高数上 期末试题 1.

一 填空.

1. 设a为非零常数 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \underline{\quad e^{2a}\quad}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$

2. 已知当 $x\to0$ 时 $(1+ax^2)^{\frac13}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小.

则 $a=\underline{-\frac32}$

解: $(1+ax^2)^{\frac13}-1\sim\frac13\cdot ax^2$　　$\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$

∴ $\frac13 ax^2\sim-\frac{x^2}{2}$　　∴ $a=-\frac32$

3 设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}$　$x\in[\frac12,1)$. 为了使

$f(x)$ 在 $[\frac12,1]$ 连续 应补充 $f(1)=$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\cancel{2x}\sin\pi x\cdot\pi(1-x)}+\boxed{\frac{1}{\pi x}}$ 关键 非零因子

$\overset{t=1-x}{=}\lim\limits_{t\to0}\frac{\pi t-\sin\pi(1-t)}{\sin\pi(1-t)\cdot\pi t}+\frac1\pi$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t\ \sin\pi t}+\frac1\pi$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{+\frac{1}{3!}(\pi t)^3\cdots}{(\pi t)^2}+\frac1\pi=\frac1\pi$

②

4. 设 $f(x)=e^{\sin\pi x}$ 则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(1+1-x)-f(1)}{x-1}=-f'(1)=\pi$

$f'(x)=e^{\sin\pi x}\cdot\cos\pi x\cdot\pi \qquad f'(1)=-\pi$

5. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值是. $y(\frac{\pi}{6})$

$y'=1-2\sin x=0 . \qquad \sin x=\frac{1}{2} \qquad x=\frac{\pi}{6}$

$\cancel{x<\frac{\pi}{6} \quad y'>0}$ $y(0)=2 . \qquad y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2} \qquad y(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

6. 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+c$ 则

$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$

$\because xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

7. $\int_1^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx \xlongequal{\text{令}} \int_1^{e^3}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x+1)$

$=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{e^3}=2(2-1)=2$

8 曲线 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程

程为 $y-0=2(x-0)$ 即 $y=2x$

$y'=(x-1)(x-2) \qquad y'(0)=2$

$y(0)=0$

9. 广义积分 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

$$=\int_e^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^2}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$$

10 方程 $4xdx-3ydy=3x^2ydy$ 的通解为

解: $\frac{4x}{x^2+1}dx=3ydy$

$\cancel{2}\ln(x^2+1)=\frac{3}{4}y^2+C_1$ $\therefore x^2+1=Ce^{\frac{3}{4}y^2}$

高数上期末试题 2.

一. 填空题.

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{2\cdot3x}{\sin x}}=e^6$

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续 则

$a=\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$

$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$

3. 当 $x\to0$ 时 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的 $\frac{1}{8}$ 阶无穷小

找求和的思想、无穷小的时候取指数最大、将其余求和.

4. 若函数 $y=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，则

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \underline{\frac{\pi}{3}\cdot(-2)} = -\frac{2\pi}{3}$

解: $\frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}$

5. 曲线 $y=\frac{(x-1)^3}{x^2}$ 的拐点是 (1, 0)

$y' = \left[\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\right]' = \left[x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right]' = 1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

$y'' = \frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4} = \frac{6x-6}{x^4} = 0. \quad x=1$

6. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数 则 $\int x^2 f(\ln x)dx =$ ____

解: $(e^{-x})' = -e^{-x} = f(x) \qquad \therefore f(\ln x) = -e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$

$\therefore \int x^2 f(\ln x)\,dx = \int -x\,dx = -\frac{x^2}{2}+C$

注意 $f(\ln x)$ 不能直接积，与上课例题的区别

7. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx \overset{\text{裂}}{=} \int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{\sqrt{3}} - \left.\arctan x\right|_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}+1-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$

8. 设 $g(x)$ 是连续函数，$G(x)=\int_{\sin x}^{x^2} g(t)\,dt$，则 $G'(0)=\underline{-g(0)}$

$G'(x) = g(x^2)\cdot 2x - g(\sin x)\cdot\cos x$

$G'(0) = g(0)\cdot 0 - g(0)\cdot 1$

9. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}=$

解：$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}=\frac{a+ax^2+bx^2+cx}{x(1+x^2)}$

$\begin{cases}a+b=0\\c=0\\a=1\end{cases}$ $\therefore$ 原式 $=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$=\ln x\Big|_1^{+\infty}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}$

$=-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 2$ （注意是考察广义积分的敛散性，而不是分开后的两个分别的敛散性）

10. 设二阶线性方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 有三个特解

$y_1=e^x$，$y_2=\sin x$，$y_3=\cos x$．则其通解为

$y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)+y_1$ 随便组合即可．

高数期末上试题4．

一 1. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\sec\frac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{2}{\pi}$ （最高）

2. $x=1$ 是函数 $y=\frac{\sin\pi x}{|x(1-x)|}$ 的第__类间断点．

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{|x(1-x)|}\overset{t=-x+1}{=}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin\pi(1-t)}{|t|}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{|t|}$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\pi t}{|t|}$ $\therefore$ 跳跃．

3. 曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程

$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}-1 \\ y(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = 1$

$\therefore\ y-1 = x-(\frac{\pi}{2}-1)$ 即 $y = x-\frac{\pi}{2}+2$

4. 设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ 则 $dy\big|_{x=0}=$

$$dy = d\left(\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)_{x=0}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right]_{x=0}dx = -\frac{1}{2}dx$$

5. 曲线 $y=\frac{x^3+4}{x}$ 的拐点是 $(-\sqrt[3]{4}, 0)$

$y=x^2+\frac{4}{x}$ $\quad y'=2x-\frac{4}{x^2}$ $\quad y''=2+\frac{8}{x^3}=\frac{2x^3+8}{x^3}$

$2x^3+8=0$. $\quad x^3=-4$ $\quad x=-\sqrt[3]{4}$.

6. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{x^2} 则 $\int xf'(x)dx=$ ______

$$\int xf'(x)dx=\int x\,df(x)=xf(x)-\int f(x)dx$$

$$=x\cdot(e^{x^2})'-e^{x^2}+C = x\cdot e^{x^2}\cdot 2x-e^{x^2}+C$$

7. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x}dx \overset{凑}{=} \int_1^e \sqrt{1+2\ln x}\,d\ln x$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{1+2\ln x}\,d(1+2\ln x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot(1+2\ln x)^{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^e = \frac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}}-1)=\sqrt{3}-\frac{1}{3}$$

8 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

$=\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$

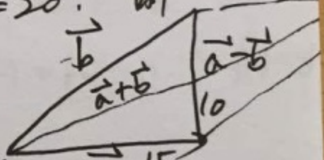
$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

9. 设方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 有两个特解 $y_1=3+x^2+e^{-x}$，$y_2=3+x^2$，且对应齐次方程的一个解为 $y_3=x$. 则该方程的通解为 ________

$y_1-y_2=e^{-x}$.　　方程通解为 $C_1x+C_2e^{-x}+3+x^2$

任取一个.

10. 已知 $|\vec{a}|=15$，$|\vec{b}|=25$，$|\vec{a}+\vec{b}|=20$. 则



$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{15^2+10^2}=10\sqrt{13}$

考向量加减法的平行四边形法则

高数上期末试题5

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-3}\cdot\frac{-3n}{n+1}}=e^{-3}$

2 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\le 0\\ \frac{\sin bx}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续. 则 a、b

应满足 $a=b$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a = f(0)$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b = f(0)$

3. 曲线 $y = x^2 e^{-x^2} + \arctan x$ 的水平渐近线是

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^2 e^{-x^2}}_{0} + \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$

4. 设曲线 $y = \frac{3}{7-x^n}$ 在点 $(1, \frac{1}{2})$ 处的切线与 x 轴交点

为 $(\xi_n, 0)$, $(n=1, 2, 3\cdots)$ 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\xi_n =$

$$y' = \frac{-3\cdot(-nx^{n-1})}{(7-x^n)^2} = \frac{3nx^{n-1}}{(7-x^n)^2}\Big|_{(1, \frac{1}{2})} = \frac{3n}{36}$$

切线 $y - \frac{1}{2} = \frac{n}{12}(x-1)$, 令 $y=0$ 得 $\xi_n =$

$$x-1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{n} = -\frac{6}{n} \qquad x = 1-\frac{6}{n} = \xi_n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\ln\xi_n = \lim_{n\to\infty} n\ln(1-\frac{6}{n}) = \lim_{n\to\infty} n\cdot(-\frac{6}{n}) = -6$$

5 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} = -\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \frac{-(1+t^2)}{4t^3}$$

6 设$f(x)$的一个原函数是$F(x)$，a、b均为非零常数，则

$$\int f(a^2x+b)\,dx=\frac{1}{a^2}F(a^2x+b)+C.$$ （凑微分法）

7. $$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2-2x+x^2}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\ \overset{令}{\underset{x-1=\tan t}{=\!=}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec t}\,dt=\ln|\sec t+\tan t|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

8 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+4}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$$

9. 设$y_0(x)$是 $y''+7y'+10y=0$ 满足初始条件 $y(0)=3$、$y'(0)=-12$ 的特解，则 $\int_0^{+\infty}y_0(x)\,dx=$

解：$r^2+7r+10=0$　　$r_1=-2$．$r_2=-5$

$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-5x}$　　$y(0)=3$ 得 $C_1+C_2=3$

$y'=-2C_1e^{-2x}-5C_2e^{-5x}$　　$y'(0)=-12$　$-2C_1-5C_2=-12$

$\therefore -3C_2=-6$　　$C_2=2$．$C_1=1$

$$\therefore\int_0^{+\infty}(e^{-2x}+2e^{-5x})\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{2}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$$

10 已知平面π过点(-1、2、3)．且与直线

$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ 垂直．则π的方程是

$\vec{n}=(1,1,-2)\times(2,1,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,-5,-1)$

∴ 平面方程为 $3(x+1)-5(y-2)-(z-3)=0$

期末试题上 6．

7．$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx \xlongequal{\text{根据积分}} \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$

$=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\arcsin\sqrt{x}\,d\arcsin\sqrt{x}$

$=2\cdot\frac{1}{2}(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=(\frac{\pi}{2})^2-(\frac{\pi}{4})^2=\frac{3}{16}\pi^2$

8 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{5+4x+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{\pi}{2}-\arctan 2$

9 $yy''-2(y')^2=0$ 满足条件 $y(0)=1$．$y'(0)=-1$ 的特解

不显含 x．令 $y''=p'=p\frac{dp}{dy}$

$y\cdot p\frac{dp}{dy}-2p^2=0$ $\quad p\neq 0\quad y\frac{dp}{dy}=2p\qquad \frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y}$

$\ln p=\ln y^2+C'$．$\qquad p=Cy^2\qquad C=-1$

$p\frac{dp}{dy} = -y^2$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -y^2$, $\qquad \frac{dy}{-y^2} = dx$

$\frac{1}{y} = x + c$ $\qquad y = \frac{1}{x+c}$ $\qquad c = 1$

$\therefore y = \frac{1}{x+1}$

10. $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-7,\ 2,\ -3)$

$\therefore \frac{x+2}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-3}$