Schubert Julian, Gruppe 4
Philipp Wahl, Gruppe 4

Abgabe zum 7. Übungsblatt (AGT 21)

Aufgabe 1:

a) In einem s-Wurzelspannbaum ist jeder Knoten im Graphen vom Knoten s aus erreichbar. Damit gilt $E(s) = V$

b) Die Tiefensuche durchläuft einen Pfad immer so weit wie möglich, und springt dann erst zu einem Knoten zurück der noch Nachbarn hat, die noch nicht besucht wurden. So entsteht ein s-Wurzelspannbaum (falls $E(s) = V$ gilt) und man die Tiefensuche am Knoten s startet.

c) Angenommen G ist Kreisfrei und es existieren s_1, s_2 mit $s_1 \neq s_2$ und es gibt zwei verschiedene Wurzelspannbäume, einen mit s_1 als Wurzel und einen mit s_2 als Wurzel. Dies bedeutet dann das es in G einen gerichteten Weg von s_1 nach s_2 **und** einen gerichteten Weg von s_2 nach s_1 gibt. Damit ist G nicht kreisfrei.
$\Rightarrow$ Die Aussage ist korrekt.

d) Für den Graphen in G lassen sich die zwei skizzierten (unterschiedlichen) Wurzellspannbäume bilden, die Aussage ist also falsch.

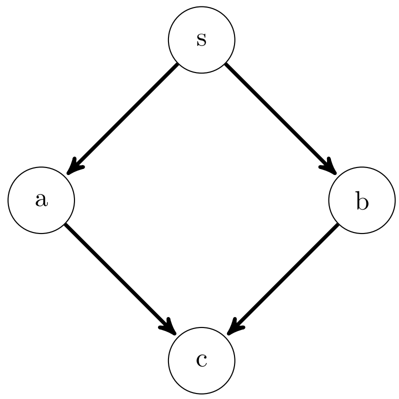

Abbildung 1: Graph G=(V, E)

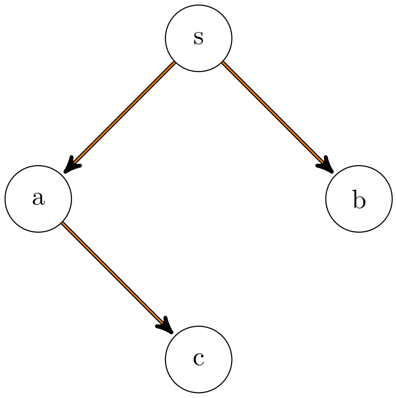

Abbildung 2: Möglicher Wurzelspannbaum 1

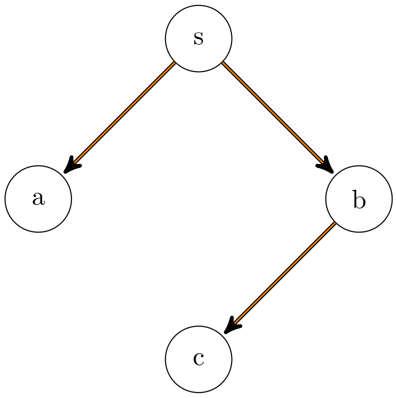

Abbildung 3: Möglicher Wurzelspannbaum 2

Aufgabe 2:

Hinrichtung $\Rightarrow$:
Wenn der zugrunde liegende ungerichtete Graph ein Baum ist und indeg(v) = 1 für $v \neq s$ und indeg(s) = 0 gilt, dann muss damit der Graph ein s-Wurzelspannbaum ist nur noch gezeigt werden, dass der Graph Azyklisch ist, und er alle Knoten $v \in V \backslash \{s\}$ enthält:
Jeder Knoten ist in dem neuen Graphen enthalten, dies ist gegeben da der indeg(v) = 1 für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$ ist, jeder Knoten wird also genau ein mal besucht.
Ebenso ist der neue Grpah azyklisch aufgrund dieser Eigenschaft. Würde der neue Graph einen Kreis enthalten müsste entweder indeg(s) ≥ 1 oder indeg(v) $geq2$ für mindestens einen Knoten $v \in V \backslash \{s\}$ gelten (anders kann kein Kreis entstehen).

Rückrichtung $\Leftarrow$:
Wenn G ein Wurzelspannbaum ist, dann ist er ein Wurzelbaum der alle Knoten enthält.

Demnach Gilt also das G (und damit der zugrunde liegende Graph) azyklisch ist und für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$ gilt indeg$(v) = 1$ (gegeben durch Definition Wurzelbaum), und indeg$(s) = 0$.

