概率论与随机过程作业

杨勇

年月日

Yang9458415448@bupt.edu.cn

目次

第一章概率空间

习题 设$A_1, A_2, \cdots$为任一集序列若令

$$A_1' = A_1, A_n' = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, n = 2, 3, \cdot.$$

试证$A_1', \cdots, A_n', \cdots$两两互不相交且

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'.$$

证明为表达方便令$A_0 = \varnothing$我们先证明$\{A_n' : n \in \mathbb{N}^*\}$互不相交据律知

$$A_n' = A_n A_0^c \cdots A_{n-1}^c$$

对任何不等的$j, k \in \mathbb{N}^*$无妨$j < k$这时有$A_k' \subset A_j^c$而$A_j' \subset A_j$这说明$A_k' A_j' = \varnothing$

一方面若$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'$则$\exists n \in \mathbb{N}^* (\omega \in A_n')$.由于$A_n' \subset A_n$故有$\exists n \in \mathbb{N}^* (\omega \in A_n)$.即

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n' \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

令一方面设$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$根据并的定义知$\exists n \in \mathbb{N}^* (\omega \in A_n)$.

此时必有整数$k \in \{1, \cdots, n\}$使得$\omega \notin A_0, \cdots, A_{k-1}$但$\omega \in A_k$否则$\omega \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k$矛盾即$\omega \in A_k'$所以有$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'$

这说明

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'.$$

结合式与知道结论成立 □

习题 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间$A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots$试证

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \{\omega : \omega \text{属于无穷多个} A_n\}, \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = \{\omega : \omega \text{只不属于有限多个} A_n\}.$$

证明若$\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$则根据交与并的定义知道

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geqslant n \left(\omega \in A_k\right).$$

这说明$\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$当且仅当$\omega$属于集列$\{A_j\}$中的无穷多个集合

若$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$则根据交与并的定义知道

$$\exists j_0 \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant j_0 \left(x \in A_k\right).$$

这说明$\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$当且仅当$\omega$仅不属于集列$\{A_j\}$中的有限多个集合 $\square$

习题 若记

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A^\star = \underset{n\to\infty}{} A_n,$$

称为集序列$\{A_n\}$的上限集若记

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = A_\star = \underset{n\to\infty}{} A_n,$$

称为集序列$\{A_n\}$的下限集试证

$\underset{n\to\infty}{} A_n \subset \underset{n\to\infty}{} A_n$

若$A_n \uparrow$则$A^\star = A_\star = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$

若$A_n \downarrow$则$A^\star = A_\star = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$

若A为任一集合则$A \backslash A_\star = \underset{n\to\infty}{} (A \backslash A_n), A \backslash A^\star = \underset{n\to\infty}{} (A \backslash A_n)$

证明

根据习题知道$\omega \in A_\star$当且仅当除去集列$\{A_j\}$中的有限个集合外元ω属于该序列的其余集合这可推出ω属于集列$\{A_j\}$中的无穷多个集也就是$\omega \in A^\star$即证

不难看出对一般的集合列$\{A_j\}$总有下列的包含关系

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \mathop{}_{n\to\infty} A_n \subset \mathop{}_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

若$\{A_n\}$非降则$\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n$所以$\mathop{}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$结合式知结论成立
$\{A_n\}$非增则$\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n$所以$\mathop{}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$结合式知结论成立
回忆法则

$$A \backslash \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A\backslash B_\lambda), A\backslash \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A\backslash B_\lambda).$$

我们由此知道

$$\begin{aligned} A\backslash \mathop{}_{n\to\infty} A_n &= A\backslash \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(A\backslash \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} (A\backslash A_k) = \mathop{}_{n\to\infty} (A\backslash A_n), \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} A\backslash \mathop{}_{n\to\infty} A_n &= A\backslash \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A\backslash \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} (A\backslash A_k) = \mathop{}_{n\to\infty} (A\backslash A_n). \end{aligned}$$

□

习题 证明包含一切形如$(-\infty, x)$的区间的最小σ代数是一维域

证明根据定义一维σ代数$\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$是由π系$\mathscr{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$生成的$\sigma$代数

$$\mathscr{B}_R = \sigma(\mathscr{P}_{\mathbb{R}}).$$

对任意$a \in \mathbb{R}$我们有

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right) = (-\infty, a], \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n} \right] = (-\infty, a)$$

因此对任何$x \in \mathbb{R}, (-\infty, x) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$所以$\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$

另外对任何$x \in \mathbb{R}, (-\infty, x] \in \sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\})$所以$\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) \supset \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$
二者结合起来便说明$\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ □

习题 求包含二集合A, B的最小σ代数其中$\Omega, AB \neq \varnothing, A \cup B \neq \Omega$且$A, B$互不包含

解 所求的集合系为

$$\mathscr{A} = \{\varnothing, A, B, A \cup B, A \triangle B, A \backslash B, B \backslash A, \Omega, A^c, B^c, A^c B^c, AB^c, BA^c, (AB)^c, (A \triangle B)^c\}$$

证明由于$\mathscr{A}$对任何可列次的集合运算封闭且$\Omega \in \mathscr{A}$所以$\mathscr{A}$是σ代数又因为σ代数对有限次的集合运算都封闭所以任何一个包含$\{A, B\}$的σ代数都包含$\mathscr{A}$中的所有集因此集类$\mathscr{A} = \sigma(\{A, B\})$ □

