Algorithmische Graphentheorie

Julian Schubert

5. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Wichtige Begriffe

Definition 1

Ein gerichteter Graph G ist **schwach** zusammenhängend wenn der darunterliegende ungerichtete Graph zusammenhängend ist
Ein gerichteter Graph G ist **stark** zusammenhängend wenn es für jedes Knotenpaar (u, v) einen gerichteten Weg von u nach v gibt

2 Eulerkreise

Definition 2: Eulerkreis

Sei G ein (un-)gerichteter Grpah.
Ein Eulerkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jede **Kante** genau einmal durchläuft.
Ein Graph heißt **eulersch**, falls er einen Eulerkreis enthält

Ein Graph der nur einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis enthält, ist nicht eulersch!

Eigenschaft 1: Satz von Euler

Sei G ein ungerichteter und zsh. Graph.
Dann gilt: G eulersch $\Leftrightarrow$ alle Knoten haben geraden Grad

Bei gerichteten Graphen: $\mathrm{indeg}(v) = \mathrm{outdeg}(v)$

2.1 Eulerkreis finden

Man kann in $O(E)$ testen on G eulersch ist (Knotengrade zählen)
Eulerkreis finden:
Verwalte in jedem Knoten v eien zeiger curr$[v]$, der auf den ersten unbenutzten Nachbarn w zeigt

3 Hamiltonkreise

Definition 3: Hamiltonkreis NP-schwer

Sei G ein (un-)gerichteter Graph. Ein Hamiltonkreis (-weg) in G ist ein Kreis (Weg), der jeden **Knoten** genau einmal durchläuft.

Eigenschaft 2: Satz von Bondy und Chvátal

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$
Seien u und v nicht-adjazente Knoen von G mit $\deg(u) + \deg(v) \geq n :=$ |V|. Dann gilt:
G hamiltons ⇔ G + uv hamitlonsch

Eigenschaft 3: Satz von Dirac

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph mit |V| ≥ 3. Falls jeder Knoten von G Grad ≥ |V| / 2 hat, so ist G hamiltonsch

TODO: Beweisen

4 Handlungsreisen (TSP)

Lösbar mit Algorithmmus von Bellman & Held-Karp

5 Lineare Programmierung

Definition 4: Knotenüberdeckung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Knotenüberdeckung, d.h. $V' \subseteq V$, so dass jede Kante mindestens einen Endpunkt in V' hat.
Ziel: $|V'|$ minimal

Definition 5: Clique

Gegeben: ungerichteter, ungewichteter Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Clique in G
d.h. $V' \subseteq V$, so dass der von V' induzierte Graph $G[V']$ vollständig ist (also jeder Knoten eine Verbindung zu jedem anderen Knoten hat)
Mit anderen Worten: $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u', v'\} \in \binom{V'}{2}$ gilt $u'v' \in E$

Definition 6: Fluss

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$. Eine funktion $f : E \to$

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss (Fluss), wenn für jeden Knoten $v \in V \backslash \{s, t\}$ gilt:

$$\sum_{u \in V | uv \in E} f(uv) - \sum_{w \in V vw \in E} f(vw) = 0$$

Zufluss zum knoten V = Abfluss vom Knoten v, also der Nettozufluss muss gleich Null sein.

Definition 7

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $s, t \in V$.
Seien durch $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kantenkapazitäten gegeben. Ein Fluss f ist zulässig, wenn für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$0 \leq f(e) \leq c(e)$$

Der **Wert** $|f|$ eines Flusses f ist der Nettozufluss zum Knoten t.

6 Flussalgorithmen

Definition 8: Kapazität eines Schnittes

G Graph mit Kap. c: $E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, (S, T) s-t-Schnitt.
Dann ist c(S) := c(Raus(S)) die Kapazität von (S, T)

6.1 Flussvergrößernde Wege

1. Residualgraph G' bilden:
   - Hinrichtung: Benutzte Kapazität in G
   - Rückrichtung: Übrige Kapazität der Kante

Definition 9

Eins s-t-Weg W in G$_f$ heißt flussvergrößernder Weg für f.
Die Residualkapatziät von W ist

$$\triangle_W := min_{e \in W} c_f(e)$$

Ein zulässiger s-t-Fluss in G ist maximal $\Leftrightarrow$ es gibt keinen Flussvergrößenderen Weg in G$_f$

Definition 10: Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Sei f ein zulässiger s-t-Fluss in einem gerichteten Graphen G mit Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Dann sind folgende Bedingugnen äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss in G
2. G$_f$ enthält keine augmentierenden Wege
3. Es gibt einen s-t-Schnitt (S, T) mit $|f| = c(S)$

Kurz

$$max_{\text{f zulässiger s-t-Fluss}}|f| = min_{\text{(S, T) s-t-Schnitt}}c(S)$$

6.2 Algorithmen

Definition 11: FordFulkerson / EdmonsKarp

Suche s-t-weg in G$_f$ und füge das dann den Kanten hinzu.
Änderung von EdmonsKarp: Muss der Kürzeste s-t-Weg sein

EdmonsKarp führt O(VE) Flussvergrößerungen durch
EdmonsKarp läuft in O(VE^2)