测度与概率

李勇
北京师范大学统计学院

2019 年 6 月 3 日

目录

第一章　测度空间与概率空间

在现实生活中, 长度、面积和体积分别是实数集合、平面集合和空间集合大小的一种测度，而概率和非负函数的定积分则分别是事件发生的可能性和曲边梯形面积大小的一种测度。对于一般集合，如何测度它的大小，这种测度都具有什么性质，是本章我们关心的问题。

1.1　集类

为了研究一般集合的测度理论，需要先明确研究对象和研究范围，为此引入如下的定义。

定义 1.1.1 设Ω是给定的一个非空集合，它的一些子集组成的集类$\mathscr{S}$称为Ω的一个**半集代数**，如果它满足：

(i) $\Omega \in \mathscr{S}, \varnothing \in \mathscr{S}$；

(ii) （对交运算封闭）若$A, B \in \mathscr{S}$，则$AB \in \mathscr{S}$；

(iii) （差可分割）若$A, A_1 \in \mathscr{S}$，并且$A_1 \subset A$，则存在$A_i \in \mathscr{S}$，使得$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$互不相交，且$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$。

半集代数有较好的集合运算结构，它构成了测度理论的基本研究对象和研究范围，这个结构保证了交运算封闭性，以及可分割性：大的研究对象可以分割成小的研究对象之并。由下面引理可以得到半集代数的一个等价定义。

引理 1.1.1 Ω的集类$\mathscr{S}$为半集代数的充分必要条件是定义*1.1.1*中的*(i)*和*(ii)*及

(iii)' 若$A \in \mathscr{S}$，则存在$A_i \in \mathscr{S}$，使得$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$互不相交，且$A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$，其中$A^c \triangleq \Omega \backslash A$。

证明： 只需要在(i)和(ii)成立的前提下证明(iii)和(iii)'等价。

假设(iii)成立，往证(iii)'成立。事实上，当$A \in \mathscr{S}$时，注意到$A \subset \Omega \in \mathscr{S}$，由(iii)知存在$A_i \in \mathscr{S}$，使得

$$A = A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$$

互不相交，且$\Omega = \bigcup_{i=0}^n A_i$，即$A^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$。

假设(iii)'成立，往证(iii)成立。若$\mathscr{S}$中集A和A_1满足条件$A_1 \subset A$，则由(iii)'知存在则存在$B_i \in \mathscr{S}$，使得$B_2, B_3, \ldots, B_n$互不相交，且$A_1^c = \bigcup_{i=2}^n B_i$，因此

$$\begin{aligned} A &= A \cap (\Omega) = A \cap (A_1 \cup A_1^c) \\ &= (AA_1) \cup \left(\bigcup_{i=2}^n (AB_i) \right) = \bigcup_{i=1}^n A_i \end{aligned}$$

其中$A_i = AB_i$，$2 \leqslant i \leqslant n$。显然$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$互不相交，因此(iii)成立。 □

例 1.1 $\Omega = \mathbb{Z}_+ \triangleq \{0, 1, 2, \ldots\}$，试证明

$$\mathscr{S} = \left\{ \mathbb{Z}_+ \cap [a, b) : a \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b \in \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\} \right\}$$

为半集代数。

证明： 显然$\Omega, \varnothing \in \mathscr{S}$，并且$\mathscr{S}$对于交运算封闭。若

$$A_1 = \mathbb{Z}_+ \cap [a_1, b_1) \subset A = \mathbb{Z}_+ \cap [a, b)$$

取

$$A_2 = \mathbb{Z}_+ \cap [a, a_1), \quad A_3 = \mathbb{Z}_+ \cap [b_1, b)$$

则A_1, A_2, A_3互不相交，且$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，即$\mathscr{S}$为半集代数。 □

例 1.2 $\Omega = \mathbb{R}^1$，试证明

$$\mathscr{S} = \left\{ (a, b] : a \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b \in \mathbb{R}^1 \cup \{-\infty, \infty\} \right\}$$

为半集代数[1]。

[1]约定$(a, \infty] \triangleq (a, \infty)$。

证明： 类似于例1.1可证。 □

定义 1.1.2 Ω的子集类$\mathscr{A}$称为Ω的一个**集代数**[2]，如果它满足：

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$；

(ii) *(对交运算封闭)若*$A, B \in \mathscr{A}$，则$AB \in \mathscr{A}$；

(iii) *(对补运算封闭)*$A \in \mathscr{A}$，则$A^c \in \mathscr{A}$。

下面的引理给出几个集代数的等价定义。

引理 1.1.2 对于Ω的子集类$\mathscr{A}$，下列条件都是$\mathscr{A}$为集代数的充分必要条件：

(I) 定义*1.1.2*中的*(i)*和*(iii)*成立，并且满足

(ii)' *(对于并运算封闭)若*$A, B \in \mathscr{A}$，则$A \cup B \in \mathscr{A}$；

(II) 定义*1.1.2*中的*(i)*成立，并且满足*(ii)'*和

(iii)' *(对于差运算封闭)若*$A, B \in \mathscr{A}$，则$A \backslash B \in \mathscr{A}$。

证明： 在定义1.1.2中的(i)和(iii)成立的情况下，由集合运算的对偶公式

$$(AB)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

知：定义1.1.2中(ii)与(ii)'等价。因此(I)是集类$\mathscr{A}$为集代数的充分必要条件。

当定义1.1.2中的(i)成立，并且满足(ii)'和(iii)'时有

$$AB = \Omega \backslash \left((A \backslash B) \cup (B \backslash A) \right) \in \mathscr{A}, \quad \forall A, B \in \mathscr{A}$$

$$A^c = \Omega \backslash A \in \mathscr{A}, \quad \forall A \in \mathscr{A}$$

即$\mathscr{A}$为集代数；反之，当$\mathscr{A}$为集代数时，定义1.1.2中的(i)、(ii)和(iii)成立。由(I) 知(ii)'成立，且

$$A \backslash B = A \cap B^c \in \mathscr{A}, \quad \forall A, B \in \mathscr{A}$$

即(II)成立。

综上所述，(II)是集类$\mathscr{A}$为集代数的充分必要条件。 □

引理 1.1.3 若$\mathscr{S}$是半集代数，则

$$\mathscr{A}(\mathscr{S}) \triangleq \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_1, A_2, \ldots, A_n \text{为}\mathscr{S}\text{中互不相交集} \right\} \tag{1.1}$$

为包含$\mathscr{S}$的**最小集代数**。

证明： 先证明$\mathscr{A}(\mathscr{S})$为集代数。显然$\Omega \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$。若$A, B \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，则存在互不相交集$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$使得$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，存在互不相交集$B_1, B_2, \ldots, B_m$，$B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$，从而

$$AB = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i B) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i B_j)$$

注意到互不相交集构成的集类

$$\{A_i B_j : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\} \subset \mathscr{S}$$

可得$AB \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$。进一步，由集合运算的对偶法则得

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

而由$\mathscr{S}$为半集代数和引理1.1.1知$A_i^c \in \mathscr{S}$，因此$A^c \in \mathscr{S} \subset \mathscr{A}(\mathscr{S})$。综上所述$\mathscr{A}(\mathscr{S})$为集代数。

下证明$\mathscr{A}(\mathscr{S})$为包含$\mathscr{S}$的最小集代数。如果$\mathscr{P}$为集代数，且$\mathscr{P} \supset \mathscr{S}$，则对于任何$A \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，存在互不相交集

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{S}$$

使得$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$。注意到$\mathscr{P}$对于有限并运算封闭，且$\mathscr{S} \subset \mathscr{P}$，可得$A \in \mathscr{P}$。因此$\mathscr{A}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{P}$，即$\mathscr{A}(\mathscr{S})$为包含$\mathscr{S}$的最小集代数。 □

[2]集代数对于集合的交、并、差和余（补）算是封闭，具有更好的集合运算结构。

引理 1.1.4 若$\mathscr{S}$是半集代数，则

$$\mathscr{A}(\mathscr{S})=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i:A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{S}\right\}\tag{1.2}$$

证明： 由(1.1)知

$$\mathscr{A}(\mathscr{S})\subset\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i:A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{S},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

另一方面，对于任何

$$A\in\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i:A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{S},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

存在$A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{S}$ 使得$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$。注意到$\mathscr{S}\subset\mathscr{A}(\mathscr{S})$，且$\mathscr{A}(\mathscr{S})$集代数，可得$A\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$，即

$$\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i:A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathscr{S},\ n\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathscr{A}(\mathscr{S})$$

所以(1.2)成立。 □

用$\mathbb{Z}$表示**整数全体**，用$\mathbb{N}$表示**正整数全体**，用$\mathbb{R}^d$表示n**维欧式空间**。称$\bar{\mathbb{R}}\triangleq\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$为**广义实数空间**，称$\bar{\mathbb{R}}^d$为**广义$n$维欧式空间**。

对于任何

$$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\bar{\mathbb{R}}^d$$
$$b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\bar{\mathbb{R}}^d$$

记[3]

$$(a,b]\triangleq\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^d:a_i<x_i\leqslant b_i,\forall i\leqslant n\right\}$$

例 1.3 $\Omega=\mathbb{R}^d$，$\mathscr{P}^d=\left\{(a,b]:a,b\in\bar{\mathbb{R}}^d\right\}$，求$\mathscr{A}\left(\mathscr{P}^d\right)$。

解： 显然$\mathscr{P}^d$为半集代数，由引理1.1.4知

$$\mathscr{A}\left(\mathscr{P}^d\right)=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]:a_i,b_i\in\bar{\mathbb{R}}^d,\forall 1\leqslant i\leqslant n\in\mathbb{N}\right\}\tag{1.3}$$

□

由引理1.1.3和引理1.1.4知集代数对于有限次集合运算封闭，但是不能保证它对于可数次集合运算封闭。

定义 1.1.3 设Ω是给定的一个非空集合，它的一些子集组成的集类$\mathscr{F}$称为Ω的一个σ**代数**，如果它满足：

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(ii) 若$A\in\mathscr{F}$，则$A^c\in\mathscr{F}$[4]；

(iii) 若$A_n\in\mathscr{F}$，$n\in\mathbb{N}$，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$[5]。

σ代数的集合运算结构合理，对于集合的可数次运算封闭，能够满足具有可列可加性的测度研究。由事件运算的对偶法则得下引理。

引理 1.1.5 $\mathscr{F}$是一个σ代数的充分必要条件是定义*1.1.3*中的*(i)*、*(ii)*和如下条件

(iii)' 若$A_n\in\mathscr{S}$，$n\in\mathbb{N}$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$

引理 1.1.6 若$\{\mathscr{F}_\alpha:\alpha\in D\}$是$\Omega$ 的σ 代数族，则$\bigcap_{\alpha\in D}\mathscr{F}_\alpha$ 是Ω的σ代数。

证明： 由于对于任意$\alpha\in D$都有$\Omega\in\mathscr{F}_\alpha$，所以$\Omega\in\bigcap_{\alpha\in D}\mathscr{F}_\alpha$。

若$A\in\bigcap_{\alpha\in D}\mathscr{F}_\alpha$，则对于任意$\alpha\in D$有

$$A\in\mathscr{F}_\alpha,\quad A^c\in\mathscr{F}_\alpha$$

[3]约定$(a_i,\infty]\triangleq(a_i,\infty)$。

[4]对补（余）运算封闭

[5]对可列并运算封闭。

即$A^c \in \bigcap_{\alpha\in D} \mathscr{F}_\alpha$。

若对于任意$n\in\mathbb{N}$有$A_n \in \bigcap_{\alpha\in D} \mathscr{F}_\alpha$，则对于任意有

$$A_n \in \mathscr{F}_\alpha, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \alpha\in D$$

进而对于任意$\alpha\in D$有$\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{F}_\alpha$，即$\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \bigcap_{\alpha\in D} \mathscr{F}_\alpha$。

综上所述，$\bigcap_{\alpha\in D} \mathscr{F}_\alpha$为$\Omega$的$\sigma$代数。 □

定理 1.1.1 设$\mathscr{C}$是由Ω的子集构成集类，则

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{F}\in\mathscr{D}} \mathscr{F} \tag{1.4}$$

为Ω的包含$\mathscr{C}$的最小σ代数，称之为由$\mathscr{C}$生成的σ代数，其中$\mathscr{D}=\{\mathscr{F}:\mathscr{C}\subset\mathscr{F}, \text{且}\mathscr{F}\text{为}\Omega\text{的}\sigma\text{代数}\}$。

证明： 概率论中已经证明。 □

例如对于例1.1中$\mathscr{S}$，$\sigma(\mathscr{S})$是$\mathbb{Z}_+$的所有子集全体；对于例1.2中$\mathscr{S}$，$\sigma(\mathscr{S})$是一维Borel集全体；对于例1.3中$\mathscr{P}^d$，$\sigma\left(\mathscr{P}^d\right)$是$d$维Borel集全体。

定义 1.1.4 Ω的子集类Π称为π系，如果它对于交运算封闭[6]。

Ω的子集类Λ称为λ系，如果它满足如下三条件：

(i) $\Omega\in\Lambda$；

(ii) 对真差封闭，即当$A,B\in\Lambda$且$A\subset B$时有$B\backslash A\in\Lambda$；

(iii) 对于不降集列的并封闭，即对于Λ中的不降集列$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$有$\bigcup_{n=1}^\infty A_n\in\Lambda$。

引理 1.1.7 若Ω的子集类$\mathscr{C}$同时为λ系和π系，则$\mathscr{C}$为σ代数。

证明： 由$\mathscr{C}$为λ系知$\Omega\in\mathscr{C}$。

对于任何$A\in\mathscr{C}$，由$\mathscr{C}$为λ系知$A^c=\Omega\backslash A\in\mathscr{C}$。

对于任何$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{C}$，由$\mathscr{C}$为$\pi$系知

$$B_m \triangleq \bigcup_{n=1}^m A_n = \left(\bigcap_{n=1}^m A_n^c\right)^c \in\mathscr{C}$$

则$\{B_m:m\in\mathbb{N}\}$为$\mathscr{C}$中不降列，再由$\mathscr{C}$为λ系知

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{m=1}^\infty B_m \in\mathscr{C}$$

综上所述，$\mathscr{C}$为σ代数。 □

引理 1.1.8 Ω的σ代数$\mathscr{A}$既是π系，也是λ系。

证明： 由定义1.1.3和引理1.1.5立得结论。 □

定义 1.1.5 对于Ω的子集类$\mathscr{C}$，称

$$\Lambda(\mathscr{C}) \triangleq \bigcap_{\mathscr{A}\in\mathscr{D}} \mathscr{A} \tag{1.5}$$

为$\mathscr{C}$生成的λ系，其中$\mathscr{D}=\left\{\mathscr{A}:\mathscr{A}\supset\mathscr{C},\mathscr{A}\text{为}\lambda\text{系}\right\}$。

引理 1.1.9 对于Ω的子集类$\mathscr{C}$，如下结论成立：

- $\Lambda(\mathscr{C})$为包含$\mathscr{C}$的最小λ系；
- 对于任何$A\in\Lambda(\mathscr{C})$，

$$\mathscr{A}_A = \{B\in\Lambda(\mathscr{C}): AB\in\Lambda(\mathscr{C})\}$$

都为λ系。

[6] 显然半集类是π系。

证明： 由(1.5)和λ系的定义易知$\Lambda(\mathscr{C})$为包含$\mathscr{C}$的最小λ系。仅需对于给定$A \in \Lambda(\mathscr{C})$，证明$\mathscr{A}_A$为$\lambda$系。

显然$\Omega \in \mathscr{A}_A$。

若$B \in \mathscr{A}_A$，则$AB \in \Lambda(\mathscr{C})$，再注意到$\Lambda(\mathscr{C})$为$\lambda$系得

$$AB^c = A \backslash (AB) \in \Lambda(\mathscr{C})$$

即$B^c \in \mathscr{A}_A$。

若

$$\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

为$\mathscr{A}_A$中不降列，则$\{AB_n : n \in \mathbb{N}\}$为$\Lambda(\mathscr{C})$ 中不降列，

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (AB_n) \in \Lambda(\mathscr{C})$$

即$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{A}_A$。

综上所述，$\mathscr{A}_A$为λ系。 □

定理 1.1.2 (集合形式的单调类定理) 若Ω的子集类$\mathscr{C}$为π系，则$\Lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$。

证明： 由引理1.1.9知$\Lambda(\mathscr{C})$为包含$\mathscr{C}$的最小λ系，而由引理1.1.8知$\sigma(\mathscr{C})$为λ系，所以$\Lambda(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$。因此只需证明$\Lambda(\mathscr{C}) \supset \sigma(\mathscr{C})$，再由引理1.1.7知只需证明$\Lambda(\mathscr{C})$为$\pi$系。

对于任意$A \in \mathscr{C}$，记

$$\mathscr{A}_A = \{B \in \Lambda(\mathscr{C}) : AB \in \Lambda(\mathscr{C})\} \subset \Lambda(\mathscr{C})$$

由$\mathscr{C}$为π系知$\mathscr{A}_A \supset \mathscr{C}$。由引理1.1.9知$\mathscr{A}_A$为$\lambda$系，因此$\mathscr{A}_A \supset \Lambda(\mathscr{C})$，即$\forall A \in \mathscr{C}$有$\mathscr{A}_A = \Lambda(\mathscr{C})$。

所以对于$\forall B \in \Lambda(\mathscr{C})$有

$$\mathscr{C} \subset \mathscr{A}_B = \{A \in \Lambda(\mathscr{C}) : AB \in \Lambda(\mathscr{C})\} \subset \Lambda(\mathscr{C})$$

类似可证$\mathscr{A}_B \supset \Lambda(\mathscr{C})$，即$\Lambda(\mathscr{C})$为$\pi$系。 □

1.2 测度与测度的构造

1.2.1 测度、可测空间与测度空间

本节给出测度的基本定义与简单性质。

对于Ω的子集类$\mathscr{C}$，进考虑满足如下条件的映射

$$\mu : \mathscr{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+ \triangleq [0, \infty] \tag{1.6}$$

且存在$A \in \mathscr{C}$，使得$\mu(A) < \infty$[7]。

如果映射μ满足可加性，即对于$\mathscr{C}$中互不相交集合A 和B，在$A \cup B \in \mathscr{C}$的情况下有

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{1.7}$$

就称μ为$\mathscr{C}$上的**可加测度**。

如果映射μ满足有限可加性，即对于$\mathscr{C}$中互不相交集合$A_1, A_2, \ldots, A_n$，在$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{C}$的情况下有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \tag{1.8}$$

就称μ为$\mathscr{C}$上的**有限可加测度**。

如果映射μ满足可列可加性，即对于$\mathscr{C}$中互不相交集列$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$，在$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{C}$的情况下有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{1.9}$$

[7]如果任何集合的测度值都为∞，就没有意义了。

就称μ为$\mathscr{C}$上的**可列可加测度**，简称为**测度**[8]。

~~将可加、有限可加和可列可加测度统称为测度。~~

对于$\mathscr{C}$上的测度μ，如果

$$\mu(A) < \infty, \quad \forall A \in \mathscr{C} \tag{1.10}$$

就称μ为$\mathscr{C}$上的**有限测度**；如果对于任何$A \in \mathscr{C}$，存在互不相交集列$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，且

$$\mu(A_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.11}$$

就称μ为$\mathscr{C}$上的σ**有限测度**。

对于Ω的σ代数$\mathscr{F}$，称$(\Omega, \mathscr{F})$为**可测空间**；称$\mathscr{F}$中的集合为Ω中关于$\mathscr{F}$的**可测集**。

若μ为σ代数$\mathscr{F}$上的测度，称$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为**测度空间**。特别当$\mu(\Omega) = 1$时称$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为**概率空间**，此时称$\mu$为概率测度。

1.2.2 测度在集代数上的扩张

本小节讨论如何将半集代数$\mathscr{S}$上的σ有限测度扩张到$\sigma(\mathscr{S})$上的σ有限测度，并将证明这种扩张是唯一的。

定义 1.2.1 设Ω上的子集类$\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$，$\mu_i$是$\mathscr{C}_i$上的测度或者可加测度，如果对于任意$A \in \mathscr{C}_1$，有

$$\mu_1(A) = \mu_2(A)$$

就称μ_2是μ_1在$\mathscr{C}_2$**上的扩张**，称μ_1是μ_2在$\mathscr{C}_1$**上的限制**，记为$\mu_1 = \mu_2\big|_{\mathscr{C}_1}$。

定理 1.2.1 设μ为Ω上的半集代数$\mathscr{S}$上的有限可加测度，则μ在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上存在唯一的扩张。

证明： 对于任意$A \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，由引理1.1.3知在$\mathscr{S}$中存在互不相交集$A_1, A_2, \ldots, A_n$，使得$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$，记

$$\tilde{\mu}(A) \triangleq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \tag{1.12}$$

下证明这样定义的$\tilde{\mu}$是合理的，即如果A还能表示成$\mathscr{S}$中的互不相交集$B_1, B_2, \ldots, B_m$之并，就有

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{u=1}^{m} \mu(B_u) \tag{1.13}$$

事实上，$A_k = A_k \cap \left(\bigcup_{u=1}^{m} B_u\right) = \bigcup_{u=1}^{m} (A_k B_u)$，注意到$A_k B_u \in \mathscr{S}$，再由$\mu$的有限可加性得

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} \mu(A_k B_u) \tag{1.14}$$

类似地，由$B_u = B_u \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k B_u)$得

$$\sum_{u=1}^{m} \mu(B_u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{u=1}^{m} \mu(A_k B_u) \tag{1.15}$$

由(1.14)和(1.15)得(1.13)，即$\tilde{\mu}$的定义合理。

下只需证明$\tilde{\mu}$是$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上的有限可加测度即可。事实上，对于$\mathscr{A}(\mathscr{S})$中的互不相交集

