Question 1

证明:$\mathbb{R}^2$ **中至少有一个圆周不含有理数点**.

证明. 对于 $r>0$, 记 $S_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\sqrt{x^2+y^2}=r\}$.
用反证法. 若 $\forall r>0, S_r\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\neq\emptyset$, 则说明 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 不可列. 这与 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 是可列集矛盾. □

Question 2

试作一个从开圆盘 $D^\circ=\{(x,y)|x^2+y^1<1\}$ **到闭圆盘** $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ **的双射**.

解. 作一列圆周:

$$A_n=\left\{(x,y)|x^2+y^2=\frac{1}{n}\right\}$$

容易想到从 A_n 到 A_{n-1} 有个一一对应:

$$g:A_n\to A_{n-1},(x,y)\mapsto\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}x,\sqrt{\frac{n}{n-1}}y\right)$$

注意到

$$D^\circ\backslash\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty}A_n\right)=D\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right),$$

由此可作出 D° 到 D 的双射如下:

$$f:D^\circ\to D,(x,y)\mapsto\begin{cases}(x,y),\ 若(x,y)\in D^\circ\backslash\left(\bigcup\limits_{n=2}^{+\infty}A_n\right);\\ \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}x,\sqrt{\frac{n}{n-1}}y\right),\ 若(x,y)\in A_n,n\geqslant 2.\end{cases}$$

Question 3

对点集 A, 若点 x 的每个邻域都含有 $A\backslash\{x\}$ 中的点, 则称 x 为 A 的聚点(limit point/cluster point/point of accumulation). A 的全体聚点构成的集合 A' 称作 A 的导集(derived set). $\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的闭包. 换言之, $x \in \overline{A}$ 当且仅当 x 的每个邻域都含有 A 中的点.

设 X, Y 是非空集合. 如果映射 $f : X \to Y$ 满足: 任取 $f(x_0)$ 的邻域 V, 都有 $f^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域, 则称 f 在 x_0 处连续(continuous). 在定义域上处处连续的映射称为连续映射(continuous map).

证明 $f : X \to Y$ 连续与下列命题等价:

(a) Y 中的任意开集的原像都是 X 中的开集;

证明. 条件 (a) 的必要性 (即 f 连续蕴含开集的原像开): 任取 Y 中的开集 V, 则 $\forall x \in f^{-1}(V)$, 因为 V 是 $f(x)$ 的邻域, 所以 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域. 由 x 的任意性可知 $f^{-1}(V)$ 是开集.
条件 (b) 的充分性 (即开集的原像开蕴含 f 连续): 任取 $x \in X$ 及 $f(x)$ 的邻域 V, 则存在开集 U 使得 $f(x)]inU \subseteq V$. 由于 $f^{-1}(U)$ 也是开集, 而 $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$, 故 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域, 这说明 f 在 x 处连续. □

(b) Y 中的任意闭集的原像都是 X 中的闭集;

证明. 必须且只需证明 (a)$\Leftrightarrow$(b).
注意到 $f^{-1}(U)^c = f^{-1}(U^c)$. 于是 $f^{-1}(U)$ 是闭集当且仅当 $f^{-1}(U^c)$ 是开集. 如果 f 满足条件 (a), 则任取闭集 U, 由 U^c 开知道 $f^{-1}(U^c)$ 开, 从而 $f^{-1}(U)$ 闭. 这说明 (a) 蕴含 (b). 同理,(b) 蕴含 (a). □

(c) $\forall F \subseteq Y$, 都有 $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F})$;

证明. 先证 (b)$\Rightarrow$(c):$\forall F \subseteq Y$, 根据 $F \subseteq \overline{F}$, 得到 $f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(\overline{F})$,
因此,$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{F})}$.
由于闭集的原像闭, 所以 $f^{-1}(\overline{F})$ 是闭集, 因此 $f^{-1}(\overline{F}) = \overline{f^{-1}(\overline{F})}$, 所以 $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F})$
再证明 (c)$\Rightarrow$(b): 取任意闭集 $F \subseteq Y$, 则 $F = \overline{F}$, $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F)$.
这说明 $f^{-1}(F)$ 是闭集, 即闭集的原像闭. □

Question 3 continued on next page. . .

(d) $\forall E \subseteq X, f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$;

证明. 先证 (c)$\Rightarrow$(d):
对于任意的 $E \subseteq X$, 注意到 $E \subseteq f^{-1}(f(E))$, 故有 $\overline{E} \subseteq \overline{f^{-1}(f(E))}$.
由于 $f(E) \subseteq Y$, 所以由 (c) 得到 $\overline{f^{-1}(f(E))} \subseteq f^{-1}(\overline{f(E)})$.
因此,$\overline{E} \subseteq f^{-1}(\overline{f(E)})$, 这与 $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ 等价.
再证明 (d)$\Rightarrow$(c):$\forall F \subseteq Y$, 注意到 $f(f^{-1}(F)) \subseteq F$, 因此 $\overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F}$, 故有

$$f^{-1}(\overline{F}) \supseteq f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(F))}) \overset{条件(d)}{\supseteq} f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(F)})) \supseteq \overline{f^{-1}(F)}$$

□

Question 4

(a) (微积分中的 $\varepsilon-\delta$ language) 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 说明:f 在 x_0 处连续的条件为何定义为: 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|x-x_0|<\delta$ 蕴含 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.
Remark: 微积分中定义的 x_0 的 δ邻域(neighborhood) 为 $B_\delta(x_0)=\{x||x-x_0|<\delta\}$.

说明. 只需注意到 $\varepsilon-\delta$ 语言可以重新叙述如下:
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得 $x\in B_\delta(x_0)$ 蕴含 $f(x)\in B_\varepsilon(f(x_0))$.
即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$.
即 $f(x_0)$ 的任何 ε 邻域的原像一定包含 x_0 的某个 δ 邻域.

(b) 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 证明: f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续 当且仅当 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 集合 $\{x|f(x)<\lambda\}$ 与 $\{x|f(x)>\lambda\}$ 均为开集.

证明. 必要性: 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 任给 $\lambda\in\mathbb{R}$, 对于 $x\in\mathbb{R}^n, f(x)<\lambda$. 由连续性, 存在 $\varepsilon>0$, 使得当 $y\in B_\varepsilon(x)$, 有 $f(y)<\lambda$. 故 $\{x|f(x)<\lambda\}$ 的每一点均为内点, 从而它是开集. 同理,$\{x|f(x)>\lambda\}$ 也是开集.
充分性: 设 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,$\{x|f(x)<\lambda\}$ 和 $\{x|f(x)>\lambda\}$ 是开集. 任取 $a\in\mathbb{R}^n$, 往证 $f(x)$ 在 a 处连续. 令 $f(a)=\beta$. $\forall\varepsilon>0$, 因为 $\{x|f(x)<\beta+\varepsilon\}$ 和 $\{x|f(x)>\beta-\varepsilon\}$ 是开集, 故它们的交 $\{x|f(x)<\beta+\varepsilon\}\cap\{x|f(x)>\beta-\varepsilon\}=G$ 也是开集. 因此, 对于 $a\in G$, 存在 $\delta>0$, 使 $B_\delta(a)\subset G$. 这说明当 $y\in B_\delta(a)$ 时,$\beta-\varepsilon<f(y)<\beta+\varepsilon$, 即 f 在 a 处连续. 即证. □