Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

17. Juli 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

Definition 2: bipartiter Graph

Ein Graph G wird as bipartit bezeichnet, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A und B aufteilen lassen. Zwischen Den Knoten innerhalb dieser Teilmengen dürfen also keine Kanten existieren.

Definition 3

Vollständig: K_n, n Knoten, alle miteinander verbunden

2 Eulerkreise

Definition 4: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Grpah.
Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen on G eulersch ist (Knotengrade zählen)
Eulerkreis finden:
Verwalte in jedem Knoten v eien zeiger curr[v], der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 5: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
Seien u und v nicht-adjazente Knoen von G mit deg(u) + deg(v) $\geq n :=$ |V|. Dann gilt:
G hamiltons ⇔ G + uv hamitlonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph mit |V| ≥ 3. Falls jeder Knoten von G Grad ≥ |V| / 2 hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp

5 Lineare Programmierung

Definition 6: Knotenüberdeckung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante minde-

stens einen Endpunkt in V' hat.
Ziel: $|V'|$ minimal

Definition 7: Clique

Gegeben: ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Clique in G
d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist (also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)
Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

Definition 8: Fluss

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine funktion $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V | uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum knoten V = Abfluss vom Knoten v, also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

Definition 9

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.
Seien durch $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t.

6 Flussalgorithmen

Definition 10: Kapazität eines Schnittes

G Graph mit Kap. c: $E \to \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist c(S) := c(Raus(S)) die Kapazität von (S, T)

6.1 Flussvergrößernde Wege

1. Residualgraph G' bilden:
   - Hinrichtung: Benutzte Kapazität in G
   - Rückrichtung: Übrige Kapazität der Kante

Definition 11

Eins s-t-Weg W in G$_f$ heißt flussvergrößernder Weg für f.
Die Residualkapatziät von W ist

$$\triangle_W := min_{e \in W} c_f(e)$$

Ein zulässiger s-t-Fluss in G ist maximal ⇔ es gibt keinen Flussvergrößenderen Weg in G$_f$

Definition 12: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Dann sind folgende Bedingugnen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. G$_f$ enthält keine augmentierenden Wege, also Wege über die die Kapazität erhöht werden könnte
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$

Kurz

$$max_{\text{f zulässiger s-t-Fluss}} |f| = min_{\text{(S, T) s-t-Schnitt}} c(S)$$

6.2 Algorithmen

Definition 13: FordFulkerson / EdmonsKarp

Suche s-t-weg in G$_f$ und füge das dann den Kanten hinzu.
Änderung von EdmonsKarp: Muss der Kürzeste s-t-Weg sein

EdmonsKarp führt O(VE) Flussvergrößerungen durch
EdmonsKarp läuft in O(VE^2)

7 Matchings

Definition 14: Matchings

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph
$M \subseteq E$ ist eine **Paarung** (engl. matching), wenn je zwei Kanten in M keinen gleichen Endpunkt haben
Falls für jede Kante $e \in M$ gilt, dass $M \cup \{e\}$ keine Paarung ist, so ist M **nicht erweiterbar** (engl. maximal)
Falls für alle Parrungen M' in G gilt, dass $|M'| \leq |M|$, so ist M eine **größte Paarung** (engl. maximum)
Falls jeder Knoten in G durch M gepaart ist, so ist M eine **perfekte Paarung** (engl. perfect matching)

Definition 15: Ganzzahligkeitssatz

Sind alle Kapazitäten ganzzahlig, d.h. $c : E \to \mathbb{N}$, so existiert ein maximaler Fluss, der ganzzahlig ist.

Eigenschaft 4: Satz von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Dann ist die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Wege gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes

Kardinalität eines s-t-Schnittes: Anzahl an Kanten die von S nach T Laufen.
$\Rightarrow$ minimale Kardinalität eines s-t-Schnitts = maximale Anzahl an kantendisjunkter s-t-Wege (die Kapazität aller möglichen s-t-Schnitte ist genau so groß wie die Anzahl an möglichen s-t-Wegen)

Eigenschaft 5: Auch von Menger

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V, st \notin E$. Dann ist die maximale Anzahl **knotendisjunkter** s-t-Wege gleich der Kardinalität einer kleinsten Knotenmenge, die s und t trennt.

