

Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

15. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Wichtige Begriffe	2
2	Eulerkreise	2
2.1	Eulerkreis finden	3
3	Hamiltonkreise	3
4	Handlungsreisen (TSP)	3
5	Lineare Programmierung	3
6	Flussalgorithmen	4
6.1	Flussvergrößernde Wege	5
6.2	Algorithmen	5
7	Matchings	6
8	Alternierende und augmentierende Wege	7
9	Wurzelspannbäume	8
10	MinCut - Kleinste Schnitte	9
11	Färbungen und chromatische Zahl	10

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

Definition 2: bipartiter Graph

Ein Graph G wird als bipartit bezeichnet, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen. Zwischen den Knoten innerhalb dieser Teilmengen dürfen also keine Kanten existieren.

Definition 3

Vollständig: K_n , n Knoten, alle miteinander verbunden

2 Eulerkreise

Definition 4: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: G eulersch \Leftrightarrow alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen ob G eulersch ist (Knotengrade zählen)

Eulerkreis finden:

Verwalte in jedem Knoten v einen Zeiger $\text{curr}[v]$, der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 5: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
 Seien u und v nicht-adjazente Knoten von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:
 G hamiltonsch $\Leftrightarrow G + uv$ hamiltonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Falls jeder Knoten von G $\text{Grad} \geq |V| / 2$ hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmen von Bellman & Held-Karp

5 Lineare Programmierung

Definition 6: Knotenüberdeckung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante minde-

stens einen Endpunkt in V' hat.

Ziel: $|V'|$ minimal

Definition 7: Clique

Gegeben: ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Clique in G

d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist (also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)

Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

Definition 8: Fluss

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V \mid uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V \mid vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum Knoten v = Abfluss vom Knoten v , also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

Definition 9

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.

Seien durch $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t .

6 Flussalgorithmen

Definition 10: Kapazität eines Schnittes

G Graph mit Kap. $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.

Dann ist $c(S) := c(\text{Raus}(S))$ die Kapazität von (S, T)

6.1 Flussvergrößernde Wege

1. Residualgraph G_f bilden:

- Hinrichtung: Benutzte Kapazität in G
- Rückrichtung: Übrige Kapazität der Kante

Definition 11

Eins s - t -Weg W in G_f heißt flussvergrößernder Weg für f .
Die Residualkapazität von W ist

$$\Delta_W := \min_{e \in W} c_f(e)$$

Ein zulässiger s - t -Fluss in G ist maximal \Leftrightarrow es gibt keinen Flussvergrößernden Weg in G_f

Definition 12: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Sei f ein zulässiger s - t -Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege
3. Es gibt einen s - t -Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$

Kurz

$$\max_{f \text{ zulässiger } s\text{-}t\text{-Fluss}} |f| = \min_{(S, T) \text{ s-t-Schnitt}} c(S)$$

6.2 Algorithmen

Definition 13: FordFulkerson / EdmondsKarp

Suche s - t -weg in G_f und füge das dann den Kanten hinzu.
Änderung von EdmondsKarp: Muss der Kürzeste s - t -Weg sein

EdmondsKarp führt $O(VE)$ Flussvergrößerungen durch
EdmondsKarp läuft in $O(VE^2)$

7 Matchings

Definition 14: Matchings

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph
 $M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. matching), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben
 Falls für jede Kante $e \in E$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. maximal)
 Falls für alle Paarungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine **größte Paarung** (engl. maximum)
 Falls jeder Knoten in G durch M gepaart ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. perfect matching)

Definition 15: Ganzzahligkeitssatz

Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c : E \rightarrow \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Eigenschaft 4: Satz von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Dann ist die maximale Anzahl kantendisjunkter s - t -Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s - t -Schnittes

Kardinalität eines s - t -Schnittes: Anzahl an Kanten die von s nach t laufen.

\Rightarrow minimale Kardinalität eines s - t -Schnitts = maximale Anzahl an kantendisjunkter s - t -Wege (die Kapazität aller möglichen s - t -Schnitte ist genau so groß wie die Anzahl an möglichen s - t -Wegen)

Eigenschaft 5: Auch von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V, st \notin E$. Dann ist die maximale Anzahl **knotendisjunkter** s - t -Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt.

Definition 16: Nachbarschaft

Nachbarschaft von $v \in V$ ist

$$N(v) := \{u \in V \mid uv \in E\}$$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

Definition 17: Heiratssatz (bewiesen von Philip Hall)

Es existiert ein perfektes Matching \Leftrightarrow Für jedes $D' \subseteq D$ gilt: $|D'| \leq |N(D')|$

Eigenschaft 6

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph
Dann lässt sich eine größte Parrung in G in $O(VE^2)$ Zeit bestimmen

In G' können wir $|V|$ s-t-wege in je $O(E)$ zeit berechnen

8 Alternierende und augmentierende Wege

Definition 18: Augmentierender Weg

Ein Weg ist **augmentierend**, wenn die Kanten immer Abwechselnd im Matching und nicht im Matching liegen. Starten und Enden mit einer Kante die nicht im Matching liegt.

