Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

14. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

Definition 2: bipartiter Graph

Ein Graph G wird as bipartit bezeichnet, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen. Zwischen Den Knoten innerhalb dieser Teilmengen dürfen also keine Kanten existieren.

2 Eulerkreise

Definition 3: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Grpah.
Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen on G eulersch ist (Knotengrade zählen)
Eulerkreis finden:
Verwalte in jedem Knoten v eien zeiger curr$[v]$, der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 4: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
Seien u und v nicht-adjazente Knoen von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n :=$ |V|. Dann gilt:
G hamiltons $\Leftrightarrow$ G + uv hamitlonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph mit |V| $\geq$ 3. Falls jeder Knoten von G Grad $\geq$ |V| / 2 hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp

5 Lineare Programmierung

Definition 5: Knotenüberdeckung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mindestens einen Endpunkt in V' hat.
Ziel: $|V'|$ minimal

Definition 6: Clique

Gegeben: ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Clique in G
d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist

(also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)
Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

Definition 7: Fluss

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine funktion $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V | uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum knoten V = Abfluss vom Knoten v, also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

Definition 8

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.
Seien durch $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t.

6 Flussalgorithmen

Definition 9: Kapazität eines Schnittes

G Graph mit Kap. c: $E \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist c(S) := c(Raus(S)) die Kapazität von (S, T)

6.1 Flussvergrößernde Wege

1. Residualgraph G' bilden:
   - Hinrichtung: Benutzte Kapazität in G
   - Rückrichtung: Übrige Kapazität der Kante

Definition 10

Eins s-t-Weg W in G_f heißt flussvergrößernder Weg für f.
Die Residualkapatziät von W ist

$$\triangle_W := min_{e \in W} c_f(e)$$

Ein zulässiger s-t-Fluss in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen Flussvergrößenderen Weg in G_f

Definition 11: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Dann sind folgende Bedingugnen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$

Kurz

$$max_{\text{f zulässiger s-t-Fluss}} |f| = min_{\text{(S, T) s-t-Schnitt}} c(S)$$

6.2 Algorithmen

Definition 12: FordFulkerson / EdmonsKarp

Suche s-t-weg in G_f und füge das dann den Kanten hinzu.
Änderung von EdmonsKarp: Muss der Kürzeste s-t-Weg sein

EdmonsKarp führt O(VE) Flussvergrößerungen durch
EdmonsKarp läuft in O(VE^2)

7 Matchings

Definition 13: Matchings

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph

$M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. matching), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben
Falls für jede Kante $e \in M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. maximal)
Falls für alle Parrungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine **größte Paarung** (engl. maximum)
Falls jeder Knoten in G durch M gepaart ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. perfect matching)

Definition 14: Ganzzahligkeitssatz

Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c : E \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Eigenschaft 4: Satz von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Dann ist die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes

Kardinalität eines s-t-Schnittes: Anzahl an Kanten die von S nach T Laufen.
$\Rightarrow$ minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts = maximale Anzahl an kantendisjunkter s-t-Wege (die Kapazität aller möglichen s-t-Schnitte ist genau so groß wie die Anzahl an möglichen s-t-Wegen)

Eigenschaft 5: Auch von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V, st \notin E$. Dann ist die maximale Anzahl **knotendisjunkter** s-t-Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt.

Definition 15: Nachbarschaft

Nachbarschaft von $v \in V$ ist

$$N(v) := \{u \in V | uv \in E\}$$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

Definition 16: Heiratssatz (bewiesen von Philip Hall)

Es existiert ein perfektes Matching $\Leftrightarrow$ Für jedes $D' \subseteq D$ gilt: $|D'| \leq |N(D')|$

Eigenschaft 6

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph
Dann lässt sich eine größte Parrung in G in $O(VE^2)$ Zeit bestimmen

In G' können wir $|V|$ s-t-wege in je $O(E)$ zeit berechnen

8 Alternierende und augmentierende Wege

Definition 17: Augmentierender Weg

Ein Weg ist **augmentierend**, wenn die Kanten immer Abwechselnd im Matching und nicht im Matching liegen. Starten und Enden mit einer Kante die nicht im Matching liegt.

Alternierend: Wechselt zwischen im Matching und nicht im Matching

Definition 18: Satz von Berge

Sei $G = (V, E)$ Grpah, $M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G $\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Eigenschaft 7

In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ ein größtes Matching bestimmen

Ansatz: Knoten S erstelen mit Kante zu allen Knoten im einen Teil, dann BFS $|V|/2$ mal ausführen (oder bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird).