Definition 16: Nachbarschaft

Nachbarschaft von $v \in V$ ist

$$N(v) := \{u \in V | uv \in E\}$$

Nachbarschaft von $V' \subseteq V$ ist

$$N(V') := \bigcup_{v' \in V'} N(v')$$

Definition 17: Heiratssatz (bewiesen von Philip Hall)

Es existiert ein perfektes Matching $\Leftrightarrow$ Für jedes $D' \subseteq D$ gilt: $|D'| \leq |N(D')|$

Eigenschaft 6

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph
Dann lässt sich eine größte Parrung in G in $O(VE^2)$ Zeit bestimmen

In G' können wir $|V|$ s-t-wege in je $O(E)$ zeit berechnen

8 Alternierende und augmentierende Wege

Definition 18: Augmentierender Weg

Ein Weg ist **augmentierend**, wenn die Kanten immer Abwechselnd im Matching und nicht im Matching liegen. Starten und Enden mit einer Kante die nicht im Matching liegt.

Alternierend: Wechselt zwischen im Matching und nicht im Matching

Definition 19: Satz von Berge

Sei $G = (V, E)$ Grpah, $M \subseteq E$ Matching in G.
M ist ein größtes Matching in G $\Leftrightarrow$ es gibt keinen M-augmentierenden Weg.

Eigenschaft 7

In einem bipartiten Graphen $G = (V, E)$ lässt sich in $O(VE)$ ein größtes

Matching bestimmen

Ansatz: Knoten S erstelen mit Kante zu allen Knoten im einen Teil, dann BFS $|V|/2$ mal ausführen (oder bis kein freier Knoten in B mehr gefunden wird).

Definition 20: Christofides Alfogrithmus

- Ermittle einen minimalen Spannbaum B für G
- Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades in B
- Ermittle kostenminimales perfektes Matching M für G[U]
  - G[u] ist der von U induzierte Graph
  - $(U, \{vw \in E(g) : v \in U, w \in U\})$
- Berechne im eulerschen Grpahen $B \cup M$ erst Eulertour und dann Rundtour T wie beim Tree-Doubling

$\Rightarrow$ liefert eine 3/2-Approximation für Δ-TSP

Definition 21: Kostenminimales perfektes Matching

Gegeben: vollständiger Graph $G = (V, E)$, mit Kantenkosten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
Gesucht: Perfektes Matching M mit minimalen Kosten $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$
$\Rightarrow$ kann in O(V^3) berechnet werden (ist aber ziemlich kompliziert :(

9 Wurzelspannbäume

Definition 22: Wurzelbaum

Ein gerichteter Graph $T = (V, E)$ mit Knoten $s \in V$ heißt s-**Wurzelbaum**, wenn

- T azyklisch
- indeg(s) = 0
- indeg(v) = 1 für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$

Definition 23: Wurzelspannbaum

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten $s \in V$. Ein Teilgraph T von G mit Knotenmenge V heißt s-**Wurzelspannbaum** von

G, wenn T ein s-Wurzelbaum ist.

Eigenschaft 8

Sei G ein gerichteter (Multi-) Graph mit Knoten s
G besitzt einen s-Wurzelspannbaum $\Leftrightarrow$ jeder Knoten $v \in V$ ist von s in G erreichbar.
DFS(s) liefert s-Wurzelspannbaum (falls es einen gibt)

Eigenschaft 9

Sei K Kreis in F und $\tilde{T}$ s-Wurzellspannbaum von G/K.
Dann gibt es einen s-Wurzelspannbaum T von G mit

$$c'(T) \leq c'(\tilde{T})$$

G/K: K sie Teilmenge von G. Alle Knoten in K werden durch einen einzigen Ersetzt.

Algorithmus zur berechnung von s-Wurzelspannbäumen:

- Berechne modifizierte Kantenkosten c'
- Bestimme Teilgraph F
- Falls F azyklisch, gib F zurück
- Ansonsten ermittle Kreis K in F
- Kontrahiere G zu G / K
- Wende Algo rekursiv auf (G/K, c') and
  - s-Wurzelspannbaum für $\tilde{T}$ für G/K
- Expandiere $\tilde{T}$ zu s-Wurzelspannbaum T von G
- Gibt T zurück

10 MinCut - Kleinste Schnitte

Definition 24

Gegeben sei ein ungerichteter Multigraph $G = (V, E)$.

