $\Leftrightarrow$ Für jedes $D' \subseteq D$ gilt: $|D'| \leq |N(D')|$

**Eigenschaft 6**

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph
Dann lässt sich eine größte Parrung in G in $O(VE^2)$ Zeit bestimmen

In $G'$ können wir $|V|$ s-t-wege in je $O(E)$ zeit berechnen

# 8 Alternierende und augmentierende Wege

**Definition 18: Augmentierender Weg**

Ein Weg ist **augmentierend**, wenn die Kanten immer Abwechselnd im Matching und nicht im Matching liegen. Starten und Enden mit einer Kante die nicht im Matching liegt.

**Alternierend:** Wechselt zwischen im Matching und nicht im Matching

**Definition 19: Satz von Berge**

Sei $G = (V, E)$ Grpah, $M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G $\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

**Eigenschaft 7**

In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ ein größtes

Matching bestimmen

**Ansatz:** Knoten S erstelen mit Kante zu allen Knoten im einen Teil, dann BFS $|V|/2$ mal ausführen (oder bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird).

**Definition 20: Christofides Alfogrithmus**

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B
- Ermittle kostenminimales perfektes Matching M für G[U]
  - G[u] ist der von U induzierte Graph
  - $(U, \{vw \in E(g) : v \in U, w \in U\})$
- Berechne im eulerschen Grpahen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour $T$ wie beim Tree-Doubling

⇒ liefert eine 3/2-Approximation für $\Delta$-TSP

**Definition 21: Kostenminimales perfektes Matching**

Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$, mit Kantenkosten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Gesucht: Perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$
⇒ kann in O($V^3$) berechnet werden (ist aber ziemlich kompliziert :(

# 9 Wurzelspannbäume

**Definition 22: Wurzelbaum**

Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch
- indeg(s) = 0
- indeg(v) = 1 für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$

**Definition 23: Wurzelspannbaum**

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt s-**Wurzelspannbaum** von

G, wenn T ein s-Wurzelbaum ist.

**Eigenschaft 8**

Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum $\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.
DFS(s) liefert s-Wurzelspannbaum (falls es einen gibt)

**Eigenschaft 9**

Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzellspannbaum von G/K.
Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T})$$

G/K: K sie Teilmenge von G. Alle Knoten in K werden durch einen einzigen Ersetzt.

Algorithmus zur berechnung von s-Wurzelspannbäumen:

- Berechne modifizierte Kantenkosten $c'$
- Bestimme Teilgraph F
- Falls F azyklisch, gib F zurück
- Ansonsten ermittle Kreis K in F
- Kontrahiere G zu G / K
- Wende Algo rekursiv auf (G/K, c') and
  - s-Wurzelspannbaum für $\tilde{T}$ für G/K
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G
- Gibt T zurück

# 10 MinCut - Kleinste Schnitte

**Definition 24**

Gegeben sei ein ungerichteter Multigraph $G = (V, E)$.

Gesucht ist eine Zerlegung $(S, T)$ von $V$ mit $S, T \neq \emptyset$, so dass die Anzahl der Kanten $uv \in E$ mit $u \in S$ und $v \in T$ möglichst klein ist

**Beachte**: Im Gegensatz zu $s - t$-Schnitten ist hier kein trennednes Knotenpaar $(s, t)$ vorgegeben

### Contract

Sei $(S, T)$ ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit das CONTRACT diesen Schnitt findet ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$
FastCut: Für kleine n BruteForce

## 11 Färbungen und chromatische Zahl

**Definition 25: k-Färbung**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph
Eine k-Färbung ist eine Abbildung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$, so dass für alle $uv \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$
$\chi(G) = \min\{k | G$ hat eine k-Färbung $\}$ heißt chromatische Zahl von G

**Definition 26: Clique**

Eine Clique ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \in V$ gilt, dass $uv \in E$
$\omega(G) = \max\{|C| : C$ ist Clique in G $\}$ heißt Cliqzenzahl von G

$\Rightarrow$ Vollständiger Teilgraph
Es gitlt: $\chi(G) \geq \omega(G)$

**Definition 27**

Eine unabhängige (oder stabile) ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare$\{u, v\} \in V$ gilt, dass $uv \notin E$
$\alpha(G) = \max\{|C| : C$ ist unabhänige Menge in G $\}$ heißt Unabhänigkeitszahl (o. Stabilitätszahl) von G

Es gilt:
$\chi(G) \geq \max\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)}\}$
$\chi(G) \leq \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} \rfloor$

**Definition 28: Komplementgraph**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Dann ist $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} := \binom{V}{2} \setminus E$ der Komplementgraph von G

**Definition 29**

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt perfekt, wenn für jeden induzierten Teilgraphen von H Gilt: $\omega(H) = \chi(G)$

