第三章　积分与数学期望

3.1　积分的定义与单调收敛定理

定义 3.1.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间。

1) 若f为非负简单函数，称

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \triangleq \sum_{k=1}^m x_k\mu\left(\{f=x_k\}\right)$$

为f在Ω上对μ的**积分**，简称为**积分**，这里$\{x_1,\ldots,x_m\}=f\left(\Omega\right)$。

2) 若f为非负可测函数，称

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \triangleq \sup\left\{\int_\Omega h\mathrm{d}\mu : 0\leqslant h\leqslant f, h\text{为简单函数}\right\}$$

为f在Ω上对μ的**积分**，简称为**积分**。

3) 若 f 为实可测函数，当 $\int_\Omega f^+\mathrm{d}\mu=\infty$ 和 $\int_\Omega f^-\mathrm{d}\mu=\infty$ 时，称 f 在 Ω上对 μ 的**积分不存在**，或者 $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$ 不存在；当$\int_\Omega f^+\mathrm{d}\mu$和$\int_\Omega f^-\mathrm{d}\mu$至少有一个为实数时，定义$f$在$\Omega$上对$\mu$的**积分**为

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \triangleq \int_\Omega f^+\mathrm{d}\mu-\int_\Omega f^-\mathrm{d}\mu$$

称f在Ω上对μ的**积分存在**，或者$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$**存在**；当$\int_\Omega f^+\mathrm{d}\mu$ 和$\int_\Omega f^-\mathrm{d}\mu$都为实数时，称$f$对$\mu$**可积**，简称为$f$**可积**。

4) 若$f=f_1+\mathrm{i}f_2$为复可测函数，如果$\int_\Omega f_1\mathrm{d}\mu$和$\int_\Omega f_2\mathrm{d}\mu$至少有一个不存在，称$f$在$\Omega$上对$\mu$的**积分不存在**，或者$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$不存在；如果$\int_\Omega f_1\mathrm{d}\mu$和$\int_\Omega f_2\mathrm{d}\mu$都存在，定义$f$在$\Omega$上对$\mu$的**积分**为

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \triangleq \int_\Omega f_1\mathrm{d}\mu+\mathrm{i}\int_\Omega f_2\mathrm{d}\mu$$

称 f 在Ω上对μ的**积分存在**，或者$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$存在；如果 $\int_\Omega f_1\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_\Omega f_2\mathrm{d}\mu$ 都为实数，称f对μ**可积**，简称为f**可积**。

5) 若μ为概率测度时，当f在Ω上对μ的积分不存在时，f在Ω上对μ的**数学期望不存在**；称当f在Ω上对μ的积分存在时，称

$$\mathbf{E}_\mu f \triangleq \int_\Omega f\mathrm{d}\mu$$

为f在Ω上对μ的**数学期望**或**期望**，简记为$\mathbf{E}f$；当f可积时，称f在Ω上对μ的**数学期望有限**。

6) 若$A\in\mathscr{F}$，且

$$\int_A f\mathrm{d}\mu \triangleq \int_\Omega f\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu$$

存在，则称$\int_A f\mathrm{d}\mu$为f**在A上对μ的积分**，简称为f**在A上的积分**。

为方便，可将$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$表达为$\int_\Omega f\left(\omega\right)\mu\left(\mathrm{d}\omega\right)$，或$\int f\left(\omega\right)\mu\left(\mathrm{d}\omega\right)$，或$\int f\mathrm{d}\mu$，或$\int f$；可将$\int_A f\mathrm{d}\mu$表达为$\int_A f\left(\omega\right)\mu\left(\mathrm{d}\omega\right)$，或$\int_A f$。

引理 3.1.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间，$A\in\mathscr{F}$，非负简单函数f的标准表达式为$f=\sum_{k=1}^n x_k\mathbb{1}_{\{f=x_k\}}$，则

$$\int f\mathbb{1}_A=\sum_{k=1}^n x_k\mu\left(\{f=x_k\}\cap A\right) \tag{3.1}$$

证明： 令$g=f\mathbb{1}_A$，则g为简单函数，且

$$g\left(\{g\neq 0\}\right)=\{x_k : k\in D\}$$

其中$D=\{k:\{f=x_k\}\cap A\neq\varnothing, x_k\neq 0\}$，所以简单函数$g$的标准表达式为

$$g=\begin{cases}\sum_{k\in D}x_k\mathbb{1}_{\{f=x_k\}\cap A}, & \text{如果 }\{g=0\}=\varnothing\\ 0\mathbb{1}_{\{g=0\}}+\sum_{k\in D}x_k\mathbb{1}_{\{f=x_k\}\cap A}, & \text{否则}\end{cases}$$

因此

$$\int g=\sum_{k\in D}x_k\mu\left(\{f=x_k\}\cap A\right)$$

注意到当$k\in\{1,\dots,n\}\setminus D$时有$x_k\mu(\{f=x_k\}\cap A)=0$，可得

$$\int f\mathbb{1}_A=\sum_{k\in D}x_k\mu(\{f=x_k\}\cap A)=\sum_{k=1}^{n}x_k\mu(\{f=x_k\}\cap A)$$ □

引理 3.1.2 设f是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的非负简单函数，则积分有如下性质：

1° 单调性，即对于任何简单函数$g\geqslant f$有$\int g\geqslant\int f$；

2° 线性性，即对于任何实数a和b，以及非负简单函数g，如果

$$a\int f+b\int g$$

有意义[1]，则

$$\int(af+bg)=a\int f+b\int g$$

3° 记$\varphi(A)\triangleq\int_A f$，则$\varphi$为$\mathscr{F}$上的测度。

证明： 记$f(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$， $g(\Omega)=\{y_1,\dots,y_m\}$。

往证性质1°则由$g\geqslant f$知：对于任意$1\leqslant s\leqslant n,1\leqslant t\leqslant m$有

$$x_s\mathbb{1}_{\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\}}\leqslant y_t\mathbb{1}_{\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\}}$$
$$x_s\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\})\leqslant y_t\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\})$$

由测度的可加性得

$$\begin{aligned}\int g&=\sum_{t=1}^{m}y_t\mu(\{g=y_t\})=\sum_{t=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}y_t\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\})\\&\geqslant\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}x_s\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\})\\&=\sum_{s=1}^{n}x_s\mu(\{f=x_s\})=\int f\end{aligned}$$

往证性质2°。显然$h\triangleq af+bg$为简单函数，记$h(\Omega)=\{z_1,\dots,z_l\}$，则有

$$\begin{aligned}a\int f+b\int g&=a\sum_{s=1}^{n}x_s\mu(\{f=x_s\})+b\sum_{t=1}^{m}y_t\mu(\{g=y_t\})\\&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}(ax_s+by_t)\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\})\\&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\sum_{u=1}^{l}(ax_s+by_t)\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\}\cap\{h=z_u\})\\&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\sum_{u=1}^{l}z_u\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\}\cap\{h=z_u\})\\&=\sum_{u=1}^{l}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}z_u\mu(\{f=x_s\}\cap\{g=y_t\}\cap\{h=z_u\})\\&=\sum_{u=1}^{l}z_u\mu(\{h=z_u\})=\int(af+bg)\end{aligned}$$

往证性质3°。显然φ非负，只需证明φ在$\mathscr{F}$上具有可列可加性。事实上，对于任何$\{A_k:k\in\mathbb{N}\}$，

$$\begin{aligned}f\mathbb{1}_{A_k}&=\sum_{s=1}^{n}x_s\mathbb{1}_{\{f=x_s\}\cap A_k}\\f\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}&=\left(\sum_{s=1}^{n}x_s\mathbb{1}_{\{f=x_s\}}\right)\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}\\&=\sum_{s=1}^{n}x_s\mathbb{1}_{\{f=x_s\}}\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\sum_{s=1}^{n}x_s\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty}(\{f=x_s\}\cap A_k)}\end{aligned}$$

[1]即不会出现类似于$\infty-\infty$的运算。

都为非负简单函数，由μ的可列可加性引理3.1.1得

$$\begin{aligned}\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f = \int f \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} \\ &= \sum_{s=1}^{n} x_s \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\{f = x_s\} \cap A_k)\right) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} x_s (\{f = x_s\} \cap A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n} x_s (\{f = x_s\} \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int f \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)\end{aligned}$$