Gesucht ist eine Zerlegung (S,T) von V mit $S,T \neq \emptyset$, so dass die Anzahl der Kanten $uv \in E$ mit $u \in S$ und $v \in T$ möglichst klein ist

Beachte: Im Gegensatz zu $s-t$-Schnitten ist hier kein trennednes Knotenpaar (s,t) vorgegeben

Contract

Sei (S,T) ein kleinster Schnitt. Die Wahrscheinlichkeit das CONTRACT diesen Schnitt findet ist $\geq \frac{2}{n(n-1)}$
FastCut: Für kleine n BruteForce

11 Färbungen und chromatische Zahl

Definition 25: k-Färbung

Sei $G = (V,E)$ ein Graph
Eine k-Färbung ist eine Abbildung $f : V \to \{1,\dots,k\}$, so dass für alle $uv \in E$ gilt $f(u) \neq f(v)$
$\chi(G) = \min\{k | G$ hat eine k-Färbung $\}$ heißt chromatische Zahl von G

Definition 26: Clique

Eine Clique ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare $\{u,v\} \in V$ gilt, dass $uv \in E$
$\omega(G) = \max\{|C| : C$ ist Clique in G $\}$ heißt Cliqzenzahl von G

$\Rightarrow$ Vollständiger Teilgraph
Es gitlt: $\chi(G) \geq \omega(G)$

Definition 27

Eine unabhängige (oder stabile) ist eine Menge $C \subseteq V$, so dass für alle Paare$\{u,v\} \in V$ gilt, dass $uv \notin E$
$\alpha(G) = \max\{|C| : C$ ist unabhänige Menge in G $\}$ heißt Unabhänigkeitszahl (o. Stabilitätszahl) von G

Es gilt:
$\chi(G) \geq \max\{\omega(G), \frac{n}{\alpha(G)}\}$
$\chi(G) \leq \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}} \rfloor$

Definition 28: Komplementgraph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
Dann ist $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} := \binom{V}{2} \setminus E$ der Komplementgraph von G

Definition 29

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt perfekt, wenn für jeden induzierten Teilgraphen von H Gilt: $\omega(H) = \chi(G)$

Eigenschaft 10

G ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist

Loch: Kreis mit ungerader Knotenanzahl
Antiloch: Komplement zum Loch.
G perfekt $\Leftrightarrow$ kein induzierter Teilgraph von g ist ungerades Loch oder ungerades Antiloch (für $k \geq 2$)

Definition 30: Chordal

Ein Grpah $G = (V, E)$ heißt chordal, wenn jeder elementare Kreis der Länge ≥ 4 mindestens eine Sehne besitzt, d.h. eine Kante, die zwei nicht aufeinander folgende Knoten des Kreises verbindet

Definition 31: simpliziale Knoten

Ein Knoten v heißt simplizial, falls $N(v)$ Clicque in G
Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten

Definition 32: Perfektes Eliminationsschema

Eine Nummerierung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knotenmenge V heißt perfektes Eliminationsschema, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt: v_i ist simplizial in $G[\{v_i, \ldots, v_n\}]$

Eigenschaft 11

G chordal $\Leftrightarrow$ G hat perfektes Eliminationsschema

Eigenschaft 12

Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede nicht erweiterbare Clique C in G die Form $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_n\})$

Eigenschaft 13

Jeder chordale Grpah ist perfekt.

12 Festparameter-Berechenbarkeit

Definition 33: Knotenüberdeckung / Vertex cover

Sei $G = (V, E)$ ein ungereichter Graph. $C \subset V$ heißt Knotenüberdeckung (vertex cover) von G, falls für alle $uv \in E$ gilt $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$

Definition 34: Festparameterberechenbare Probleme

Ein Problem das in $O(f(k) + |I|^C) =: O^*(f(k))$ gelöst werden kann, heißt festparameterberechenbar.
Die Laufzeit soll also abhängen:

- beliebig vom Paremeter k (Schwierigkeit der Instanz I)
- polynomiell von der Größe $|I|$ der Instanz I

FPT = Klasse der festparameterberechenbaren Probleme
Bemerkung: Die Klasse FPT ändert sich nicht, wenn statt + ein $\cdot$ benutzt wird.

Eigenschaft 14

Falls $|E| > k^2$ und $\delta(G) := max_{v \in V} deg v \leq k$, so hat G kein k-VC

Fazit

- $k - VC$ kann in $O(nk + 1.38^k k^2)$ Zeit gelöst werden

13 Planare Graphen

Definition 35: offene Jordankurve

Eine offene Jordankurve ist eine homöomorphe Einbettung des Intervalls [0, 1] in einen topologischen Raum, also ohne Kreuzungen und Sprünge

Definition 36: Zeichnung von Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, eine Abbildung ζ heißt Zeichung von G, falls

- für alle $w \in V$ gilt $\zeta(w) \in \mathbb{R}^2$ und Einschränkung von ζ auf V injektiv
- für alle $uv \in E$ gilt $\zeta(uv) = \zeta_{uv}([0, 1])$ wobei ζ_{uv} Jordankufve mit $\zeta_{uv}(0) = \zeta(u)$ und $\zeta_{uv}(1) = \zeta(v)$