**Eigenschaft 10**

$G$ ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist

Loch: Kreis mit ungerader Knotenanzahl
Antiloch: Komplement zum Loch.
$G$ perfekt $\Leftrightarrow$ kein induzierter Teilgraph von g ist ungerades Loch oder ungerades Antiloch (für $k \geq 2$)

**Definition 30: Chordal**

Ein Grpah $G = (V, E)$ heißt chordal, wenn jeder elementare Kreis der Länge $\geq 4$ mindestens eine Sehne besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet

**Definition 31: simpliziale Knoten**

Ein Knoten $v$ heißt simplizial, falls $N(v)$ Clicque in G
Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten

**Definition 32: Perfektes Eliminationsschema**

Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge $V$ heißt perfektes Eliminationsschema, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: $v_i$ ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$

**Eigenschaft 11**

G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

**Eigenschaft 12**

Sei $v_1, \dots, v_n$ ein perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht erweiterbare Clique $C$ in $G$ die Form $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$

**Eigenschaft 13**

Jeder chordale Grpah ist perfekt.

# 12 Festparameter-Berechenbarkeit

**Definition 33: Knotenüberdeckung / Vertex cover**

Sei $G = (V, E)$ ein ungereichter Graph. $C \subset V$ heißt Knotenüberdeckung (vertex cover) von G, falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$

**Definition 34: Festparameterberechenbare Probleme**

Ein Problem das in $O(f(k) + |I|^C) =: O^*(f(k))$ gelöst werden kann, heißt festparameterberechenbar.
Die Laufzeit soll also abhängen:

- beliebig vom Paremeter k (Schwierigkeit der Instanz I)
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz $I$

**FPT** = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme
Bemerkung: Die Klasse FPT ändert sich nicht, wenn statt + ein $\cdot$ benutzt wird.

**Eigenschaft 14**

Falls $|E| > k^2$ und $\delta(G) := max_{v \in V} degv \leq k$, so hat G kein k-VC

**Fazit**

- $k - VC$ kann in $O(nk + 1.38^k k^2)$ Zeit gelöst werden

## 13 Planare Graphen

**Definition 35: offene Jordankurve**

Eine offene Jordankurve ist eine homöomorphe Einbettung des Intervalls [0, 1] in einen topologischen Raum, also ohne Kreuzungen und Sprünge

**Definition 36: Zeichnung von Graphen**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, eine Abbildung $\zeta$ heißt Zeichung von G, falls

- für alle $w \in V$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ und Einschränkung von $\zeta$ auf V injektiv
- für alle $uv \in E$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ wobei $\zeta_{uv}$ Jordankufve mit $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$ und $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$

Knoten → Punkte in der Ebene
Kanten → J-Kurve

**Definition 37: Planar**

Ein Graph G ist planar (plättbar), falls er eine ebene zeichung hat (d.h. falls sich die Zeichungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden)
Eine Zeichung $\zeta$ von G heißt **geradlinig**, falls für alle $e \in E$ gilt $\zeta_e$ ist linear (also eine Linie)

**Definition 38: Punkte und Facetten**

Für einen planaren Graphen $G = (V, E)$ und eine ebene zeichung $\zeta$ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der Punkte von $\zeta$
Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \backslash G_\zeta$ heißen Facetten von $\zeta$
⇒ also die Menge aller Knoten und Linien zwischen Knoten

**Eigenschaft 15**

G planar, $\pi$ ebene Zeichnung von G, F Innenfacette von $\pi$. Dann gibt es auch eine Zeichung $\pi_F$ von von G, in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet

**Eigenschaft 16**

Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar

**Definition 39: Eulerscher Polyedersatz**

Sei $\pi$ eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit $n$ Knoten, $m$ Kanten, $f$ Facetten und $k$ Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

**Eigenschaft 17**

Für jeden einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ mit mindestens 3 Knoten gilt $m \leq 3n - 6$ und $f \leq 2n - 4$

**Eigenschaft 18**

Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6

**Eigenschaft 19**

Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mindestens 3) Knoten vom Grad höchstens 5

**Definition 40: Kontraktionen und Minoren**

Sei G ein einfacher Graph und sei $uv$ Kante von G
Der Graph $G\backslash uv$ entsteht aus G durch (Einfach-) Kontraktion von $uv$ (wobei hier anders als bei Kontraktion bei Multigraphen Mehrfachkanten

verschmolzen werden)
Ein Graph H heißt Minor von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.

**Eigenschaft 20**

G Planar $\Leftrightarrow$ alle Minoren von G sind planar
Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind Planar.

**Definition 41: Satz von Kuratowski**

Sei G ein einfacher Graph. Dann gilt:

G planar $\Leftrightarrow$ Weder $K_5$ noch $K_{3,3}$ ist Minor von G

Wobei $K_5$ vollständiger Kreis mit 5 Knoten und $K_{3,3}$ bipartit mit Seiten verbunden.