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

由$\mathscr{A}(\mathscr{S})$为集代数知$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，再由引理1.1.3知：对每一$k$，存在$\mathscr{S}$中的互不相交集$A_{k,1}, A_{k,2}, \ldots, A_{k,m_k}$，使得$A_k = \bigcup_{j=1}^{n_k} A_{k,j}$。注意到

$$\{A_{k,j} : 1 \leqslant j \leqslant m_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

是$\mathscr{S}$的互不相交集，由$\tilde{\mu}$的定义得

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{m_k} A_{k,j}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k} \mu(A_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}(A_k)\end{aligned}$$

[8]当$\varnothing \in \mathscr{C}$中时，测度为有限可加测度。

即$\tilde{\mu}$是$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上的有限可加测度。

综上所述，$\tilde{\mu}$是μ在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上的扩张，并且由(1.12) 和(1.13) 知它还是唯一的扩张。 □

定理 1.2.2 设μ为Ω上的半集代数$\mathscr{S}$上的测度，则μ 在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 上存在唯一的扩张[9]。

证明： 由于$\varnothing \in \mathscr{S}$，所以$\mu$为$\mathscr{S}$上的有限可加测度，由定理1.2.3知$\mu$在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上存在唯一的扩张$\tilde{\mu}$为有限可加测度。下只需证明$\tilde{\mu}$具有可列可加性即可。

事实上，对于互不相交集列$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}(\mathscr{S})$，若$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，则存在$\mathscr{S}$中的互不相交集$B_1, B_2, \ldots, B_m$，使得$A = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$，并且

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k) \tag{1.16}$$

另一方面，则存在$\mathscr{S}$中的互不相交集$A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,l_n}$，使得$A_n = \bigcup_{j=1}^{l_n} A_{n,j}$，因此

$$\begin{aligned} B_k &= B_k \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_k \cap A_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{l_n} (B_k \cap A_{n,j}) \end{aligned}$$

注意到$\{B_k \cap A_{n,j} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant j \leqslant l_n\}$为$\mathscr{S}$互不相交集列，$B_k \cap A_n \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，以及测度$\mu$ 和有限可加测度$\tilde{\mu}$的性质得

$$\mu(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l_n} \mu(B_k \cap A_{n,j}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_k \cap A_n)$$

带入到(1.16)可得

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_k \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \tilde{\mu}(B_k \cap A_n)$$

再注意到$\bigcup_{k=1}^{m} (B_k \cap A_n) = A_n$得$\tilde{\mu}$的可列可加性。 □

定理 1.2.3 (测度的单调性) 设μ为Ω上的半集代数$\mathscr{S}$上的测度或有限可加测度，若$A_1, A_2, \ldots, A_n$为$\mathscr{S}$中互不相交集，且$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A \in \mathscr{S}$，则

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu(A) \tag{1.17}$$

证明： 记$\tilde{\mu}$为μ在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上的扩张，

$$A_{n+1} \triangleq A \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

则$A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$为$\mathscr{A}(\mathscr{S})$中的互不相交集。注意到$A = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$可得

$$\mu(A) = \tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{\mu}(A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

即(1.17)成立。 □

定理 1.2.4 (测度的次可加性) 设μ为Ω上的半集代数$\mathscr{S}$上的测度，$\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$为$\mathscr{S}$中互不相交集列，$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。若$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A \in \mathscr{S}$，则有

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \tag{1.18}$$

证明： 记$\tilde{\mu}$为μ在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上的扩张，则

$$A = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (AA_k)$$

且$AA_1, AA_2, \ldots, AA_n$为$\mathscr{S}$中互不相交集。由定理1.2.1和测度的单调性（定理1.2.3）知

[9]这里的扩张要有可列可加性，而定理1.2.1中仅要求扩张有有限可加性。

$$\begin{aligned}\mu(A) = \tilde{\mu}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}(AA_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu(AA_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\end{aligned}$$

即(1.18)成立。 □

1.2.3　外测度

定义 1.2.2 用 $\mathscr{D}$ 表示由 Ω 的所有子集构成的集类，称 $\mu^*: \mathscr{D} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ 为 Ω 的一个**外测度**，如果它满足如下三个条件

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$。

(ii) 不降性：对于任何$A \subset B \subset \Omega$有$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$。

(iii) **次σ-可加性**：对于任何$A_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N}$，有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \tag{1.19}$$

引理 1.2.1 外测度μ^*具有次可加性。

证明： 对于任何$A_k \subset \Omega, 1 \leqslant k \leqslant n$，记$A_{n+i} = \varnothing$，则由外测度的定义知

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)\end{aligned}$$

即μ^*具有次可加性。 □

定义 1.2.3 设μ^*是Ω上的外测度，称Ω的子集A为μ^*-**可测集**，如果它满足

$$\mu^*(D) = \mu^*(AD) + \mu^*(A^c D), \quad \forall D \subset \Omega \tag{1.20}$$

进一步，称

$$\mathscr{A}_{\mu^*} \triangleq \{A \subset \Omega : A\text{为}\mu^*\text{-可测集}\} \tag{1.21}$$

为μ^*-**可测集类**。

引理 1.2.2 Ω的子集A为μ^*-可测集的充分必要条件是

$$\mu^*(D) \geqslant \mu^*(AD) + \mu^*(A^c D), \quad \forall D \subset \Omega \tag{1.22}$$

证明： 由引理1.2.1知结论成立。 □

引理 1.2.3 若 μ^* 是 Ω 上的外测度，则对任何 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{A}_{\mu^*}$ 有

$$\mu^*(D) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k D) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c D\right) \tag{1.23}$$

其中$B_1 = A_1, B_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right), n \in \mathbb{N}$。

证明： 由$A_1 \in \mathscr{A}_{\mu^*}$得

$$\begin{aligned}\mu^*(D) &= \mu^*(A_1 D) + \mu^*(A_1^c D) \\ &= \mu^*(B_1 D) + \mu^*(A_1^c D)\end{aligned} \tag{1.24}$$

由$A_{n+1} \in \mathscr{A}_{\mu^*}$得

$$
\begin{aligned}
&\mu^*\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) D\right) \\
&= \mu^*\left(A_{n+1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) D\right) + \mu^*\left(A_{n+1}^c\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) D\right) \\
&= \mu^*\left(B_{n+1}D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k^c\right) D\right)
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

利用(1.24)和(1.25)递推，并注意到外测度的不降性得

$$
\begin{aligned}
\mu^*(D) &\geqslant \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*\left(B_k D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k^c\right) D\right) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*\left(B_k D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) D\right), \forall D \subset \Omega, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

令$n \to \infty$，得

$$
\mu^*(D) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(B_k D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) D\right)
$$

即(1.23)成立。 □

定理 1.2.5 设μ^*是Ω上的外测度，则$\mathscr{A}_{\mu^*}$为σ代数。

证明： 显然Ω满足(1.20)，即$\Omega \in \mathscr{A}_{\mu^*}$。

若$A \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，则(1.20)成立，即$A^c$满足(1.20)，亦即$\mathscr{A}_{\mu^*}$对于补运算封闭。

若$A_n \in \mathscr{A}_{\mu^*}, n \in \mathbb{N}$，由引理1.2.3知

$$
\mu^*(D) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(B_k D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c D\right), \forall D \subset \Omega
$$

其中$B_1 = A_1, B_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right), n \in \mathbb{N}$。利用外测度的次$\sigma$-可加性，并注意到$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$可得

$$
\begin{aligned}
\mu^*(D) &\geqslant \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c D\right) \\
&= \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c D\right), \forall D \subset \Omega
\end{aligned}
$$

由引理1.2.2知$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，即$\mathscr{A}_{\mu^*}$对于可数并运算封闭。

综上所述，$\mathscr{A}_{\mu^*}$是σ代数。 □

定理 1.2.6 Ω上的外测度μ^*在σ代数$\mathscr{A}_{\mu^*}$上的限制为测度。

证明： 显然μ^*非负，因此只需要证明在$\mathscr{A}_{\mu^*}$上μ^*具有可列可加性。对于$\mathscr{A}_{\mu^*}$中互不相交集列$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$，记

$$
B_1 = A_1, B_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) = A_{n+1},\ n \in \mathbb{N}
$$

由引理1.2.3，注意到外测度的次σ-可加性得

$$
\begin{aligned}
\mu^*(D) &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c D\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n D\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c D\right), \forall D \subset \Omega
\end{aligned}
$$

特别取$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，得到

$$
\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right)
$$

再由外测度的次σ-可加性得μ^*的可列可加性，即外测度μ^*在σ代数$\mathscr{A}_{\mu^*}$上的限制为测度。 □

1.2.4 从半集代数到σ代数上的测度扩张

数上的测度扩张过程中，(1.12)起到了至关重要的作用，这种思想能否应该到扩张到σ代数中呢？

引理 1.2.4 若μ是Ω的半集代数$\mathscr{S}$上的测度，对于任何$A\subset\Omega$，定义

$$\mu^*(A)\triangleq\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\exists A_n\in\mathscr{S},\text{使得}A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\tag{1.26}$$

则μ^*为外测度，且在$\mathscr{S}$上这个外测度与μ一致，即

$$\mu(A)=\mu^*(A),\quad\forall A\in\mathscr{S}\tag{1.27}$$

证明： 注意到$\varnothing\in\mathscr{S}$，且$\mu(\varnothing)=0$，由(1.26)得$\mu^*(\varnothing)=0$，即$\mu^*$在空集的值为0。

往证μ^*具有不降性。对于任何$A\subset B\subset\Omega$，有

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\exists A_n\in\mathscr{S},\text{使得}A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\\ \supset&\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n):\exists B_n\in\mathscr{S},\text{使得}B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right\}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mu^*(A)&=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\exists A_n\in\mathscr{S},\text{使}A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\\ &\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n):\exists B_n\in\mathscr{S},\text{使}B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right\}=\mu^*(B)\end{aligned}$$

即μ^*具有不降性。

往证μ^*具有次σ-可加性。对于任何

$$A_n\subset\Omega,n\in\mathbb{N}$$

- 如果$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)=\infty$，自然有(1.19)成立。
- 如果$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)<\infty$，则对于任意$\varepsilon>0$，由$\mu^*$的定义知：$\exists\{A_{n,k}:k\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{S}$，使得$A_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n,k}$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_{n,k})\leqslant\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n},\quad\forall n\in\mathbb{N}\tag{1.28}$$

  因此$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n,k}$，注意到$A_{n,k}\in\mathscr{S}$，由(1.26)和(1.28)知

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_{n,k})\\ &\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)+\varepsilon\end{aligned}$$

  由ε的任意性知(1.19)成立。

综上所述，μ^*为Ω上的外测度。

下只需证明(1.27)成立。事实上，当$A\in\mathscr{S}$时，由测度的次可加性（定理1.2.4）知

$$\mu(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),\ \forall\{A_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{S},A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

所以

$$\begin{aligned}\mu(A)&\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\exists A_n\in\mathscr{S},\text{使得}A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\\ &=\mu^*(A)\end{aligned}$$

另一方面，由

$$\mu(A)\in\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):\exists A_n\in\mathscr{S},\text{使得}A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}$$

得

$$\mu(A) \geqslant \mu^*(A)$$

因此(1.27)成立。 □

定义 1.2.4 若μ是Ω的半集代数$\mathscr{S}$上的测度，则称*(1.26)*中的外测度μ^*为由μ引出的外测度[10]。

引理 1.2.5 若μ是Ω的半集代数$\mathscr{S}$上的测度，μ^*是μ引出的外测度，则$\mathscr{S} \subset \mathscr{A}_{\mu^*}$。

证明： 设$A \in \mathscr{S}$，只需证明A是μ^*为-可测集。由引理1.2.3只需证明

$$\mu^*(D) \geqslant \mu^*(AD) + \mu^*(A^cD), \quad \forall D \subset \Omega$$

或对于满足条件$\mu^*(D) < \infty$的$D \subset \Omega$证明

$$\mu^*(D) \geqslant \mu^*(AD) + \mu^*(A^cD) \tag{1.29}$$

事实上，当$D \subset \Omega, \mu^*(D) < \infty$时，由外测度的定义(1.26)知：对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}$，使得$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，且

$$\mu^*(D) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon \tag{1.30}$$

而由引理1.1.1知存在$\mathscr{S}$中互不相交集$B_1, B_2, \ldots, B_m$，使得

$$A^c = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$$

$$A_n = A_n \cap (A \cup A^c) = (AA_n) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (B_k A_n)\right)$$

由定理1.2.3和引理1.2.4得

$$\mu(A_n) \geqslant \mu(AA_n) + \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k A_n)$$

带入到(1.30)得

$$\mu^*(D) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(AA_n) + \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k A_n)\right) - \varepsilon$$

令$\varepsilon \to 0$，利用外测度的次σ-可加性和次可加性得

$$\begin{aligned}
\mu^*(D) &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(AA_n) + \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k A_n)\right) \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(AA_n) + \mu^*(A^c A_n)\right) \\
&\geqslant \mu^*\left(A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) + \mu^*\left(A^c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \\
&\geqslant \mu^*(AD) + \mu^*(A^cD)
\end{aligned}$$

即引理结论成立。 □

定理 1.2.7 若μ为Ω上半集代数$\mathscr{S}$上的测度，则存μ在$\sigma(\mathscr{S})$上存在扩张。

证明： 用μ^*表示μ引出的外测度，由定理1.2.6知μ^*是$\mathscr{A}_{\mu^*}$上的测度，由定理1.2.5知$\mathscr{A}_{\mu^*}$为σ代数，引理1.2.5知$\mathscr{S} \subset \mathscr{A}_{\mu^*}$，所以$\sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A}_{\mu^*}$，因此$\mu^*|_{\sigma(\mathscr{S})}$是$\mu$在$\sigma(\mathscr{S})$上的扩张。 □

定理 1.2.8 (测度扩张定理) 若μ为Ω上半集代数$\mathscr{S}$上的σ有限测度，则μ在$\sigma(\mathscr{S})$上的扩张唯一，即若μ_1和μ_2都是μ在$\sigma(\mathscr{S})$上的扩张，则对于任何$A \in \sigma(\mathscr{S})$都有$\mu_1(A) = \mu_2(A)$。

[10]有点像半集代数上有限可加测度到集代数的扩张

证明： 由定理1.2.2知μ 在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 上存在唯一的扩张，将这个扩张还记为μ。下面只需证明$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上的测度μ在在$\sigma(\mathscr{S})$上的扩张唯一。

设μ_1和μ_2是μ在在$\sigma(\mathscr{S})$上的上的两个扩张，仅需证明

$$\mu_1(A)=\mu_2(A),\quad \forall A\in\sigma(\mathscr{S}) \tag{1.31}$$

由μ为$\mathscr{S}$上的σ有限测度知：存在互不相交集列$\{D_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{S}$，使得

$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad \mu(A_n)<\infty,\quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{1.32}$$

为证明(1.31)成立，只需证明

$$\mu_1(AD_n)=\mu_2(AD_n),\quad \forall n\in\mathbb{N},A\in\sigma(\mathscr{S}) \tag{1.33}$$

记

$$\Lambda=\{A\in\sigma(\mathscr{S}):\mu_1(AD_n)=\mu_2(AD_n),n\in\mathbb{N}\}$$

只需证明$\Lambda=\sigma(\mathscr{S})$。由$\mu_1|_{\mathscr{A}(\mathscr{S})}=\mu_2|_{\mathscr{A}(\mathscr{S})}=\mu$知$\Lambda\supset\mathscr{A}(\mathscr{S})$，因此只需证明$\Lambda$为$\sigma$代数。由定理1.1.2知只需证明$\Lambda$为$\lambda$系。

事实上，$\Omega\in\mathscr{A}(\mathscr{S})\subset\Lambda$；若$A,B\in\Lambda$，且$A\subset B$，

$$\begin{aligned}\mu_1((B\backslash A)D_n)&=\mu_1(BD_n)-\mu_1(AD_n)\\&=\mu_2(BD_n)-\mu_2(AD_n)=\mu_2((B\backslash A)D_n)\end{aligned}$$

即Λ对真差封闭；若不降集列$\{A_m:m\in\mathbb{N}\}$，记

$$B_1=A_1,B_{m+1}=A_{m+1}\backslash A_m,\quad m\in\mathbb{N}$$

注意到互不相交集列$\{B_mD_n:m\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{A}(\mathscr{S})$有

$$\begin{aligned}&\mu_1\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m\right)D_n\right)\\&=\mu_1\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\right)D_n\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu_1(B_mD_n)\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\mu_2(B_mD_n)=\mu_2\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m\right)D_n\right)\end{aligned}$$

即Λ对不降列的并封闭。因此Λ为λ系。 □

1.3 测度的性质

1.3.1 测度的运算性质

定理 1.3.1 若$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，则如下的结论成立。

1° $\mu(\varnothing)=0$；

2° μ具有**有限可加性**，即对于任何互不相交的可测集$A_1,A_2,\ldots,A_n$有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$$

3° μ具有**单调性**，即对可测集$A\subset B$有$\mu(A)\leqslant\mu(B)$；

4° μ具有**可减性**，即对可测集$A\subset B$，若$\mu(A)<\infty$，则$\mu(B\backslash A)=\mu(B)-\mu(A)$；

5° μ具有**加法公式**，即若可测集$A_1,A_2,\ldots,A_n$满足条件$\mu(A_k)<\infty,1\leqslant k\leqslant n$，则有

$$\begin{aligned}&\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\mu(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})\end{aligned}$$

6° μ具有**次可加性**，即对于任何任何可测集列$\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$和$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right)$$

证明： 由可列可加性得$\mu(\varnothing) = 0$和μ的有限可加性；由μ的有限可加性得单调性和可减性；利用有限可加性和数学归纳法可得加法公式；由可列可加性、有限可加性和单调性得μ的次可加性。 □

定理 1.3.2 若$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，则$\mu$具有如下性质

7° **下方连续性**，即若$A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

8° **上方连续性**，即若$A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$，并且存在$m$使得$\mu\left(A_m\right) < \infty$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

证明： 往证μ的下方连续性。由$A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$知

$$\mu\left(A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k \backslash A_{k-1}\right)$$

其中$A_0 = \varnothing$。利用μ的可列可加性得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k \backslash A_{k-1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k \backslash A_{k-1}\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \backslash A_{k-1}\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\end{aligned}$$

往证μ的上方连续性。由$A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$和可列可加性得

$$\begin{aligned}A_n &= \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \left(A_k \backslash A_{k+1}\right)\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\\ \mu\left(A_n\right) &= \sum_{k=n}^{\infty} \mu\left(A_k \backslash A_{k+1}\right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad (1.34)\end{aligned}$$

再注意到

$$\sum_{k=m}^{\infty} \mu\left(A_k \backslash A_{k+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \left(A_k \backslash A_{k+1}\right)\right) \leqslant \mu\left(A_m\right) < \infty$$

得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu\left(A_k \backslash A_{k+1}\right) = 0$$

对(1.34)取极限得$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$。 □

1.3.2 测度空间的完全化

定义 1.3.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是测度空间，若对于$B \subset \Omega$，存在$A \in \mathscr{F}$使$B \subset A$，就称$B$为$\mu$-**零集**。若每一$\mu$-零集都属于$\mathscr{F}$，就称$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为**完全测度空间**，称$\mu$为**完全测度**。

显然，完全测度空间中测度为0的事件都是可测集，为测度的理论研究提供方便。

对于Ω的任何两个子集A和B，定义

$$A \Delta B \triangleq (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

称之为A和B的**对称差**。

显然，集代数和σ代数对于有限次的对称差运算封闭，且σ代数对于可数次对称差运算封闭。

引理 1.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间，令

$$\bar{\mathscr{F}} \triangleq \{A\Delta N : A\in\mathscr{F}, N\text{是}\mu\text{-零集}\} \tag{1.35}$$

则

$$\bar{\mathscr{F}} = \{A\cup N : A\in\mathscr{F}, N\text{是}\mu\text{-零集}\} \tag{1.36}$$

证明： 对于任何$A\in\mathscr{F}$和μ-零集N，存在$B\in\mathscr{F}$，使得$\mu(B)=0$，$N\subset B$。所以

$$A\backslash N = (A\backslash B)\cup(A(B\backslash N))$$

进而有

$$A\Delta N = (A\backslash B)\cup(A(B\backslash N))\cup(N\backslash A)$$
$$A\cup N = A\cup(N\backslash A) = A\Delta(N\backslash A)$$

注意到$(A(B\backslash N))\cup(N\backslash A)$和$N\backslash A$都是$\mu$-零集得结论。 □

定理 1.3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间，令

$$\bar{\mu}(A\Delta N) \triangleq \mu(A),\quad \forall A\in\mathscr{F}, N\text{是}\mu\text{-零集}$$

则$\left(\Omega,\bar{\mathscr{F}},\bar{\mu}\right)$是完全测度空间，并称之为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的**完全化**。

证明： 先证明$\bar{\mu}$为$\bar{\mathscr{F}}$上的测度，为此只需证明可列可加性。事实上，对于互不相交集列$\{A_k : k\in\mathbb{N}\}\subset\bar{\mathscr{F}}$，由引理1.3.1知存在$B_k\in\mathscr{F}$和$\mu$-零集$N_k$，使得$A_k = B_k\cup N_k$。所以

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(A_k) &= \bar{\mu}(B_k\cup N_k) = \bar{\mu}(B_k\cup(N_k\backslash B_k))\\ &= \bar{\mu}(B_k\Delta(N_k\backslash B_k)) = \mu(B_k)\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\bar{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right) &= \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}N_k\right)\right)\\ &= \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)\Delta\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}N_k\right)\Big\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)\right)\right)\\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\bar{\mu}(A_k)\end{aligned}$$

即$\bar{\mu}$在$\bar{\mathscr{F}}$上具有可列可加性。

下证明$\bar{\mathscr{F}}$为σ代数。显然$\Omega\in\bar{\mathscr{F}}$；若$A\in\bar{\mathscr{F}}$，则存在可测集$B$和$\mu$-零集$N\subset D\in\mathscr{F}$，使得$A=B\cup N$，因此

$$\begin{aligned}A^c &= B^c\cap N^c = B^c\cap(D^c\cup(D\backslash N))\\ &= (B^c\cap D^c)\cup(B^c\cap(D\backslash N))\in\bar{\mathscr{F}}\end{aligned}$$