Knoten $\rightarrow$ Punkte in der Ebene
Kanten $\rightarrow$ J-Kurve

Definition 37: Planar

Ein Graph G ist planar (plättbar), falls er eine ebene zeichung hat (d.h. falls sich die Zeichungen der Kanten höchstens in gemeinsamen Endpunkten schneiden)
Eine Zeichung ζ von G heißt **geradlinig**, falls für alle $e \in E$ gilt ζ_e ist linear (also eine Linie)

Definition 38: Punkte und Facetten

Für einen planaren Graphen $G = (V, E)$ und eine ebene zeichung ζ von G sei

$$G_\zeta = \zeta(V) \cup \bigcup_{e \in E} \zeta_e([0, 1])$$

die Menge der Punkte von ζ
Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \backslash G_\zeta$ heißen Facetten von ζ
$\Rightarrow$ also die Menge aller Knoten und Linien zwischen Knoten

Eigenschaft 15

G planar, π ebene Zeichnung von G, F Innenfacette von π. Dann gibt es auch eine Zeichung π_F von von G, in der $E(F)$ den Rand der Außenfacette bildet

Eigenschaft 16

Das Skelett (der Ecken-Adjazenzgraph) eines konvexen und beschränkten Polyeders ist planar

Definition 39: Eulerscher Polyedersatz

Sei π eine ebene Zeichnung eines Graphen (möglicherweise mit Schleifen und Mehrfachkanten) mit n Knoten, m Kanten, f Facetten und k Zusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$LS_m := n - m + f = k + 1 =: RS_m$$

Eigenschaft 17

Für jeden einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ mit mindestens 3 Knoten gilt $m \leq 3n - 6$ und $f \leq 2n - 4$

Eigenschaft 18

Der durchschnittliche Knotengrad in einem einfachen planaren Graphen ist kleiner 6

Eigenschaft 19

Ein einfacher planarer Graph hat mindestens einen (genauer: mindestens 3) Knoten vom Grad höchstens 5

Definition 40: Kontraktionen und Minoren

Sei G ein einfacher Graph und sei uv Kante von G
Der Graph $G\backslash uv$ entsteht aus G durch (Einfach-) Kontraktion von uv (wobei hier anders als bei Kontraktion bei Multigraphen Mehrfachkanten

verschmolzen werden)
Ein Graph H heißt Minor von G (schreibe $H \leq G$), falls er durch eine (evtl. leere) Folge von Kontraktionen aus einem Teilgraphen von G hervorgeht.

Eigenschaft 20

G Planar $\Leftrightarrow$ alle Minoren von G sind planar
Alle Graphen mit höchstens vier Knoten sind Planar.

Definition 41: Satz von Kuratowski

Sei G ein einfacher Graph. Dann gilt:

$$\text{G planar} \Leftrightarrow \text{Weder } K_5 \text{ noch } K_{3,3} \text{ ist Minor von G}$$

Wobei K_5 vollständiger Kreis mit 5 Knoten und $K_{3,3}$ bipartit mit Seiten verbunden.

Definition 42: Minoren

Eine Klasse $\mathcal{G}$ von Grpahen heißt minorenabgeschlossen, wenn für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $H \leq G$ gilt $H \in \mathcal{G}$
Ein Grpah G einer Grpahenklasse $\mathcal{G}$ heißt minorenminimal, wenn für jeden Minor h von G mit $H \in \mathcal{G}$ gitl $H = G$
$\bar{\mathcal{G}}_{\text{plan}}$ = Klasse der einfachen nicht-planaren Graphen

Definition 43: Obstruktionsmenge

Es gilt $\{K_5, K_{3,3}\}$ ist Obstruktionsmenge für $\mathcal{G}_{\text{plan}}$

Eigenschaft 21

- Jede minorenabgeschlossene Graphklasse besitzt eine endliche Obstruktionsmenge
- Für jeden festen Grpahen H existiert ein effizienter Algorithmus, der testet, ob für einen gegebenen (größeren) Graphen G gilt, dass $H \leq G$
- Wir können effizient testen, ob ein gegebener Graph G planar ist

- Jeder planare Graph lässt sich geradlinig zeichnen
- Jeder planage Graph lässt sich als Berührgraph von Kreisscheiben (con graph) repräsentieren
- Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten lässt sich in linearzeit geradlinig zeichnen, so dass die Knoten auf Punkte des $(n-2) \times (n-2)$ Gitters abgebildet werden
- Sei G ein 3-fach zsh. planarer Graph mit f Facetten
  Dann lässt sich G auf einem $(f-1) \times (f-1)$ Gitter geradlinig und konvex zeichnen.
- Jede streng konvexe Zeichnung des C_n benötigt $\Omega(n^3)$ Platz
- Jeder 3-fach zsh. planare Graph hat eine streng konvexe Zeichung auf dem $O(n^2) \times O(n^2)$ Gitter

Zeichnungen hierzu Skript VL 11 ab Seite 15.