即φ为定义在$\mathscr{F}$上的测度。 □

引理 3.1.3 对于非负可测函数，积分具有单调性，即如果可测函数$0 \leqslant f \leqslant g$，则$\int f \leqslant \int g$。

证明： 由于

$$\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant f\right\} \subset \left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant g\right\}$$

所以

$$\begin{aligned}\int f &= \sup\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant f\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant g\right\} = \int g\end{aligned}$$

即结论成立。 □

引理 3.1.4 若$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$为单增非负可测函数列，$f_n \uparrow f$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

证明： 由非负函数积分的单调性知$\int f \geqslant \int f_n \uparrow a$，因此只需证明

$$a \geqslant \int f \tag{3.2}$$

当$a = \infty$时，(3.2)自然成立，因此仅需在$a < \infty$的情况下证明(3.2)成立。

事实上，对于任何满足条件$0 \leqslant h \leqslant f$的简单函数$h$，记

$$h_m \triangleq \min\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) h, m\right\}, \quad A_n \triangleq \{h_m \leqslant f_n\}$$

则$h_m \mathbb{1}_{A_n}$为简单函数，$0 \leqslant h_m \mathbb{1}_{A_n} \leqslant f_n$，因此

$$a \geqslant \int f_n \geqslant \int h_m \mathbb{1}_{A_n} = \int_{A_n} h_m$$

注意到 $h_m \mathbb{1}_{\{f>0\}} < f \mathbb{1}_{\{f>0\}}$ 和 $f_n \uparrow f$ 可得 $A_n \uparrow \Omega$，再由引理3.1.2的3°和测度的下方连续性知

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} h_m = \int h_m = \sum_{k=1}^{s} \min\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) x_k, m\right\} \mathbb{1}_{\{h = x_k\}}$$

其中$\{x_1, \ldots, x_s\} = h(\Omega) \setminus \{0\}$。因此

$$a \geqslant \sum_{k=1}^{s} \min\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) x_k, m\right\} \mathbb{1}_{\{h = x_k\}}$$

令$m \to \infty$得

$$a \geqslant \sum_{k=1}^{s} x_k \mathbb{1}_{\{h = x_k\}} = \int h$$

因此

$$a \geqslant \sup\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant f\right\} = \int f$$

即(3.2)成立。 □

推论 3.1.1 对于任何以f为极限的非负单增可测函数列$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$都有

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

证明： 由引理3.1.4得结论。 □

引理 3.1.5 设f和g是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的非负可测函数，则

$$\int (f+g)=\int f+\int g$$

证明： 由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n\uparrow f$和非负简单函数$g_n\uparrow g$，因此非负简单函数$(f_n+g_n)\uparrow(f+g)$，由引理3.1.4和引理3.1.2知

$$\begin{aligned}\int (f+g)&=\lim_{n\to\infty}\int (f_n+g_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\int f_n+\lim_{n\to\infty}\int g_n=\int f+\int g\end{aligned}$$

□

引理 3.1.6 设f是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的可测函数，则

$$\int |f|=\int f^+ +\int f^-$$

证明： 由引理3.1.5知

$$\int |f|=\int (f^+ + f^-)=\int f^+ +\int f^-$$

□

引理 3.1.7 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上可测函数f的积分存在，则$\left|\int f\right|\leqslant\int|f|$。

证明： 由引理3.1.6知

$$\left|\int f\right|=\left|\int f^+ -\int f^-\right|\leqslant\int f^+ +\int f^- =\int |f|$$

□

定义 3.1.2 给定测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，对于每一$\omega\in\Omega$，性质A可能成立，也可能不成立。如果$\{\omega\in\Omega:\omega$使得A不成立$\}$为μ零集（定义*1.3.1*），则称性质A关于μ几乎处处成立，简称为性质A**几乎出处成立**，记为A**成立**, μ a.e.。

例如，对于可测空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，以及Ω到$\bar{\mathbb{R}}$上的两个映射f和g，如果$\{\omega\in\Omega:f(\omega)\neq g(\omega)\}$为$\mu$零集，则$f$与$g$几乎处处相等，即$f=g$, μ a.e.；如果$\{\omega\in\Omega:f(\omega)\leqslant g(\omega)\}$为$\mu$零集，则$f$几乎处处大于$g$，即$f>g$, μ a.e.；如果$h:B\to\bar{\mathbb{R}}$满足条件$\Omega\backslash B$为μ零集，则h几乎处处有定义，即h有定义, μ a.e.。

在不至于引起混淆的情况下，将μ a.e.简记为a.e.；当μ为概率测度时，将几乎处处成立称为**几乎必然成立**，将a.e.记为a.s.。

引理 3.1.8 给定测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的可测函数f，如果$f=0$, μ a.e.，则$\int f=0$。

证明： 由$f=0$, μ a.e.知可测集$A=\{f=0\}$的补集为μ零集，从而对于任意非负简单函数

$$h=\sum_{k=1}^{n}x_k\mathbb{1}_{\{h=x_k\}}\leqslant f^+$$

有$\{h=x_k\}\cap A=\{h=x_k\}\cap\{h=0\}\cap A, 1\leqslant k\leqslant n$，再注意到$\mu(A^c)=0$得

$$\begin{aligned}\int h&=\sum_{k=1}^{n}x_k\mu(\{h=x_k\})\\&=\sum_{k=1}^{n}x_k\left(\mu(\{h=x_k\}\cap A)+\mu(\{h=x_k\}\cap A^c)\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}x_k\mu(\{h=x_k\}\cap\{h=0\}\cap A)=0\end{aligned}$$

因此

$$\int f^+=\sup\left\{\int h:\text{非负简单函数}h\leqslant f^+\right\}=0$$

同理可证$\int f^-=0$，所以$\int f=\int f^+-\int f^-=0$。 □

定理 3.1.2 (积分单调收敛定理) 若$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$为几乎处处单增非负可测函数列，$f_n \uparrow f$, a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

证明： 记$A = \{f_n \uparrow f\}$，则$\mu(A^c) = 0$。由引理3.1.5 和引理3.1.4知

$$\begin{aligned}\int f &= \int f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) = \int f\mathbb{1}_A + \int f\mathbb{1}_{A^c} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n\mathbb{1}_A + \int f\mathbb{1}_{A^c}\right)\end{aligned}$$

由引理3.1.8知$\int f\mathbb{1}_{A^c} = 0 = \int f_n\mathbb{1}_{A^c}$，因此结论成立。 □

引理 3.1.9 给定测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的$\mathscr{F}$可测函数$f$和$g$，如果$f = g$, μ a.e.，并且$\int f$存在或$\int g$存在，则$\int f = \int g$。

证明： 不妨假设$\int f$存在，只需证明

$$\int g^+ = \int f^+, \quad \int g^- = \int f^-$$

事实上，由$f = g$, μ a.e.知$f^+ = g^+$, μ a.e.，由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f^+$，因此$f_n \uparrow g^+$, μ a.e.，由单调收敛定理3.1.2得

$$\int f^+ = \lim_{n\to\infty}\int f_n = \int g^+$$

类似地可得$\int f^- = \int g^-$，因此$\int f = \int g$。 □

定义 3.1.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$\Omega$上的函数$f$关于$\mathscr{F}$几乎处处可测，即存在$\mathscr{F}$可测函数$g$使得$f = g$, μ a.e.，如果$\int g$存在，则定义

$$\int f\mathrm{d}\mu \triangleq \int g\mathrm{d}\mu$$

并称之为a.e.可测函数f关于μ的积分，或f关于μ的积分。

3.2 积分的性质

引理 3.2.1 设f是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负可测函数，则

$$\int (af) = a\int f, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

证明： 当$a \geqslant 0$时，由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f$，因此非负简单函数$af_n \uparrow af$，由积分单调收敛定理3.1.2得

$$\int (af) = \lim_{n\to\infty}\int (af_n) = \lim_{n\to\infty} a\int f_n = a\int f$$

当$a < 0$时，

$$\begin{aligned}\int (af) &= -\int (af)^- = -\int ((-a)f) \\ &= -(-a)\int f = a\int f\end{aligned}$$