即$\bar{\mathscr{F}}$对于补运算封闭；由可数个μ-零集之并还是μ-零集知$\bar{\mathscr{F}}$对于可列并运算封闭。因此$\bar{\mathscr{F}}$为σ代数。

现在只需证明$\bar{\mathscr{F}}$包含所有$\bar{\mu}$-零集。事实上，对于任何$\bar{\mu}$-零集B，存在$A\in\bar{\mathscr{F}}$使得

$$B\subset A,\quad \bar{\mu}(A)=0$$

另一方面，存在$D\in\mathscr{F}$和μ-零集N，使得$A=D\Delta N$，且

$$0=\bar{\mu}(A)=\bar{\mu}(D\Delta N)=\mu(D)$$

注意到$D\Delta N$为μ-零集和$B\subset A=D\Delta N$，知B为μ-零集。因此$B=\varnothing\Delta B\in\bar{\mathscr{F}}$。 □

定理 1.3.4 设μ为半集代数上的σ-有限测度，μ^*是由μ引出的外测度，则$(\Omega,\mathscr{A}_{\mu^*},\mu^*)$是$(\Omega,\sigma(\mathscr{S}),\mu^*)$的完全化。

证明： 先证明$(\Omega,\mathscr{A}_{\mu^*},\mu^*)$是完全测度空间。事实上，对于$\mu^*$-零集$A\subset\Omega$，存在$B\in\mathscr{A}_{\mu^*}$使得$A\subset B$，并且$\mu^*(B)=0$。由外测度的单调性知$\mu^*(A)=0$，因此对任何$D\subset\Omega$有$\mu^*(AD)=0$，且

$$\mu^*(D)\geqslant\mu^*(A^cD)=\mu^*(AD)+\mu^*(A^cD)$$

由引理1.2.2知$A \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，即$(\Omega, \mathscr{A}_{\mu^*}, \mu^*)$是完全测度空间。

下证明$(\Omega, \mathscr{A}_{\mu^*}, \mu^*)$是$(\Omega, \sigma(\mathscr{S}), \mu^*)$的完全化。显然对于$\sigma(\mathscr{S})$中的任何集合$A$和$\mu^*$-零集$N$有

$$\begin{aligned}\overline{\mu^*}(A\Delta N) &= \mu^*(A) = \mu^*(A\backslash N) + \mu^*(N \cap A)\\ &= \mu^*(A\backslash N) + \mu^*(N\backslash A) = \mu^*(A\Delta N)\end{aligned}$$

即$\overline{\mu^*} = \mu^*$。下只需证明

$$\mathscr{A}_{\mu^*} = \overline{\sigma(\mathscr{S})} = \{A\Delta N : A \in \sigma(\mathscr{S}), N\text{是}\mu^*\text{-零集}\}$$

由$\mathscr{A}_{\mu^*} \supset \sigma(\mathscr{S})$，知$\mathscr{A}_{\mu^*} \supset \overline{\sigma(\mathscr{S})}$，因此只需证明

$$\mathscr{A}_{\mu^*} \subset \overline{\sigma(\mathscr{S})} \tag{1.37}$$

事实上，对于任何$A \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，由$\mu$为$\sigma$-有限测度知：存在集列$\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}$，使得$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，且$\mu(B_n) < \infty$。今$\mu^*(AB_n) < \infty$，由引理1.2.4知存在$C_n \in \sigma(\mathscr{S})$，使得$AB_n \subset C_n$，且$\mu^*(AB_n) = \mu^*(C_n)$，从而

$$AB_n = C_n\Delta(C_n \backslash (AB_n)) \in \overline{\sigma(\mathscr{S})}$$

$$A = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(AB_n) \in \overline{\sigma(\mathscr{S})}$$

即(1.37)成立。 □

定理 1.3.5 设μ为半集代数上的测度，μ^*是由μ引出的外测度，则对于任何$A \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，如果$\mu^*(A) < \infty$，则对于任何$\varepsilon > 0$，存在$A_\varepsilon \in \mathscr{A}(\mathscr{S})$，使得$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$。

证明： 今存在集列$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}$，使得$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，且

$$\mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \mu^*(A)$$

因此存在自然数m使得$\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$，再利用测度的单调性和可减性得

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A\Delta\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)\right) &= \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)\backslash A\right) + \mu^*\left(A\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)\right)\\ &\leqslant \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\backslash A\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right)\right)\\ &< \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

□

定理 1.3.6 设$\Omega = \mathbb{R}$，$\mathscr{P} = \left\{(a, b] : a, b \in \bar{\mathbb{R}}\right\}$，$\mu$为定义在$\mathscr{P}$上的$\sigma$有限测度，则如下的结论成立：

1. $\mathscr{P}$为半集代数；
2. μ在$\mathscr{A}(\mathscr{P})$和$\sigma(\mathscr{P})$上存在唯一扩张μ^*；
3. $(\Omega, \mathscr{A}_{\mu^*}, \mu^*)$是$(\Omega, \sigma(\mathscr{P}), \mu^*)$的完全化；
4. 对于任何$A \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，存在$\mu^*$-零集$N$和$B \in \sigma(\mathscr{P})$，使得$A = B \cup N$或者$A = B\Delta N$；
5. 对于任何$A \in \mathscr{A}_{\mu^*}$，如果$\mu^*(A) < \infty$，则对于任意$\varepsilon > 0$，存在$A_\varepsilon \in \mathscr{A}(\mathscr{P})$，使得

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$$

证明： 由半集代数的定义1.1.1、定理1.2.1、定理1.2.8、定理1.3.4和定理1.3.5知结论成立。 □

1.3.3 Lebesgue-Stieltjes测度

为了讨论方便，约定

$$x+(\pm\infty)=\pm\infty,\quad \infty-(-\infty)=\infty,$$
$$(\pm\infty)\times(\pm\infty)=\infty,\quad (\pm\infty)\times(\mp\infty)=-\infty$$
$$x\times(\pm\infty)=\begin{cases}\pm\infty, & x>0\\ \mp\infty, & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

定理 1.3.7 设$\Omega=\mathbb{R}$，$\mathscr{P}=\left\{(a,b]:a,b\in\bar{\mathbb{R}}\right\}$，

$$\lambda\left((a,b]\right)\triangleq\begin{cases}b-a, & b>a,\\ 0, & b\leqslant a,\end{cases}\qquad \forall a,b\in\bar{\mathbb{R}}$$

则$\mathscr{P}$是半集代数，λ是$\mathscr{P}$上的σ有限测度。

证明： 显然$\mathscr{P}$是半集代数，并且λ是测度。 □

定义 1.3.2 在定理*1.3.7*假设条件之下，称 λ 引出的外测度 λ^* 为 *Lebesgue* **外测度**，称$\mathscr{A}_{\lambda^*}$中的集合为 *Lebesgue* **可测集**，称 λ^* 在 $\mathscr{A}_{\lambda^*}$ 上或者在 $\sigma\left(\mathscr{P}\right)$ 上的的限制为 *Lebesgue* **测度**。为书写简便，记 λ^* 为λ。

定理 1.3.8 对于$\Omega=\mathbb{R}^n$，$\mathscr{P}_n=\left\{(a,b]:a,b\in\bar{\mathbb{R}}^n\right\}$，定义

$$\lambda_n\left((a,b]\right)=\prod_{k=1}^{n}\lambda\left((a_k,b_k]\right)$$

则$\mathscr{P}_n$是半集代数，且λ_n是$\mathscr{P}_n$上的σ有限测度。

证明： 显然。 □

定义 1.3.3 在定理*1.3.8*假设条件之下，称 λ_n 引出的外测度 λ_n^* 为 n**维*Lebesgue*外测度**，称 $\mathscr{A}_{\lambda_n^*}$ 中的集合为 n**维*Lebesgue*可测集**，称 λ_n^* 在 $\mathscr{A}_{\lambda_n^*}$ 上或者在 $\sigma\left(\mathscr{P}_n\right)$ 上的限制为 n**维*Lebesgue*测度**，简称为***L*测度**。为书写简便，记 λ_n^* 为 λ_n。

定理 1.3.9 设$\Omega=\mathbb{R}$，$\mathscr{P}=\left\{(a,b]:a,b\in\bar{\mathbb{R}}\right\}$，$F$是定义在$\mathbb{R}$上的右连续增函数，定义

$$\mu\left((a,b]\right)\triangleq\begin{cases}F(b)-F(a), & b>a,\\ 0, & b\leqslant a,\end{cases}\qquad \forall a,b\in\bar{\mathbb{R}} \tag{1.38}$$

则$\mathscr{P}$是半集代数，μ是$\mathscr{P}$上的σ有限测度。

证明： 显然$\mathscr{P}$是半集代数，只需证明μ是$\mathscr{P}$上的σ有限测度。由F为增函数知μ非负，因此只需证明μ具有可列可加性。

对于$\mathscr{P}$中的不交非空集列$\{(a_n,b_n]:n\in\mathbb{N}\}$，如果

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]=(a,b]\in\mathscr{P} \tag{1.39}$$

将$a_1,a_2,\ldots,a_n$按从小到大排列为$a_{k_1},a_{k_2},\ldots,a_{k_n}$，则由$\left\{(a_k,b_k]:1\leqslant k\leqslant n\right\}$互不相交和(1.39)知

$$a\leqslant a_{k_1}<b_{k_1}\leqslant a_{k_2}<b_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant a_{k_n}<b_{k_n}\leqslant a_{k_{n+1}}\triangleq b$$

再注意到F为增函数得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mu\left((a_k,b_k]\right)&=\sum_{j=1}^{n}\mu\left(\left(a_{k_j},b_{k_j}\right]\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n}\left(F\left(b_{k_j}\right)-F\left(a_{k_j}\right)\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(F\left(a_{k_{j+1}}\right)-F\left(a_{k_j}\right)\right)\\ &\leqslant F(b)-F(a)=\mu\left((a,b]\right)\end{aligned}$$

令$n \to \infty$得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left(a_k, b_k\right]\right) \leqslant \mu\left((a, b]\right) \tag{1.40}$$

下只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left(a_k, b_k\right]\right) \geqslant \mu\left((a, b]\right), \quad \forall a < b \tag{1.41}$$

取充分大的自然数m，使得

$$\alpha_m = \max\{a, -m\} < \beta_m = \min\{b, m\}$$

对于任意$\varepsilon \in (0, \beta_m - \alpha_m)$，由$F$的右连续性知：存在$\delta_n > 0$，使得

$$F\left(b_n + \delta_n\right) \leqslant F\left(b_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.42}$$

进而有

$$[\alpha_m + \varepsilon, \beta_m] \subset (a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n, b_n\right] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a_n, b_n + \delta_n\right)$$

由数学分析中的有限覆盖定理知：存在自然数t 和$\{n_1, n_2, \ldots, n_t\} \subset \mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}
&[\alpha_m + \varepsilon, \beta_m] \subset \bigcup_{j=1}^{t} \left(a_{n_j}, b_{n_j} + \delta_{n_j}\right) \\
&\alpha_m + \varepsilon > a_{n_1}, \quad \beta_m < b_{n_t} + \delta_{n_t} \\
&a_{n_2} < b_{n_1} + \delta_{n_1} < a_{n_3} < b_{n_2} + \delta_{n_2} < \cdots < a_{n_t} < b_{n_{t-1}} + \delta_{n_{t-2}}
\end{aligned}$$

再注意到F为增函数和(1.42)得

$$\begin{aligned}
F\left(\beta_m\right) - F\left(\alpha_m + \varepsilon\right) &\leqslant \sum_{j=1}^{t} \left(F\left(b_{n_j} + \delta_{n_j}\right) - F\left(a_{n_j}\right)\right) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{t} \left(F\left(b_{n_j}\right) - F\left(a_{n_j}\right)\right) + \sum_{j=1}^{t} \frac{\varepsilon}{2^{n_j}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(F\left(b_k\right) - F\left(a_k\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left(a_k, b_k\right]\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

令$\varepsilon \downarrow 0$，由F的右连续性得

$$F\left(\beta_m\right) - F\left(\alpha_m\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left(a_k, b_k\right]\right)$$

令$m \uparrow \infty$，由F的单增性得(1.41)。 □

定义 1.3.4 在定理*1.3.9*假设条件之下，称*(1.38)*中μ所对应的外测度μ^*在$\mathscr{A}_{\mu^*}$上或者在$\sigma(\mathscr{P})$上的限制为*Lebesgue-Stieltjes*测度，简称为*L-S*测度。进一步，称F为该*L-S*测度的**分布函数**。

定义 1.3.5 对于定义在$\bar{\mathbb{R}}^n$上的n元函数F称

$$\begin{aligned}
&\Delta_n F(a, b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} F\left(b - \sum_{j=1}^{k} \left(b_{i_j} - a_{i_j}\right) e_{i_j}\right)
\end{aligned} \tag{1.43}$$

为该函数在立方体$(a, b]$**上的增量**，其中$a, b \in \bar{\mathbb{R}}^n$，$a_i$和$b_i$分别是$a$和$b$的第$i$分量，$e_i$是第$i$分量为1的单位向量，并且约定

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant 0} F\left(b - \sum_{j=1}^{k} \left(b_{i_j} - a_{i_j}\right) e_{i_j}\right) = F(b) \tag{1.44}$$

引理 1.3.2 对于任何立方体$(a, b] \subset \bar{\mathbb{R}}^n$有

$$\Delta_n F(a, b) = \Delta_{n-1} F\left(a, b, b_n\right) - \Delta_{n-1} F\left(a, b, a_n\right) \tag{1.45}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n-1}F(a,b,x)\\
&\triangleq \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k<n} F\left((b_{-n},x)-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

以后对于n维向量x我们约定x_{-n}为删除该向量第n维分量后所得到的$n-1$维向量。

证明： 事实上，

$$
\begin{aligned}
\Delta_n F(a,b) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} F\left(b-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&= (-1)^n F(a) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k<n} F\left(b-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&+ \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n} F\left(b-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

由(1.46)知

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n-1}F(a,b,b_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k<n} F\left(b-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n} F\left(b-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}<n} F\left((b_{-n},a_n)-\sum_{j=1}^{k-1}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{n-2}(-1)^{s+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s<n} F\left((b_{-n},a_n)-\sum_{j=1}^{s}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n F(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k=n} F\left(b-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{s+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s<n} F\left((b_{-n},a_n)-\sum_{j=1}^{s}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&= -\Delta_{n-1}(a,b,a_n)
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

将(1.48)和(1.49)代入(1.47)立得(1.45)。 □

引理 1.3.3 对于任何n维函数F，n维立方体$(a,b]$，以及实数x，$\Delta_{n-1}F(a,b,x)$是$n-1$维函数$G(y)=F(y,x)$在$n-1$维立方体$(a_{-n},b_{-n}]$上的增量，即

$$
\Delta_{n-1}G(a_{-n},b_{-n}) = \Delta_{n-1}F(a,b,x)
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n-1}G\left(a_{-n},b_{-n}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1}G\left(b_{-n}-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k<n}F\left(\left(b_{-n},x\right)-\sum_{j=1}^{k}\left(b_{i_j}-a_{i_j}\right)e_{i_j}\right)\\
&=\Delta_{n-1}F\left(a,b,x\right)
\end{aligned}
$$

□

引理 1.3.4 对于满足如下条件的n元函数F

- 具有单增性，即F关于对每个自变量都单增。
- 具有右连续性，即F关于每个自变量都右连续。
- 具有增量非负性，即对于任何立方体$(a,b]\subset\bar{\mathbb{R}}^n$，都有$\Delta F\left(a,b\right)\geqslant 0$。

则*(1.46)*中$\Delta_{n-1}F\left(a,b,x\right)$关于$x$是右连续增函数。

证明： 由F的右连续性和(1.46)知$\Delta_{n-1}F\left(a,b,x\right)$关于$x$右连续，因此只需证明它为关于$x$的增函数。

事实上，对于任何$x_1\leqslant x_2$，由引理1.3.2知

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n-1}F\left(a,b,x_2\right)-\Delta_{n-1}F\left(a,b,x_1\right)\\
&=\Delta F\left(\left(a_{-n},x_1\right),\left(b_{-n},x_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

再由F具有增量非负性得$\Delta_{n-1}F\left(a,b,x_2\right)\geqslant\Delta_{n-1}F\left(a,b,x_1\right)$。 □

引理 1.3.5 在引理*1.3.4*条件之下，如果互不相交区间列 $\{(a_{n,k},b_{n,k}]:k\in\mathbb{N}\}$ 满足 $(a_n,b_n]=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{n,k},b_{n,k}]$，则对于任何$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\leqslant b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$有

$$
\Delta_nF\left(a,b\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_nF\left(\left(a_{-n},a_{n,k}\right),\left(b_{-n},b_{n,k}\right)\right)\tag{1.50}
$$

证明： 由引理1.3.4和引理1.3.2知$\Delta_{n-1}F\left(a,b,x\right)$关于$x$是右连续增函数，并且

$$
\Delta_nF\left(a,b\right)=\Delta_{n-1}F\left(a,b,b_n\right)-\Delta_{n-1}F\left(a,b,a_n\right)\tag{1.51}
$$

而由定理1.3.9知

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n-1}F\left(a,b,b_n\right)-\Delta_{n-1}F\left(a,b,a_n\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\Delta_{n-1}F\left(a,b,b_{n,k}\right)-\Delta_{n-1}F\left(a,b,a_{n,k}\right)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_nF\left(\left(a_{-n},a_{n,k}\right),\left(b_{-n},b_{n,k}\right)\right)
\end{aligned}
$$

代入到(1.51)得(1.50)。 □

引理 1.3.6 引理*1.3.4*条件之下，如果

$$
\bigcup_{k=1}^{m}\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]=(a,b]\tag{1.52}
$$

这里$\left\{(a^{(k)},b^{(k)}]:k\in\mathbb{N}\right\}$中的立方体为互不相交，则

$$
\sum_{k=1}^{m}\Delta_nF\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)=\Delta_nF\left(a,b\right)\tag{1.53}
$$

证明： 对于n用数学归纳法证明。由定理1.3.8知 $\mu_1\left((a,b]\right)=\Delta_n F\left(a,b\right)$ 是$\mathscr{P}_1$上的σ有限测度，因此当$n=1$时(1.53)成立。设在$n-1$时(1.53)成立，往证在n时(1.53)也成立。记

$$a=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right),\qquad b=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$$
$$a^{(k)}=\left(a_{k,1},a_{k,2},\ldots,a_{k,n}\right),\quad b^{(k)}=\left(b_{k,1},b_{k,2},\ldots,b_{k,n}\right)$$

对于正整数m，将$\left(\bigcup_{k=1}^m\left\{a_{k,n},b_{k,n}\right\}\right)\cup\left\{a_n,b_n\right\}$中的数按从小到大次序排列为

$$a_n=x_0<x_1<\cdots<x_t=b_n \tag{1.54}$$

记对于$1\leqslant i\leqslant t$，记$\alpha_i=x_{i-1},\beta_i=x_i$，则

$$\left\{\left(\left(a_{-n},\alpha_i\right),\left(b_{-n},\beta_i\right)\right]:1\leqslant i\leqslant t\right\}$$

互不相交，并且

$$(a,b]=\bigcup_{i=1}^t\left(\left(a_{-n},\alpha_i\right),\left(b_{-n},\beta_i\right)\right]$$

记$a^{(k,i)}=\left(a_{-n}^{(k)},\alpha_i\right),b^{(k,i)}=\left(b_{-n}^{(k)},\beta_i\right)$，则

$$\left\{\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]:1\leqslant k\leqslant m,1\leqslant i\leqslant t\right\}$$

互不相交，并且

$$\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]=\bigcup_{i=1}^t\left(\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]\right) \tag{1.55}$$

由引理1.3.5和(1.48)知

$$\Delta_n F\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)=\sum_{i=1}^t\Delta_n F\left(\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]\right)$$

对k求和，再注意到$\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]$ 或为空集，或为$\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]$可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m\Delta_n F\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)\\
&=\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^t\Delta_n F\left(\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]\right)\\
&=\sum_{i=1}^t\left(\sum_{k=1}^m\Delta_n F\left(\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^t\left(\sum_{k\in D_i}\Delta_n F\left(\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^t\sum_{k\in D_i}\left(\Delta_{n-1}F\left(a^{(k)},b^{(k)},\beta_i\right)-\Delta_{n-1}F\left(a^{(k)},b^{(k)},\alpha_i\right)\right)
\end{aligned} \tag{1.56}$$

其中$D_i=\left\{k:\left(a^{(k,i)},b^{(k,i)}\right]\cap\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]\neq\varnothing\right\}$。由(1.52)知

$$\left(a_{-n},b_{-n}\right]=\bigcup_{k\in D_i}\left(a_{-n}^{(k,i)},b_{-n}^{(k,i)}\right],\quad\forall 1\leqslant i\leqslant t$$

注意到$\left\{\left(a_{-n}^{(k,i)},b_{-n}^{(k,i)}\right]:k\in D_i\right\}$中立方体互不相交，由引理1.3.3和归纳假设得

$$\sum_{k\in D_i}\Delta_{n-1}F\left(a^{(k)},b^{(k)},\beta_i\right)=\Delta_{n-1}F\left(a,b,\beta_i\right)$$
$$\sum_{k\in D_i}\Delta_{n-1}F\left(a^{(k)},b^{(k)},\alpha_i\right)=\Delta_{n-1}F\left(a,b,\alpha_i\right)$$

代入到(1.56)，再利用引理1.3.5得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}\Delta_nF\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)\\&=\sum_{i=1}^{t}\left(\Delta_{n-1}F\left(a,b,\beta_i\right)-\Delta_{n-1}F\left(a,b,\alpha_i\right)\right)=\Delta_nF\left(a,b\right)\end{aligned}$$