**Definition 42: Minoren**

Eine Klasse $\mathcal{G}$ von Grpahen heißt minorenabgeschlossen, wenn für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $H \leq G$ gilt $H \in \mathcal{G}$
Ein Grpah $G$ einer Grpahenklasse $\mathcal{G}$ heißt minorenminimal, wenn für jeden Minor $h$ von $G$ mit $H \in \mathcal{G}$ gitl $H = G$
$\bar{\mathcal{G}}_{\text{plan}}$ = Klasse der einfachen nicht-planaren Graphen

**Definition 43: Obstruktionsmenge**

Es gilt $\{K_5, K_{3,3}\}$ ist Obstruktionsmenge für $\mathcal{G}_{\text{plan}}$

**Eigenschaft 21**

- Jede minorenabgeschlossene Graphklasse besitzt eine endliche Obstruktionsmenge
- Für jeden festen Grpahen H existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen G gilt, dass $H \leq G$
- Wir können effizient testen, ob ein gegebener Graph G planar ist

- Jeder planare Graph lässt sich geradlinig zeichnen
- Jeder planage Graph lässt sich als Berührgraph von Kreisscheiben (con graph) repräsentieren
- Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n-2) \times (n-2)$ Gitters abgebildet werden
- Sei G ein 3-fach zsh. planarer Graph mit $f$ Facetten
  Dann lässt sich $G$ auf einem $(f-1) \times (f-1)$ Gitter geradlinig und konvex zeichnen.
- Jede streng konvexe Zeichnung des $C_n$ benötigt $\Omega(n^3)$ Platz
- Jeder 3-fach zsh. planare Graph hat eine streng konvexe Zeichung auf dem $O(n^2) \times O(n^2)$ Gitter

Zeichnungen hierzu Skript VL 11 ab Seite 15.

**Eigenschaft 22: Planar Seperator Theorem**

Sei $G$ ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.
Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge
$V = L \dot\cup S \dot\cup R$ von $G$, so dass

- Keine Kante zwischen $L$ und $R$ verläuft
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$

Eine solche Zerlegung kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.

**Eigenschaft 23**

Sie $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, sei $v \in V$ und sei $M$ größtes Matching in $G - v$

- Falls $G$ keinen augmentierenden Weg mit Endknoten $v$ enthält, so ist $M$ größtes Matching in $G$
- Ansonsten sei $W$ ein augemtierender Weg. Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G

Mit einer passenden Repräsentation eines Matchings in $G - v$ kann man in $O(E)$ Zeit ein größtes Matching in $G$ finden.

# 14 Färbbarkeit Planare Graphen

**Eigenschaft 24**

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

**Definition 44: Listenfärbung**

Gegenen ein Graph $G$ und für jeden Knoten $v$ von $G$ eine Liste $L_v$ von Farben, so ist eine Listenfärbung von $G$ eine Abbildung

$$\lambda : V \to \bigcup_v L_v \text{ mit } \begin{cases} \lambda(v) \in L_v \\ \lambda(u) \neq \lambda(v) \forall uv \in E(G) \end{cases}$$

**Definition 45: Listenfärbbarkeit**

Ein Graph $G = (V, E)$ ist k-listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat

**Eigenschaft 25**

G k-listenfärbbar $\Rightarrow$ k-färbbar
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar
Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar

**Eigenschaft 26**

Sei $G$ ein einfacher Graph mit $n$ Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, obb G planar ist.
Wir behandeln in der Vorlesung jedoch einen Algorithmus in $O(n^3)$, der sowohl leichter als auch in der Praxis schneller ist

**Eigenschaft 27**

G planar $\Leftrightarrow$ jede Zusammenhangskomponente von G is planar
G planar $\Leftrightarrow$ jede Zweifachzusammenhangskomponente (ZZK) von G is planar.

**Definition 46: Teilstück**

Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten. $e$ und $e'$ heißen äquivalent (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt. Die resultierenden Äquivalenzkalssen heißen Teilstücke (bezüglich C).
Jedes Teilstück hat $\geq 2$ Anknüpfpunkte

**Definition 47: Separierender Kreis**

Ein Kreis heißt separierend, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert

**Eigenschaft 28**

Sei C ein nicht-separierender Kreis mit Teilstück P. Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis in $C'$, der aus einem Teilpfan von V und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfpungspunkten von P besteht.

**Definition 48: Einander störende Teilstücke**

G planar $\Rightarrow$ jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder Äuperen von C eingebettet.

Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden $\Leftrightarrow$ es existiert ein Teilpfad $\gamma$ von C, sodass $\gamma$ alle Anknüpfpunkte von Q enthält, aber kein innerer Knoten von $\gamma$ Anknüpfpunkt von P ist.

Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von C eingebettet werden können, **stören** einander

**Definition 49: Störgraph**

Der Störgraph $I$ (bezüglich C) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.

**Eigenschaft 29**

Sei G ein Graph mit separienedem Kreis C und Störgraphen $I$. Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- für jedes Teilstück P der Graph C + P planar und
- der Störgraph I bipartit ist