习题 若$\mathscr{G} = \{A_k : A_k \subset \Omega, k = 1, 2, \cdots,$ 两两不交$\}$试求$\sigma(\mathscr{G})$

解 引入$A_0 = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\right)^c$则所求为

$$\sigma(\mathscr{G}) = \left\{\bigcup_{k \in K} A_k : K \subset \mathbb{N}\right\}.$$

证明不妨记式右端为$\mathscr{D}$由于σ代数是对于可列并的运算以及补的运算封闭的故$\sigma(\mathscr{G}) \supset \mathscr{D}$因此要完成这个定理的证明必须且只需证$\sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{D}$为此又只需证$\mathscr{D}$是$\sigma$代数下面分别验证$\sigma$代数的三个条件

$\Omega = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathscr{D}$

$A = \bigcup\limits_{k \in K} A_k \in \mathscr{D} \Rightarrow A^c = \bigcup\limits_{k \in (\mathbb{N} \backslash K)} A_k \in \mathscr{D}$

对$B_n \in \mathscr{D}, n \in \mathbb{N}^*$有对应的$K_n \in \mathbb{N}$使$B_n = \bigcup_{k \in K_n} A_k, n = 1, 2, \cdots$这时

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k \in K_n} A_k = \bigcup_{k \in K} A_k \in \mathscr{D}, K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n.$$

由此知道$\mathscr{D}$确是σ代数 □

习题 设Ω是不可列集$\mathscr{A}$是Ω的一切有限子集、可列子集及以有限子集或可列子集为余集的子集所作成的集合类试证$\mathscr{A}$是一σ代数

证明对集类$\mathscr{A}$分别验证σ代数的三个条件

由于$\varnothing$是Ω的一个有限子集所以$\Omega = \varnothing^c \in \mathscr{A}$

设$A \in \mathscr{A}$即A是Ω的至多可列子集或以Ω的至多可列子集为余集的子集则A^c分别是Ω的以至多可列子集为余集的子集或Ω的至多可列子集因此$A^c \in \mathscr{A}$

设$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$若诸$A_j$均是$\Omega$的至多可列子集则$\cup_j A_j$仍是$\Omega$的至多可列子集若诸$A_j$中至少有一个是以$\Omega$的至多可列子集为余集的子集则$\cup_j A_j$仍是以$\Omega$的至多可列子集为余集的子集

所以总有$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

由此知道$\mathscr{A}$确是σ代数 □

习题 设$\mathscr{G}$是由Ω的子集组成的集合类A是Ω的一个非空子集令

$$\mathscr{G} \cap A = \{A' : A' = B \cap A, B \in \mathscr{G}\},$$

试证$\sigma(\mathscr{G}) \cap A$是以$A$为空间的包含集合类$\mathscr{G} \cap A$的最小$\sigma$代数

证明先证明$\sigma(\mathscr{G}) \cap A = \{BA : B \in \sigma(\mathscr{G})\}$是以$A$为空间的一个$\sigma$代数为此我们分别对它验证$\sigma$代数的三个条件

因$\Omega \in \sigma(\mathscr{G})$所以$A = \Omega \cap A \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$

设$E \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$即$E = AB$其中$B \in \sigma(\mathscr{G})$$E$相对$A$的补是$A \backslash E = A \backslash AB = AB^c$因为$B^c \in \sigma(\mathscr{G})$所以$A \backslash E \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$

设$E_1, E_2, \cdots \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$即$E_j = AB_j$其中$B_j \in \sigma(\mathscr{G}), j \in \mathbb{N}^*$由于$\sigma(\mathscr{G})$是一个$\sigma$代数所以$\cup_{j=1}^{+\infty} B_j \in \sigma(\mathscr{G})$这说明

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} AB_j = A\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j\right) \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A.$$

再设某个以A为空间的σ代数$\mathscr{E} \supset (\mathscr{G} \cap A)$下证$(\sigma(\mathscr{G}) \cap A) \subset \mathscr{E}$因$\mathscr{E} \supset (\mathscr{G} \cap A)$所以$\forall B \in \mathscr{G}, AB \in \mathscr{E}$令

$$\mathscr{H}_A = \{H \subset \Omega : AH \in \mathscr{E}\}.$$

则$\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_A$继续证明$\mathscr{H}_A$是一个$\sigma$代数注意到$\mathscr{E}$是以$A$为空间的一个$\sigma$代数所以有

$A\Omega = A \in \mathscr{E}$即$\Omega \in \mathscr{H}_A$

设$H \in \mathscr{H}_A$则$AH \in \mathscr{E}$利用上面条件有$AH^c = A \backslash AH \in \mathscr{E}$这说明$H^c \in \mathscr{H}_A$

再设$H_1, H_2, \cdots \in \mathscr{H}_A$则$AH_j \in \mathscr{E}, j = 1, 2, \cdots$再次利用$\mathscr{E}$是以$A$为空间的一个$\sigma$代数得到

$$A\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} H_j\right) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} AH_j \in \mathscr{E}.$$

这说明$\bigcup_{j=1}^{+\infty} H_j \in \mathscr{H}_A$

因此$\mathscr{H}_A$确是个σ代数又因为$\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_A$根据$\sigma$代数的生成的定义$\sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{H}_A$

