Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

20. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

2 Eulerkreise

Definition 2: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Grpah.
Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen on G eulersch ist (Knotengrade zählen)
Eulerkreis finden:
Verwalte in jedem Knoten v eien zeiger curr$[v]$, der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 3: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
Seien u und v nicht-adjazente Knoen von G mit deg(u) + deg(v) $\geq n :=$ |V|. Dann gilt:
G hamiltons ⇔ G + uv hamitlonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph mit |V| ≥ 3. Falls jeder Knoten von G Grad ≥ |V| / 2 hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp