

Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

30. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Wichtige Begriffe	2
2	Eulerkreise	2
2.1	Eulerkreis finden	2
3	Hamiltonkreise	2
4	Handlungsreisen (TSP)	3
5	Lineare Programmierung	3

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
 Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

2 Eulerkreise

Definition 2: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Graph.
 Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
 Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
 Dann gilt: G eulersch \Leftrightarrow alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen ob G eulersch ist (Knotengrade zählen)

Eulerkreis finden:

Verwalte in jedem Knoten v einen Zeiger $\text{curr}[v]$, der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 3: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
 Seien u und v nicht-adjazente Knoen von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n := |V|$. Dann gilt:
 G hamiltons $\Leftrightarrow G + uv$ hamitlonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$. Falls jeder Knoten von G $\text{Grad} \geq |V| / 2$ hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp

5 Lineare Programmierung

Definition 4: Knotenüberdeckung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mindestens einen Endpunkt in V' hat.
Ziel: $|V'|$ minimal

Definition 5: Clique

Gegeben: ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Clique in G
 d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist (also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)
 Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

Definition 6: Fluss

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine funktion $f : E \rightarrow$

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V \mid uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V \mid vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum Knoten v = Abfluss vom Knoten v , also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

Definition 7

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.

Seien durch $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t .