□

定理 3.2.1 设f是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负$\mathscr{F}$可测函数，记

$$\varphi(A) \triangleq \int_A f$$

则φ为$\mathscr{F}$上的测度。

证明： 由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f$，由积分的单调收敛定理3.1.4和引理3.1.2知

$$\begin{aligned}\int f\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^m A_k} &= \lim_{n\to\infty}\int f_n\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^m A_k} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^m\int f_n\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^m\int f\mathbb{1}_{A_k}\end{aligned}$$

令$m \to \infty$，再次利用积分的单调收敛定理得结论。 □

定理 3.2.2 设f和g是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的可积函数，则积分有如下性质：
1° 线性性，即
$$\int(af+bg)=a\int f+b\int g,\quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$
2° 单调性，即当$g\geqslant f$时有$\int g\geqslant\int f$；
3° 可分割性，即对于任何互不相交可测集列$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$有
$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}f=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}f$$
4° 共轭性，即$\int\overline{(f+\mathrm{i}g)}=\overline{\int(f+\mathrm{i}g)}$，这里$\bar{z}$表示复数$z$的**共轭**。

证明： 往证1°成立。显然
$$af+bg=(af+bg)^+-(af+bg)^-,\text{a.e.}$$
$$af+bg=(af)^++(bg)^+-(af)^--(bg)^-,\text{a.e.}$$
所以
$$(af+bg)^++(af)^-+(bg)^-=(af+bg)^-+(af)^++(bg)^+,\text{a.e.}$$
由引理3.1.5知
$$\begin{aligned}&\int(af+bg)^++\int(af)^-+\int(bg)^-\\=&\int(af+bg)^-+\int(af)^++\int(bg)^+\end{aligned}\tag{3.3}$$
由引理3.1.6知
$$\begin{aligned}\int(|af|+|bg|)&=\int|af|+\int|bg|\\&=|a|\int\left(f^++f^-\right)+|b|\int\left(g^++g^-\right)<\infty\end{aligned}$$
注意到
$$\begin{aligned}&\max\left\{(af+bg)^+,(af+bg)^-,(af)^+,(bg)^+,(af)^-,(bg)^-\right\}\\&\leqslant|af|+|bg|\end{aligned}$$
利用引理3.1.3知(3.3)中各个积分均为实数，并且
$$\begin{aligned}\int(af+bg)&=\int(af+bg)^+-\int(af+bg)^-\\&=\int(af)^++\int(bg)^+-\int(af)^--\int(bg)^-\end{aligned}\tag{3.4}$$
另一方面，由积分的定义和引理3.2.1知
$$\begin{aligned}&a\int f+b\int g=a\int f^+-a\int f^-+b\int g^+-b\int g^-\\&=\int\left(af^+\right)-\int\left(af^-\right)+\int\left(bg^+\right)-\int\left(bg^-\right)\\&=\int(af)+\int(bg)\\&=\int(af)^+-\int(af)^-+\int(bg)^+-\int(bg)^-\end{aligned}\tag{3.5}$$
由(3.4)和(3.5)知1°成立。

往证2°。由1°知
$$\int g=\int(g-f+f)=\int(g-f)+\int f\geqslant\int f$$
即2°成立。

往证3°。显然
$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}f=\int f\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\int f^+\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}-\int f^-\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}$$

由定理3.2.1知3°成立。

往证4°。由复可测函数积分的定义知

$$\begin{aligned}\int \overline{(f+\mathrm{i}g)} &= \int (f-\mathrm{i}g) = \int f - \mathrm{i}\int g\\ &= \overline{\left(\int f + \mathrm{i}\int g\right)} = \overline{\int (f+\mathrm{i}g)}\end{aligned}$$

即4°成立。 □

引理 3.2.2 设f为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的可测函数，如果存在可积函数$g$使得$|f| \leqslant g$，则$f$为可积函数。

证明： 注意到

$$f^{+} \leqslant |f| \leqslant g, \quad f^{-} \leqslant |f| \leqslant g$$

由引理3.1.3知

$$0 \leqslant \int f^{+} \leqslant \int g < \infty, \quad 0 \leqslant \int f^{-} \leqslant \int g < \infty$$

因此f为可积函数。 □

定理 3.2.3 (积分单调性定理) 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上可测函数$f$和$g$的积分都存在，则$f \leqslant g$几乎处处成立的充分必要条件是

$$\int_A f \leqslant \int_A g, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{3.6}$$

证明： 往证必要性。不妨假设f和g都可积，由引理3.1.2的积分单调性知必要性成立。

往证充分性。若$A \triangleq \{f > g\}$不是μ零集，记

$$A_n = \left\{f - g > \frac{1}{n}, |f| < n, |g| < n\right\}$$

则$A_n \uparrow A$，由测度的下连续性知$\mu(A_n) \uparrow \mu(A) > 0$。因此存在$m \in \mathbb{N}$，使得$\mu(A_m) > 0$，进而由引理3.1.3知

$$\int (f-g) \mathbb{1}_{A_m} \geqslant \int \frac{1}{m} \mathbb{1}_{A_m} = \frac{1}{m} \mu(A_m) > 0 \tag{3.7}$$

注意到

$$|f \mathbb{1}_{A_m}| \leqslant m, \quad |g \mathbb{1}_{A_m}| \leqslant m,$$

由引理3.2.2可知$f\mathbb{1}_{A_m}$和$g\mathbb{1}_{A_m}$均为可积函数，再由积分的线性性知

$$\int (f-g) \mathbb{1}_{A_m} = \int f \mathbb{1}_{A_m} - \int g \mathbb{1}_{A_m} \tag{3.8}$$

由(3.7)和(3.8)得$\int_{A_m} f > \int_{A_m} g$，这与(3.6)矛盾，因此 $A \triangleq \{f > g\}$ 是 μ 零集，即 $f \leqslant g$, a.e.。 □

推论 3.2.4 设f为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负可测函数，则$f = 0$, a.e.，当且仅当$\int f = 0$。

证明： 由 $\int f = 0 \Longleftrightarrow \int_A f = 0, \forall A \in \mathscr{F}$，及定理3.2.2得结论。 □

定理 3.2.5 设f为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上可测函数，则$f$可积的充分必要条件是$|f|$可积。

证明： 由于

$$\int f = \int f^{+} - \int f^{-}, \quad \int |f| = \int f^{+} + \int f^{-}$$

因此f和$|f|$可积的充分必要条件都是$\int f^{+} \in \mathbb{R}$，且$\int f^{-} \in \mathbb{R}$，因此定理结论成立。 □

定理 3.2.6 (Schwarz不等式) 设f和g为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的几乎处处可测函数，则

$$\left(\int |fg|\right)^2 \leqslant \left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right) \tag{3.9}$$

证明： 若$\int f^2=\infty$或$\int g^2=\infty$，显然结论成立，因此仅需证明f^2和g^2都为可积函数时(3.9)成立。

事实上，由于
$$|fg|\leqslant\frac{f^2+g^2}{2}$$
由引理3.1.3和引理3.1.5知
$$0\leqslant\int|fg|\leqslant\frac{1}{2}\left(\int f^2+\int g^2\right)<\infty$$
由积分的线性性（定理3.9）得
$$0\leqslant\int(|f|+x|g|)^2=\int f^2+\left(2\int|fg|\right)x+\left(\int g^2\right)x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$
即(3.9)成立。 □

3.3　独立随机变量

定义 3.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，集类$\mathscr{C}_k\subset\mathscr{F}$，$1\leqslant k\leqslant n$，若
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k),\quad\forall A_k\in\mathscr{C}_k,1\leqslant k\leqslant n$$
则称$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n$为**独立事件类**。

引理 3.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，$A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{F}$，若
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)$$
则
$$\Lambda=\left\{B\in\sigma(\mathscr{C}):\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)B\right)=\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\mathbf{P}(B)\right\}$$
为λ系。