综上所述，(1.53)成立。 □

引理 1.3.7 引理*1.3.4*条件之下，对于任何$(a,b]\in\bar{\mathscr{P}}_n$，对于任何$(a,b]\in\bar{\mathscr{P}}_n$，定义

$$\mu\left((a,b]\right)=\Delta_nF\left(a,b\right)$$

则μ为$\bar{\mathscr{P}}_n$上有限可加性测度。

证明： 由引理1.3.6知为$\bar{\mathscr{P}}_n$上有限可加性测度。 □

引理 1.3.8 引理*1.3.4*条件之下，对于任何有界立方体$(a,b]$，如果

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]=(a,b] \tag{1.57}$$

其中$\left\{(a^{(k)},b^{(k)}]:k\in\mathbb{N}\right\}$中立方体互不相交，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_nF\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)\geqslant\Delta_nF\left(a,b\right) \tag{1.58}$$

证明： 对于任意$\varepsilon>0$，由F的右连续性知存在各个分量都大于0的向量$c^{(k)}$使得

$$\Delta_nF\left(a^{(k)},b^{(k)}+c^{(k)}\right)\leqslant\Delta_nF\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)+\frac{\varepsilon}{2^k} \tag{1.59}$$

取各个分量都大于0的向量δ，则有界闭立方体

$$[a+\delta,b]\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(a^{(k)},b^{(k)}+c^{(k)}\right)$$

由有限覆盖定理知存在$\{i_j:1\leqslant j\leqslant l\}\subset\mathbb{N}$，使得

$$(a+\delta,b]\subset\bigcup_{j=1}^{l}\left(a^{(i_j)},b^{(i_j)}+c^{(i_j)}\right]$$

对于任何$(a,b]\in\bar{\mathscr{P}}_n$，定义

$$\mu\left((a,b]\right)=\Delta_nF\left(a,b\right)$$

由引理1.3.6知μ为$\bar{\mathscr{P}}_n$上有限可加性测度。再由定理1.2.1知μ 在$\mathscr{A}\left(\bar{\mathscr{P}}_n\right)$存在唯一扩张，将这个扩张仍然用$\mu$表示，则由(1.59)和有限可加测度的次可加性得

$$\begin{aligned}\Delta_nF\left(a+\delta,b\right)=\mu\left((a+\delta,b]\right)&\leqslant\sum_{j=1}^{l}\mu\left(\left(a^{(i_j)},b^{(i_j)}+c^{(i_j)}\right]\right)\\&=\sum_{j=1}^{l}\Delta_nF\left(a^{(i_j)},b^{(i_j)}+c^{(i_j)}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_nF\left(a^{(k)},b^{(k)}\right)+\varepsilon\end{aligned}$$

依次令δ的各个分量趋于0，再令$\varepsilon\downarrow0$，由F的右连续性得(1.58)。 □

定理 1.3.10 对于$\Omega=\mathbb{R}^n$，$\mathscr{P}_n=\left\{(a,b]:a,b\in\bar{\mathbb{R}}^n\right\}$和$n$元函数$F$，定义

$$\mu_n\left((a,b]\right)\triangleq\Delta_nF\left(a,b\right),\quad\forall(a,b]\in\bar{\mathscr{P}}_n \tag{1.60}$$

则$\mathscr{P}_n$为半集代数，且在引理*1.3.4*条件之下，μ_n是$\mathscr{P}_n$上的σ有限测度。

证明： 显然$\mathscr{P}_n$为半集代数。下只需用证明μ_n是$\mathscr{P}_n$上的σ有限测度。即对于任意非空立方体$(a,b]\in\bar{\mathscr{P}}_n$，仅需证明

$$\mu_n\left((a,b]\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n\left(\left(a^{(k)},b^{(k)}\right]\right) \tag{1.61}$$

这里$\left\{(a^{(k)}, b^{(k)}] : k \in \mathbb{N}\right\}$中的立方体互不相交，满足条件

$$(a, b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \tag{1.62}$$

由引理1.3.7知μ_n为$\bar{\mathscr{P}}_n$上的有限可加测度，再由有限可加测度的单调性（定理1.2.3）知

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_n \left(\left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \right) \leqslant \mu_n \left((a, b]\right)$$

令$m \to \infty$有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n \left(\left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \right) \leqslant \mu_n \left((a, b]\right)$$

因此只需证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n \left(\left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \right) \geqslant \mu_n \left((a, b]\right) \tag{1.63}$$

不妨假设

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n)$$

取$N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathbb{N}^n$，记

$$\alpha^{(N)} = (\max\{a_1, -N_1\}, \ldots, \max\{a_n, -N_n\})$$
$$\beta^{(N)} = (\min\{b_1, N_1\}, \ldots, \min\{b_n, N_n\})$$

则$\left(\alpha^{(N)}, \beta^{(N)}\right]$为有界立方体，并且

$$\left(\alpha^{(N)}, \beta^{(N)}\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \cap \left(\alpha^{(N)}, \beta^{(N)}\right] \right)$$

由引理1.3.8和有限可加测度的单调性得

$$\begin{aligned} \mu_n \left(\left(\alpha^{(N)}, \beta^{(N)}\right] \right) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n \left(\left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \cap \left(\alpha^{(N)}, \beta^{(N)}\right] \right) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n \left(\left(a^{(k)}, b^{(k)}\right] \right) \end{aligned}$$

依次令N的各个分量趋于∞，得(1.63)。 □

定义 1.3.6 在引理*1.3.4*假设条件之下，称*(1.60)*中μ_n所对应的外测度μ_n^*在$\mathscr{A}_{\mu_n^*}$上或$\sigma(\mathscr{P}_n)$上的限制为n维*Lebesgue-Stieltjes*测度，简称为n维*L-S*测度或*L-S*测度。进一步，称F为μ_n所对应的**分布函数**。

第二章　可测函数与随机变量

2.1　可测函数与分布

定义 2.1.1 设$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，$A \in \mathscr{F}$，记

$$A \cap \mathscr{F} \triangleq \{A \cap B : B \in \mathscr{F}\} \tag{2.1}$$

如果函数$f : A \to \bar{\mathbb{R}}$满足条件

$$f^{-1}(B) \triangleq \{\omega \in A : f(\omega) \in B\} \in A \cap \mathscr{F}, \quad \forall B \in \bar{\mathscr{B}} \tag{2.2}$$

其中$\bar{\mathscr{B}} \triangleq \sigma\left(\left\{\mathscr{B}, \bar{\mathbb{R}}\right\}\right)$，则称$f$为定义在$A$上的$\mathscr{F}$**可测函数**，或者**广义随机变量**，简称为**可测函数**；如果A上的广义随机变量（可测函数）f满足条件$f(A) \subset \mathbb{R}$，则称f为A上的**有限实值随机变量（有限实值可测函数）**；将A上的有限实值随机变量简称为**随机变量**，记为r.v.。

上述概念可以进一步推广到一般映射的情况。

定义 2.1.2 对于映射$f : \Omega \to E$，称

$$f^{-1}(A) \triangleq \{f \in A\} \triangleq \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}, \quad \forall A \subset E \tag{2.3}$$

为A对f**的逆像**，简记为$\{f \in A\}$；称

$$f^{-1}(\mathscr{E}) \triangleq \left\{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{E}\right\} \tag{2.4}$$

为$\mathscr{E}$对f的**逆像**，其中$\mathscr{E}$是E的子集类；如果$(\Omega, \mathscr{F})$和$(E, \mathscr{E})$为可测空间，f满足

$$f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F} \tag{2.5}$$

则称f为$(\Omega, \mathscr{F})$到$(E, \mathscr{E})$的$\mathscr{F}$**可测映射**，简称为**可测映射**；如果$(\Omega, \mathscr{F})$和$(E, \mathscr{E})$为可测空间，$\mathscr{F}$上有概率$\mathbf{P}$，则称可测映射f为$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$到$(E, \mathscr{E})$的**随机元**；如果$f$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$到$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$的随机元，则称$f$为$n$**维随机变量**。

定理 2.1.1 设f是Ω到E上的映射，则有

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(E) = \Omega, \quad f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \\
&f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c, \quad \forall A \subset E \\
&f^{-1}(A \backslash B) = \left(f^{-1}(A)\right) \setminus \left(f^{-1}(B)\right), \quad \forall A, B \subset E \\
&f^{-1}\left(\bigcup_{x \in D} A_x\right) = \bigcup_{x \in D} f^{-1}(A_x) \\
&f^{-1}\left(\bigcap_{x \in D} A_x\right) = \bigcap_{x \in D} f^{-1}(A_x)
\end{aligned}$$

其中$\{A_x : x \in D\}$为E的子集类。

证明： 显然。 □

引理 2.1.1 设f是Ω到E上的映射，$\mathscr{E}$是E的σ代数，则$f^{-1}(\mathscr{E})$ 是Ω 的σ代数。

证明： 由定理2.1.1得结论。 □

引理 2.1.2 设f是Ω到E上的映射，$\mathscr{C}$是E的非空子集类，则

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right) \tag{2.6}$$

证明： 由引理2.1.1知

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \supset \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)$$

因此只需证明

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right) \tag{2.7}$$

记

$$\mathscr{A} = \left\{A \subset E : f^{-1}(A) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{C})\right)\right\}$$

则$\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$，且由定理2.1.1知$\mathscr{A}$为$\sigma$代数，因此$\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}$，即(2.7)成立。 □

定理 2.1.2 X是可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的有限实值可测函数（随机变量）的充分必要条件是

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathscr{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

证明： 由(2.5)知必要性成立，仅需证明充分性。

注意到

$$\mathscr{B} = \sigma(\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\})$$

和$\mathscr{F}$为σ代数，就可以由引理2.1.2和(2.8)得到

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \sigma\left(f^{-1}(\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\})\right) \subset \mathscr{F}$$

即充分性成立。 □

定理 2.1.3 X是$(\Omega, \mathscr{F})$到$(E, \mathscr{E})$的可测映射的充分必要条件是存在E的一个子集类$\mathscr{C}$，使得

$$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{E}, \quad X^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F} \tag{2.9}$$

证明： 类似于定理2.1.2可以证明。 □

下面讨论$E = \mathbb{R}^n$，$\mathscr{E} = \mathscr{B}^n$的情况。

定理 2.1.4 $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$是$(\Omega, \mathscr{F})$到$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$的可测映射的充分必要条件是

$$X^{-1}(\mathscr{P}^n) \subset \mathscr{F} \tag{2.10}$$

证明： 由$\sigma(\mathscr{P}^n) = \mathscr{B}^n$和定理2.1.3得结论。 □

能否利用熟悉的$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$研究一般的测度和概率测度？可测映射为我们提供了这种研究的可能性。

定义 2.1.3 设 $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 的可测映射，μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度，$\mathbf{P}$ 为 $\mathscr{F}$ 上的概率，记

$$\mu_X(B) \triangleq \mu \circ X^{-1}(B) \triangleq \mu\left(X^{-1}(B)\right), \quad \forall B \in \mathscr{B}^n \tag{2.11}$$

$$\mathbf{P}_X(B) \triangleq \mathbf{P} \circ X^{-1}(B) \triangleq \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right), \quad \forall B \in \mathscr{B}^n \tag{2.12}$$

称X为n**维随机向量**，简称为**随机向量**；称μ_X或$\mu \circ X^{-1}$为X的**分布测度**；称$\mathbf{P}_X$或$\mathbf{P} \circ X^{-1}$为X的**概率分布测度**；将分布测度或概率分布测度简称为**分布**。

定理 2.1.5 设$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$是$(\Omega, \mathscr{F})$到$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$的可测映射，$\mu$为$\mathscr{F}$上的测度（概率），定义

$$\mu_X(B) \triangleq \mu\left(X^{-1}(B)\right) = \mu(\{X \in B\}), \quad \forall B \in \mathscr{B}^n \tag{2.13}$$

则μ_X为$\mathscr{B}^n$上的测度（概率）。

证明： 对于任何互不相交集类$\{B_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{B}^n$，由定理2.1.1知$\left\{X^{-1}(B_k) : k \in \mathbb{N}\right\}$为$\mathscr{F}$的互不相交子集，进而

$$\begin{aligned}\mu_X\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(B_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(X^{-1}(B_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_X(B_k)\end{aligned}$$

再注意到μ_X非负知μ_X为$\mathscr{B}^n$上的测度。特别，当μ为概率测度时，μ_X也为概率测度。 □

对于概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$而言，可以通过可测映射$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$得到$\mathscr{B}^n$上的概率测度$\mathbf{P}_X$，因此$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mathbf{P}_X)$为概率空间。由于$X^{-1}(\mathscr{B}^n) \subset \mathscr{F}$，注意到$X$所刻画的事件具有如下形式：

$$\{X \in B\}, \quad B \in \mathscr{B}^n$$

因此$\mathbf{P}_X$能够刻画X的随即变化规律。此外，在应用中，可测映射X的取值本身具有实际含义，由此可得X的概率分布测度的现实含义解释。

2.2 分布与分布函数

定义 2.2.1 考虑概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$n$维随机变量$X$，定义

$$F(x)\triangleq\mathbf{P}\circ X^{-1}((-\infty,x])=\mathbf{P}(X\leqslant x),\quad\forall x\in\mathbb{R}^n \tag{2.14}$$

称F为X的**概率分布函数**。

定理 2.2.1 设X为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$n$维随机变量，则$X$的概率分布函数和概率分布测度相互唯一确定。

证明： 显然由(2.14)知概率分布测度唯一确定概率分布函数，因此只需要证明概率分布函数能唯一确定概率分布测度。

事实上，由(2.14)知X的概率分布函数F满足引理1.3.4条件，由定理1.3.10知存在$\mathscr{B}^n$上的概率测度μ，使得

$$\mu((a,b])=\Delta F((a,b])=\mathbf{P}(X\in(a,b]),\quad\forall(a,b]\in\bar{\mathscr{P}}^n$$

由测度扩张定理（定理1.2.8）知$\mu=\mathbf{P}_X$，即由概率分布函数能够唯一确定概率分布测度。 □

定义 2.2.2 考虑可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbb{R},\mathscr{B})$上的可测映射X，以及$\mathscr{F}$上的测度μ，如果

$$\mu(X\in(a,b])<\infty,\quad\forall a,b\in\mathbb{R} \tag{2.15}$$

对于给定实数a，定义

$$F(x)\triangleq\begin{cases}\mu((a,x]), & x\geqslant a\\ -\mu((a,0]), & x<a\end{cases} \tag{2.16}$$

称F为X的一个**广义分布函数**[1]。

定理 2.2.2 设X为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbb{R},\mathscr{B})$上的可测映射，$\mathscr{F}$上的测度μ满足条件*(2.15)*，则$\mu\circ X^{-1}$由X的广义分布函数所唯一决定。

证明： 由(2.16)知广义分布函数为右连续增函数，由定理1.3.9和测度扩张定理（定理1.2.8）知结论成立。 □

思考：设X为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}^n)$上的可测映射，如何定义$X$的一个广义分布函数？

2.3 复合映射的可测性

定理 2.3.1 (复合可测映射定理) 如果$(\Omega,\mathscr{F}),(E,\mathscr{E})$和$(A,\mathscr{A})$为可测空间，$X:\Omega\to E$是$\mathscr{F}$可测映射，$Y:E\to A$的$\mathscr{E}$可测映射，记

$$Y\circ X(\omega)\triangleq Y((X(\omega))),\quad\forall\omega\in\Omega \tag{2.17}$$

则$Y\circ X$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(A,\mathscr{A})$的可测映射。

证明： 注意到$Y^{-1}(\mathscr{A})\subset\mathscr{E}$得

$$(Y\circ X)^{-1}(\mathscr{A})=X^{-1}\left(Y^{-1}(\mathscr{A})\right)\subset X^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{F}$$

因此$Y\circ X$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(A,\mathscr{A})$的可测映射。 □

定理 2.3.2 如果X是n维随机向量，f是$(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}^n)$到$(\mathbb{R},\mathscr{B})$的可测映射，则$f\circ X$为*r.v.*。

证明： 由复合映射定理得结论。 □

引理 2.3.1 若f是n元连续函数，则f是$(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}^n)$到$(\mathbb{R},\mathscr{B})$的可测映射。

[1] 当$\mu(\Omega)=\infty$时，广义分布函数无界

证明： 用$\mathscr{O}$表示$\mathbb{R}$的开子集全体，则$f^{-1}(\mathscr{O})$由$\mathbb{R}^n$的开集构成，因此

$$f^{-1}(\mathscr{O}) \subset \mathscr{B}^n$$

注意到$\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}$，由引理2.1.2知

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{O})\right) \subset \mathscr{B}^n$$

即f是$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$到$(\mathbb{R}, \mathscr{B})$的可测映射。 □

定理 2.3.3 若X和Y为Ω上的*r.v.*，则

$$X+Y, \quad X-Y, \quad XY, \quad X^r, \quad |X|^r$$
$$X \wedge Y \triangleq \min\{X, Y\}, \quad X \vee Y \triangleq \max\{X, Y\}$$

为*r.v.*，其中$r \in \mathbb{R}_+$。进一步，当$\{Y = 0\} = \varnothing$时，$\frac{X}{Y}$为*r.v.*。

证明： 由引理2.3.1知结论成立。 □

2.4 可测映射列极限的可测性

定义 2.4.1 设$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$是定义在$(\Omega, \mathscr{F})$上的可测函数列，对于任意$\omega \in \Omega$，定义

$$\left(\sup_n f_n\right)(\omega) \triangleq \sup_n f_n(\omega), \quad \left(\inf_n f_n\right)(\omega) \triangleq \inf_n f_n(\omega)$$
$$\left(\varlimsup_{n\to\infty} f_n\right)(\omega) \triangleq \varlimsup_{n\to\infty} f_n(\omega), \quad \left(\varliminf_{n\to\infty} f_n\right)(\omega) \triangleq \varliminf_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

则称$\sup\limits_n f_n$、$\inf\limits_n f_n$、$\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$和$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$分别为$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$的**上确界**、**下确界**、**上极限**和**下极限**。进一步，在$\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \varliminf_{n\to\infty}$
上极限为**极限**，并将极限记为$\lim_{n\to\infty} f_n$。

定理 2.4.1 设$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$是定义在$(\Omega, \mathscr{F})$上的可测函数列，则$\sup_n f_n$，$\inf_n f_n$，$\varlimsup_{n\to\infty} f_n$，$\varliminf_{n\to\infty} f_n$均为可测函数，$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n\right\} \in \mathscr{F}$，并且$\lim_n f_n$为定义在上$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n\right\}$的可测函数。

证明： 注意到

$$\left\{\sup_n f_n \leqslant x\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leqslant x\} \in \mathscr{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

知$\sup_n f_n$为可测函数；注意到

$$\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$$

由定理2.3.1和引理2.3.1知为可测函数；注意到

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n \left(\sup_{m \geqslant n} f_m\right)$$

知$\varlimsup_{n\to\infty} f_n$为可测函数；注意到

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n = -\varlimsup_{n\to\infty} (-f_n)$$

知$\varliminf_{n\to\infty} f_n$为可测函数；注意到$\varlimsup_{n\to\infty} f_n$和$\varliminf_{n\to\infty} f_n$均为可测函数，知$\varlimsup_{n\to\infty} f_n - \varliminf_{n\to\infty} f_n$为可测函数，因此

$$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n\right\} = \left\{\left(\varlimsup_{n\to\infty} f_n - \varliminf_{n\to\infty} f_n\right) \in \{0\}\right\} \in \mathscr{F}$$

再注意到在$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n\right\}$上

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \varlimsup_{n\to\infty} f_n$$

知$\lim_{n\to\infty} f_n$为定义在上$\left\{\varlimsup_{n\to\infty} f_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n\right\}$的可测函数。 □

2.5 可测函数的构造

连续函数可以用阶梯函数来逼近，可测函数作为从Ω 到$\mathbb{R}$ 的映射有类似的性质，它也可以由一些最简单的随机变量来逼近。阶梯函数的一个特征是值域$f(\mathbb{R})$为有限集。

定义 2.5.1 对于任何$A \subset \Omega$，定义

$$\mathbb{1}_A(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases} \tag{2.18}$$

称$\mathbb{1}_A$为集A的**示性函**。

定义 2.5.2 设f为可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的可测函数，值域$f(\Omega)$为有限集，则称f为**简单函数**。

例 5.1 已知$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，

$$\{A_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{F}, \quad \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

试证明$\sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$为简单函数。

证明： 由于A_k为可测集，因此$a_k \mathbb{1}_{A_k}$为可测函数，由定理2.3.3知$\sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$可测函数。

显然$\sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$的值域为有限集，因此它为简单函数。 □

定理 2.5.1 若f为简单函数，其值域$f(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,其中$n \in \mathbb{N}$，则

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{\{f=x_i\}}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{2.19}$$

证明： 显然. □

定义 2.5.3 称(2.19)为简单函数的标准表达式[2]。

可以用简单函数一致逼近有界可测函数吗？

事实上，对于有界可测函数f，存在数$m \leqslant M$，使得

$$m = \inf_{\omega \in \Omega} f(\omega) \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) = M.$$

记 $x_i = \frac{i(M-m)}{n} + m$，

$$f_n = m \mathbb{1}_{\{f=m\}} + \sum_{i=1}^n x_{i-1} \mathbb{1}_{f^{-1}((x_{i-1}, x_i])} \tag{2.20}$$

由例5.1知f_n为简单随机变量，且

$$\sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - f_n(\omega)| \leqslant \frac{M-m}{n} \tag{2.21}$$

即f可以由$\{f_n\}$一致逼近。

基于这种想法，任何可测函数都可以用简单函数来逼近.