Alternierend: Wechselt zwischen im Matching und nicht im Matching

Definition 19: Satz von Berge

Sei $G = (V, E)$ Graph, $M \subseteq E$ Matching in G .
 M ist ein größtes Matching in $G \Leftrightarrow$ es gibt keinen M -augmentierenden Weg.

Eigenschaft 7

In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ ein größtes

Matching bestimmen

Ansatz: Knoten s erstellen mit Kante zu allen Knoten im einen Teil, dann BFS $|V|/2$ mal ausführen (oder bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird).

Definition 20: Christofides Algorithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G
 - Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B
 - Ermittle kostenminimales perfektes Matching M für $G[U]$
 - $G[U]$ ist der von U induzierte Graph
 - $(U, \{vw \in E(G) : v \in U, w \in U\})$
 - Berechne im eulerschen Graphen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie beim Tree-Doubling
- ⇒ liefert eine $3/2$ -Approximation für Δ -TSP

Definition 21: Kostenminimales perfektes Matching

Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$, mit Kantenkosten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
 Gesucht: Perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$
 ⇒ kann in $O(V^3)$ berechnet werden (ist aber ziemlich kompliziert :)

9 Wurzelspannbäume

Definition 22: Wurzelbaum

Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt **s-Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch
- $\text{indeg}(s) = 0$
- $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$

Definition 23: Wurzelspannbaum

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt **s-Wurzelspannbaum** von

G , wenn T ein s -Wurzelbaum ist.

Eigenschaft 8

Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s
 G besitzt einen s -Wurzelspannbaum \Leftrightarrow jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.
 DFS(s) liefert s -Wurzelspannbaum (falls es einen gibt)

Eigenschaft 9

Sei K Kreis in F und \tilde{T} s -Wurzelspannbaum von G/K .
 Dann gibt es einen s -Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T})$$

G/K : K ist Teilmenge von G . Alle Knoten in K werden durch einen einzigen Ersetzt.

Algorithmus zur berechnung von s -Wurzelspannbäumen:

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'
- Bestimme Teilgraph F
- Falls F azyklisch, gib F zurück
- Ansonsten ermittle Kreis K in F
- Kontrahiere G zu G / K
- Wende Algo rekursiv auf $(G/K, c')$ and
 - s -Wurzelspannbaum für \tilde{T} für G/K
- Expandiere \tilde{T} zu s -Wurzelspannbaum T von G
- Gibt T zurück

10 MinCut - Kleinste Schnitte

Definition 24

Gegeben sei ein ungerichteter Multigraph $G = (V, E)$.

Gesucht ist eine Zerlegung (S, T) von V mit $S, T \neq \emptyset$, so dass die Anzahl der Kanten $uv \in E$ mit $u \in S$ und $v \in T$ möglichst klein ist

Beachte: Im Gegensatz zu $s - t$ -Schnitten ist hier kein trennednes Knotenpaar (s, t) vorgegeben

Contract

Sei (S, T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit das CONTRACT diesen Schnitt findet ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$
 FastCut: Für kleine n BruteForce

11 Färbungen und chromatische Zahl

Definition 25: k-Färbung

Sei $G = (V, E)$ ein Graph
 Eine k -Färbung ist eine Abbildung $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, so dass für alle $uv \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$
 $\chi(G) = \min\{k | G \text{ hat eine } k\text{-Färbung}\}$ heißt chromatische Zahl von G

Definition 26: Clique

Eine Clique ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \in C$ gilt, dass $uv \in E$
 $\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$ heißt Cliqsenzah von G

\Rightarrow Vollständiger Teilgraph
 Es gilt: $\chi(G) \geq \omega(G)$

Definition 27

Eine unabhängige (oder stabile) Menge ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \in C$ gilt, dass $uv \notin E$
 $\alpha(G) = \max\{|C| : C \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$ heißt Unabhängigkeitszahl (o. Stabilitätszahl) von G

Es gilt:

$$\chi(G) \geq \max\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)}\}$$

$$\chi(G) \leq \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} \rfloor$$

Definition 28: Komplementgraph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Dann ist $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} := \binom{V}{2} \setminus E$ der Komplementgraph von G

Definition 29

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt perfekt, wenn für jeden induzierten Teilgraphen von G gilt: $\omega(H) = \chi(H)$

Eigenschaft 10

G ist genau dann perfekt, wenn \bar{G} perfekt ist

Loch: Kreis mit ungerader Knotenanzahl

Antiloach: Komplement zum Loch.

G perfekt \Leftrightarrow kein induzierter Teilgraph von G ist ungerades Loch oder ungerades

Antiloach (für $k \geq 2$)

Definition 30: Chordal

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt chordal, wenn jeder elementare Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine Sehne besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet

Definition 31: simpliziale Knoten

Ein Knoten v heißt simplizial, falls $N(v)$ Clique in G

Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten

Definition 32: Perfektes Eliminationsschema

Eine Nummerierung (v_1, \dots, v_n) der Knotenmenge V heißt perfektes Eliminationsschema, wenn für $i = 1, \dots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$

Eigenschaft 11

G chordal $\Leftrightarrow G$ hat perfektes Eliminationsschema

Eigenschaft 12

Sei v_1, \dots, v_n ein perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht erweiterbare Clique C in G die Form $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$

Eigenschaft 13

Jeder chordale Graph ist perfekt.