证明： 显然$\Omega\in\Lambda$；对于任何$B_k\in\Lambda$，当$B_1\subset B_2$时有
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)(B_2\backslash B_1)\right)&=\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)B_2\right)-\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)B_1\right)\\&=\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\mathbf{P}(B_2)-\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\mathbf{P}(B_1)\\&=\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\mathbf{P}(B_2\backslash B_1)\end{aligned}$$
即$B_2\backslash B_1\in\Lambda$；对于$\Lambda$中的不降事件列$\{B_k:k\in\mathbb{N}\}$有
$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\cap\left(\bigcup_{s=1}^\infty B_s\right)\right)=\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\cap\left(\bigcup_{s=1}^\infty(B_s\backslash B_{s-1})\right)\right)\\&=\mathbf{P}\left(\bigcup_{s=1}^\infty\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\cap(B_s\backslash B_{s-1})\right)\right)=\sum_{s=1}^\infty\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\cap(B_s\backslash B_{s-1})\right)\\&=\sum_{s=1}^\infty\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\mathbf{P}(B_s\backslash B_{s-1})=\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\sum_{s=1}^\infty\mathbf{P}(B_s\backslash B_{s-1})\\&=\left(\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{s=1}^\infty B_s\right)\end{aligned}$$
即$\bigcup_{s=1}^\infty B_s\in\Lambda$。因此$\Lambda$为$\lambda$系。 □

定理 3.3.1 (独立事件类扩张定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，若包含$\Omega$的$\pi$系$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n$为相互独立事件类，则$\sigma(\mathscr{C}_1),\ldots,\sigma(\mathscr{C}_n)$为相互独立事件类。

证明： 事实上，对于任意$A_k\in\mathscr{C}_k,1\leqslant k<n$，记
$$\Lambda_n=\left\{A_n\in\sigma(\mathscr{C}_n):\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right\}$$

则由$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_m$是相互独立事件类和引理3.3.1知$\Lambda$为$\lambda$系，并且$\Omega\in\mathscr{C}_n\subset\Lambda_n$，由集合形式的单调类定理（定理1.1.2）知$\sigma(\mathscr{C}_n)\subset\Lambda_n$，即对于任何$A_k\in\mathscr{C}_k$，$1\leqslant k<n$有

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_j\in\sigma(\mathscr{C}_j),j\geqslant n$$

类似地，对于任意$A_k\in\mathscr{C}_k 1\leqslant k<n-1$，$A_n\in\sigma(\mathscr{C}_n)$记

$$\Lambda_{n-1}=\left\{A_n\in\sigma(\mathscr{C}_{n-1}):\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)\right\}$$

则有：$\sigma(\mathscr{C}_{n-1})\subset\Lambda_{n-1}$，即对于任何$A_k\in\mathscr{C}_k$，$1\leqslant k<n-1$有

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_j\in\sigma(\mathscr{C}_j),j\geqslant n-1$$

重复上述步骤可得

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_k\in\sigma(\mathscr{C}_k),1\leqslant k\leqslant n$$

即$\sigma(\mathscr{C}_1),\ldots,\sigma(\mathscr{C}_n)$为相互独立事件类。 □

定义 3.3.2 设X_k是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$m_k$维随机向量，$k=1,\ldots n$，若

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k\leqslant x_k\}\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(X_k\leqslant x_k),\quad \forall x_k\in\bar{\mathbb{R}}^{m_k} \tag{3.10}$$

则称$X_1,\ldots,X_n$**相互独立**，简称为**独立**。

定理 3.3.2 设X_k是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$m_k$维随机向量，$k=1,\ldots n$，若$X_1,\ldots,X_n$相互独立，则

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k\in B_k\}\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(X_k\in B_k),\quad \forall B_k\in\bar{\mathscr{B}}^{m_k} \tag{3.11}$$

证明： 记$\mathscr{C}_k=\left\{\{X_k\leqslant x_k\}:x_k\in\bar{\mathbb{R}}^{m_k}\right\}$，则$\mathscr{C}_k$为包含$\Omega$的$\pi$系。由$X_1,\ldots,X_n$相互独立知$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n$为独立事件类，再由(3.10)独立事件类扩张定理[2]知

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_k\in\sigma(\mathscr{C}_k),1\leqslant k\leqslant n$$

注意到$\sigma(\mathscr{C}_k)=X_k^{-1}\left(\bar{\mathscr{B}}^{m_k}\right)$，得(3.11)。 □

思考：$X_1,\ldots,X_n$相互独立的含义是什么？

定义 3.3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，若$X$和$Y$都是定义在$\Omega$上的$m$维随机向量，则称$Z=X+\mathrm{i}Y$为$m$**维复值随机向量**。

定义 3.3.4 对于$a=a_1+\mathrm{i}a_2\in\mathbb{C}^m$，$b=b_1+\mathrm{i}b_2\in\mathbb{C}^m$，记

$$(a,b]\triangleq\{x_1+\mathrm{i}x_2\in\mathbb{C}^m:x_1\in(a_1,b_1],x_2\in(a_2,b_2]\} \tag{3.12}$$

$$\mathscr{P}(\mathbb{C}^m)\triangleq\{(a,b]:a\in\mathbb{C}^m,b\in\mathbb{C}^m\}\cup\mathbb{C}^m \tag{3.13}$$

$$\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)=\sigma(\mathscr{P}(\mathbb{C}^m)) \tag{3.14}$$

称$(a,b]$为m**维复立方体**，称$\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$为$m$**维复*Borel*域**。

引理 3.3.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$是概率空间，$Z=X+\mathrm{i}Y:\Omega\to\mathbb{C}^m$，则对于任意$a=a_1+\mathrm{i}a_2\in\mathbb{C}^m$和$b=b_1+\mathrm{i}b_2\in\mathbb{C}^m$有

$$\{Z\in(a,b]\}=\{(X,Y)\in((a_1,a_2),(b_1,b_2)]\}$$

证明： 由(3.12)知

$$\begin{aligned}\{Z\in(a,b]\}&=\{\omega\in\Omega:Z(\omega)\in(a,b]\}\\&=\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in(a_1,b_1],Y(\omega)\in(a_2,b_2]\}\\&=\{(X,Y)\in((a_1,a_2),(b_1,b_2)]\}\end{aligned}$$

□

[2]详见定理3.3.1。

引理 3.3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$是概率空间，$Z=X+\mathrm{i}Y:\Omega\to\mathbb{C}^m$，则

$$Z^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^m\right)\right)=(X,Y)^{-1}\left(\mathscr{B}^{2m}\right)\tag{3.15}$$

证明： 由引理2.1.2知

$$Z^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^m\right)\right)=\sigma\left(Z^{-1}\left(\mathscr{P}\left(\mathbb{C}^m\right)\right)\right)$$
$$(X,Y)^{-1}\left(\mathscr{B}^{2m}\right)=\sigma\left((X,Y)^{-1}\left(\mathscr{P}^{2m}\right)\right)$$

而由引理3.3.2和例1.3知$Z^{-1}\left(\mathscr{P}\left(\mathbb{C}^m\right)\right)=(X,Y)^{-1}\left(\mathscr{P}^{2m}\right)$，因此(3.15)成立。 □

定义 3.3.5 设$X_k=X_k^{(1)}+\mathrm{i}X_k^{(2)}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$m_k$维复值随机向量，$k=1,\dots n$，若$\left(X_1^{(1)},X_1^{(2)}\right),\dots,\left(X_n^{(1)},X_n^{(2)}\right)$相互独立，则称$X_1,\dots,X_n$**相互独立**或**独立**。

定义 3.3.6 设$f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$，若

$$f^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^n\right)\right)\subset\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^m\right)$$

则称f为**复*Borel*函数**。

定理 3.3.3 设$X_k=X_k^{(1)}+\mathrm{i}X_k^{(2)}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$m_k$维复值随机向量，$f_k:\mathbb{C}^{m_k}\to\mathbb{C}^{n_k}$为复*Borel*函数，若$X_1,\dots,X_n$相互独立，则$f_1\left(X_1\right),\dots,f_n\left(X_n\right)$相互独立。

证明： 记$f_k=f_{k1}+\mathrm{i}f_{k2}$，则对于任何$x_k\in\mathbb{R}^{2n_k}$有

$$\begin{aligned}\left\{\left(f_{k1}\left(X_k\right),f_{k2}\left(X_k\right)\right)\leqslant x_k\right\}&=\left\{f_k\left(X_k\right)\leqslant x_{k1}+\mathrm{i}x_{k2}\right\}\\&=\left\{X_k\in f_k^{-1}\left(\left(-\infty,x_{k1}+\mathrm{i}x_{k2}\right]\right)\right\}\end{aligned}\tag{3.16}$$