即

$$\forall B \in \sigma(\mathscr{G}), \text{总有} BA \in \mathscr{E}.$$

这正是$(\sigma(\mathscr{G}) \cap A) \subset \mathscr{E}$ □

习题 设A是Ω的一个子集$\mathscr{G}$是Ω的包含A的一切子集所组成的集合类试问$\sigma(\mathscr{G})$是由哪些子集组成的

解

$$\sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{G} \cup \{G \cup A^c : G \in \mathscr{G}\}.$$

习题 设$\xi(\omega)$是定义在Ω上而值域为$\mathbb{R}^{(1)}$的单值实函数$B \subset \mathbb{R}^{(1)}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$表示使$\xi(\omega)$的值属于$B$的一切$\omega(\in \Omega)$的集合试证

$\overline{\{\omega : \xi(\omega) \in B\}} = \{\omega : \xi(\omega) \in \overline{B}\}$

若$B_k \subset \mathbb{R}^{(1)}, k = 1, 2, \cdots$则有

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\omega : \xi(\omega) \in B_k\} = \left\{\omega : \xi(\omega) \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right\}.$$

映射的原像

设映射$\varphi : A \to B$集合$D \subset B$的原像定义为

$$\varphi^{-1}(D) \triangleq \{x \in A : \varphi(x) \in D\}.$$

有这样两个关于映射与集合运算之间关系的公式

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}\left(E_\lambda\right);$$
$$\left(\varphi^{-1}(D)\right)^c=\varphi^{-1}(D^c).$$

我们愿意在此重新温习一下它的证明

证明

$$\begin{aligned}
x\in\varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right) &\Longleftrightarrow \exists y\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\left(y=\varphi(x)\right)\\
&\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\Lambda\exists y\in E_\lambda\left(y=\varphi(x)\right)\\
&\Longleftrightarrow \exists\lambda\in\Lambda\left(x\in\varphi^{-1}(E_\lambda)\right)\\
&\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}\left(E_\lambda\right)
\end{aligned}$$

还需要讨论空集的情况

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)=\varnothing &\Longleftrightarrow \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)\bigcap\varphi=\varnothing\\
&\Longleftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda\left(E_\lambda\cap\varphi\right)=\varnothing\\
&\Longleftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda\left(\varphi^{-1}(E_\lambda)=\varnothing\right)\\
&\Longleftrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(E_\lambda)=\varnothing.
\end{aligned}$$

再考虑另一个公式

$$\begin{aligned}
x\in\left(\varphi^{-1}(D)\right)^c &\Longleftrightarrow x\notin\varphi^{-1}(D)\Longleftrightarrow\varphi(x)\notin D\\
&\Longleftrightarrow \varphi(x)\in D^c\Longleftrightarrow x\in\varphi^{-1}(D^c)
\end{aligned}$$

□

利用这两个公式就容易完成本题的证明

证明

$$\overline{\{\omega:\xi(\omega)\in B\}}=\left(\xi^{-1}(B)\right)^c=\xi^{-1}(B^c)=\{\omega:\xi(\omega)\in\overline{B}\};$$

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{\omega:\xi(\omega)\in B_k\}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\xi^{-1}(B_k)=\xi^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k\right)=\left\{\omega:\xi(\omega)\in\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k\right\}.$$

$\square$

第二章随机变量和可测函数随机变量的分布

习题 设$F(x)=P(\xi<x)$试证$F(x)$单调不减、左连续且$F(-\infty)=0F(+\infty)=1$

证明若$x_1<x_2$则$\{\xi<x_2\}=\{\xi<x_1\}\cup\{x_1\leqslant\xi<x_2\}$注意到等式右边的两个集合不交故

$$F(x_2)=P(\xi<x_2)=P(\xi<x_1)+P(x_1\leqslant\xi<x_2)\geqslant P(\xi<x_1)=F(x_1).$$

由于函数$F(x)$单调且有界所以它必存在单侧极限为了证明$F(x-0)=F(x)$必须且只需对某一列$\{x_n\}x_1<x_2<\cdots,x_n\to x$有$\underset{n\to\infty}{}F(x_n)=F(x)$即可令

$$A_n=\left\{x_n=x-\frac{1}{n}\leqslant\xi<x\right\},$$

则$A_n\supset A_{n+1}$且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$利用概率测度在$\varnothing$处上连续得到

$$\underset{n\to\infty}{}F(x_n)-F(x)=\underset{n\to\infty}{}[F(x_n)-F(x)]=\underset{n\to\infty}{}P(A_n)=P(\varnothing)=0.$$

令$B_n=\{\xi<-n\}$则$B_n\downarrow\varnothing$类似地令$C_n=\{\xi<n\}$则$C_n\uparrow\Omega$由F的单调性和概率测度P的连续性

$$F(+\infty)=\underset{n\to\infty}{}F(n)=\underset{n\to\infty}{}P(C_n)=P(\Omega)=1,$$
$$F(-\infty)=\underset{n\to\infty}{}F(-n)=\underset{n\to\infty}{}P(B_n)=P(\varnothing)=0.$$

□

习题 设随机变量ξ取值于$(0,1)$若对一切$0<x\leqslant y<1$，$P(x<\xi\leqslant y)$只与长度$y-x$有关试证ξ服从$(0,1)$上的均匀分布