定理 2.5.2 假设f为定义Ω上的实值函数，则f为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上随可测函数的充分必要条件是：存在简单函数序列 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得

$$\lim_n f_n(\omega) = f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

进一步，当$f \geqslant 0$时，还可取$\{f_n\}$为非负递增简单函数序列。

证明： 由例5.1和定理2.4.1知充分性成立，只需证明必要性。设f为可测函数.

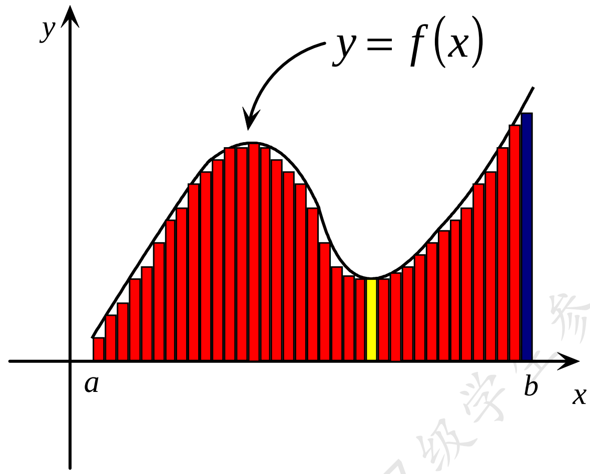

图 2.1: 对于定义在$\mathbb{R}$上的函数，可以通过区间分割坐标横轴，建立逼近的简单函数列

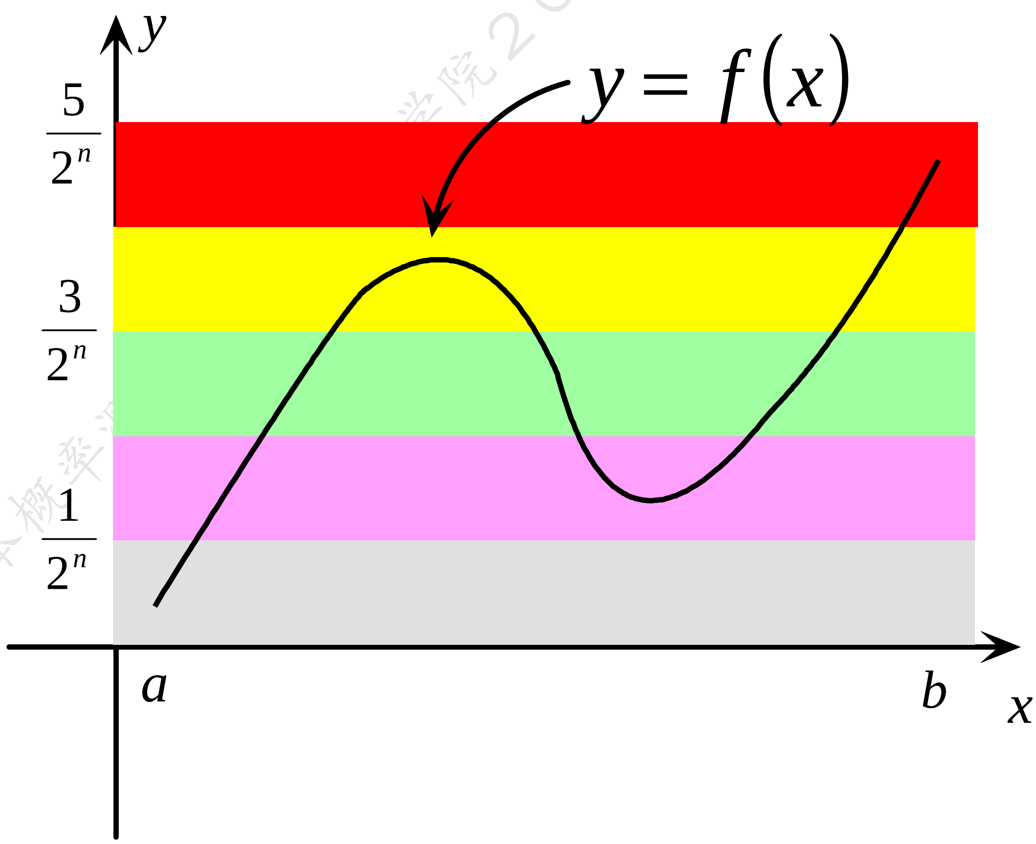

图 2.2: 每条水平带中的函数值差别不超过$\frac{1}{2^n}$

(1) $f \geqslant 0$ 情形. 对任何自然数 n，以及 $1 \leqslant k \leqslant n2^n$，记

$$A_{n,k} = f^{-1}\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)$$

定义

$$f_n(\omega) \triangleq \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}(\omega) \tag{2.22}$$

则$\{f_n\}$为单增简单函数列，且 $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$，从而得必要性。

[2]按照习惯的集合表示方法，$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$中的元素互异，即$\{f^{-1}(\{x_k\}) : k = 1, \ldots, n\}$构成$\Omega$的一个分割。

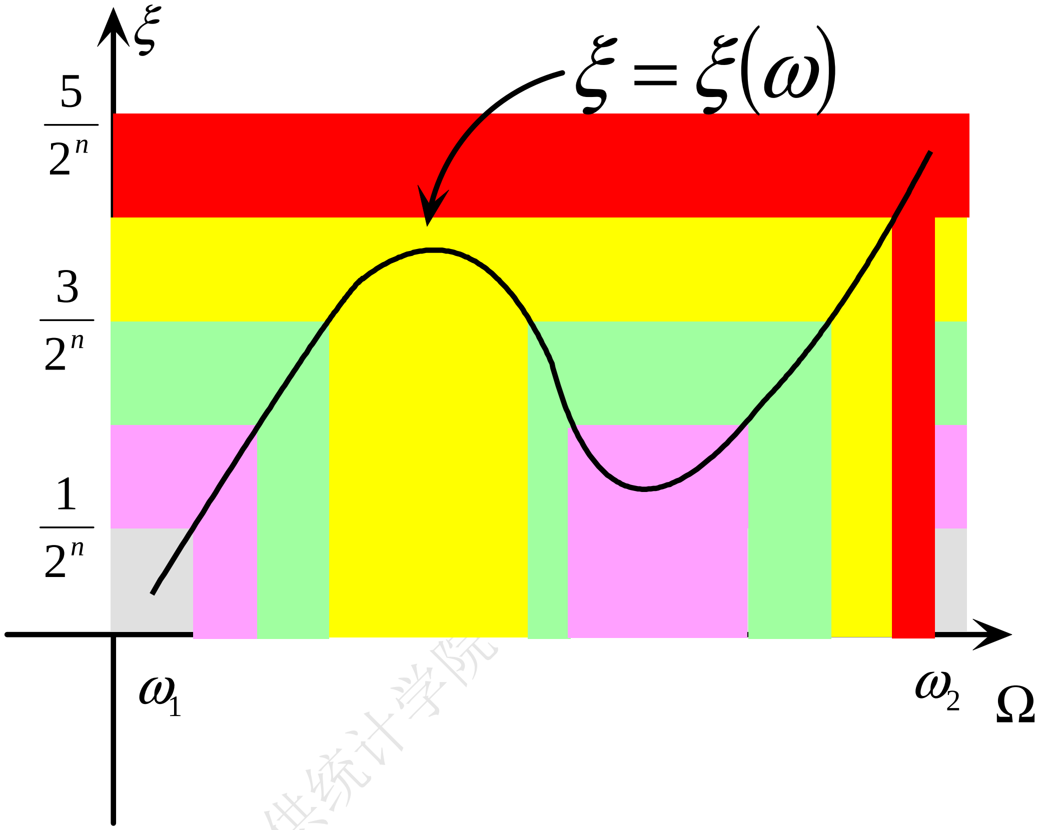

图 2.3: $f^{-1}\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)$示意图，$k=1,2,3,4,5$。

(2) 一般情形. 定义

$$f^{+} \triangleq f \vee 0, \quad f^{-} \triangleq -(f \wedge 0) \tag{2.23}$$

则$f^{+} \geqslant 0, f^{-} \geqslant 0$，且$f = f^{+} - f^{-}$。注意到两个简单函数之和还是简单函数，由(1)可得一般情形的必要性. 综合(1)和(2)知必要性成立。 □

定义 2.5.4 称*(2.23)*中的f^{+}和f^{-} 分别为f的**正部**和**负部**。

定理 2.5.3 对于可测函数f有

$$f^{+} = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^{-} = \frac{|f| - f}{2}$$

证明： 显然。 □

定义 2.5.5 设$\mathscr{L}$是定义在Ω上的广义实值函数类，满足条件

$$f \in \mathscr{L} \Rightarrow \{f^{+}, f^{-}\} \subset \mathscr{L} \tag{2.24}$$

称函数族L为$\mathscr{L}$系，如果L满足如下条件：

1° $1 \in L$;

2° 对于有限线性组合运算[3]封闭，即对于任意

$$\{f_k : k = 1, \ldots, n\} \subset L, \quad \{a_k : k = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$$

都有$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k \in L$;

3° 对单调上升非负函数列的极限运算封闭，即对L中非负增函数列$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$，若$\lim_{n\to\infty} f_n$有界或是$\mathscr{L}$中函数，则$f \in L$。

[3]要求运算有意义，即不会出现像$\infty - \infty$这样无意义的运算。

在讨论可测函数性质的时候，$\mathscr{L}$系是一个得力的工具。

定理 2.5.4 (函数形式的单调类定理) 若$\mathscr{L}$系L包含π系$\mathscr{C}$中任一集的示性函数，则L包含一切属于$\mathscr{L}$的$\sigma(\mathscr{C})$可测函数。

证明： 记

$$\Lambda = \{A \subset \Omega : \mathbb{1}_A \in L\}$$

则由L为$\mathscr{L}$系知$\Omega \in \Lambda$；注意到

$$\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A, \quad \forall A \subset B$$

知Λ对于真差运算封闭；注意到

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}, \quad \forall A_n \uparrow A$$

知Λ对于不降集列的并运算封闭。因此Λ为λ系，并且π系$\mathscr{C} \subset \Lambda$，再由集合形式的单调类定理（定理1.1.2）知$\sigma(\mathscr{C}) = \Lambda(\mathscr{C}) \subset \Lambda$，即

$$\{\mathbb{1}_A : A \in \sigma(\mathscr{C})\} \subset L$$

由定理2.5.2得结论。 □

函数形式的单调类定理的典型用法：要证明函数族F具有某种性质a，引入满足(2.24)的函数类$\mathscr{L} \supset F$和π系$\mathscr{C}$，使得$\mathscr{L}$中的$\sigma(\mathscr{C})$可测函数包含F，构建$L = \{f \in \mathscr{L} : f\text{具有性质a}\}$，并且证明$L$为$\mathscr{L}$系和$\{\mathbb{1}_A : A \in \mathscr{C}\} \subset L$即可。称这种证明方法为$\mathscr{L}$**系方法**。

定理 2.5.5 设Ω为一集合，$(E, \mathscr{E})$为可测空间，$f : \Omega \to E$，记$\sigma(f^{-1}) \triangleq f^{-1}(\mathscr{E})$， 则$\varphi$为$\sigma(f^{-1})$可测函数的充分必要条件是存在$\mathscr{E}$可测函数$g$，使得$\varphi = g \circ f$。

证明： 如果存在$\mathscr{E}$可测函数g，使得$\varphi = g \circ f$，注意到f是$\sigma(f^{-1})$可测映射，利用复合可测映射定理（定理2.3.1）知φ为$\sigma(f^{-1})$可测函数，因此充分性成立。下证明必要性。假设φ为$\sigma(f^{-1})$可测函数，往证存在$\mathscr{E}$可测函数g，使得$\varphi = g \circ f$。记

$$\mathscr{L} = \{f : f\text{是}\Omega\text{上的函数}\}, \quad L = \{g \circ f : g\text{为}\mathscr{E}\text{可测函数}\}$$

则$\sigma(f^{-1})$为π系，且$\mathscr{L}$包含所有$\sigma(f^{-1})$可测函数。进一步，若$A \in \sigma(f^{-1})$，存在$B \in \mathscr{E}$，使得$A = f^{-1}(B)$，因此

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{f^{-1}(B)} = \mathbb{1}_B \circ f \in L$$

即$L \supset \{\mathbb{1}_A : A \in \sigma(f^{-1})\}$。由函数形式的单调类定理（定理2.5.4）知只需证明L为$\mathscr{L}$系。

事实上，$1 = \mathbb{1}_E \circ f \in L$；若$\varphi_k \in L$，则存在$\mathscr{E}$可测函数$g_k$，使得$\varphi_k = g_k \circ f$，因此

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (g_k \circ f) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right) \circ f, \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

注意到$\sum_{k=1}^{n} a_k g_k$为$\mathscr{E}$可测函数知L对于有限线性组合运算封闭；若$\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$为$L$中的非负单增函数列，则存在$\mathscr{E}$可测函数$g_n$，使得$\varphi_n = g_n \circ f$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sup_n \varphi_n = \sup_n (g_n \circ f) = \left(\sup_n g_n\right) \circ f$$

注意到$\sup_n g_n$是$\mathscr{E}$可测函数知$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \in L$，即$L$对于单调上升非负函数列的极限运算封闭。综上所述$L$为$\mathscr{L}$系。 □

例 5.2 在定理2.5.5中，如果$\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}$，则可以选取$\mathscr{E}$可测函数$g$，使得$\varphi = g \circ f$，并且$g(E) \subset \mathbb{R}$。

证明： 由定理2.5.5知存在$\mathscr{E}$可测函数$\tilde{g}$，使得$\varphi = \tilde{g} \circ f$。取$g = \tilde{g}\mathbb{1}_{\tilde{g}^{-1}(\mathbb{R})}$，则有$g(E) \subset \mathbb{R}$，并且$\varphi = \tilde{g} \circ f = g \circ f$。 □

定理 2.5.6 若$f = (f_1, \dots, f_n)$是$(\Omega, \mathscr{F})$上n维可测函数，则g为$f^{-1}(\bar{\mathscr{B}}^n)$可测函数的充分必要条件是存在$(\bar{\mathbb{R}}^n, \bar{\mathscr{B}}^n)$上可测函数$G$，使得

$$g(\omega) = G(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega$$

证明： 由定理2.5.5可得结论。 □

定理 2.5.7 设$\mathscr{L}$是定义在$\bar{\mathbb{R}}^n$上的实函数类，L是$\mathscr{L}$上包含一切有界连续函数的$\mathscr{L}$系，则L包含一切$Borel$可测函数。

证明： 记$\mathscr{C}=\left\{(a,b):a,b\in\bar{\mathbb{R}}^n\right\}$则$\mathscr{C}$为$\pi$系，且$\sigma\left(\mathscr{C}\right)=\bar{\mathscr{B}}^n$。由函数形式的单调类定理（定理2.5.4）知只需

$$\mathbb{1}_{(a,b)}\subset L,\quad\forall\left(a,b\right)\in\mathscr{C}\tag{2.25}$$

不妨假设

$$a=\left(a_1,\ldots,a_n\right)<b=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$$

取$\delta<\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{b_i-a_i}{3}$，则

$$\begin{aligned}f_{k,m}\left(x\right)=&\mathbb{1}_{\left[a_m+\frac{\delta}{k},b_m-\frac{\delta}{k}\right]}\left(x\right)+\frac{(x-a_m)k}{\delta}\mathbb{1}_{\left[a_m,a_m+\frac{\delta}{k}\right]}\left(x\right)\\&-\frac{(x-b_m)k}{\delta}\mathbb{1}_{\left[b_m-\frac{\delta}{k},b_m\right]}\left(x\right)\end{aligned}$$

为非负有界连续函数，因此

$$f_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\prod_{m=1}^{n}f_{k,m}\left(x_m\right)$$

为非负有界连续函数，且$f_k\uparrow\mathbb{1}_{(a,b)}$，由$L$为$\mathscr{L}$系知(2.25)。 □

第三章　积分与数学期望

3.1　积分的定义与单调收敛定理

定义 3.1.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间。

1) 若f为非负简单函数，称

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \triangleq \sum_{k=1}^{m} x_k \mu\left(\{f = x_k\}\right)$$

为f在Ω上对μ的**积分**，简称为**积分**，这里$\{x_1, \ldots, x_m\} = f(\Omega)$。

2) 若f为非负可测函数，称

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \triangleq \sup\left\{\int_{\Omega} h \mathrm{d}\mu : 0 \leqslant h \leqslant f, h\text{为简单函数}\right\}$$

为f在Ω上对μ的**积分**，简称为**积分**。

3) 若 f 为实可测函数，当 $\int_{\Omega} f^{+} \mathrm{d}\mu = \infty$ 和 $\int_{\Omega} f^{-} \mathrm{d}\mu = \infty$ 时，称 f 在 Ω上对 μ 的**积分不存在**，或者 $\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$ 不存在；当$\int_{\Omega} f^{+} \mathrm{d}\mu$和$\int_{\Omega} f^{-} \mathrm{d}\mu$至少有一个为实数时，定义$f$在$\Omega$上对$\mu$的**积分**为

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \triangleq \int_{\Omega} f^{+} \mathrm{d}\mu - \int_{\Omega} f^{-} \mathrm{d}\mu$$

称f在Ω上对μ的**积分存在**，或者$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$**存在**；当$\int_{\Omega} f^{+} \mathrm{d}\mu$ 和$\int_{\Omega} f^{-} \mathrm{d}\mu$都为实数时，称$f$对$\mu$**可积**，简称为$f$**可积**。

4) 若$f = f_1 + \mathrm{i} f_2$为复可测函数，如果$\int_{\Omega} f_1 \mathrm{d}\mu$和$\int_{\Omega} f_2 \mathrm{d}\mu$至少有一个不存在，称$f$在$\Omega$上对$\mu$的**积分不存在**，或者$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$不存在；如果$\int_{\Omega} f_1 \mathrm{d}\mu$和$\int_{\Omega} f_2 \mathrm{d}\mu$都存在，定义$f$在$\Omega$上对$\mu$的**积分**为

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \triangleq \int_{\Omega} f_1 \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_{\Omega} f_2 \mathrm{d}\mu$$

称 f 在Ω上对μ的**积分存在**，或者$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$存在；如果 $\int_{\Omega} f_1 \mathrm{d}\mu$ 和 $\int_{\Omega} f_2 \mathrm{d}\mu$ 都为实数，称f对μ**可积**，简称为f**可积**。

5) 若μ为概率测度时，当f在Ω上对μ的积分不存在时，f在Ω上对μ的**数学期望不存在**；称当f在Ω上对μ的积分存在时，称

$$\mathbf{E}_{\mu} f \triangleq \int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$$

为f在Ω上对μ的**数学期望**或**期望**，简记为$\mathbf{E} f$；当f可积时，称f在Ω上对μ的**数学期望有限**。

6) 若$A \in \mathscr{F}$，且

$$\int_{A} f \mathrm{d}\mu \triangleq \int_{\Omega} f \mathbb{1}_{A} \mathrm{d}\mu$$

存在，则称$\int_{A} f \mathrm{d}\mu$为f**在**A**上对**μ**的积分**，简称为f**在**A**上的积分**。

为方便，可将$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$表达为$\int_{\Omega} f(\omega) \mu(\mathrm{d}\omega)$，或$\int f(\omega) \mu(\mathrm{d}\omega)$，或$\int f \mathrm{d}\mu$，或$\int f$；可将$\int_{A} f \mathrm{d}\mu$表达为$\int_{A} f(\omega) \mu(\mathrm{d}\omega)$，或$\int_{A} f$。

引理 3.1.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$A \in \mathscr{F}$，非负简单函数$f$的标准表达式为$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{1}_{\{f = x_k\}}$，则

$$\int f \mathbb{1}_{A} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu\left(\{f = x_k\} \cap A\right) \tag{3.1}$$

证明： 令$g = f \mathbb{1}_{A}$，则g为简单函数，且

$$g\left(\{g \neq 0\}\right) = \{x_k : k \in D\}$$

其中$D = \{k : \{f = x_k\} \cap A \neq \varnothing, x_k \neq 0\}$，所以简单函数$g$的标准表达式为

$$g = \begin{cases} \sum_{k \in D} x_k \mathbb{1}_{\{f = x_k\} \cap A}, & \text{如果 } \{g = 0\} = \varnothing \\ 0 \mathbb{1}_{\{g = 0\}} + \sum_{k \in D} x_k \mathbb{1}_{\{f = x_k\} \cap A}, & \text{否则} \end{cases}$$

因此

$$\int g = \sum_{k \in D} x_k \mu\left(\{f = x_k\} \cap A\right)$$

注意到当$k \in \{1, \ldots, n\} \setminus D$时有$x_k \mu(\{f = x_k\} \cap A) = 0$，可得

$$\int f \mathbb{1}_A = \sum_{k \in D} x_k \mu(\{f = x_k\} \cap A) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(\{f = x_k\} \cap A) \qquad \square$$

引理 3.1.2 设f是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负简单函数，则积分有如下性质：

1° 单调性，即对于任何简单函数$g \geqslant f$有$\int g \geqslant \int f$；

2° 线性性，即对于任何实数a和b，以及非负简单函数g，如果

$$a \int f + b \int g$$

有意义[1]，则

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g$$

3° 记$\varphi(A) \triangleq \int_A f$，则$\varphi$为$\mathscr{F}$上的测度。

证明： 记$f(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$， $g(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$。

往证性质1°则由$g \geqslant f$知：对于任意$1 \leqslant s \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant m$有

$$x_s \mathbb{1}_{\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\}} \leqslant y_t \mathbb{1}_{\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\}}$$
$$x_s \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\}) \leqslant y_t \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\})$$

由测度的可加性得

$$\begin{aligned}
\int g &= \sum_{t=1}^{m} y_t \mu(\{g = y_t\}) = \sum_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} y_t \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\}) \\
&\geqslant \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} x_s \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\}) \\
&= \sum_{s=1}^{n} x_s \mu(\{f = x_s\}) = \int f
\end{aligned}$$

