Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

13. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

Definition 2: bipartiter Graph

Ein Graph G wird as bipartit bezeichnet, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen. Zwischen Den Knoten innerhalb dieser Teilmengen dürfen also keine Kanten existieren.

2 Eulerkreise

Definition 3: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Grpah.
Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen on G eulersch ist (Knotengrade zählen)
Eulerkreis finden:
Verwalte in jedem Knoten v eien zeiger curr$[v]$, der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 4: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
Seien u und v nicht-adjazente Knoen von G mit deg(u) + deg(v) $\geq n :=$ |V|. Dann gilt:
G hamiltons ⇔ G + uv hamitlonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph mit |V| ≥ 3. Falls jeder Knoten von G Grad ≥ |V| / 2 hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp

5 Lineare Programmierung

Definition 5: Knotenüberdeckung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mindestens einen Endpunkt in V' hat.
Ziel: $|V'|$ minimal

Definition 6: Clique

Gegeben: ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Clique in G
d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist

(also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)
Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

Definition 7: Fluss

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine funktion $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V | uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum knoten V = Abfluss vom Knoten v, also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

Definition 8

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.
Seien durch $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t.

6 Flussalgorithmen

Definition 9: Kapazität eines Schnittes

G Graph mit Kap. c: $E \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist c(S) := c(Raus(S)) die Kapazität von (S, T)

6.1 Flussvergrößernde Wege

1. Residualgraph G' bilden:
   - Hinrichtung: Benutzte Kapazität in G
   - Rückrichtung: Übrige Kapazität der Kante

Definition 10

Eins s-t-Weg W in G_f heißt flussvergrößernder Weg für f.
Die Residualkapatziät von W ist

$$\triangle_W := min_{e \in W} c_f(e)$$

Ein zulässiger s-t-Fluss in G ist maximal ⇔ es gibt keinen Flussvergrößenderen Weg in G_f

Definition 11: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
Dann sind folgende Bedingugnen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. G_f enthält keine augmentierenden Wege
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$

Kurz

$$max_{\text{f zulässiger s-t-Fluss}}|f| = min_{\text{(S, T) s-t-Schnitt}} c(S)$$

6.2 Algorithmen

Definition 12: FordFulkerson / EdmonsKarp

Suche s-t-weg in G_f und füge das dann den Kanten hinzu.
Änderung von EdmonsKarp: Muss der Kürzeste s-t-Weg sein

EdmonsKarp führt O(VE) Flussvergrößerungen durch
EdmonsKarp läuft in O(VE^2)

7 Matchings

Definition 13: Matchings

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph

$M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. matching), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben
Falls für jede Kante $e \in M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. maximal)
Falls für alle Parrungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine **größte Paarung** (engl. maximum)
Falls jeder Knoten in G durch M gepaart ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. perfect matching)

Definition 14: Ganzzahligkeitssatz

Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c : E \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Eigenschaft 4: Satz von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Dann ist die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes

Kardinalität eines s-t-Schnittes: Anzahl an Kanten die von S nach T Laufen.
$\Rightarrow$ minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts = maximale Anzahl an kantendisjunkter s-t-Wege (die Kapazität aller möglichen s-t-Schnitte ist genau so groß wie die Anzahl an möglichen s-t-Wegen)

Eigenschaft 5: Auch von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V, st \notin E$. Dann ist die maximale Anzahl **knotendisjunkter** s-t-Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt.

Definition 15: Nachbarschaft

Nachbarschaft von $v \in V$ ist

$$N(v) := \{u \in V | uv \in E\}$$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

Definition 16: Heiratssatz (bewiesen von Philip Hall)

Es existiert ein perfektes Matching $\Leftrightarrow$ Für jedes $D' \subseteq D$ gilt: $|D'| \leq |N(D')|$

Eigenschaft 6

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph
Dann lässt sich eine größte Parrung in G in $O(VE^2)$ Zeit bestimmen

In G' können wir $|V|$ s-t-wege in je $O(E)$ zeit berechnen