证明设ξ的是$F(x)$由于ξ取值于$(0,1)$所以当$x<0$时$F(x)=0$当$x\geqslant1$时$F(x)=1$当$0\leqslant x\leqslant1$时$F(x)=P(0<\xi\leqslant x)$

若正数x, y满足$x+y<1$则

$$F(x+y)=P(0<\xi\leqslant x+y)=P(0<\xi\leqslant x)+P(x<\xi\leqslant x+y)=F(x)+F(y).$$

对正整数n, m有

$$1=F(1)=F(1/m+1/m+\cdots+1/m)=mF(1/m).$$

于是$F(1/m)=1/mF(n/m)=F(1/m+1/m+\cdots+1/m)=nF(1/m)=n/m$
对$0\leqslant x<1$存在有理数列$[0,1]\ni x_n\downarrow x$于是$F(x)=_{n\to\infty} F(x_n)=_{n\to\infty} x_n=x$
由此ξ的是

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ x, 0\leqslant x<1,\\ 1, x\geqslant 1.\end{cases}$$

所以$\xi\sim\mathcal{U}(0,1)$ □

习题 试证$f(x,y)=k^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$为分布密度的充要条件是$a>0c>0ac-b^2>0k=\sqrt{ac-b^2}/\pi$

证明条件必要根据$f\geqslant 0$知$k>0$再根据

$$1=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)xy=k\iint_{\mathbb{R}^2}\left[-a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2\right]xy$$

知道$a>0ac-b^2>0k=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{ac-b^2}$
条件充分当$a>0c>0ac-b^2>0k=\sqrt{ac-b^2}/\pi$时根据前面的计算显然有$f\geqslant 0\iint fxy=1$从而$f$是密度函数 □

习题 若(ξ,η)的分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad ,\end{cases}$$

试求
常数A

关于$\xi\eta$的边沿密度
$f_{\xi|\eta}(x|y)$
$P(\xi \leqslant x|\eta < 1)$

解 根据$\iint f(x,y)xy = 1$得到$A = 2$
根据(ξ,η)的联合密度形式知道$\xi \sim \mathcal{E}(2)\eta \sim \mathcal{E}(1)$且$\xi$和$\eta$独立因此$\xi$和$\eta$的边沿密度分别为

$$f_\xi(x) = 2^{-2x}\mathbf{1}_{(x>0)}, f_\eta(x) = ^{-y}\mathbf{1}_{(y>0)}.$$

由于ξ与η独立所以有当$y > 0$时

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = f_\xi(x) = 2^{-2x}\mathbf{1}_{(x>0)}.$$

由于ξ与η独立所以

$$P(\xi \leqslant x|\eta < 1) = P(\xi \leqslant x) = \begin{cases} 1 - ^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

习题 求证若$F(x)$为分布函数则对任意$h > 0$函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(y)y, \Phi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)y$$

都是分布函数

解 先证明两个函数都是单调非降的设$a < b$根据F的单调性可知对第一个函数

$$\begin{aligned}\Phi(b) - \Phi(a) &= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} F(y)y - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(y)y \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h [F(b+u) - F(a+u)]\, u \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

类似地对第二个函数

$$\begin{aligned}\Phi(b) - \Phi(a) &= \frac{1}{h}\int_{b-h}^{b+h} F(y)y - \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h} F(y)y \\ &= \frac{1}{h}\int_{-h}^h [F(b+u) - F(a+u)]\, u\end{aligned}$$

$$\geqslant 0.$$

再证明两个函数都是右连续的根据$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$可知对第一个函数

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \varPhi(a+\Delta x) - \varPhi(a) \\
&= \frac{1}{h}\int_{a+\Delta x}^{a+\Delta x+h} F(y)y - \frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} F(y)y \\
&= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+\Delta x+h} F(y)y - \frac{1}{h}\int_{a}^{a+\Delta x} F(y)y \\
&\geqslant \frac{2\Delta x}{h} \to 0, \Delta x \to 0.
\end{aligned}$$

类似地对第二个函数

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \varPhi(a+\Delta x) - \varPhi(a) \\
&= \frac{1}{2h}\int_{a+\Delta x-h}^{a+\Delta x+h} F(y)y - \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} F(y)y \\
&= \frac{1}{2h}\int_{a+h}^{a+\Delta x+h} F(y)y - \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a-h+\Delta x} F(y)y \\
&\geqslant \frac{\Delta x}{h} \to 0, \Delta x \to 0.
\end{aligned}$$

最后证明$\varPhi(+\infty) = 1\varPhi(-\infty) = 0$根据$F$的单调性我们有对第一个函数

$$F(x) \leqslant \varPhi(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} F(y)y \leqslant F(x+h)$$

对第二个函数

$$F(x-h) \leqslant \varPhi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)y \leqslant F(x+h)$$

由极限的夹挤准则知结论成立

习题 设ξ, η独立且都服从分布

$$\begin{aligned}
P(\xi = m) &= \frac{\lambda_1^m}{m!}^{-\lambda_1}, m = 0, 1, 2, \cdots \\
P(\eta = n) &= \frac{\lambda_2^n}{n!}^{-\lambda_2}, n = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

求证

$\xi + \eta$仍服从分布

$$P(\xi=k|\xi+\eta=N)=\binom{N}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{N-k},k=0,1,\cdots,N.$$

习题 设ξ,η独立且分布密度分别为

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},1<x<3,\\0,,\end{cases}\quad f_\eta(y)=\begin{cases}^{-(y-2)},y>2,\\0,\quad ,\end{cases}$$