往证性质2°。显然$h \triangleq af + bg$为简单函数，记$h(\Omega) = \{z_1, \ldots, z_l\}$，则有

$$\begin{aligned}
a \int f + b \int g &= a \sum_{s=1}^{n} x_s \mu(\{f = x_s\}) + b \sum_{t=1}^{m} y_t \mu(\{g = y_t\}) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} (a x_s + b y_t) \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\}) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \sum_{u=1}^{l} (a x_s + b y_t) \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\} \cap \{h = z_u\}) \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \sum_{u=1}^{l} z_u \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\} \cap \{h = z_u\}) \\
&= \sum_{u=1}^{l} \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} z_u \mu(\{f = x_s\} \cap \{g = y_t\} \cap \{h = z_u\}) \\
&= \sum_{u=1}^{l} z_u \mu(\{h = z_u\}) = \int (af + bg)
\end{aligned}$$

往证性质3°。显然φ非负，只需证明φ在$\mathscr{F}$上具有可列可加性。事实上，对于任何$\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$，

$$\begin{aligned}
f \mathbb{1}_{A_k} &= \sum_{s=1}^{n} x_s \mathbb{1}_{\{f = x_s\} \cap A_k} \\
f \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} &= \left(\sum_{s=1}^{n} x_s \mathbb{1}_{\{f = x_s\}} \right) \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} \\
&= \sum_{s=1}^{n} x_s \mathbb{1}_{\{f = x_s\}} \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \sum_{s=1}^{n} x_s \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} (\{f = x_s\} \cap A_k)}
\end{aligned}$$

[1]即不会出现类似于$\infty - \infty$的运算。

都为非负简单函数，由μ的可列可加性引理3.1.1得

$$\begin{aligned}\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} f = \int f \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} \\ &= \sum_{s=1}^{n} x_s \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\{f = x_s\} \cap A_k)\right) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} x_s (\{f = x_s\} \cap A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{n} x_s (\{f = x_s\} \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int f \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)\end{aligned}$$

即φ为定义在$\mathscr{F}$上的测度。 □

引理 3.1.3 对于非负可测函数，积分具有单调性，即如果可测函数$0 \leqslant f \leqslant g$，则$\int f \leqslant \int g$。

证明： 由于

$$\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant f\right\} \subset \left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant g\right\}$$

所以

$$\begin{aligned}\int f &= \sup\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant f\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant g\right\} = \int g\end{aligned}$$

即结论成立。 □

引理 3.1.4 若$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$为单增非负可测函数列，$f_n \uparrow f$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

证明： 由非负函数积分的单调性知$\int f \geqslant \int f_n \uparrow a$，因此只需证明

$$a \geqslant \int f \tag{3.2}$$

当$a = \infty$时，(3.2)自然成立，因此仅需在$a < \infty$的情况下证明(3.2)成立。

事实上，对于任何满足条件$0 \leqslant h \leqslant f$的简单函数$h$，记

$$h_m \triangleq \min\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) h, m\right\}, \quad A_n \triangleq \{h_m \leqslant f_n\}$$

则$h_m \mathbb{1}_{A_n}$为简单函数，$0 \leqslant h_m \mathbb{1}_{A_n} \leqslant f_n$，因此

$$a \geqslant \int f_n \geqslant \int h_m \mathbb{1}_{A_n} = \int_{A_n} h_m$$

注意到 $h_m \mathbb{1}_{\{f>0\}} < f \mathbb{1}_{\{f>0\}}$ 和 $f_n \uparrow f$ 可得 $A_n \uparrow \Omega$，再由引理3.1.2的3°和测度的下方连续性知

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} h_m = \int h_m = \sum_{k=1}^{s} \min\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) x_k, m\right\} \mathbb{1}_{\{h = x_k\}}$$

其中$\{x_1, \ldots, x_s\} = h(\Omega) \setminus \{0\}$。因此

$$a \geqslant \sum_{k=1}^{s} \min\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) x_k, m\right\} \mathbb{1}_{\{h = x_k\}}$$

令$m \to \infty$得

$$a \geqslant \sum_{k=1}^{s} x_k \mathbb{1}_{\{h = x_k\}} = \int h$$

因此

$$a \geqslant \sup\left\{\int h : 非负简单函数 h \leqslant f\right\} = \int f$$

即(3.2)成立。 □

推论 3.1.1 对于任何以f为极限的非负单增可测函数列$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$都有

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

证明： 由引理3.1.4得结论。 □

引理 3.1.5 设f和g是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负可测函数，则

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

证明： 由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f$和非负简单函数$g_n \uparrow g$，因此非负简单函数$(f_n + g_n) \uparrow (f+g)$，由引理3.1.4和引理3.1.2知

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n + \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int f + \int g\end{aligned}$$

□

引理 3.1.6 设f是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的可测函数，则

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^-$$

证明： 由引理3.1.5知

$$\int |f| = \int \left(f^+ + f^-\right) = \int f^+ + \int f^-$$

□

引理 3.1.7 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上可测函数$f$的积分存在，则$\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$。

证明： 由引理3.1.6知

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leqslant \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

□

定义 3.1.2 给定测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，对于每一$\omega \in \Omega$，性质$A$可能成立，也可能不成立。如果$\{\omega \in \Omega : \omega$使得$A$不成立$\}$为$\mu$零集（定义*1.3.1*），则称性质$A$关于$\mu$几乎处处成立，简称为性质$A$**几乎出处成立**，记为$A$**成立**, μ a.e.。

例如，对于可测空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，以及$\Omega$到$\bar{\mathbb{R}}$上的两个映射$f$和$g$，如果$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}$为$\mu$零集，则$f$与$g$几乎处处相等，即$f = g$, μ a.e.；如果$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leqslant g(\omega)\}$为$\mu$零集，则$f$几乎处处大于$g$，即$f > g$, μ a.e.；如果$h : B \to \bar{\mathbb{R}}$满足条件$\Omega \backslash B$为$\mu$零集，则$h$几乎处处有定义，即$h$有定义, μ a.e.。

在不至于引起混淆的情况下，将μ a.e.简记为a.e.；当μ为概率测度时，将几乎处处成立称为**几乎必然成立**，将a.e.记为a.s.。

引理 3.1.8 给定测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的可测函数$f$，如果$f = 0$, μ a.e.，则$\int f = 0$。

证明： 由$f = 0$, μ a.e.知可测集$A = \{f = 0\}$的补集为μ零集，从而对于任意非负简单函数

$$h = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{1}_{\{h = x_k\}} \leqslant f^+$$

有$\{h = x_k\} \cap A = \{h = x_k\} \cap \{h = 0\} \cap A, 1 \leqslant k \leqslant n$，再注意到$\mu(A^c) = 0$得

$$\begin{aligned}\int h &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(\{h = x_k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\mu(\{h = x_k\} \cap A) + \mu(\{h = x_k\} \cap A^c)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(\{h = x_k\} \cap \{h = 0\} \cap A) = 0\end{aligned}$$

因此

$$\int f^+ = \sup\left\{\int h : \text{非负简单函数} h \leqslant f^+\right\} = 0$$

同理可证$\int f^- = 0$，所以$\int f = \int f^+ - \int f^- = 0$。 □

定理 3.1.2 (积分单调收敛定理) 若$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$为几乎处处单增非负可测函数列，$f_n \uparrow f$, a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

证明： 记$A = \{f_n \uparrow f\}$，则$\mu(A^c) = 0$。由引理3.1.5 和引理3.1.4知

$$\int f = \int f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) = \int f\mathbb{1}_A + \int f\mathbb{1}_{A^c}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n\mathbb{1}_A + \int f\mathbb{1}_{A^c}\right)$$

由引理3.1.8知$\int f\mathbb{1}_{A^c} = 0 = \int f_n\mathbb{1}_{A^c}$，因此结论成立。 □

引理 3.1.9 给定测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的$\mathscr{F}$可测函数$f$和$g$，如果$f = g$, μ a.e.，并且$\int f$存在或$\int g$存在，则$\int f = \int g$。

证明： 不妨假设$\int f$存在，只需证明

$$\int g^+ = \int f^+, \quad \int g^- = \int f^-$$

事实上，由$f = g$, μ a.e.知$f^+ = g^+$, μ a.e.，由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f^+$，因此$f_n \uparrow g^+$, μ a.e.，由单调收敛定理3.1.2得

$$\int f^+ = \lim_{n\to\infty}\int f_n = \int g^+$$

类似地可得$\int f^- = \int g^-$，因此$\int f = \int g$。 □

定义 3.1.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$\Omega$上的函数$f$关于$\mathscr{F}$几乎处处可测，即存在$\mathscr{F}$可测函数$g$使得$f = g$, μ a.e.，如果$\int g$存在，则定义

$$\int f\mathrm{d}\mu \triangleq \int g\mathrm{d}\mu$$

并称之为a.e.**可测函数f关于μ的积分**，或**f关于μ的积分**。

3.2 积分的性质

引理 3.2.1 设f是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负可测函数，则

$$\int(af) = a\int f, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

证明： 当$a \geqslant 0$时，由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f$，因此非负简单函数$af_n \uparrow af$，由积分单调收敛定理3.1.2得

$$\int(af) = \lim_{n\to\infty}\int(af_n) = \lim_{n\to\infty} a\int f_n = a\int f$$

当$a < 0$时，

$$\int(af) = -\int(af)^- = -\int((-a)f)$$
$$= -(-a)\int f = a\int f$$

□

定理 3.2.1 设f是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的非负$\mathscr{F}$可测函数，记

$$\varphi(A) \triangleq \int_A f$$

则φ为$\mathscr{F}$上的测度。

证明： 由定理2.5.2知存在非负简单函数$f_n \uparrow f$，由积分的单调收敛定理3.1.4和引理3.1.2知

$$\int f\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^m A_k} = \lim_{n\to\infty}\int f_n\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^m A_k}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^m\int f_n\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^m\int f\mathbb{1}_{A_k}$$

令$m \to \infty$，再次利用积分的单调收敛定理得结论。 □

定理 3.2.2 设f和g是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的可积函数，则积分有如下性质：

1° 线性性，即
$$\int(af+bg)=a\int f+b\int g,\quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$
2° 单调性，即当$g\geqslant f$时有$\int g\geqslant\int f$；

3° 可分割性，即对于任何互不相交可测集列$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$有
$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}f=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}f$$
4° 共轭性，即$\int\overline{(f+\mathrm{i}g)}=\overline{\int(f+\mathrm{i}g)}$，这里$\bar{z}$表示复数$z$的**共轭**。

证明： 往证1°成立。显然
$$af+bg=(af+bg)^{+}-(af+bg)^{-},\text{a.e.}$$
$$af+bg=(af)^{+}+(bg)^{+}-(af)^{-}-(bg)^{-},\text{a.e.}$$
所以
$$(af+bg)^{+}+(af)^{-}+(bg)^{-}=(af+bg)^{-}+(af)^{+}+(bg)^{+},\text{a.e.}$$
由引理3.1.5知
$$\begin{aligned}&\int(af+bg)^{+}+\int(af)^{-}+\int(bg)^{-}\\&=\int(af+bg)^{-}+\int(af)^{+}+\int(bg)^{+}\end{aligned}\tag{3.3}$$
由引理3.1.6知
$$\begin{aligned}\int(|af|+|bg|)&=\int|af|+\int|bg|\\&=|a|\int\left(f^{+}+f^{-}\right)+|b|\int\left(g^{+}+g^{-}\right)<\infty\end{aligned}$$
注意到
$$\begin{aligned}&\max\left\{(af+bg)^{+},(af+bg)^{-},(af)^{+},(bg)^{+},(af)^{-},(bg)^{-}\right\}\\&\leqslant|af|+|bg|\end{aligned}$$
利用引理3.1.3知(3.3)中各个积分均为实数，并且
$$\begin{aligned}\int(af+bg)&=\int(af+bg)^{+}-\int(af+bg)^{-}\\&=\int(af)^{+}+\int(bg)^{+}-\int(af)^{-}-\int(bg)^{-}\end{aligned}\tag{3.4}$$
另一方面，由积分的定义和引理3.2.1知
$$\begin{aligned}a\int f+b\int g&=a\int f^{+}-a\int f^{-}+b\int g^{+}-b\int g^{-}\\&=\int\left(af^{+}\right)-\int\left(af^{-}\right)+\int\left(bg^{+}\right)-\int\left(bg^{-}\right)\\&=\int(af)+\int(bg)\\&=\int(af)^{+}-\int(af)^{-}+\int(bg)^{+}-\int(bg)^{-}\end{aligned}\tag{3.5}$$
由(3.4)和(3.5)知1°成立。

往证2°。由1°知
$$\int g=\int(g-f+f)=\int(g-f)+\int f\geqslant\int f$$
即2°成立。

往证3°。显然
$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}f=\int f\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\int f^{+}\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}-\int f^{-}\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}$$

由定理3.2.1知3°成立。

往证4°。由复可测函数积分的定义知

$$\begin{aligned}\int \overline{(f+\mathrm{i}g)} &= \int (f-\mathrm{i}g) = \int f - \mathrm{i}\int g \\ &= \overline{\left(\int f + \mathrm{i}\int g\right)} = \overline{\int (f+\mathrm{i}g)}\end{aligned}$$

即4°成立。 □

引理 3.2.2 设f为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的可测函数，如果存在可积函数g使得$|f|\leqslant g$，则f为可积函数。

证明： 注意到

$$f^+\leqslant |f|\leqslant g,\quad f^-\leqslant |f|\leqslant g$$

由引理3.1.3知

$$0\leqslant \int f^+\leqslant \int g<\infty,\quad 0\leqslant \int f^-\leqslant \int g<\infty$$

因此f为可积函数。 □

定理 3.2.3 (积分单调性定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上可测函数f和g的积分都存在，则$f\leqslant g$几乎处处成立的充分必要条件是

$$\int_A f\leqslant \int_A g,\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{3.6}$$

证明： 往证必要性。不妨假设f和g都可积，由引理3.1.2的积分单调性知必要性成立。

往证充分性。若$A\triangleq\{f>g\}$不是μ零集，记

$$A_n=\left\{f-g>\frac{1}{n},|f|<n,|g|<n\right\}$$

则$A_n\uparrow A$，由测度的下连续性知$\mu(A_n)\uparrow\mu(A)>0$。因此存在$m\in\mathbb{N}$，使得$\mu(A_m)>0$，进而由引理3.1.3知

$$\int (f-g)\mathbb{1}_{A_m}\geqslant \int \frac{1}{m}\mathbb{1}_{A_m}=\frac{1}{m}\mu(A_m)>0 \tag{3.7}$$

注意到

$$|f\mathbb{1}_{A_m}|\leqslant m,\quad |g\mathbb{1}_{A_m}|\leqslant m,$$

由引理3.2.2可知$f\mathbb{1}_{A_m}$和$g\mathbb{1}_{A_m}$均为可积函数，再由积分的线性性知

$$\int (f-g)\mathbb{1}_{A_m}=\int f\mathbb{1}_{A_m}-\int g\mathbb{1}_{A_m} \tag{3.8}$$

由(3.7)和(3.8)得$\int_{A_m} f>\int_{A_m} g$，这与(3.6)矛盾，因此 $A\triangleq\{f>g\}$ 是 μ 零集，即 $f\leqslant g$, a.e.。 □

推论 3.2.4 设f为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的非负可测函数，则$f=0$, a.e.，当且仅当$\int f=0$。

证明： 由 $\int f=0\Longleftrightarrow \int_A f=0,\forall A\in\mathscr{F}$，及定理3.2.2得结论。 □

定理 3.2.5 设f为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上可测函数，则f可积的充分必要条件是$|f|$可积。

证明： 由于

$$\int f=\int f^+-\int f^-,\quad \int |f|=\int f^++\int f^-$$

因此f和$|f|$可积的充分必要条件都是$\int f^+\in\mathbb{R}$，且$\int f^-\in\mathbb{R}$，因此定理结论成立。 □

定理 3.2.6 (Schwarz不等式) 设f和g为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的几乎处处可测函数，则

$$\left(\int |fg|\right)^2\leqslant\left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right) \tag{3.9}$$

证明： 若$\int f^2=\infty$或$\int g^2=\infty$，显然结论成立，因此仅需证明f^2和g^2都为可积函数时(3.9)成立。

事实上，由于

$$|fg|\leqslant\frac{f^2+g^2}{2}$$

由引理3.1.3和引理3.1.5知

$$0\leqslant\int|fg|\leqslant\frac{1}{2}\left(\int f^2+\int g^2\right)<\infty$$

由积分的线性性（定理3.9）得

$$0\leqslant\int(|f|+x\,|g|)^2=\int f^2+\left(2\int|fg|\right)x+\left(\int g^2\right)x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

即(3.9)成立。 □

3.3 独立随机变量

定义 3.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，集类$\mathscr{C}_k\subset\mathscr{F}$，$1\leqslant k\leqslant n$，若

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right),\quad\forall A_k\in\mathscr{C}_k,1\leqslant k\leqslant n$$

则称$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n$为**独立事件类**。

引理 3.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，$A_1,\ldots,A_n\in\mathscr{F}$，若

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)$$

则

$$\Lambda=\left\{B\in\sigma\left(\mathscr{C}\right):\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)B\right)=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\mathbf{P}\left(B\right)\right\}$$

为λ系。

证明： 显然$\Omega\in\Lambda$；对于任何$B_k\in\Lambda$，当$B_1\subset B_2$时有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)(B_2\backslash B_1)\right)&=\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)B_2\right)-\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)B_1\right)\\&=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\mathbf{P}\left(B_2\right)-\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\mathbf{P}\left(B_1\right)\\&=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\mathbf{P}\left(B_2\backslash B_1\right)\end{aligned}$$

即$B_2\backslash B_1\in\Lambda$；对于$\Lambda$中的不降事件列$\{B_k:k\in\mathbb{N}\}$有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\cap\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}B_s\right)\right)&=\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\cap\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}(B_s\backslash B_{s-1})\right)\right)\\&=\mathbf{P}\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\cap(B_s\backslash B_{s-1})\right)\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)\cap(B_s\backslash B_{s-1})\right)\\&=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\mathbf{P}\left(B_s\backslash B_{s-1}\right)=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\sum_{s=1}^{\infty}\mathbf{P}\left(B_s\backslash B_{s-1}\right)\\&=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}B_s\right)\end{aligned}$$

即$\bigcup_{s=1}^{\infty}B_s\in\Lambda$。因此$\Lambda$为λ系。 □

定理 3.3.1 (独立事件类扩张定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，若包含$\Omega$的$\pi$系$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n$为相互独立事件类，则$\sigma\left(\mathscr{C}_1\right),\ldots,\sigma\left(\mathscr{C}_n\right)$为相互独立事件类。

证明： 事实上，对于任意$A_k\in\mathscr{C}_k,1\leqslant k<n$，记

$$\Lambda_n=\left\{A_n\in\sigma\left(\mathscr{C}_n\right):\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_k\right)\right\}$$

则由$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_m$是相互独立事件类和引理3.3.1知$\Lambda$为$\lambda$系，并且$\Omega\in\mathscr{C}_n\subset\Lambda_n$，由集合形式的单调类定理（定理1.1.2）知$\sigma(\mathscr{C}_n)\subset\Lambda_n$，即对于任何$A_k\in\mathscr{C}_k$，$1\leqslant k<n$有

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_j\in\sigma(\mathscr{C}_j),j\geqslant n$$

类似地，对于任意$A_k\in\mathscr{C}_k 1\leqslant k<n-1$，$A_n\in\sigma(\mathscr{C}_n)$记

$$\Lambda_{n-1}=\left\{A_n\in\sigma(\mathscr{C}_{n-1}):\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right\}$$

则有：$\sigma(\mathscr{C}_{n-1})\subset\Lambda_{n-1}$，即对于任何$A_k\in\mathscr{C}_k$，$1\leqslant k<n-1$有

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_j\in\sigma(\mathscr{C}_j),j\geqslant n-1$$

重复上述步骤可得

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_k\in\sigma(\mathscr{C}_k),1\leqslant k\leqslant n$$

即$\sigma(\mathscr{C}_1),\ldots,\sigma(\mathscr{C}_n)$为相互独立事件类。 □

定义 3.3.2 设X_k是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$m_k$维随机向量，$k=1,\ldots n$，若

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k\leqslant x_k\}\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X_k\leqslant x_k),\quad \forall x_k\in\bar{\mathbb{R}}^{m_k}\tag{3.10}$$

则称$X_1,\ldots,X_n$**相互独立**，简称为**独立**。

定理 3.3.2 设X_k是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$m_k$维随机向量，$k=1,\ldots n$，若$X_1,\ldots,X_n$相互独立，则

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k\in B_k\}\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X_k\in B_k),\quad \forall B_k\in\bar{\mathscr{B}}^{m_k}\tag{3.11}$$

证明： 记$\mathscr{C}_k=\left\{\{X_k\leqslant x_k\}:x_k\in\bar{\mathbb{R}}^{m_k}\right\}$，则$\mathscr{C}_k$为包含$\Omega$的$\pi$系。由$X_1,\ldots,X_n$相互独立知$\mathscr{C}_1,\ldots,\mathscr{C}_n$为独立事件类，再由(3.10)独立事件类扩张定理[2]知

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k),\quad \forall A_k\in\sigma(\mathscr{C}_k),1\leqslant k\leqslant n$$

注意到$\sigma(\mathscr{C}_k)=X_k^{-1}\left(\bar{\mathscr{B}}^{m_k}\right)$，得(3.11)。 □

思考：$X_1,\ldots,X_n$相互独立的含义是什么？

定义 3.3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，若$X$和$Y$都是定义在$\Omega$上的$m$维随机向量，则称$Z=X+\mathrm{i}Y$为$m$**维复值随机向量**。

