Question 1

证明: 群 G 为交换群当且仅当 $x \mapsto x^{-1}, x \in G$ 是一个自同构映射.

证明. 由同构映射的定义, 得到

$$(x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}, \forall x, y \in G.$$

于是,

$$\begin{aligned} x \circ y &= (x^{-1} \circ y^{-1})^{-1} \\ &= y \circ x, \forall x, y \in G. \end{aligned}$$

反过来, G 交换说明 $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in G$. 这推出了

$$(x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}, \forall x, y \in G.$$

这说明此映射是同态映射.
不难看出, 对每 $a \in G$, 在 G 中都有逆元 a^{-1}, 而 $a^{-1} \mapsto (a^{-1})^{-1} = a$. 这说明这个映射是满射.
而 $x \neq y \Rightarrow x^{-1} \neq y^{-1}$. 这说明这个映射是单射.
因此,$x \mapsto x^{-1}, x \in G$ 是一个既单又满的同态, 即证. □