求证

$$f_{\xi/\eta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}^2\left[^{-1/x}(1+x)-{}^{-3/x}(x+3)\right],0<x<\frac{1}{2},\\\frac{3}{2}-\frac{2}{2x}{}^{-3/x}(x+3),\quad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},\\0,\quad .\end{cases}$$

习题 设$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$对应的分布函数为$F_1(x),F_2(x),F_3(x)$证明对一切$\alpha-1<\alpha<1$下列函数是分布密度且有相应的边沿密度$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$

$$\begin{aligned}&f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\\=&f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)\{1+\alpha[2F_1(x_1)-1][2F_2(x_2)-1][2F_3(x_3)-1]\}.\end{aligned}$$

习题 设(ξ,η,ζ)的分布密度为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{6}{(1+x+y+z)^4},x>0,y>0,z>0,\\0,\quad ,\end{cases}$$

试求$U=\xi+\eta+\zeta$的分布密度

解 我们愿意用一个初等的结论设$g(x)$可积并设Ω_a是$\mathbb{R}^n$中的如下区域

$$\Omega_a=\{(x_1,\cdots,x_n):0\leqslant\sum_{j=1}^n x_j\leqslant a,x_j\leqslant 0,j=1,\cdots,n\}.$$

则

$$\int_{\Omega_a} g(x_1+\cdots+x_n)x_1\cdots x_n = \int_0^a \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g(x)x.$$

由此可以第五节一中的方法求解本题

$$F_U(u) = \iiint_{\{x+y+z\leqslant u\}} f(x,y,z)xyz = \int_0^u \frac{3x^2}{(1+x)^4}x,$$

可见U的概率密度函数为

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{3u^2}{(1+u)^4}, u > 0, \\ 0, \qquad\quad u \leqslant 0. \end{cases}$$

习题 设ξ,η独立且均服从$\mathcal{N}(0,1)$证明$U=\xi^2+\eta^2$与$V=\dfrac{\xi}{\eta}$是独立的

证明设$D=\{(u,v): u>0, -\infty<v<\infty\}$则$P((U,V)\in D)=1$对$(u,v)\in D$有

$$\{U=u, V=v\} = \{\xi=x,\eta=y\}\cup\{\xi=-x,\eta=-y\}$$

其中

$$x = v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}, y = \sqrt{\frac{u}{1+v^2}}.$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}^{-1} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-1}{2(1+x^2/y^2)} = \frac{-1}{2(1+v^2)}. \end{aligned}$$

由此可得(U,V)的联合密度

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(x,y)|J| + f(-x,-y)|J| \\ &= \frac{1}{2}(-u/2)\frac{1}{\pi(1+v^2)}\mathbf{1}_{(u,v)\in D}. \end{aligned}$$

由于联合密度$g(u,v)$可分离变量且定义域为矩形区域所以U,V独立 □

习题 设ξ,η独立且它们的分布密度为

$$f_\xi(x)=f_\eta(x)=\begin{cases}^{-x},x>0,\\0,\ \ x\leqslant 0.\end{cases}$$

试研究$\xi+\eta$与$\dfrac{\xi}{\xi+\eta}$是否独立

解 记$U=\xi+\eta V=\dfrac{\xi}{\xi+\eta}$则

$$\{U=u,V=v\}=\{\xi=uv,\eta=u(1-v)\}.$$

$$J=\begin{pmatrix}v & u\\1-v & -u\end{pmatrix}=-u$$

由此可得(U,V)的联合密度

$$\begin{aligned}g(u,v)&=f_\xi(uv)f_\eta(u(1-v))|J|\\&=u^{-u}\mathbf{1}_{(uv>0,u(1-v)>0)}\\&=u^{-u}\mathbf{1}_{(u>0)}\mathbf{1}_{(0<v<1)}.\end{aligned}$$

由于联合密度$g(u,v)$可分离变量且定义域为矩形区域所以U,V独立

习题 证明任一广义分布函数最多有可列个不连续点

证明设F是一个广义分布函数即F是一个$\mathbb{R}$上的非降右连续的实值函数若x_0是$F(x)$的不连续点则有

$$F(x_0-0)<F(x_0+0).$$

因此x_0就对应着一个开区间$(F(x_0-0),F(x_0+0))$对于两个不同的不连续点x_1及x_2区间$(F(x_1-0),F(x_1+0))$与$(F(x_2-0),F(x_2+0))$不交因而F的不连续点构成一个$\mathbb{R}$上的互不相交的开区间族所以它是至多可列集设$\mathscr{G}$是$\mathbb{R}$中互不相交的开区间族可从每个区间取一个有理数而有理数是可列集从而$\mathscr{G}$是至多可列集 □

第三章随机变量的数字特征

习题 设ξ,η是两个相互独立的随机变量且$(\xi)<\infty(\eta)<\infty$试证

$$(\xi\eta)=(\xi)(\eta)+\left[(\xi)\right]^2(\eta)+\left[(\eta)\right]^2(\xi).$$

证明反复利用结论$(X)=X^2-(X)^2$

则等式左边可以化为

$$\begin{aligned}(\xi\eta)=&\left[(\xi\eta)^2\right]-\left[(\xi\eta)\right]^2\\=&(\xi^2)(\eta^2)-\left[(\xi)\right]^2\left[(\eta)\right]^2.\end{aligned}$$