定义 3.3.4 对于$a=a_1+\mathrm{i}a_2\in\mathbb{C}^m$，$b=b_1+\mathrm{i}b_2\in\mathbb{C}^m$，记

$$(a,b]\triangleq\{x_1+\mathrm{i}x_2\in\mathbb{C}^m:x_1\in(a_1,b_1],x_2\in(a_2,b_2]\}\tag{3.12}$$

$$\mathscr{P}(\mathbb{C}^m)\triangleq\{(a,b]:a\in\mathbb{C}^m,b\in\mathbb{C}^m\}\cup\mathbb{C}^m\tag{3.13}$$

$$\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)=\sigma(\mathscr{P}(\mathbb{C}^m))\tag{3.14}$$

称$(a,b]$为m**维复立方体**，称$\mathscr{B}(\mathbb{C}^m)$为$m$**维复*Borel*域**。

引理 3.3.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$是概率空间，$Z=X+\mathrm{i}Y:\Omega\to\mathbb{C}^m$，则对于任意$a=a_1+\mathrm{i}a_2\in\mathbb{C}^m$和$b=b_1+\mathrm{i}b_2\in\mathbb{C}^m$有

$$\{Z\in(a,b]\}=\{(X,Y)\in((a_1,a_2),(b_1,b_2)]\}$$

证明： 由(3.12)知

$$\begin{aligned}\{Z\in(a,b]\}&=\{\omega\in\Omega:Z(\omega)\in(a,b]\}\\&=\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in(a_1,b_1],Y(\omega)\in(a_2,b_2]\}\\&=\{(X,Y)\in((a_1,a_2),(b_1,b_2)]\}\end{aligned}$$

□

[2]详见定理3.3.1。

引理 3.3.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$是概率空间，$Z = X + \mathrm{i}Y : \Omega \to \mathbb{C}^m$，则

$$Z^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^m\right)\right) = (X, Y)^{-1}\left(\mathscr{B}^{2m}\right) \tag{3.15}$$

证明： 由引理2.1.2知

$$Z^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^m\right)\right) = \sigma\left(Z^{-1}\left(\mathscr{P}\left(\mathbb{C}^m\right)\right)\right)$$
$$(X, Y)^{-1}\left(\mathscr{B}^{2m}\right) = \sigma\left((X, Y)^{-1}\left(\mathscr{P}^{2m}\right)\right)$$

而由引理3.3.2和例1.3知$Z^{-1}\left(\mathscr{P}\left(\mathbb{C}^m\right)\right) = (X, Y)^{-1}\left(\mathscr{P}^{2m}\right)$，因此(3.15)成立。 □

定义 3.3.5 设$X_k = X_k^{(1)} + \mathrm{i}X_k^{(2)}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$上的$m_k$维复值随机向量，$k = 1, \ldots n$，若$\left(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}\right), \ldots, \left(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\right)$相互独立，则称$X_1, \ldots, X_n$**相互独立**或**独立**。

定义 3.3.6 设$f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$，若

$$f^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^n\right)\right) \subset \mathscr{B}\left(\mathbb{C}^m\right)$$

则称f为**复*Borel*函数**。

定理 3.3.3 设$X_k = X_k^{(1)} + \mathrm{i}X_k^{(2)}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$上的$m_k$维复值随机向量，$f_k : \mathbb{C}^{m_k} \to \mathbb{C}^{n_k}$为复*Borel*函数，若$X_1, \ldots, X_n$相互独立，则$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$相互独立。

证明： 记$f_k = f_{k1} + \mathrm{i}f_{k2}$，则对于任何$x_k \in \mathbb{R}^{2n_k}$有

$$\begin{aligned}\{(f_{k1}(X_k), f_{k2}(X_k)) \leqslant x_k\} &= \{f_k(X_k) \leqslant x_{k1} + \mathrm{i}x_{k2}\} \\ &= \left\{X_k \in f_k^{-1}\left((-\infty, x_{k1} + \mathrm{i}x_{k2}]\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中x_{k1}和x_{k2}分别是x_k的前n_k和后n_k个分量构成的子向量。注意到f_k为复Borel函数，由引理3.3.3知

$$\begin{aligned}\left\{X_k \in f_k^{-1}\left((-\infty, x_{k1} + \mathrm{i}x_{k2}]\right)\right\} &\in X_k^{-1}\left(\mathscr{B}\left(\mathbb{C}^{m_k}\right)\right) \\ &= \left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}\right)^{-1}\left(\mathscr{B}^{2m_k}\right)\end{aligned}$$

即存在$A_k \in \mathscr{B}^{2m_k}$，使得

$$\left\{X_k \in f_k^{-1}\left((-\infty, x_{k1} + \mathrm{i}x_{k2}]\right)\right\} = \left\{\left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}\right) \in A_k\right\}$$

代入(3.16)，得

$$\{(f_{k1}(X_k), f_{k2}(X_k)) \leqslant x_k\} = \left\{\left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}\right) \in A_k\right\}$$

由$X_1, \ldots, X_n$相互独立和定理3.3.2得

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{(f_{k1}(X_k), f_{k2}(X_k)) \leqslant x_k\}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left\{\left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}\right) \in A_k\right\}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\left\{\left(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}\right) \in A_k\right\}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\{(f_{k1}(X_k), f_{k2}(X_k)) \leqslant x_k\}\right)\end{aligned}$$

即$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$相互独立。 □

由于随机向量和实Borel函数分别是复随机向量和复Borel函数的特例，所以定理3.3.3结论对于实随机向量和实Borel函数也成立。

3.4 期望的性质

定理 3.4.1 设$X_1,\ldots,X_n$是独立（实或复）*r.v.*，若$\mathbf{E}X_k\in\mathbb{R}$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k \tag{3.17}$$

证明： 不妨假设[3]$X_k\in\mathbb{R},1\leqslant k\leqslant n$。

当$X_1,\ldots,X_n$均为简单函数时，考虑简单函数X_k的标准表达式

$$X_k=\sum_{s=1}^{m_k}x_{k,s}\mathbb{1}_{\{X_k=x_{k,s}\}}$$

由独立性[4]和积分的线性性质[5]知

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{s_k=1}^{m_k}x_{k,s_k}\mathbf{P}\left(X_k=x_{k,s_k}\right)\right)\\
&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\prod_{k=1}^{n}\left(x_{k,s_k}\mathbf{P}\left(X_k=x_{k,s_k}\right)\right)\\
&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(X_k=x_{k,s_k}\right)\right)\\
&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k=x_{k,s_k}\}\right)\\
&=\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\mathbf{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\left\{X_k=x_{k,s_k}\right\}}\right)\right)\\
&=\mathbf{E}\left(\sum_{s_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{s_n=1}^{m_n}\left(\prod_{k=1}^{n}x_{k,s_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\left\{X_k=x_{k,s_k}\right\}}\right)\right)\\
&=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)
\end{aligned}$$

即此时(3.17)成立。

当$X_1,\ldots,X_n$均为非负随机变量时，由定理2.5.2知存在非负实值递增简单函数$\{h_{k,s}:s\in\mathbb{N}\}$，使得$\lim_{s\to\infty}h_{k,s}=X_k$。由积分单调收敛定理（定理3.1.2）知

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\lim_{s\to\infty}\mathbf{E}h_{k,s}\right)=\lim_{s\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}h_{k,s}\right)\\
&=\lim_{s\to\infty}\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}h_{k,s}\right)=\mathbf{E}\left(\lim_{s\to\infty}\prod_{k=1}^{n}h_{k,s}\right)=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)
\end{aligned}$$

即此时(3.17)成立。

当 $X_1,\ldots,X_n$ 为一般实随机变量时，记$X_{k,0}=X_k^+$，$X_{k,1}=X_k^-$，则有

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k&=\prod_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}X_{k,0}-\mathbf{E}X_{k,1}\right)\\
&=\sum_{s_1\in\{0,1\}}\cdots\sum_{s_n\in\{0,1\}}(-1)^{s_1+\ldots+s_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}X_{k,s_k}\right)
\end{aligned}$$

由$X_1,\ldots,X_n$是独立r.v.和定理3.3.3知：$X_{1,s_1},\ldots,X_{n,s_n}$也是独立r.v.。因此由已经证明的非负情况和积分的线性性

---

[3]否则，用$X_k\mathbb{1}_{\left\{X_k\in(-\infty,\infty)\right\}}$替代$X_k$即可。

[4]教材上此处表达不严格，因为简单函数可以是相交事件的示性函数的线性组合。

[5]详见定理3.2.2

质[6]知

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k &= \sum_{s_1\in\{0,1\}}\cdots\sum_{s_n\in\{0,1\}}(-1)^{s_1+\ldots+s_n}\,\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_{k,s_k}\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{s_1\in\{0,1\}}\cdots\sum_{s_n\in\{0,1\}}(-1)^{s_1+\ldots+s_n}\left(\prod_{k=1}^{n}X_{k,s_k}\right)\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}(X_{k,0}-X_{k,1})\right)=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)\end{aligned}$$

即(3.17)对于实r.v.成立。

当$X_1,\ldots,X_n$为复r.v.时，记$X_k=X_{k,0}+\mathrm{i}X_{k,1}$，则

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k &= \prod_{k=1}^{n}(\mathbf{E}X_{k,0}+\mathrm{i}\mathbf{E}X_{k,1})\\ &= \sum_{s_k\in\{0,1\},1\leqslant k\leqslant n}(\mathrm{i})^{s_1+\cdots+s_n}\prod_{k=1}^{n}(\mathbf{E}X_{k,s_k})\end{aligned}$$

由复r.v.$X_1,\ldots,X_n$相互独立知实r.v.$X_{1,s_1},\ldots,X_{n,s_n}$相互独立，再注意到积分的线性性质[7]可得

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k &= \sum_{s_k\in\{0,1\},1\leqslant k\leqslant n}(\mathrm{i})^{s_1+\cdots+s_n}\,\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_{k,s_k}\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{s_k\in\{0,1\},1\leqslant k\leqslant n}(\mathrm{i})^{s_1+\cdots+s_n}\prod_{k=1}^{n}X_{k,s_k}\right)=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)\end{aligned}$$

即(3.17)对于复r.v.成立。 □

练习 3.4.1 设$X_1,\ldots,X_n$是相互独立复*r.v.*，记$X_k=X_{k,0}+\mathrm{i}X_{k,1}$，试证明对于任意$s_k\in\{0,1\},1\leqslant k\leqslant n$，都有$X_{1,s_1},\ldots,X_{n,s_n}$相互独立。

练习 3.4.2 设f和g是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的复值可积函数，则

$$\int(af+bg)=a\int f+b\int g,\quad\forall a,b\in\mathbb{C}$$

3.5 方差

定义 3.5.1 设 X 为*r.v.*[8]，若 $\mathbf{E}|X|^2<\infty$，称

$$\mathbb{D}X\triangleq\mathbf{E}|X-\mathbf{E}X|^2$$

为X的方差。

定理 3.5.1 设X是*r.v.*，若$\mathbf{E}|X|^2<\infty$，则

$$\mathbb{D}(X)=\mathbf{E}|X|^2-|\mathbf{E}X|^2 \tag{3.18}$$

证明： 由Schwarz不等式[9]知$\mathbf{E}X\in\mathbb{R}$，由积分的线性性质得

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(X) &= \mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}X)\overline{(X-\mathbf{E}X)}\right)=\mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}X)\left(\overline{X}-\overline{\mathbf{E}X}\right)\right)\\ &= \mathbf{E}|X|^2-\mathbf{E}\left(X\left(\overline{\mathbf{E}X}\right)\right)-\mathbf{E}\left(\bar{X}(\mathbf{E}X)\right)+|\mathbf{E}X|^2\\ &= \mathbf{E}|X|^2-|\mathbf{E}X|^2\end{aligned}$$

即(3.18)成立。 □

[6]详见定理3.2.2。

[7]详见定理3.2.2。

[8]即可以是实r.v.，也可以是复r.v.。

[9]定理3.2.6

定理 3.5.2 设$X_1,\dots,X_n$是独立（实或复）r.v.，若$\mathbf{E}\left|X_k\right|^2<\infty$，$1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}X_k \tag{3.19}$$

证明： 由Schwarz不等式知 $\mathbf{E}X_k\in\mathbb{R}$，由积分的线性性质知

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{\sum_{s=1}^{n}X_s-\sum_{s=1}^{n}\mathbf{E}X_s}\right)\\
&=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{X_k-\mathbf{E}X_k}\right)\\
&\qquad+\sum_{1\leqslant k\neq s\leqslant n}\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)
\end{aligned}$$

再次利用积分的线性性质得

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}X_k+\sum_{1\leqslant k\neq s\leqslant n}\mathbf{E}\left(\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\right) \tag{3.20}$$

由$X_1,\dots,X_n$相互独立知：当$k\neq s$时$X_k-\mathbf{E}X_k$和$\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}$相互独立。进而

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\right)\\
&=\left(\mathbf{E}\left(X_k-\mathbf{E}X_k\right)\right)\left(\mathbf{E}\left(\overline{X_s-\mathbf{E}X_s}\right)\right)=0
\end{aligned}$$

代入到(3.20)得(3.19)。 □

3.6　特征函数

定义 3.6.1 若X为实r.v.，则称$f_X\left(t\right)\triangleq\mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX}$为**$X$的特征函数**；若$X=\left(X_1,\dots,X_n\right)$为$n$维实随机向量，则称$f_X\left(t\right)\triangleq\mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX'}$为**随机向量$X$的特征函数**，其中$t=\left(t_1,\dots,t_n\right)\in\mathbb{R}^n$，列随机向量$X'$是$X$的转置。

由于$\left|e^{\mathrm{i}tX'}\right|\leqslant 1$，由复合可测映射定理[10]和引理3.2.2知任何随机向量的特征函数都存在。

引理 3.6.1 若$X_1,\dots,X_n$是独立的实随机向量，则$X=\left(X_1,\dots,X_n\right)$的特征函数

$$f_X\left(t\right)=\prod_{k=1}^{n}f_{X_k}\left(t_k\right) \tag{3.21}$$

其中$t=\left(t_1,\dots,t_n\right)\in\mathbb{R}^{m_1+\cdots+m_n}$，$t_k$和$X_k$有相同的维数$m_k$，$1\leqslant k\leqslant n$。

证明： 由特征函数的定义得

$$f_X\left(t\right)=\mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX'}=\mathbf{E}e^{\mathrm{i}\left(t_1X_1'+\cdots+t_nX_n'\right)}=\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n}e^{\mathrm{i}t_kX_k'}\right)$$

由定理3.3.3和定理3.4.1知(3.21)成立。 □

[10]定理2.3.1

3.7 积分变换定理

定义 3.7.1 设f是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(E,\mathscr{E})$上的可测映射，μ是$\mathscr{F}$上的测度，记

$$\mu_f(B)\triangleq\mu\left(f^{-1}(B)\right),\quad \forall B\in\mathscr{E}$$

称μ_f为μ在$\mathscr{E}$上由f**导出的测度**[11]，简记为$\mu\circ f^{-1}$。

特别，当$(E,\mathscr{E})=\left(\bar{\mathbb{R}}^n,\bar{\mathscr{B}}^n\right)$时，称$\mu_f$或$\mu\circ f^{-1}$为$n$维可测函数$f$**的分布**。

进一步，当μ是概率时，称μ_f或$\mu\circ f^{-1}$为n维随机向量（n维r.v.）f**的概率分布**。

定理 3.7.1 (积分变换定理) 设 f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测映射，μ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度，g 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测函数，若 $\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)\,\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_B g\mathrm{d}\mu_f$ 的积分存在，则

$$\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)\,\mathrm{d}\mu=\int_B g\mathrm{d}\mu_f,\quad \forall B\in\mathscr{E} \tag{3.22}$$

证明： 由定理2.1.1知：对于任何$B\in\mathscr{E}$有

$$\begin{aligned}\int_B \mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu_f&=\mu_f(A\cap B)=\mu\left(f^{-1}(A\cap B)\right)\\&=\mu\left(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\right)\\&=\int_{f^{-1}(B)}\mathbb{1}_{f^{-1}(A)}\mathrm{d}\mu=\int_{f^{-1}(B)}(\mathbb{1}_A\circ f)\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

因此对于任意非负简单函数g，由引理3.1.5和引理3.2.1可得

$$\int_B g\mathrm{d}\mu_f=\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)\,\mathrm{d}\mu$$

注意到$(g\circ f)^{\pm}=(g^{\pm}\circ f)$有

$$\int_B g^{\pm}\mathrm{d}\mu_f=\int_{f^{-1}(B)}\left(g^{\pm}\circ f\right)\mathrm{d}\mu=\int_{f^{-1}(B)}(g\circ f)^{\pm}\,\mathrm{d}\mu$$

因此(3.22)成立。 □

$$\begin{tikzcd}(\Omega,\mathscr{F},\mu) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & (E,\mathscr{E},\mu_f) \arrow[dl, "g"] \\ & (\mathbb{R},\mathscr{B}) & \end{tikzcd}$$

$$\int g\circ f d\mu=\int g d\mu_f$$

练习 3.7.1 设 f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测映射，g 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的可测函数，试证明$(g^{\pm}\circ f)=(g\circ f)^{\pm}$。

定义 3.7.2 设f为$\mathscr{B}^n$可测函数，μ为$\mathscr{B}^n$上的*L-S*测度，F为μ的分布函数[12]。

若$\int f\mathrm{d}\mu$存在，则称f对μ的积分为f**的*L-S*积分**，并将该积分记为

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\mu(x_1,\ldots,x_n)$$

或

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)$$

若$\int_B f\mathrm{d}\mu$存在，其中$B\in\mathscr{B}^n$，则称f在B对μ的积分为f**在**B**上的*L-S*积分**，并将该积分记为

$$\int\cdots\int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\mu(x_1,\ldots,x_n)$$

或

$$\int\cdots\int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n)$$

---

[11] f导出的测度是$\mathscr{E}$上的测度，可用该测度研究μ限制在$f^{-1}(\mathscr{E})$上的性质。

[12] 详见定义1.3.4和定义1.3.6。

若μ为L测度λ[13]，则称$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\lambda$为$f$**的$L$积分**，并将该积分记为

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

称$\int_B f \mathrm{d}\lambda$为$f$**在$B$上的$L$积分**，并将该积分记为

$$\int \cdots \int_B f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

特别，当$B = (a, b]$时，其中

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n)$$

将B上的L积分$\int_B f \mathrm{d}\lambda$记为

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

定理 3.7.2 设X是$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$上的$n$维r.v.，$F$是$X$的概率分布函数，若$B \in \mathscr{B}^n$，则

$$\mathbf{P}(X \in B) = \int_B \mathrm{d}\mathbf{P}_X = \int \cdots \int_B \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.23}$$

进一步，若$g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为$\mathscr{B}^n$可测函数，$g = (g_1, \ldots, g_m)$，若$Y = g(X)$，则$Y$的分布函数

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, \ldots, y_m) &= \int_{g^{-1}((-\infty, y])} \mathrm{d}\mathbf{P}_X \\ &= \int \cdots \int_{g^{-1}((-\infty, y])} \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中$y = (y_1, \ldots, y_m)$。

证明： 由积分变换定理3.7.1得

$$\mathbf{P}(X \in B) = \int_{X^{-1}(B)} \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_B \mathrm{d}\mathbf{P}_X = \int \cdots \int_B \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n)$$

即(3.23)成立。注意到$g^{-1}((-\infty, y]) \in \mathscr{B}^n$和

$$F_Y(y_1, \ldots, y_m) = \mathbf{P}(Y \in (-\infty, y]) = \mathbf{P}\left(X \in g^{-1}((-\infty, y])\right)$$

再利用(3.23)得(3.24)。 □

定理 3.7.3 设X是$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$上的$n$维r.v.，$F$是$X$的概率分布函数，若$g$是$\mathscr{B}^n$可测函数[14]，则

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(X)) &= \int_\Omega g \circ X \mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{\mathbb{R}^n} g \mathrm{d}\mathbf{P}_X \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3.25}$$

特别X的特征函数

$$f_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}tx'} \mathbf{P}_X(\mathrm{d}x) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}tx'} \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.26}$$

其中$t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$。

证明： 由积分变换定理3.7.1立得结论。 □

定理 3.7.4 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，$p$是非负$\mathscr{F}$可测函数，$g$是可测函数，记$\nu(A) = \int_A p \mathrm{d}\mu$。若$\int g \mathrm{d}\nu$或$\int gp \mathrm{d}\mu$存在，则

$$\int_A g \mathrm{d}\nu = \int_A gp \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{3.27}$$

证明： 由定理3.2.1知ν为$\mathscr{F}$上的测度。显然

$$\int_A \mathbb{1}_B \mathrm{d}\nu = \nu(A \cap B) = \int_{A \cap B} p \mathrm{d}\mu = \int_A \mathbb{1}_B p \mathrm{d}\mu$$

即当$g = \mathbb{1}_B$时(3.27)成立。由引理3.1.5和引理3.2.1知当g为非负简单函数时结论(3.27)成立。注意到$(gp)^\pm = g^\pm p$，可得

$$\int_A g^\pm \mathrm{d}\nu = \int_A g^\pm p \mathrm{d}\mu = \int_A (gp)^\pm \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

因此(3.27)成立。 □

---

[13] 详见定义1.3.3。

[14] 既可以是实函数，也可以是复函数。

练习 3.7.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，p是非负$\mathscr{F}$可测函数，g是可测函数，试证明$(gp)^{\pm}=g^{\pm}p$。

定义 3.7.3 设X是$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$上的$n$维*r.v.*，$F$是$X$的概率分布函数，若存在非负$\mathscr{B}^n$可测函数$p$使得

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]}p\mathrm{d}\lambda,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n \tag{3.28}$$

则称p为F或X**的密度函数**。

定理 3.7.5 设 X 是 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ 上的 n 维*r.v.*，F 是 X 的概率分布函数，p 为 X 的密度函数，g 是 $\mathscr{B}^n$ 可测函数，若 $\mathbf{E}(g(X))$ 或 $\int_{\mathbb{R}^n}g(x)p(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\mathbf{E}(g(X))=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{3.29}$$