Aufgabe 3:

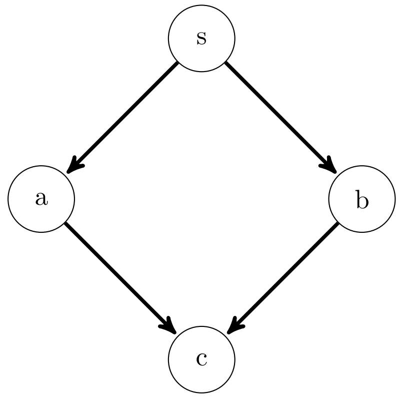

Abbildung 4: Hier schlägt Kruskal fehl

a) Die Zeichung zeigt einen Graphen in dem Kruskal fehlschlägt. Hier könnte Kruskal beim Knoten c starten, da c aber keine ausgehenden Kanten hat kann c nicht root-element eines s-Wurzelspannbaums sein.

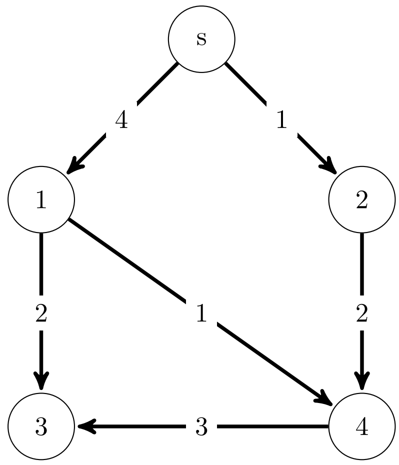

Abbildung 5: Graph G = (V, E)

b) Hier findet Prim folgenden s-Wurzelspannbaum (ausgehend von s)

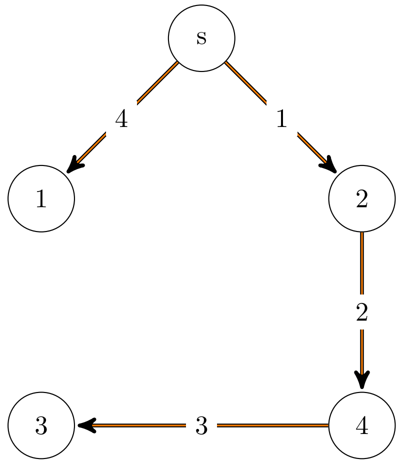

Abbildung 6: s-Wurzelspannbaum mit Prim

Jedoch gibt es einen günstigeren s-Wuzrelspannbaum:

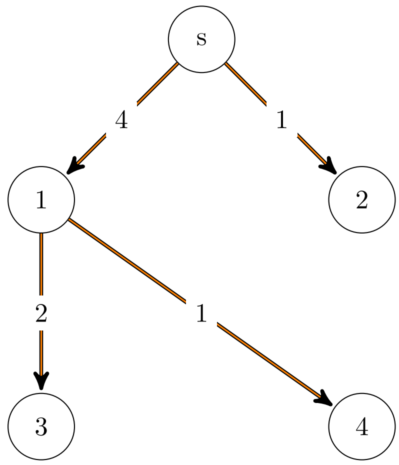

Abbildung 7: kleinerer s-Wurzelspannbaum

Prim findet also selbst unter gegebenen Anweisungen nicht immer einen minimalen s-Wurzelspannbaum

c) Der Gegebene Graph ist kreisfrei, wir müssen also nur noch zeigen das $\text{indeg}(s) = 0$ und $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$ gilt:
Der Algorithmus fügt in jeder Iteration eine Kante hinzu, die zum aktuellen Knoten v hinführt. Da dies für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$ genau eingmal gemacht wird ist $\text{indeg}(v) = 1$ für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s\}$. Da keine Kante vom zum Knoten s hin hinzugefügt wird (nur eventuell Kanten die von s weg gehen) ist $\text{indeg}(s) = 0$ ebenfalls erfüllt.

d) Der Wurzelspannbaum ist minimal. Dies muss gelten da wir für jeden Knoten die billigste Kante wählen die den Knoten zum Baum hinzufügt. Da wir wenn wir die billigste Kante für einen Knoten wählen wir uns keine andere, bessere, Lösung verbauen können muss die Lösung optimal sein (da wir für jeden Knoten die beste Möglichkeit wählen und die Wahl für einen Knoten die Wahl für keinen anderen Knoten einschränkt).