而等式右边为

$$\begin{aligned}&(\xi)(\eta)+\left[(\xi)\right]^2(\eta)+\left[(\eta)\right]^2(\xi)\\=&\left(\xi^2\right)(\eta)+\left[(\eta)\right]^2(\xi)\\=&\left(\xi^2\right)\left\{\left(\eta^2\right)-\left[(\eta)\right]^2\right\}+\left[(\eta)\right]^2\left\{\left(\xi^2\right)-\left[(\xi)\right]^2\right\}\\=&(\xi^2)(\eta^2)-\left[(\xi)\right]^2\left[(\eta)\right]^2.\end{aligned}$$

因而二者相等 □

习题 设随机变量ξ的分布函数为$F(x)$若(ξ)有限则

$$\underset{x\to-\infty}{}xF(x)=0,\quad\underset{x\to\infty}{}x\left[1-F(x)\right]=0;$$

$$(\xi)=\int_0^{+\infty}\left[1-F(x)-F(-x)\right]x.$$

证明由于$(\xi^+) = \int_0^{+\infty} xF(x) < +\infty$则${}_{A\to\infty} \int_A^{+\infty} xF(x) = 0$故

$$0 \leqslant A(1-F(A)) = A\int_A^{+\infty} F(x) \leqslant \int_A^{+\infty} xF(x) \to 0 A \to \infty.$$

类似地，根据$(\xi^-) = \int_{-\infty}^{0} xF(x) < +\infty$则${}_{A\to-\infty} \int_{-\infty}^{A} xF(x) = 0$因此

$$0 \leqslant AF(A) = A\int_{-\infty}^{A} F(x) \leqslant \int_{-\infty}^{A} xF(x) \to 0 A \to -\infty.$$

利用分部积分公式

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} [1-F(x)-F(-x)]\, x &= {}_{A\to+\infty} \int_0^{A} [1-F(x)-F(-x)]\, x \\
&= {}_{A\to+\infty} \left(x(1-F(x))\big|_0^A + xF(x)\big|_{-A}^{0} + \int_{-A}^{A} xF(x) \right) \\
&\geqslant {}_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} xF(x).
\end{aligned}$$

由此知道

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} [1-F(x)-F(-x)]\, x \\
&= {}_{A\to+\infty} x(1-F(x))\big|_0^A + {}_{A\to+\infty} xF(x)\big|_{-A}^{0} + {}_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} xF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xF(x) = (\xi).
\end{aligned}$$

□

习题 设$\{\xi_n, n \geqslant 1\}$是均值有限的同分布的随机变量列证明

$${}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[{}_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j|\right] = 0.$$

习题 设$r > 1\xi$为非负随机变量证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^r}(\xi \wedge u^r) u = \frac{r}{r-1}(\xi^{1/r}).$$

其中$\xi \wedge u^r = (\xi, u^r)$

习题 设$\xi\eta$是取非负整数的独立随机变量$(\xi) < \infty(\eta) < \infty$试证

$$(\xi) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(\xi \geqslant m);$$

$$(\xi) = 2\sum_{m=1}^{+\infty} mP(\xi \geqslant m) - (\xi)\left[(\xi) + 1\right];$$

$$[(\xi, \eta)] = \sum_{m=1}^{\infty} P(\xi \geqslant m)P(\eta \geqslant m).$$

习题 假设ξ是非负随机变量只取有限个值$x_1, \cdots, x_m$试证明

$$_{n\to\infty} \frac{(\xi^{n+1})}{(\xi^n)} = _{n\to\infty} \sqrt{(\xi^n)} = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}.$$

习题 设$\xi_1, \cdots, \xi_n$是任意n个独立同分布的正值随机变量试证明对任意$1 \leqslant k < n$有

$$\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_k}{\xi_1 + \cdots + \xi_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

习题 假设随机变量$\xi_1, \cdots, \xi_n \eta_1, \cdots, \eta_n$相互独立其中$\xi_i = \mu(\xi_i) = \sigma^2 i = 1, \cdots, n$而$\eta_j j = 1, 2, \cdots, n$服从参数为$p$的$0-1$分布令

$$\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \zeta_n^* = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n,$$

求$(\zeta_n), (\zeta_n), (\zeta_n^*), (\zeta_n^*)$

习题 若ξ_1, ξ_2相互独立均服从$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$试证

$$[(\xi_1, \xi_2)] = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

证明

$$|\xi_1-\xi_2|=(\xi_1,\xi_2)-(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1-a,\xi_2-a)+(a-\xi_1,a-\xi_2)$$

$(\xi_1-a,\xi_2-a)0(\xi_1-a,\xi_2-a)(a-\xi_1,a-\xi_2)|\xi_1-\xi_2|=2((\xi_1-a,\xi_2-a)\xi_1-\xi_2 0$
$(\xi_1-\xi_2)=(\xi_1)+(\xi_2)=2\sigma^2$

$$[(\xi_1,\xi_2)]=a+|\xi_1-\xi_2|=a+2^{-1}\sqrt{2/\pi}\sqrt{2\sigma^2}=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

□

习题 设$f(x)(x>0)$是一正值上升函数ξ是一随机变量若$[f(|\xi|)]<+\infty$则有

$$P(|\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{[f(|\xi|)]}{f(\varepsilon)}(\varepsilon>0).$$

