Aufgabe 1

a

Wir zeigen zunächst das die Menge A nicht leer ist:

$$3^1 \cdot 5^1 = 15$$

$\Rightarrow$ die Zahl 15 liegt in der Menge A, damit ist die Menge A nicht leer.
Allerdings ist A keine echte Teilmene der berechenbaren Funktionen, A ist also berechenbar. Dies ist gegeben da wir für jedes n ein größtes mögliches p und ein größtes mögliches q finden können da gelten muss:

$$p \leqslant n \wedge q \leqslant n$$

Wir können also endlich viele p-q-kombinationen durchprobieren. Auch für die Potenzen können wir immer eine obere Schranke finden da mit erhöhung der Potenzen auch der resultierende Wert von $p^i q^j$ steigt
Folgender Algorithmus zeigt die Berechenbarkeit von A

```
def is_prime(x):
    return False if x < 2 else all([x % i != 0 for i in range(2, x - 1)])


def check(n):


    for p in range(2, n):

        # Skipping if p is not a prime
        if not is_prime(p):
            continue

        for q in range(2, n):

            # Skipping if q is not a prime
            if not is_prime(q):
                continue

            i = 1
            j = 1

            # Increasing i and j until the result gets to big
            while (p ** i) * (q **j) <= n:

                # Checking if we found a valid solution
                if (p ** i) * (q ** j) == n:
                    return (p, q, i, j)
```

```
            i += 1

            # Ensuring we test every valid combination of i and j
            if j == i:
                j += 1
                i = 1

    return None


# Valdiating results
for i in range(50):
    res = check(i)
    sol = (res[0] ** res[2]) * (res[1] ** res[3]) if not res is None else ""
    print(f"{i}: {res}: {sol}")
```

b

Wir zeigen zunächst das die Menge B nicht leer ist:
Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x$ liegt in M_i und ist entscheidbar. Daher ist B nicht leer.
Die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = 3 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar, liegt also in M_i, jedoch nicht in B, da 3 zwar in D_g liegt, aber nicht in W_g. Dadurch ist B eine echte Teilmenge der berechenbaren Funktionen $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und ist somit laut dem Satz von Rice unentscheidbar.

c

Die Menge C ist nicht leer, da die Maschiene M_k mit der Eigenschaft, dass sie für keine Eingabe hält in M_i und somit in C liegt.
Ebenso liegt die Maschiene die einfach die Eingabe wieder ausgibt ($f(x) = x$) in M_i, jedoch nicht in C (da diese Maschiene auf geraden Eingaben hält).
Damit ist C laut satz von Rice untentscheidbar.

d

Eine Maschiene M_i liegt genau dann in i, wenn sie das spezielle Halteproblem löst. Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar, daher ist die Menge D auch nicht entscheidbar (da für kein Element in der Menge entschieden werden kann, ob sie das spezielle Halteproblem löst)

e

Die Menge E ist keine echte Teilmenge aller berechenbaren Funktionen. Dies ist gegeben da wenn eine Funktion auf $D = \mathbb{N}^n$ berechenbar ist, dann enthält der Definitionsbereich mehr als 2020 Eingaben, die TM hält also auf mehr als 2020 Eingaben. Durch den Satz von Rice ist diese Menge somit entscheidbar.