其中x_{k1}和x_{k2}分别是x_k的前n_k和后n_k个分量构成的子向量。注意到f_k为复Borel函数，由引理3.3.3知

$$\begin{aligned}\left\{X_k\in f_k^{-1}\left(\left(-\infty,x_{k1}+\mathrm{i}x_{k2}\right]\right)\right\}&\in X_k^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^{m_k}\right)\right)\\&=\left(X_k^{(1)},X_k^{(2)}\right)^{-1}\left(\mathscr{B}^{2m_k}\right)\end{aligned}$$

即存在$A_k\in\mathscr{B}^{2m_k}$，使得

$$\left\{X_k\in f_k^{-1}\left(\left(-\infty,x_{k1}+\mathrm{i}x_{k2}\right]\right)\right\}=\left\{\left(X_k^{(1)},X_k^{(2)}\right)\in A_k\right\}$$

代入(3.16)，得

$$\left\{\left(f_{k1}\left(X_k\right),f_{k2}\left(X_k\right)\right)\leqslant x_k\right\}=\left\{\left(X_k^{(1)},X_k^{(2)}\right)\in A_k\right\}$$

由$X_1,\dots,X_n$相互独立和定理3.3.2得

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n\left\{\left(f_{k1}\left(X_k\right),f_{k2}\left(X_k\right)\right)\leqslant x_k\right\}\right)\\&=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n\left\{\left(X_k^{(1)},X_k^{(2)}\right)\in A_k\right\}\right)\\&=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}\left(\left\{\left(X_k^{(1)},X_k^{(2)}\right)\in A_k\right\}\right)\\&=\prod_{k=1}^n\mathbf{P}\left(\left\{\left(f_{k1}\left(X_k\right),f_{k2}\left(X_k\right)\right)\leqslant x_k\right\}\right)\end{aligned}$$

即$f_1\left(X_1\right),\dots,f_n\left(X_n\right)$相互独立。 □

由于随机向量和实Borel函数分别是复随机向量和复Borel函数的特例，所以定理3.3.3结论对于实随机向量和实Borel函数也成立。

3.4 期望的性质

定理 3.4.1 设$X_1,\ldots,X_n$是独立（实或复）*r.v.*，若$\mathbf{E}X_k\in\mathbb{R}$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k \tag{3.17}$$

证明： 不妨假设[3] $X_k\in\mathbb{R},1\leqslant k\leqslant n$。

当$X_1,\ldots,X_n$均为简单函数时，考虑简单函数X_k的标准表达式

$$X_k=\sum_{s=1}^{m_k}x_{k,s}\mathbb{1}_{\{X_k=x_{k,s}\}}$$

由独立性[4]和积分的线性性质[5]知

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{s_k=1}^{m_k}x_{k,s_k}\mathbf{P}\left(X_k=x_{k,s_k}\right)\right)\\&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\prod_{k=1}^{n}\left(x_{k,s_k}\mathbf{P}\left(X_k=x_{k,s_k}\right)\right)\\&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(X_k=x_{k,s_k}\right)\right)\\&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k=x_{k,s_k}\}\right)\\&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\mathbf{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_k=x_{k,s_k}\}}\right)\right)\\&=\mathbf{E}\left(\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_k=x_{k,s_k}\}}\right)\right)\\&=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)\end{aligned}$$

即此时(3.17)成立。

当$X_1,\ldots,X_n$均为非负随机变量时，由定理2.5.2知存在非负实值递增简单函数$\{h_{k,s}:s\in\mathbb{N}\}$，使得$\lim_{s\to\infty}h_{k,s}=X_k$。由积分单调收敛定理（定理3.1.2）知

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\lim_{s\to\infty}\mathbf{E}h_{k,s}\right)=\lim_{s\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}h_{k,s}\right)\\&=\lim_{s\to\infty}\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}h_{k,s}\right)=\mathbf{E}\left(\lim_{s\to\infty}\prod_{k=1}^{n}h_{k,s}\right)=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)\end{aligned}$$

即此时(3.17)成立。

当 $X_1,\ldots,X_n$ 为一般实随机变量时，记$X_{k,0}=X_k^+$，$X_{k,1}=X_k^-$，则有

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}X_{k,0}-\mathbf{E}X_{k,1}\right)\\&=\sum_{s_1\in\{0,1\}}\cdots\sum_{s_n\in\{0,1\}}(-1)^{s_1+\ldots+s_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}X_{k,s_k}\right)\end{aligned}$$

由$X_1,\ldots,X_n$是独立r.v.和定理3.3.3知：$X_{1,s_1},\ldots,X_{n,s_n}$也是独立r.v.。因此由已经证明的非负情况和积分的线性性

[3] 否则，用$X_k\mathbb{1}_{\{X_k\in(-\infty,\infty)\}}$替代$X_k$即可。

[4] 教材上此处表达不严格，因为简单函数可以是相交事件的示性函数的线性组合。

[5] 详见定理3.2.2

质[6]知

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} X_k &= \sum_{s_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{s_n \in \{0,1\}} (-1)^{s_1+\ldots+s_n} \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_{k,s_k}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{s_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{s_n \in \{0,1\}} (-1)^{s_1+\ldots+s_n} \left(\prod_{k=1}^{n} X_{k,s_k}\right)\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} (X_{k,0} - X_{k,1})\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)
\end{aligned}
$$

即(3.17)对于实r.v.成立。

当$X_1, \ldots, X_n$为复r.v.时，记$X_k = X_{k,0} + \mathrm{i} X_{k,1}$，则

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} X_k &= \prod_{k=1}^{n} (\mathbf{E} X_{k,0} + \mathrm{i} \mathbf{E} X_{k,1}) \\
&= \sum_{s_k \in \{0,1\}, 1 \leqslant k \leqslant n} (\mathrm{i})^{s_1+\cdots+s_n} \prod_{k=1}^{n} (\mathbf{E} X_{k,s_k})
\end{aligned}
$$

由复r.v.$X_1, \ldots, X_n$相互独立知实r.v.$X_{1,s_1}, \ldots, X_{n,s_n}$相互独立，再注意到积分的线性性质[7]可得

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} X_k &= \sum_{s_k \in \{0,1\}, 1 \leqslant k \leqslant n} (\mathrm{i})^{s_1+\cdots+s_n} \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_{k,s_k}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{s_k \in \{0,1\}, 1 \leqslant k \leqslant n} (\mathrm{i})^{s_1+\cdots+s_n} \prod_{k=1}^{n} X_{k,s_k}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)
\end{aligned}
$$

即(3.17)对于复r.v.成立。 □

练习 3.4.1 设$X_1, \ldots, X_n$是相互独立复*r.v.*，记$X_k = X_{k,0} + \mathrm{i} X_{k,1}$，试证明对于任意$s_k \in \{0,1\}, 1 \leqslant k \leqslant n$，都有$X_{1,s_1}, \ldots, X_{n,s_n}$相互独立。

练习 3.4.2 设f和g是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的复值可积函数，则

$$
\int (af + bg) = a \int f + b \int g, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}
$$

3.5 方差

定义 3.5.1 设 X 为*r.v.*[8]，若 $\mathbf{E}|X|^2 < \infty$，称

$$
\mathbb{D} X \triangleq \mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^2
$$

为X的方差。

定理 3.5.1 设X是*r.v.*，若$\mathbf{E}|X|^2 < \infty$，则

$$
\mathbb{D}(X) = \mathbf{E}|X|^2 - |\mathbf{E}X|^2 \tag{3.18}
$$

证明： 由Schwarz不等式[9]知$\mathbf{E}X \in \mathbb{R}$，由积分的线性性质得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(X) &= \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)\overline{(X - \mathbf{E}X)}\right) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}X)\left(\overline{X} - \overline{\mathbf{E}X}\right)\right) \\
&= \mathbf{E}|X|^2 - \mathbf{E}\left(X\left(\overline{\mathbf{E}X}\right)\right) - \mathbf{E}\left(\bar{X}(\mathbf{E}X)\right) + |\mathbf{E}X|^2 \\
&= \mathbf{E}|X|^2 - |\mathbf{E}X|^2
\end{aligned}
$$

