Linear Algebra–第零章

代数学的经典课题

杨勇

Beijing Univ. of Posts and Telecom.

October 17, 2019

引言

代数学是一个历史悠久的数学分支，它有着十分广泛的应用领域. 从本来的意义上说，代数学研究数和它的加、减、乘、除四则运算 (统称代数运算). 因此，代数学的知识渗透到人类的生产实践、社会实践以至日常生活的一切领域. 它的基本知识是每个人都需要具备的. 从小学到现在的启蒙或普及教育中，代数是贯穿始终的一门主课. 从中学毕业出来的青年学生，已经对数及其四则运算有了丰富的感性认知和初步的理论知识.

但是，在这个人人熟悉的，粗看起来似乎颇为简单的领域中，其实蕴含着十分丰富的、十分深奥的知识. 其中许多课题至今仍然远远没有被人们弄清楚. 举一个典型的例子: 大约在 1637 年，法国数学家 Fermat 断言，对于大于 2 的整数 n，未知量 x, y, z 的代数方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有整数解. 这个问题中，只涉及到正整数的加法与乘法 (乘方) 运算，可以说是再简单不过了，具有初中一年级代数知识的人都能看明白.

但是它历经 350 年, 无数第一流的数学家为止绞尽脑汁, 才于 1994 年被 Princeton 大学的数学家 Wiles 使用现代最深奥的数学理论得出解答. 这一例子说明, 根植于数及其代数运算的理论这一片沃土上的代数学, 在经过漫长的发展 g 过程之后, 无疑成为一个内容十分丰硕的理论学科.
线性代数是代数学的入门课, 它的任务是阐述一些代数学的基础知识, 使我们了解一些代数学的研究对象, 初步掌握代数学的基本思想和处理问题时特有的一套基本方法. 我们在这门课中大致从两个方面来进入这个课题.

首先，从生产实践和自然科学理论中，自然地产生了求解代数方程的问题，它就是代数学的经典课题．例如，根据牛顿第二定律，物体所受的力 F，它的质量 m 和产生的加速度 a 之间存在关系 $F = ma$．如果已知物体的质量 m 和所受的力 F，求加速度 a，这就是一元一次方程的求解问题．又比如，一个以初速 v_0 在水平面上作匀加速运动的物体，它的加速度 a，运动时间 t 和移动的距离 S 满足

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{1}$$

如果已知 S, v_0, a，求运动时间 t，这就是求一元二次方程的根．

数学史表明，早在中世纪人们就已经找到解一元一次、二次代数方程的一般方法．到欧洲的文艺复兴时代，又找到一元三次、四次方程的求根公式．但是，随后的数学家们就碰到难题了．在数百年内，他们苦苦寻求五次以上代数方程的求根公式，却总是遭到失败．

直到 1832 年, 法国数学家 Galois 才找到了一个找到了一个高次代数方程有根式解 (即用该方程的系数经加、减、乘、除及开方运算表示它的全部根) 的判别准则, 完美地解决了高次代数方程根的理论难题. 根据 Galois 的理论, 五次及以上的一般代数方程是没有求根公式的. Galois 的工作中最值得注意的是, 他不局限于在数的四则运算的范围内来考察问题. 他跳出这个圈子, 考察 n 次方程的 n 个根的某些置换所组成的集合 G, 规定 G 内两个置换的" 乘积" 是对根的集合逐次进行这两个置换. 于是, 他在一个并非由数组成的集合 G 内定义了一种新的代数运算: 乘法 (它完全不同于数的乘法). 他发现这种乘法也具有与数的乘法相类似的某些运算法则 (例如满足结合律等等). 这个新的具有乘法运算的集合我们现在把它称为该高次代数方程的 Galois 群. Galois 证明了: 高次代数方程有没有根式解取决于它的 Galois 群的结构 (是不是可解群). 这样, 人们的认识发生了一个质的飞跃, 那就是为了研讨数及其代数运算中所包含的深刻规律, 我们必须跳出数及其四则运算的框框, 去研究一个更一般的集合及其中应有的代数运算.

这样, 代数学发生了一个革命性的变化: 从研究代数方程的求根这一经典的课题中解脱出来, 变成研究一个一般的集合 (其元素可以完全抽象, 没有具体内容), 在其中存在一种或若干种代数运算 (这种运算可以不同于数的四则运算, 甚至可以是抽象定义的), 同时, 要求这些运算要满足一定的运算法则. 这样的一个体系我们称之为一个代数系统. 现代的代数学的研究对象就是各种各样的代数系统以及它们之间的相互关系.

Galois 的理论有相当的深度和难度, 我们没有可能在这门课程中来讲授它. 但是, 我们却发现, 如果考查一类较简单的代数方程: 多元一次代数方程的问题, 它也同样把我们引导到同样的领域中去.

谢 谢