习题 试证明如果(ξ)有限则

$$(\xi)=-\int_0^{+\infty}F_\xi(x)x+\int_0^{+\infty}[1-F_\xi(x)]\,x;$$
$$(|\xi|)=\int_0^{+\infty}F_\xi(x)x+\int_0^{+\infty}[1-F_\xi(x)]\,x.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}[1-F(x)]x&=\int_0^{\infty}\int_{(x,\infty)}dF(y)x\\&=\int_0^{\infty}\int_{(0,y)}xF(y)\\&=\int_0^{\infty}yy.\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{0}F(x)x=\int_{-\infty}^{0}\int_{(-\infty,x]}F(y)x=-\int_{-\infty}^{0}yF(y).$$

$\xi\int_0^{\infty}yF(y)\int_{-\infty}^{0}yF(y)$

$$\xi=\int_{-\infty}^{\infty}yF(y)=-\int_0^{+\infty}F_\xi(x)x+\int_0^{+\infty}[1-F_\xi(x)]\,x;$$

$$|\xi| = \int_{-\infty}^{\infty} |y| F(y) = \int_{0}^{+\infty} F_{\xi}(x)x + \int_{0}^{+\infty} [1 - F_{\xi}(x)]\, x.$$

□

习题 设$\xi_1, \cdots, \xi_n$是独立的随机变量$(\xi_j) = \sigma_j^2 j = 1, \cdots, n$试求满足$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 1$的正数$a_1, \cdots, a_n$使$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \xi_j$的方差最小

习题 设随机向量$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$有密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p(x+y)}{x+y}, x > 0, y > 0, \\ 0, \qquad\qquad , \end{cases}$$

其中$p(u), u \in (-\infty, +\infty)$是一维分布密度$p(u) = 0 u \in (-\infty, 0)$求$\boldsymbol{\xi}$的协方差矩阵

习题 设ξ和$\eta_j j = 1, \cdots, n$不相关证明对于任意$a_j (j = 1, \cdots, n)$$\xi$与$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \eta_j$不相关

习题 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, x_n$独立同标准正态分布证明$\zeta_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j$和$\zeta_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \xi_j$独立的充要条件是$\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j = 0$

习题 设随机变量$\xi_1, \cdots, \xi_n$相互独立并具有相同的数学期望μ和方差σ^2令

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \bar{\xi})^2,$$

试证

$$(\bar{\xi}) = \mu, (\bar{\xi}) = \frac{1}{n} \sigma^2;$$

$$(\bar{\xi}, \xi_j - \bar{\xi}) = \left[(\bar{\xi} - \mu)(\xi_j - \bar{\xi})\right] = 0, j = 1, \cdots, n;$$

$$(S^2) = \sigma^2.$$

习题 求$(\xi|\eta = y), y > 0$设ξ和η的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}^{-y-\frac{x}{y}}, x > 0, y > 0; \\ 0, \qquad ; \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^{2-\lambda x}, 0 < y < x; \\ 0, \qquad ; \end{cases}$$

习题 设ξ和η独立同分布求$(\xi|\xi+\eta)$已知

ξ在$[0,1]$上有均匀分布

ξ服从参数为λ的指数分布

第四章随机变量的特征函数

习题 若随机变量ξ服从几何分布即

$$P(\xi = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \cdots,$$

其中$0 < p < 1q = 1 - p$试求ξ的特征函数$\varphi_\xi(t)$及(ξ)及(ξ)

习题 试求Γ分布的特征函数并证明对具有相同参数b的Γ分布关于参数p具有可加性

习题 求证函数

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ kt,$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^{kt}$$

是特征函数其中$a_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$并求出与$\varphi_1(t), \varphi_2(t)$所对应的分布函数

习题 设$\varphi_1(t) = \ t\varphi_2(t) = {}^2 \, t$是特征函数求它们分别对应的分布函数

习题 设$F(x)$是随机变量ξ的分布函数且$F(x)$是严格单调的试求

$\eta = aF(\xi) + b$

$\eta = \ F(\xi)$

的特征函数其中a, b是常数

习题 设$F(x)$是随机变量ξ的分布函数$\varphi(t)$是ξ的特征函数令

$$G(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(u) u,$$

其中$h>0$则$G(x)$仍是一分布函数且与$G(x)$相对应的特征函数为$\frac{ht}{ht}\varphi(t)$

习题 证明特征函数是实值函数的充要条件是其相应的分布函数$F(x)$满足

$$F(x)=1-F(-x-0)(x>0).$$

习题 求证对任何实的特征函数$\varphi(t)$均有
$1-\varphi(2t)\leqslant 4\left[1-\varphi(t)\right]$
$1+\varphi(2t)\geqslant 2\left[\varphi(t)\right]^2$

习题 证明满足下列各等式的连续函数$\varphi(t)$是特征函数
$\varphi(t)=\varphi(-t)$
$\varphi(t+2a)=\varphi(t)$
$\varphi(t)=\frac{a-t}{a}0\leqslant t\leqslant a$
其中a是正常数

习题 设$\xi_1,\cdots,\xi_n$独立且有相同的几何分布试求$\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$的分布