Eigenschaft 22: Planar Seperator Theorem

Sei G ein planarer Graph mit $n \geq 5$ Knoten.
Dann existiert eine Zerlegung der Knotenmenge
$V = L \dot\cup S \dot\cup R$ von G, so dass

- Keine Kante zwischen L und R verläuft
- $|L|, |R| \leq \frac{2}{3}n$ und
- $|S| \leq 2\sqrt{2n}$

Eine solche Zerlegung kann in $O(n)$ Zeit berechnet werden.

Eigenschaft 23

Sie $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, sei $v \in V$ und sei M größtes Matching in $G - v$

- Falls G keinen augmentierenden Weg mit Endknoten v enthält, so ist M größtes Matching in G
- Ansonsten sei W ein augemtierender Weg. Dann ist $M \Delta E(W)$ größtes Matching in G

Mit einer passenden Repräsentation eines Matchings in $G - v$ kann man in $O(E)$ Zeit ein größtes Matching in G finden.

14 Färbbarkeit Planare Graphen

Eigenschaft 24

Jeder planare Graph ist 4-färbbar

Definition 44: Listenfärbung

Gegenen ein Graph G und für jeden Knoten v von G eine Liste L_v von Farben, so ist eine Listenfärbung von G eine Abbildung

$$\lambda : V \to \bigcup_v L_v \text{ mit } \begin{cases} \lambda(v) \in L_v \\ \lambda(u) \neq \lambda(v) \forall uv \in E(G) \end{cases}$$

Definition 45: Listenfärbbarkeit

Ein Graph $G = (V, E)$ ist k-listenfärbbar, wenn G für jede Wahl von Listen der Länge k eine Listenfärbung hat

Eigenschaft 25

G k-listenfärbbar $\Rightarrow$ k-färbbar
Nicht jeder planare Graph ist 4-listenfärbbar
Jeder planare Graph ist 5-listenfärbbar

Eigenschaft 26

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten. Dann kann man in $O(n)$ Zeit entscheiden, obb G planar ist.
Wir behandeln in der Vorlesung jedoch einen Algorithmus in $O(n^3)$, der sowohl leichter als auch in der Praxis schneller ist

Eigenschaft 27

G planar $\Leftrightarrow$ jede Zusammenhangskomponente von G is planar
G planar $\Leftrightarrow$ jede Zweifachzusammenhangskomponente (ZZK) von G is planar.

Definition 46: Teilstück

Sei C ein Kreis und seien $e, e' \notin C$ Kanten. $eunde'$ heißen äquivalent (bezüglich C), wenn sie durch einen Pfad verbunden sind, der C nicht berührt. Die resultierenden Äquivalenzkalssen heißen Teilstücke (bezüglich C).
Jedes Teilstück hat ≥ 2 Anknüpfpunkte

Definition 47: Separierender Kreis

Ein Kreis heißt separierend, wenn er mindestens zwei Teilstücke induziert

Eigenschaft 28

Sei C ein nicht-separierender Kreis mit Teilstück P. Falls P kein Pfad ist, dann besitzt G einen separierenden Kreis in C', der aus einem Teilpfan von V und einem Pfad in P zwischen zwei Anknüpfpungspunkten von P besteht.

Definition 48: Einander störende Teilstücke

G planar $\Rightarrow$ jedes Teilstück wird entweder komplett im Inneren oder Äuperen von C eingebettet.

Zwei Teilstücke $P \neq Q$ können auf der gleichen Seite von C eingebettet werden $\Leftrightarrow$ es existiert ein Teilpfad γ von C, sodass γ alle Anknüpfpunkte von Q enthält, aber kein innerer Knoten von γ Anknüpfpunkt von P ist.

Zwei Teilstücke, die nicht auf der gleichen Seite von C eingebettet werden können, **stören** einander

Definition 49: Störgraph

Der Störgraph I (bezüglich C) hat als Knoten die Teilstücke. Zwei Teilstücke sind adjazent genau dann, wenn sie einander stören.

Eigenschaft 29

Sei G ein Graph mit separienedem Kreis C und Störgraphen I. Der Graph G ist genau dann planar, wenn

- für jedes Teilstück P der Graph C + P planar und
- der Störgraph I bipartit ist