Schubert Julian, Gruppe 4
Philipp Wahl, Gruppe 4

Abgabe zum 8. Übungsblatt (AGT 21)

Aufgabe 1:

a) Wir widerlegen die Behauptung unseres Kommikitonen mit einem Beispiel:

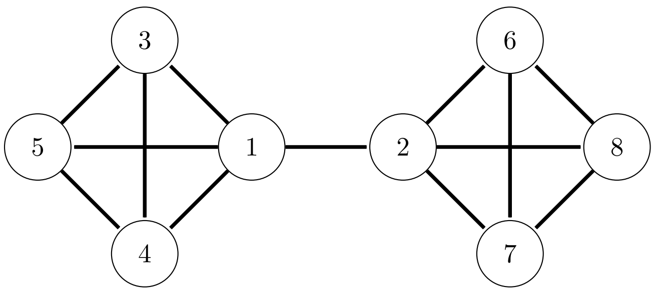

Abbildung 1: Graph G=(V, E)

Der Ansatzt von unserem Kommilitonen würde in diesem Beispiel als Schnitt entweder $(\{1\}, V\backslash\{1\})$ oder $(\{2\}, V\backslash\{2\})$ liefern (da dies die beiden Knoten mit höchstem Grad sind). In diesem Beispiel gibt es jedoch einen kleineren (minimalen) möglichen Schnitt: $(\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 6, 8, 7\})$
Damit ist die Behauptung des Kommilitonen widerlegt.

b)

Aufgabe 2:

Zunächst zeigen wir, wie man eine Zufällige Kante in $\mathcal{O}$(V) wählen kann:
GetRandomEdge($G = (V, E)$)

total = $\sum_{v \in V} deg(v)$
rdm = Zufallszahl zwischen 1 und total (beides inklusive)
sum = 0 ;
for $v \in V$ **do**
  if *sum + v.deg()* $\geq$ *rdm* **then** Kante zurück geben
    return v.adj[rdm - (sum + v.deg())]
  else sum um den Grad vom Knoten v erhöhen
    sum = sum + v.deg()
return nil;

Dieser Algorithmus für das Zufällige auswählen einer Kante dauert $\mathcal{O}$(V) da wir zwei mal über alle Knoten iterieren (einmal um total zu bestimmen und einmal für die Kante).
Nun müssen wir nur noch den Graphen fertig Kontrahieren:

Unsere neue Kante verbindet die Knoten v_i und v_j. Nun iterieren wir über alle Einträge in der Adjazenzliste von v_i und ändern für jeden Knoten v_k in der Adjazenzliste von v_i den Eintrag v_i in v_j um. Wir ersetzen also alle Kanten von v_k nach v_i zu Kanten die von (bzw zu, selbes Prinzip) v_k zu v_j gehen.
Wir wählen weiterhin Kanten gleichverteilt aus da jede Kante mit unserem Algorithmus die selbe chance hat ausgewählt zu werden (da Knoten mit höhterem Grad nun eine höhere Chance haben ausgewählt zu werden)

Aufgabe 3:

a) Wir widerlegen wieder durch ein Gegenbeispiel:

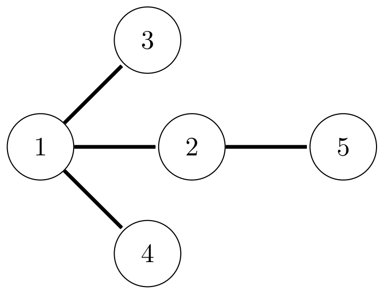

Abbildung 2: Graph G=(V, E)

Der Vorschlag unseres Kommilitonen würde den Schnitt $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5\})$ liefern, größer ist jedoch Beispielsweise der Schnitt $(\{1, 5\}, \{2, 3, 4\})$

b) Wenn eine Kante e auf dem Schnitt liegt, dürfen ihre beiden Endpunkte nicht beide in S bzw. nicht beide in T liegen. Ist der eine Endpunkt nun in S (oder T), so ist die Wahrscheinlicheit dass der andere Endpunkt in T (bzw. S) liegt gleich 0.5.
$\Rightarrow$ die Wahrscheinlicheit liegt bei 0.5

c) Für einen festen Schnitt ist für jeden Knoten vorgegeben, ob er in S oder in T liegen muss. Bedeutet jeder Knoten liegt mit einer WSK von 0.5 im richtigen Schnitt. Dadurch ergibt sich

$$P(E) = 0.5 \cdot |V|$$

Da jedoch wenn ALLE Knoten in der Falschen Menge liegen ebenfalls der Korrekte Schnitt geliefert wird (S, T) = (T, S), gilt insgesamt:

$$P(E) = (0.5 \cdot |V|) \cdot 2$$

d) Wir zeigen zunächst das die Erwartete Anzahl an Kanten die auf dem Schnitt liegen, exakt $|E|/2$ ist:
Es existieren $|E|$ viele Kanten, für jede dieser Kanten ist laut Teilaufgabe b die WSK das sie auf dem Schnitt liegt gleich 0.5. Damit liegen erwartet $|E| * 0.5 = |E|/2$ viele Kanten auf dem Schnitt.
Eine maximale Optimale Lösung ist die, in der ALLE Kanten auf dem Schnitt

liegen. Das ist $|E|$, also doppelt so groß wie die Anzahl an Kanten die unser Algorithmus zurück gibt. Damit ergibt sich eine Güte von $\frac{1}{2}$