即(3.18)成立。 □

[6]详见定理3.2.2。
[7]详见定理3.2.2。
[8]即可以是实r.v.，也可以是复r.v.。
[9]定理3.2.6

定理 3.5.2 设$X_1,\ldots,X_n$是独立（实或复）*r.v.*，若$\mathbf{E}\left|X_k\right|^2<\infty$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\sum_{k=1}^n \mathbb{D}X_k \tag{3.19}$$

证明： 由Schwarz不等式知 $\mathbf{E}X_k\in\mathbb{R}$，由积分的线性性质知

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^n X_k-\sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{\sum_{s=1}^n X_s-\sum_{s=1}^n \mathbf{E}X_s}\right)\\
=&\left(\sum_{k=1}^n (X_k-\mathbf{E}X_k)\right)\left(\sum_{s=1}^n \overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\\
=&\sum_{k=1}^n\sum_{s=1}^n (X_k-\mathbf{E}X_k)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\\
=&\sum_{k=1}^n (X_k-\mathbf{E}X_k)\left(\overline{X_k-\mathbf{E}X_k}\right)\\
&+\sum_{1\leqslant k\neq s\leqslant n}(X_k-\mathbf{E}X_k)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)
\end{aligned}$$

再次利用积分的线性性质得

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)=\sum_{k=1}^n \mathbb{D}X_k+\sum_{1\leqslant k\neq s\leqslant n}\mathbf{E}\left((X_k-\mathbf{E}X_k)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\right) \tag{3.20}$$

由$X_1,\ldots,X_n$相互独立知：当$k\neq s$时$X_k-\mathbf{E}X_k$和$\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}$相互独立。进而

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left((X_k-\mathbf{E}X_k)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\right)\\
=&\left(\mathbf{E}\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\right)\left(\mathbf{E}\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\right)=0
\end{aligned}$$

代入到(3.20)得(3.19)。 □

3.6 特征函数

定义 3.6.1 若X为实*r.v.*，则称$f_X(t)\triangleq\mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX}$为$X$的**特征函数**；若$X=(X_1,\ldots,X_n)$为$n$维实随机向量，则称$f_X(t)\triangleq\mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX'}$为**随机向量**$X$**的特征函数**，其中$t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$，列随机向量$X'$是$X$的转置。

由于$\left|e^{\mathrm{i}tX'}\right|\leqslant 1$，由复合可测映射定理[10]和引理3.2.2知任何随机向量的特征函数都存在。

引理 3.6.1 若$X_1,\ldots,X_n$是独立的实随机向量，则$X=(X_1,\ldots,X_n)$的特征函数

$$f_X(t)=\prod_{k=1}^n f_{X_k}(t_k) \tag{3.21}$$

其中$t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^{m_1+\cdots+m_n}$，$t_k$和$X_k$有相同的维数$m_k$，$1\leqslant k\leqslant n$。

证明： 由特征函数的定义得

$$f_X(t)=\mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX'}=\mathbf{E}e^{\mathrm{i}\left(t_1X_1'+\cdots+t_nX_n'\right)}=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\mathrm{i}t_kX_k'}\right)$$

由定理3.3.3和定理3.4.1知(3.21)成立。 □

[10]定理2.3.1

3.7 积分变换定理

定义 3.7.1 设f是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(E,\mathscr{E})$上的可测映射，μ是$\mathscr{F}$上的测度，记

$$\mu_f(B)\triangleq\mu\left(f^{-1}(B)\right),\quad \forall B\in\mathscr{E}$$

称μ_f为μ在$\mathscr{E}$上由f**导出的测度**[11]，简记为$\mu\circ f^{-1}$。

特别，当$(E,\mathscr{E})=\left(\bar{\mathbb{R}}^n,\bar{\mathscr{B}}^n\right)$时，称$\mu_f$或$\mu\circ f^{-1}$为$n$维可测函数$f$**的分布**。

进一步，当μ是概率时，称μ_f或$\mu\circ f^{-1}$为n维随机向量（n维*r.v.*）f**的概率分布**。

定理 3.7.1 (积分变换定理) 设 f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测映射，μ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度，g 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测函数，若 $\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)\,\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_B g\mathrm{d}\mu_f$ 的积分存在，则

$$\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)\,\mathrm{d}\mu=\int_B g\mathrm{d}\mu_f,\quad \forall B\in\mathscr{E}\tag{3.22}$$

证明： 由定理2.1.1知：对于任何$B\in\mathscr{E}$有

$$\begin{aligned}\int_B \mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu_f&=\mu_f(A\cap B)=\mu\left(f^{-1}(A\cap B)\right)\\&=\mu\left(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\right)\\&=\int_{f^{-1}(B)}\mathbb{1}_{f^{-1}(A)}\mathrm{d}\mu=\int_{f^{-1}(B)}(\mathbb{1}_A\circ f)\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

因此对于任意非负简单函数g，由引理3.1.5和引理3.2.1可得

$$\int_B g\mathrm{d}\mu_f=\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)\,\mathrm{d}\mu$$

注意到$(g\circ f)^{\pm}=(g^{\pm}\circ f)$有

$$\int_B g^{\pm}\mathrm{d}\mu_f=\int_{f^{-1}(B)}\left(g^{\pm}\circ f\right)\mathrm{d}\mu=\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)^{\pm}\,\mathrm{d}\mu$$

因此(3.22)成立。 □

$$\begin{tikzcd}
(\Omega,\mathscr{F},\mu) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & (E,\mathscr{E},\mu_f) \arrow[dl, "g"] \\
& (\mathbb{R},\mathscr{B}) &
\end{tikzcd}$$

$$\int g\circ f d\mu=\int g d\mu_f$$

练习 3.7.1 设 f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测映射，g 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测函数，试证明$(g^{\pm}\circ f)=(g\circ f)^{\pm}$。

定义 3.7.2 设f为$\mathscr{B}^n$可测函数，μ为$\mathscr{B}^n$上的*L-S*测度，F为μ的分布函数[12]。

若$\int f\mathrm{d}\mu$存在，则称f对μ的积分为f**的*L-S*积分**，并将该积分记为

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\mu(x_1,\ldots,x_n)$$

或

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)$$

若$\int_B f\mathrm{d}\mu$存在，其中$B\in\mathscr{B}^n$，则称f在B对μ的积分为f**在B上的*L-S*积分**，并将该积分记为

$$\int\cdots\int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\mu(x_1,\ldots,x_n)$$

或

$$\int\cdots\int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)$$

[11] f导出的测度是$\mathscr{E}$上的测度，可用该测度研究μ限制在$f^{-1}(\mathscr{E})$上的性质。
[12] 详见定义1.3.4和定义1.3.6。

若μ为L测度λ[13]，则称$\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}\lambda$为$f$**的$L$积分**，并将该积分记为

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

称$\int_B f\mathrm{d}\lambda$为$f$**在$B$上的$L$积分**，并将该积分记为

$$\int\cdots\int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

特别，当$B=(a,b]$时，其中

$$a=(a_1,\ldots,a_n),\quad b=(b_1,\ldots,b_n)$$

将B上的L积分$\int_B f\mathrm{d}\lambda$记为

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

定理 3.7.2 设X是$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$n$维r.v.，$F$是$X$的概率分布函数，若$B\in\mathscr{B}^n$，则

$$\mathbf{P}(X\in B)=\int_B\mathrm{d}\mathbf{P}_X=\int\cdots\int_B\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)\tag{3.23}$$

进一步，若$g_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为$\mathscr{B}^n$可测函数，$g=(g_1,\ldots,g_m)$，若$Y=g(X)$，则$Y$的分布函数

$$\begin{aligned}F_Y(y_1,\ldots,y_m)&=\int_{g^{-1}((-\infty,y])}\mathrm{d}\mathbf{P}_X\\&=\int\cdots\int_{g^{-1}((-\infty,y])}\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}\tag{3.24}$$

其中$y=(y_1,\ldots,y_m)$。

证明： 由积分变换定理3.7.1得

$$\mathbf{P}(X\in B)=\int_{X^{-1}(B)}\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_B\mathrm{d}\mathbf{P}_X=\int\cdots\int_B\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)$$