习题 若$f(t)$是特征函数则$\varphi(t)={}^{f(t)-1}$也是特征函数

习题 设$\varphi(t)$是一随机变量的特征函数证明下列不等式成立
$|\varphi(t+h)-\varphi(t)|\leqslant\sqrt{2[1-\varphi(t)]}$
$1-[\varphi(2t)]\leqslant 4\left\{1-[\varphi(t)]\right\}$

证明设$\varphi(t)$对应的是$F(x)$则

$$(1-\varphi(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}(1-tx)F(x).$$

因为

$$1-tx=2^{\,2}\left(\frac{tx}{2}\right)\geqslant\frac{1}{4}(1-2tx),$$

所以对每一t

$$1-[\varphi(2t)] \leqslant 4\{1-[\varphi(t)]\}$$

□

习题 设$\varphi(t)$是分布函数$F(x)$的特征函数试证明在$F(x)$的任意连续点x处有

$$F(x)=_{x\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\varphi(t)^{-tu}tu.$$

习题 已知$\varphi(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$是一特征函数试求与之相对应的分布密度函数

习题 设$\xi_1,\xi_2,\cdots$是独立同分布的随机变量列$(\xi_1)=\mu>0\nu=\nu_p$服从参数为p的指数分布并且与$\xi_1,\xi_2,\cdots$独立令

$$\xi_p=\xi_1+\cdots+\xi_{\lfloor\nu\rfloor},$$

试证当$p\to 0$时$p\xi_p$的极限分布是参数为$\dfrac{1}{\mu}$的指数分布

习题 设ξ_1,ξ_2,ξ_3独立都服从$\mathcal{N}(0,1)$分布试求$\eta_1=\xi_1+\xi_2\eta_2=\xi_1+\xi_3$的联合特征函数

第五章收敛定理

习题 试证

若$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$则$\xi_n - \xi \xrightarrow{p} 0$

若$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \xi_n \xrightarrow{p} \eta$则$P(\xi = \eta) = 1$

若$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$则$\xi_n - \xi_m \xrightarrow{p} 0 n, m \to \infty$

若$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$则对任意常数$C$有$C\xi_n \xrightarrow{p} C\xi$若$\eta$为随机变量有$\xi_n\eta \xrightarrow{p} \xi\eta$

若$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \eta_n \xrightarrow{p} \eta$则$\xi_n \pm \eta_n \xrightarrow{p} \xi \pm \eta \xi_n\eta_n \xrightarrow{p} \xi\eta$

若$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$且$g(x)$是$\mathbb{R}^{(1)}$上的连续函数则$g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$

证明

根据定义这显然成立

注意$P(\xi \neq \eta) > 0$当且仅当存在$\varepsilon_0 > 0$使$P(|\xi - \eta| \geqslant \varepsilon_0) > 0$而当$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$和$\xi_n \xrightarrow{p} \eta$时

$$P(|\xi - \eta| \geqslant \varepsilon_0) \leqslant P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon_0) + P(|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon_0) \to 0, n \to \infty.$$

因此必须有$P(\xi = \eta) = 1$

对任意的$\varepsilon > 0$

$$P(|\xi_n - \xi_m| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) + P(|\xi_m - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0, n, m \to \infty.$$

$$\begin{aligned} P(|\xi_n\eta - \xi\eta| \geqslant \varepsilon) &= P(|\eta| \leqslant M, |\xi_n\eta - \xi\eta| \geqslant \varepsilon) + P(|\eta| > M, |\xi_n\eta - \xi\eta| \geqslant \varepsilon) \\ &\leqslant P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/M) + P(|\eta| > M). \end{aligned}$$

根据分布函数的性质知道$P(|\eta| > M) \to 0, M \to \infty$因此在式的右端先令$n \to \infty$再令$M \to \infty$便得到$\forall \varepsilon > 0, P(|\xi_n\eta - \xi\eta| \geqslant \varepsilon) \to 0, n \to \infty$即$\xi_n\eta \xrightarrow{p} \xi\eta$注意到任意的常数$C$也是个随机变量所以命题的前半部分自然成立

□

习题 设$\{\xi_n\}$是单调下降的正随机变量列且$\xi_n \xrightarrow{p} 0$试证$\xi_n \to 0, ..$

证明令$A_n = \{|\xi_n - 0| \geqslant \varepsilon\}, n \in \mathbb{N}^*$根据$\{\xi_n\}$是单调下降的正序列知道$\{A_n\} \downarrow$注意到$\{\xi_n\}$依概率测度收敛到0

$$_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right\} = _{n\to\infty} P\left\{A_n\right\} = 0.$$

这说明$\xi_n \to 0, ..$ □

习题 证明若存在常数$C > 0$使$|\xi_n| < C|\xi| < C$则$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$的充要条件是$\xi_n$平均收敛于$\xi$

证明条件充分根据马尔可夫不等式对任意$\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}|\xi_n - \xi| \to 0, n \to \infty.$$

条件必要对任意$\varepsilon > 0$有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\xi_n - \xi| &= \left[|\xi_n - \xi|\mathbf{1}_{(|\xi_n - \xi| < \varepsilon)}\right] + \left[|\xi_n - \xi|\mathbf{1}_{(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)}\right] \\ &\leqslant [\varepsilon] + \left[2C\mathbf{1}_{(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)}\right] \\ &= \varepsilon + 2CP(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \end{aligned}$$

先令$n \to \infty$再令$\varepsilon \to 0$得到

$$_{n\to\infty} |\xi_n - \xi| = 0.$$

□