Definition 19: Christofides Alfogrithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B
- Ermittle kostenminimales perfektes Matching M für G[U]
  - G[u] ist der von U induzierte Graph
  - $(U, \{vw \in E(g) : v \in U, w \in U\})$
- Berechne im eulerschen Grpahen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie beim Tree-Doubling

⇒ liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP

Definition 20: Kostenminimales perfektes Matching

Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$, mit Kantenkosten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Gesucht: Perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$
⇒ kann in O(V^3) berechnet werden (ist aber ziemlich kompliziert :(

9 Wurzelspannbäume

Definition 21: Wurzelbaum

Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch
- indeg(s) = 0
- indeg(v) = 1 für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$

Definition 22: Wurzelspannbaum

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt s-**Wurzelspannbaum** von G, wenn T ein s-Wurzelbaum ist.

Eigenschaft 8

Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum $\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.
DFS(s) liefert s-Wurzelspannbaum (falls es einen gibt)

Eigenschaft 9

Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzellspannbaum von G/K.
Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T})$$

G/K: K sie Teilmenge von G. Alle Knoten in K werden durch einen einzigen Ersetzt.

Algorithmus zur berechnung von s-Wurzelspannbäumen:

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'
- Bestimme Teilgraph F
- Falls F azyklisch, gib F zurück
- Ansonsten ermittle Kreis K in F
- Kontrahiere G zu G / K
- Wende Algo rekursiv auf (G/K, c') and
  - s-Wurzelspannbaum für $\tilde{T}$ für G/K
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G
- Gibt T zurück

10 MinCut - Kleinste Schnitte

Definition 23

Gegeben sei ein ungerichteter Multigraph $G = (V, E)$.
Gesucht ist eine Zerlegung (S, T) von V mit $S, T \neq \emptyset$, so dass die Anzahl der Kanten $uv \in E$ mit $u \in S$ und $v \in T$ möglichst klein ist

Beachte: Im Gegensatz zu $s-t$-Schnitten ist hier kein trennednes Knotenpaar (s, t) vorgegeben

Contract

Sei (S, T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit das CONTRACT diesen Schnitt findet ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$
FastCut: Für kleine n BruteForce

11 Färbungen und chromatische Zahl

Definition 24: k-Färbung

Sei $G = (V, E)$ ein Graph
Eine k-Färbung ist eine Abbildung $f : V \to \{1, \dots, k\}$, so dass für alle $uv \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$
$\chi(G) = \min\{k | G$ hat eine k-Färbung $\}$ heißt chromatische Zahl von G

Definition 25: Clique

Eine Clique ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare $\{u, v\} \in V$ gilt, dass $uv \in E$
$\omega(G) = \max\{|C| : C$ ist Clique in G $\}$ heißt Cliqzenzahl von G

$\Rightarrow$ Vollständiger Teilgraph
Es gitlt: $\chi(G) \geq \omega(G)$

Definition 26

Eine unabhängige (oder stabile) ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare$\{u, v\} \in V$ gilt, dass $uv \notin E$
$\alpha(G) = \max\{|C| : C$ ist unabhänige Menge in G $\}$ heißt Unabhänigkeitszahl (o. Stabilitätszahl) von G

Es gilt:
$\chi(G) \geq \max\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)}\}$
$\chi(G) \leq \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} \rfloor$

Definition 27: Komplementgraph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Dann ist $\bar{G} = (V, E)$ mit $\bar{E} := \binom{V}{2} \backslash E$ der Komplementgraph von G

Definition 28

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt perfekt, wenn für jeden induzierten Teilgraphen von H Gilt: $\omega(H) = \chi(G)$

Eigenschaft 10

G ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist

Loch: Kreis mit ungerader Knotenanzahl
Antiloch: Komplement zum Loch.
G perfekt $\Leftrightarrow$ kein induzierter Teilgraph von g ist ungerades Loch oder ungerades Antiloch (für $k \geq 2$)

Definition 29: Chordal

Ein Grpah $G = (V, E)$ heißt chordal, wenn jeder elementare Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine Sehne besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet

Definition 30: simpliziale Knoten

Ein Knoten v heißt simplizial, falls $N(v)$ Clicque in G
Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten

Definition 31: Perfektes Eliminationsschema

Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge V heißt perfektes Eliminationsschema, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$

Eigenschaft 11

G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Eigenschaft 12

Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht erweiterbare Clique C in G die Form $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$

Eigenschaft 13

Jeder chordale Grpah ist perfekt.