即(3.23)成立。注意到$g^{-1}((-\infty,y])\in\mathscr{B}^n$和

$$F_Y(y_1,\ldots,y_m)=\mathbf{P}(Y\in(-\infty,y])=\mathbf{P}\left(X\in g^{-1}((-\infty,y])\right)$$

再利用(3.23)得(3.24)。 □

定理 3.7.3 设X是$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$n$维r.v.，$F$是$X$的概率分布函数，若$g$是$\mathscr{B}^n$可测函数[14]，则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(X))&=\int_\Omega g\circ X\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_{\mathbb{R}^n}g\mathrm{d}\mathbf{P}_X\\&=\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}g(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}\tag{3.25}$$

特别X的特征函数

$$f_X(t)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{\mathrm{i}tx'}\mathbf{P}_X(\mathrm{d}x)=\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}e^{\mathrm{i}tx'}\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)\tag{3.26}$$

其中$t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$，$x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$。

证明： 由积分变换定理3.7.1立得结论。 □

定理 3.7.4 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，p是非负$\mathscr{F}$可测函数，g是可测函数，记$\nu(A)=\int_A p\mathrm{d}\mu$。若$\int g\mathrm{d}\nu$或$\int gp\mathrm{d}\mu$存在，则

$$\int_A g\mathrm{d}\nu=\int_A gp\mathrm{d}\mu,\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{3.27}$$

证明： 由定理3.2.1知ν为$\mathscr{F}$上的测度。显然

$$\int_A\mathbb{1}_B\mathrm{d}\nu=\nu(A\cap B)=\int_{A\cap B}p\mathrm{d}\mu=\int_A\mathbb{1}_Bp\mathrm{d}\mu$$

即当$g=\mathbb{1}_B$时(3.27)成立。由引理3.1.5和引理3.2.1知当g为非负简单函数时结论(3.27)成立。注意到$(gp)^\pm=g^\pm p$，可得

$$\int_A g^\pm\mathrm{d}\nu=\int_A g^\pm p\mathrm{d}\mu=\int_A(gp)^\pm\mathrm{d}\mu,\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

因此(3.27)成立。 □

[13]详见定义1.3.3。
[14]既可以是实函数，也可以是复函数。

练习 3.7.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，p是非负$\mathscr{F}$可测函数，g是可测函数，试证明$(gp)^{\pm}=g^{\pm}p$。

定义 3.7.3 设X是$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$n$维*r.v.*，$F$是$X$的概率分布函数，若存在非负$\mathscr{B}^n$可测函数$p$使得

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]}p\mathrm{d}\lambda,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n \tag{3.28}$$

则称p为F或X的**密度函数**。

定理 3.7.5 设 X 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ 上的 n 维*r.v.*，F 是 X 的概率分布函数，p 为 X 的密度函数，g 是 $\mathscr{B}^n$ 可测函数，若 $\mathbf{E}(g(X))$ 或 $\int_{\mathbb{R}^n}g(x)p(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\mathbf{E}(g(X))=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{3.29}$$

进一步，若$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$Y=h(X)$，则

$$F_Y(y)=\int_{h^{-1}((-\infty,y])}p(x)\mathrm{d}x,\quad \forall y\in\mathbb{R}^m \tag{3.30}$$

$$\mathbf{P}_Y(B)=\mathbf{P}(Y\in B)=\int_{h^{-1}(B)}p(x)\mathrm{d}x,\quad \forall B\in\mathscr{B}^m \tag{3.31}$$

证明： 由定理3.7.3、定理3.7.4和(3.28)知(3.29)成立。类似可得得 (3.30) 和 (3.31)。 □

3.8 Lebesgue积分与Riemann积分

定义 3.8.1 设f是$\mathscr{B}^n$可测函数，$(a,b]$为非空有界立方体，非空互不相交立方体类$\{(a_{n,k},b_{n,k}]:1\leqslant k\leqslant m_n\}$满足条件

$$\bigcup_{k=1}^{m_n}(a_{n,k},b_{n,k}]=(a,b],\quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x=0$$

若

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\min_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\sup_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

记

$$(R)\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x\triangleq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\min_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$$

则称为 f 在$(a,b]$ 上的***Riemann* 积分存在**，并称 $(R)\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x$ 为 f 的***Riemann* 积分**。

定理 3.8.1 设f是$\mathscr{B}^n$可测函数，若$|f|$在$(a,b]$上的*Riemann*积分存在，则f为*L*测度可积，且

$$\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x=(R)\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x \tag{3.32}$$

证明： 注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m_n}\left(\inf_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\mathbb{1}_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\\&\leqslant f\mathbb{1}_{(a,b]}\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\left(\sup_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\mathbb{1}_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\end{aligned}$$

由对L测度积分的定义可得(3.32)。 □

3.9 积分收敛定理

引理 3.9.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，h和g为可积函数，$\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$为$\mathscr{F}$可测实函数列。若$g\leqslant f_n$, a.e.，$n\in\mathbb{N}$，则$\int f_n,\int\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n,\int\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n$都存在，且

$$\int g\leqslant\min\left\{\int f_n,\int\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n,\int\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n\right\} \tag{3.33}$$

若$f_n \leqslant h$, a.e.，$n\in\mathbb{N}$，则$\int f_n, \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$都存在，且

$$\int h \geqslant \max\left\{\int f_n, \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right\} \tag{3.34}$$

若$g \leqslant f_n \leqslant h$, a.e.，$n\in\mathbb{N}$，则$f_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$都是可积函数。

证明： 当几乎处处$g\leqslant f_n$时，几乎处处有

$$g^- \geqslant \max\left\{f_n^-, \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-, \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-\right\}$$

由积分的单调性可知

$$\infty > \int g^- \geqslant \max\left\{\int f_n^-, \int \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-, \int \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-\right\}$$

因此$\int f_n, \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$都存在。注意到几乎处处有

$$g^+ \leqslant \min\left\{f_n^+, \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^+, \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^+\right\}$$

由积分的单调性知(3.33)成立。

当几乎处处 $f_n\leqslant h$ 时，类似可证 $\int f_n$，$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 和 $\int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 都存在，并且(3.34)成立。

当几乎处处$g\leqslant f_n\leqslant h$时，(3.33)和(3.34)都成立，因此 f_n，$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 和 $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 都是可积函数。 □

定理 3.9.1 (单调收敛定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，g为可积函数，$\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$为$\mathscr{F}$可测增函数列。若$g\leqslant f_n\uparrow f$, a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f \tag{3.35}$$

证明： 当$\int f=\infty$时，$\int f^+=\infty$。注意到$f_n^+\uparrow f^+$, a.e.，由定理3.1.2知

$$\infty = \int f^+ = \lim_{n\to\infty}\int f_n^+$$

另一方面，注意到$f_n^-\leqslant g^-$，由引理3.9.1的(3.34)知

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n^- \leqslant \int g^- < \infty$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n^+ - \int f_n^-\right) = \infty = \int f$$

即(3.35)成立。

当$\int f<\infty$时，由引理3.9.1的(3.33)知f可积，且

$$\int f = \int (f-g) + \int g$$

再由$g\leqslant f_n\leqslant f$知$f_n$可积，进而由积分的线性性[15]得

$$\int f_n = \int (f_n-g) + \int g$$

令$n\to\infty$，利用定理3.1.2立得(3.35)。 □

定理 3.9.2 (Fatou引理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，g和h为实可积函数，$\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$为$\mathscr{F}$可测实函数列。若$g\leqslant f_n$, a.e.，则

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int f_n \tag{3.36}$$

若$h\geqslant f_n$, a.e.，则

$$\int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\int f_n \tag{3.37}$$

证明： 当几乎处处$g\leqslant f_n$时，记$g_n=\inf_{k\geqslant n} f_k$，则$g\leqslant g_n\uparrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$，并且由单调收敛定理和积分的单调性得

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\int g_n \tag{3.38}$$

[15] 教材中没有验证条件：f_n的积分存在。

由引理3.9.1的(3.33)知$\int f_n$和$\int g_n$都存在。注意到$g_n \leqslant f_k, k \geqslant n$，利用积分的单调性[16]得$\int g_n \leqslant \inf_{k\geqslant n}\int f_k$，代入到(3.38)得

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}\int f_k = \varliminf_{n\to\infty}\int f_n$$

即(3.36)成立。

当几乎处处$h \geqslant f_n$时，由引理3.9.1的(3.34)知$\int f_n$和$\int \varlimsup_{n\to\infty} f_n$都存在，且$-f_n \geqslant -h, \text{a.e.}$，并且$-h$还是可积函数，由(3.36)知

$$\begin{aligned}-\int \varlimsup_{n\to\infty} f_n &= \int\left(-\varlimsup_{n\to\infty} f_n\right) = \int \varliminf_{n\to\infty}(-f_n)\\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int(-f_n) = \varliminf_{n\to\infty}\left(-\int f_n\right) = -\varlimsup_{n\to\infty}\int f_n\end{aligned}$$

即(3.37)成立。 □

定理 3.9.3 (控制收敛定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，g和h为实可积函数。若实$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f, \text{a.e.}$，$g \leqslant f_n \leqslant h, \text{a.e.}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f \tag{3.39}$$

进一步，若实或复$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f, \text{a.e.}$，$|f_n| \leqslant g, \text{a.e.}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f \tag{3.40}$$

证明： 当实$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f, \text{a.e.}$，$g \leqslant f_n \leqslant h, \text{a.e.}$，时，由Fatou引理得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int f_n \leqslant \int f \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n$$

即(3.39)成立。

当实或复$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f, \text{a.e.}$，$|f_n| \leqslant g, \text{a.e.}$，时，$|f_n - f| \to 0$，且$0 \leqslant |f_n - f| \leqslant 2g$，由(3.39)得$\lim_{n\to\infty}\int|f_n - f| = 0$，再注意到$\left|\int f_n - \int f\right| \leqslant \int |f_n - f|$知(3.40)成立。 □

推论 3.9.4 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间，f_n是$\mathscr{F}$可测函数，g为可积函数。若$\sum_{k=1}^\infty f_k$*a.e.*收敛，且对于任何$n\in\mathbb{N}$有$\left|\sum_{k=1}^n f_k\right| \leqslant g, \text{a.e.}$，则$\sum_{n=1}^\infty f_n$可积，且

$$\int \sum_{k=1}^\infty f_k = \sum_{k=1}^\infty \int f_k \tag{3.41}$$

证明： 注意到$\left|\sum_{k=1}^n f_k\right| \leqslant g, \text{a.e.}$和$\sum_{n=1}^\infty f_n$a.e.收敛，由引理3.9.1知$\sum_{k=1}^n f_k$和$\sum_{n=1}^\infty f_n$都可积，再由控制收敛定理[17]和积分的线性性质[18]知

$$\begin{aligned}\int\sum_{k=1}^\infty f_k &= \int\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k = \lim_{n\to\infty}\int\sum_{k=1}^n f_k\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\int f_k = \sum_{k=1}^\infty\int f_k\end{aligned}$$

即(3.41)成立。 □

推论 3.9.5 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间。若f可积，则

$$\lim_{\mu(A)\to 0}\int_A |f| = 0 \tag{3.42}$$

证明： 由控制收敛定理

$$\int_A |f| = \lim_{n\to\infty}\int_A |f|\,\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant n\}}$$

因此对于任意$\varepsilon > 0$，存在N使得

$$0 \leqslant \int_A |f| - \int_A |f|\,\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant N\}} < \varepsilon$$

[16]详见定理3.2.3。
[17]详见定理3.9.3。
[18]详见定理3.2.2。

因此当$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{N}$时有

$$\int_A |f| = \int_A |f| \mathbb{1}_{\{|f| \leqslant N\}} + \int_A |f| - \int_A |f| \mathbb{1}_{\{|f| \leqslant N\}} < 2\varepsilon$$

即(3.42)成立。 □

推论 3.9.6 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$f_t$为$\mathscr{F}$可测函数，$t \in \mathbb{R}$。若存在可积函数$g$，使得几乎处处有$|f_t| \leqslant g, \lim_{t \to t_0} f_t = f_{t_0}$，则

$$\int f_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \int f_t \tag{3.43}$$

证明： 由引理3.2.2知f_t可积，考察函数$h(t) = \int f_t$。对于任何收敛于t_0的数列$\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$，由控制收敛定理知$\int f_{t_0} = \lim_{n \to \infty} \int f_{t_n}$，因此$h(t)$在$t_0$点处连续，即(3.43)成立。 □

推论 3.9.7 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$f_t$为可积函数，$t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$。若存在可积函数$g$，使得$\left|\frac{\mathrm{d} f_t}{\mathrm{d} t}\right| \leqslant g$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}\left(\int f_t\right) = \int \frac{\mathrm{d} f_t}{\mathrm{d} t} \mathrm{d}\mu \tag{3.44}$$

证明： 考察函数$h(t) = \int f_t$，显然

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}\left(\int f_t\right) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int (f_{t+\Delta} - f_t) = \lim_{\Delta \to 0} \int \frac{f_{t+\Delta} - f_t}{\Delta} \tag{3.45}$$

由拉格朗日中值定理知存在$\theta \in (a, b)$，使得

$$\frac{f_{t+\Delta} - f_t}{\Delta} = \left.\frac{\mathrm{d} f_t}{\mathrm{d} t}\right|_{t=\theta}$$

因此$\left|\frac{f_{t+\Delta} - f_t}{\Delta}\right| \leqslant g$，由(3.46)和推论3.9.6得(3.44)。 □

推论 3.9.8 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$f_t$为$\mathscr{F}$可测函数。若存在可积函数$g$，使得$|f_t| \leqslant g$，并且$(R)\int_{(a,b]} f_t \mathrm{d}t$几乎处处存在[19]，其中$a, b \in \mathbb{R}$，则

$$(R)\int_{(a,b]} \left(\int f_t\right) \mathrm{d}t = \int \left((R)\int_{(a,b]} f_t \mathrm{d}t\right) \tag{3.46}$$

证明： 取非空互不相交区间$\{(a_{n,k}, b_{n,k}] : 1 \leqslant k \leqslant m_n\}$，使得

$$\bigcup_{k=1}^{m_n} (a_{n,k}, b_{n,k}] = (a, b], \quad \lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant m_n} \int_{(a_{n,k}, b_{n,k}]} \mathrm{d}x = 0$$

由$\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} \left(\int f_t\right) \geqslant \int \left(\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} f_t\right)$可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} \left(\int f_t\right)\right) \int_{(a_{n,k}, b_{n,k}]} \mathrm{d}t \\
\geqslant& \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\int \left(\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} f_t\right) (b_{n,k} - a_{n,k})\right) \\
=& \lim_{n \to \infty} \int \left(\sum_{k=1}^{m_n} \left(\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} f_t\right) (b_{n,k} - a_{n,k})\right)
\end{aligned}$$

注意到

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n} \left(\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} f_t\right) (b_{n,k} - a_{n,k})\right| \leqslant g(b - a)$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\inf_{t \in (a_{n,k}, b_{n,k}]} \left(\int f_t\right)\right) \int_{(a_{n,k}, b_{n,k}]} \mathrm{d}t \geqslant \int \left((R)\int_{(a,b]} f_t \mathrm{d}t\right)$$

[19]Riemann积分的定义见定义3.8.1。

类似由$\sup_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right)\leqslant\int\left(\sup_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f_t\right)$可证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\sup_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}t\leqslant\int\left((R)\int_{(a,b]}f_t\mathrm{d}t\right)$$

因此(3.46)成立。 □

3.10 级数与积分

定义 3.10.1 设$\Omega=\mathbb{N}$，$\mathscr{F}=\{A:A\subset\mathbb{N}\}$，对于任何$A\in\mathscr{F}$，用$\mu(A)$表示$A$中元素的个数，称$\mathscr{F}$上的测度$\mu$为**计数测度**。

显然由$\mathbb{N}$的所有子集构成的集类$\mathscr{F}$为σ代数，计数测度μ 为测度，$(\mathbb{N},\mathscr{F},\mu)$为测度空间。此时定义在$\mathbb{N}$上的任何函数$f$都是$\mathscr{F}$可测函数，该函数可以表达为：

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathbb{1}_{\{n\}}$$

其中$a_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$。

进一步，如果f关于μ的积分存在，则

$$\int f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

因此关于积分的结论可以用于级数性质的研究。