进一步，若$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$Y=h(X)$，则

$$F_Y(y)=\int_{h^{-1}((-\infty,y])}p(x)\mathrm{d}x,\quad \forall y\in\mathbb{R}^m \tag{3.30}$$

$$\mathbf{P}_Y(B)=\mathbf{P}(Y\in B)=\int_{h^{-1}(B)}p(x)\mathrm{d}x,\quad \forall B\in\mathscr{B}^m \tag{3.31}$$

证明： 由定理3.7.3、定理3.7.4和(3.28)知(3.29)成立。类似可得得 (3.30) 和 (3.31)。 □

3.8 Lebesgue积分与Riemann积分

定义 3.8.1 设f是$\mathscr{B}^n$可测函数，$(a,b]$为非空有界立方体，非空互不相交立方体类$\{(a_{n,k},b_{n,k}]:1\leqslant k\leqslant m_n\}$满足条件

$$\bigcup_{k=1}^{m_n}(a_{n,k},b_{n,k}]=(a,b],\quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x=0$$

若

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\min_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x\\ =&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\sup_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

记

$$(R)\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x\triangleq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\min_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$$

则称为 f 在$(a,b]$ 上的*Riemann* **积分存在**，并称 $(R)\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x$ 为 f 的*Riemann* **积分**。

定理 3.8.1 设f是$\mathscr{B}^n$可测函数，若$|f|$在$(a,b]$上的*Riemann*积分存在，则f为*L*测度可积，且

$$\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x=(R)\int_{(a,b]}f\mathrm{d}x \tag{3.32}$$

证明： 注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m_n}\left(\inf_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\mathbb{1}_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\\ \leqslant\ &f\mathbb{1}_{(a,b]}\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\left(\sup_{x\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f(x)\right)\mathbb{1}_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\end{aligned}$$

由对L测度积分的定义可得(3.32)。 □

3.9 积分收敛定理

引理 3.9.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，h和g为可积函数，$\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$为$\mathscr{F}$可测实函数列。若$g\leqslant f_n$,a.e.，$n\in\mathbb{N}$，则$\int f_n,\int\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n,\int\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n$都存在，且

$$\int g\leqslant\min\left\{\int f_n,\int\varliminf_{n\to\infty}f_n,\int\varlimsup_{n\to\infty}f_n\right\} \tag{3.33}$$

若$f_n \leqslant h$, a.e.，$n \in \mathbb{N}$，则$\int f_n, \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$都存在，且

$$\int h \geqslant \max\left\{\int f_n, \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right\} \tag{3.34}$$

若$g \leqslant f_n \leqslant h$, a.e.，$n \in \mathbb{N}$，则$f_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$都是可积函数。

证明： 当几乎处处$g \leqslant f_n$时，几乎处处有

$$g^- \geqslant \max\left\{f_n^-, \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-, \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-\right\}$$

由积分的单调性可知

$$\infty > \int g^- \geqslant \max\left\{\int f_n^-, \int \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-, \int \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^-\right\}$$

因此$\int f_n, \int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$都存在。注意到几乎处处有

$$g^+ \leqslant \min\left\{f_n^+, \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^+, \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n\right)^+\right\}$$

由积分的单调性知(3.33)成立。

当几乎处处 $f_n \leqslant h$ 时，类似可证 $\int f_n$，$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 和 $\int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 都存在，并且(3.34)成立。

当几乎处处$g \leqslant f_n \leqslant h$时，(3.33)和(3.34)都成立，因此 f_n，$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 和 $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 都是可积函数。 □

定理 3.9.1 (单调收敛定理) 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，$g$为可积函数，$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$为$\mathscr{F}$可测增函数列。若$g \leqslant f_n \uparrow f$, a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f \tag{3.35}$$

证明： 当$\int f = \infty$时，$\int f^+ = \infty$。注意到$f_n^+ \uparrow f^+$, a.e.，由定理3.1.2知

$$\infty = \int f^+ = \lim_{n\to\infty} \int f_n^+$$

另一方面，注意到$f_n^- \leqslant g^-$，由引理3.9.1的(3.34)知

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n^- \leqslant \int g^- < \infty$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n^+ - \int f_n^-\right) = \infty = \int f$$

即(3.35)成立。

当$\int f < \infty$时，由引理3.9.1的(3.33)知f可积，且

$$\int f = \int (f-g) + \int g$$

再由$g \leqslant f_n \leqslant f$知$f_n$可积，进而由积分的线性性[15]得

$$\int f_n = \int (f_n - g) + \int g$$

令$n \to \infty$，利用定理3.1.2立得(3.35)。 □

定理 3.9.2 (Fatou引理) 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，$g$和$h$为实可积函数，$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$为$\mathscr{F}$可测实函数列。若$g \leqslant f_n$, a.e.，则

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n \tag{3.36}$$

若$h \geqslant f_n$, a.e.，则

$$\int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n \tag{3.37}$$

证明： 当几乎处处$g \leqslant f_n$时，记$g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k$，则$g \leqslant g_n \uparrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$，并且由单调收敛定理和积分的单调性得

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n \tag{3.38}$$

[15]教材中没有验证条件：f_n的积分存在。

由引理3.9.1的(3.33)知$\int f_n$和$\int g_n$都存在。注意到$g_n \leqslant f_k, k \geqslant n$，利用积分的单调性[16]得$\int g_n \leqslant \inf_{k\geqslant n}\int f_k$，代入到(3.38)得

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}\int f_k = \varliminf_{n\to\infty}\int f_n$$

即(3.36)成立。

当几乎处处$h \geqslant f_n$时，由引理3.9.1的(3.34)知$\int f_n$和$\int \varlimsup_{n\to\infty} f_n$都存在，且$-f_n \geqslant -h$, a.e.，并且$-h$还是可积函数，由(3.36)知

$$\begin{aligned}-\int \varlimsup_{n\to\infty} f_n &= \int\left(-\varlimsup_{n\to\infty} f_n\right) = \int \varliminf_{n\to\infty}(-f_n)\\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int(-f_n) = \varliminf_{n\to\infty}\left(-\int f_n\right) = -\varlimsup_{n\to\infty}\int f_n\end{aligned}$$

即(3.37)成立。 □

定理 3.9.3 (控制收敛定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，g和h为实可积函数。若实$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f$, a.e.，$g \leqslant f_n \leqslant h$, a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f \tag{3.39}$$

进一步，若实或复$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f$, a.e.，$|f_n| \leqslant g$, a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f \tag{3.40}$$

证明： 当实$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f$, a.e.，$g \leqslant f_n \leqslant h$, a.e.，时，由Fatou引理得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int f_n \leqslant \int f \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int f_n$$

即(3.39)成立。

当实或复$\mathscr{F}$可测函数$f_n \to f$, a.e.，$|f_n| \leqslant g$, a.e.，时，$|f_n - f| \to 0$，且$0 \leqslant |f_n - f| \leqslant 2g$，由(3.39)得$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f| = 0$，再注意到$\left|\int f_n - \int f\right| \leqslant \int |f_n - f|$知(3.40)成立。 □

推论 3.9.4 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间，f_n是$\mathscr{F}$可测函数，g为可积函数。若$\sum_{k=1}^{\infty} f_k a.e.$收敛，且对于任何$n \in \mathbb{N}$有$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leqslant g$, a.e.，则$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$可积，且

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty}\int f_k \tag{3.41}$$

证明： 注意到$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| \leqslant g$, a.e.和$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$a.e.收敛，由引理3.9.1知$\sum_{k=1}^{n} f_k$和$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$都可积，再由控制收敛定理[17]和积分的线性性质[18]知

$$\begin{aligned}\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k &= \int \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_{n\to\infty}\int\sum_{k=1}^{n} f_k\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int f_k = \sum_{k=1}^{\infty}\int f_k\end{aligned}$$

即(3.41)成立。 □

推论 3.9.5 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间。若f可积，则

$$\lim_{\mu(A)\to 0}\int_A |f| = 0 \tag{3.42}$$

证明： 由控制收敛定理

$$\int_A |f| = \lim_{n\to\infty}\int_A |f|\,\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant n\}}$$

因此对于任意$\varepsilon > 0$，存在N使得

$$0 \leqslant \int_A |f| - \int_A |f|\,\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant N\}} < \varepsilon$$

[16]详见定理3.2.3。
[17]详见定理3.9.3。
[18]详见定理3.2.2。

因此当$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{N}$时有

$$\int_A |f| = \int_A |f| \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant N\}} + \int_A |f| - \int_A |f| \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant N\}} < 2\varepsilon$$

即(3.42)成立。 □

推论 3.9.6 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$f_t$为$\mathscr{F}$可测函数，$t \in \mathbb{R}$。若存在可积函数$g$，使得几乎处处有$|f_t| \leqslant g, \lim_{t\to t_0} f_t = f_{t_0}$，则

$$\int f_{t_0} = \lim_{t\to t_0} \int f_t \tag{3.43}$$

证明： 由引理3.2.2知f_t可积，考察函数$h(t) = \int f_t$。对于任何收敛于t_0的数列$\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$，由控制收敛定理知$\int f_{t_0} = \lim_{n\to\infty} \int f_{t_n}$，因此$h(t)$在$t_0$点处连续，即(3.43)成立。 □

推论 3.9.7 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$f_t$为可积函数，$t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$。若存在可积函数$g$，使得$\left|\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant g$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int f_t\right) = \int \frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mu \tag{3.44}$$

证明： 考察函数$h(t) = \int f_t$，显然

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int f_t\right) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int (f_{t+\Delta} - f_t) = \lim_{\Delta\to 0}\int \frac{f_{t+\Delta} - f_t}{\Delta} \tag{3.45}$$

由拉格朗日中值定理知存在$\theta \in (a, b)$，使得

$$\frac{f_{t+\Delta} - f_t}{\Delta} = \left.\frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\theta}$$

因此$\left|\frac{f_{t+\Delta}-f_t}{\Delta}\right| \leqslant g$，由(3.46)和推论3.9.6得(3.44)。 □

推论 3.9.8 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，$f_t$为$\mathscr{F}$可测函数。若存在可积函数$g$，使得$|f_t| \leqslant g$，并且$(R)\int_{(a,b]} f_t \mathrm{d}t$几乎处处存在[19]，其中$a, b \in \mathbb{R}$，则

$$(R)\int_{(a,b]}\left(\int f_t\right)\mathrm{d}t = \int\left((R)\int_{(a,b]} f_t \mathrm{d}t\right) \tag{3.46}$$

证明： 取非空互不相交区间$\{(a_{n,k}, b_{n,k}] : 1 \leqslant k \leqslant m_n\}$，使得

$$\bigcup_{k=1}^{m_n}(a_{n,k}, b_{n,k}] = (a, b], \quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant m_n}\int_{(a_{n,k}, b_{n,k}]}\mathrm{d}x = 0$$

由$\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right) \geqslant \int\left(\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]} f_t\right)$可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}t \\
\geqslant &\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\int\left(\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]} f_t\right)(b_{n,k} - a_{n,k})\right) \\
= &\lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{k=1}^{m_n}\left(\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]} f_t\right)(b_{n,k} - a_{n,k})\right)
\end{aligned}$$

注意到

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n}\left(\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]} f_t\right)(b_{n,k} - a_{n,k})\right| \leqslant g(b - a)$$

由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\inf_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}t \geqslant \int\left((R)\int_{(a,b]} f_t \mathrm{d}t\right)$$

[19] Riemann积分的定义见定义3.8.1。

类似由$\sup_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right)\leqslant\int\left(\sup_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}f_t\right)$可证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\left(\sup_{t\in(a_{n,k},b_{n,k}]}\left(\int f_t\right)\right)\int_{(a_{n,k},b_{n,k}]}\mathrm{d}t\leqslant\int\left((R)\int_{(a,b]}f_t\mathrm{d}t\right)$$

因此(3.46)成立。 □

3.10 级数与积分

定义 3.10.1 设$\Omega=\mathbb{N}$，$\mathscr{F}=\{A:A\subset\mathbb{N}\}$，对于任何$A\in\mathscr{F}$，用$\mu(A)$表示$A$中元素的个数，称$\mathscr{F}$上的测度$\mu$为**计数测度**。

显然由$\mathbb{N}$的所有子集构成的集类$\mathscr{F}$为σ代数，计数测度μ为测度，$(\mathbb{N},\mathscr{F},\mu)$为测度空间。此时定义在$\mathbb{N}$上的任何函数$f$都是$\mathscr{F}$可测函数，该函数可以表达为：

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathbb{1}_{\{n\}}$$

其中$a_n\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$。

进一步，如果f关于μ的积分存在，则

$$\int f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

因此关于积分的结论可以用于级数性质的研究。

第四章　不定积分与条件期望

4.1　符号测度

定义 4.1.1 设$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，称$\varphi : \mathscr{F} \to \bar{\mathbb{R}}$为**可加集函数**或者**符号测度**，如果$\varphi(\varnothing) = 0$，且对于不相交集类$\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{F}$有

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \tag{4.1}$$

进一步，若存在$\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{F}$，使得$\varphi(B_n) \in \mathbb{R}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$，则称$\varphi$为**$\sigma$有限符号测度**；若$\varphi(\mathscr{F}) \subset \mathbb{R}$，称符号测度$\varphi$为**有限符号测度**。

引理 4.1.1 设$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，φ是符号测度。若存在$A \in \mathscr{F}$使得$\varphi(A) = \infty$，则$\varphi(\Omega) = \infty$；若存在$B \in \mathscr{F}$使得$\varphi(B) = -\infty$，则$\varphi(\Omega) = -\infty$；$\varphi(\mathscr{F})$为$\mathbb{R}$或$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$或$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$的子集。

证明： 若存在$A \in \mathscr{F}$使得$\varphi(A) = \infty$，则由符号测度的有限可加性知

$$\varphi(\Omega) = \varphi(A) + \varphi(A^c) = \infty \tag{4.2}$$

若存在$B \in \mathscr{F}$使得$\varphi(B) = -\infty$，则由符号测度的有限可加性知

$$\varphi(\Omega) = \varphi(B) + \varphi(B^c) = -\infty \tag{4.3}$$

由(4.2)和(4.3)知$\varphi(\mathscr{F})$为$\mathbb{R}$或$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$或$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$的子集。 □

引理 4.1.2 设$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，则$\mathscr{F}$上的符号测度φ具有如下性质：

1° **有限可加性**，即对于任何互不相交的可测集$A_1, A_2, \ldots, A_n$有

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k)$$

2° **可减性**，即对可测集$A \subset B$，若$\varphi(A) \in \mathbb{R}$，则

$$\varphi(B \backslash A) = \varphi(B) - \varphi(A)$$

3° **加法公式**，即若可测集$A_1, A_2, \ldots, A_n$满足条件$\varphi(A_k) \in \mathbb{R}, 1 \leqslant k \leqslant n$，则有

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \varphi(A_{i_1} \cdots A_{i_k})$$

4° **下方连续性**，即若$A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$，则

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

5° **上方连续性**，即若$A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$，并且存在$m$使得$\varphi(A_m) \in \mathbb{R}$，则

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

证明： 利用定理1.3.1和定理1.3.2的证明思路可得这些性质。 □

定义 4.1.2 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，若$\int f$存在，

$$\varphi(A) \triangleq \int_A f, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

则称φ为**f对μ的不定积分**。

引理 4.1.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可测空间，若$\int f$存在，则$f$对$\mu$的不定积分$\varphi$为符号测度。进一步，当$f$可积时，$\varphi$是有限的符号测度。

证明： 当$\int f$存在时，记$\varphi^+(A) = \int_A f^+$，$\varphi^-(A) = \int_A f^-$。由定理3.2.1知$\varphi^+$和$\varphi^-$均为$\mathscr{F}$上的测度，并且它们之中至少有一个为有限测度，因此$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$为符号测度。

当f可积时，由定理3.2.2的积分单调性和可分个性知φ是有限的符号测度。 □

定义 4.1.3 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间。若 $\mathscr{F}$ 的互不相交子集类 $\{A_k:1\leqslant k\leqslant n\}$ 满足条件 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A$ 就称该子集类是A**的一个有限分割**，简称为A**的一个分割**，其中 $n\in\mathbb{N}$；若 $\mathscr{F}$ 的互不相交集类 $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ 满足条件 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A$，就称该子集类是$A$**的一个可数分割**，简称为$A$**的一个分割**。

进一步，设$\mathscr{A}_1$和$\mathscr{A}_2$是A的两个分割，若对于任何$B_2\in\mathscr{A}_2$，都存在$B_1\in\mathscr{A}_1$，使得$B_2\subset B_1$，则称$\mathscr{A}_2$是$\mathscr{A}_1$的一个**加细**。

定理 4.1.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间，f为可测函数。若$\int f$存在，则f对μ的不定积分φ具有如下性质：

1° 若$\mu(A)=0$，则$\varphi(A)=0$；

2° 若f几乎处处有限，μ是σ有限测度，则φ是$\mathscr{F}$上的σ有限符号测度；

证明： 当$\mu(A)=0$时，$f\mathbb{1}_A=0,\text{a.e.}$由引理3.1.8知

$$\varphi(A)=\int_A f=\int f\mathbb{1}_A=0$$

即1°成立。

当f几乎处处有限，且μ是σ有限测度时，由引理4.1.3知φ为符号测度，且存在Ω的分割$\{B_m:m\in\mathbb{N}\}$使得$\mu(B_m)<\infty$，$m\in\mathbb{N}$。因此

$$|\varphi(A_n\cap B_m)|\leqslant\int_{A_n\cap B_m}|f|\leqslant n\mu(B_m)<\infty,\quad\forall n\geqslant 0,m\geqslant 1$$

其中$A_n=f^{-1}((-n,n])$，$n\in\mathbb{N}$，$A_0=f^{-1}(\{-\infty,\infty\})$。注意到$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_nB_m)=\Omega$ 得2°。 □

定理 4.1.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，φ是符号测度。则存在$P,N\in\mathscr{F}$，使得$\Omega=P\cup N,\varnothing=P\cap N$，且

$$\varphi(P)=\sup_{A\in\mathscr{F}}\varphi(A),\quad\varphi(N)=\inf_{A\in\mathscr{F}}\varphi(A)\tag{4.4}$$

证明： 当$\varphi(\mathscr{F})\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$时，存在$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\sup_{A\in\mathscr{F}}\varphi(A)\tag{4.5}$$

取定$n\in\mathbb{N}$，考虑Ω的分割

$$\mathscr{A}_n=\{A_{1,t_1}\cap A_{2,t_2}\cap\cdots\cap A_{n,t_n}:t_k\in\{0,1\}\}$$

其中

$$A_{n,k}=\begin{cases}A_n, & k=0\\ A_n^c, & k=1\end{cases}$$

记

$$\mathscr{A}_n^+=\{A\in\mathscr{A}_n:\varphi(A)>0\},\quad B_n=\bigcup_{A\in\mathscr{A}_n^+}A$$

则由符号测度的可加性知

$$\varphi(A_n)=\sum_{A\in\mathscr{A}_n}\varphi(A_n\cap A)\leqslant\sum_{A\in\mathscr{A}_n^+}\varphi(A_n\cap A)=\varphi(B_n)\tag{4.6}$$

另一方面，记$B_{n,m}=\bigcup_{k=0}^{m}B_{n+k}, m\geqslant 0$，注意到当$s<t$时，分割$\mathscr{A}_t$是$\mathscr{A}_s$的加细，可得

$$\begin{aligned}B_{n,m}&=B_{n,m-1}\cup B_{n+m}\\&=B_{n,m-1}\cup\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+},\ A\cap B_{n,m-1}=A}A\right)\\&\qquad\cup\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+},\ A\cap B_{n,m-1}=\varnothing}A\right)\\&=B_{n,m-1}\cup\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+},\ A\cap B_{n,m-1}=\varnothing}A\right)\end{aligned}$$

由符号测度的可加性知：对于任意$m\in\mathbb{N}$有

$$\varphi\left(B_{n,m}\right)=\varphi\left(B_{n,m-1}\right)+\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+}\\A\cap B_{n,m-1}=\varnothing}}\varphi\left(A\right)\geqslant\varphi\left(B_{n,m-1}\right)$$

因此

$$\varphi\left(B_n\right)=\varphi\left(B_{n,0}\right)\leqslant\varphi\left(B_{n,m}\right),\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

代入到(4.6)得

$$\varphi\left(A_n\right)\leqslant\varphi\left(B_{n,m}\right),\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

注意到$B_{n,m}\subset B_{n,m+1}$，由符号测度的下方连续性得

$$\varphi\left(A_n\right)\leqslant\lim_{m\to\infty}\varphi\left(B_{n,m}\right)=\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_{n+k}\right),\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

再注意到

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}B_{n+k}=\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k\supset\bigcup_{k=n+1}^{\infty}B_k=\bigcup_{k=0}^{\infty}B_{n+1+k}$$

由(4.5)和符号测度的上方连续性得

$$\sup_{A\in\mathscr{F}}\varphi\left(A\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n+k}\right)=\varphi\left(P\right)\tag{4.7}$$

其中$P=\lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n+k}\right)$。

取$N=P^c$，则$P\cap N=\varnothing, P\cup N=\Omega$。由于

$$0=\varphi\left(\varnothing\right)\leqslant\varphi\left(P\right)<\infty$$

所以当$\varphi\left(\Omega\right)=-\infty$时，

$$\varphi\left(P^c\right)=\varphi\left(\Omega\right)-\varphi\left(P\right)=-\infty\leqslant\varphi\left(A\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

当$\varphi\left(\Omega\right)>-\infty$时，$\varphi\left(\mathscr{F}\right)\subset\mathbb{R}$，从而

$$\varphi\left(A\right)=\varphi\left(\Omega\right)-\varphi\left(A^c\right)\geqslant\varphi\left(\Omega\right)-\varphi\left(P\right)=\varphi\left(N\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

即此时定理结论成立。

当$\varphi\left(\mathscr{F}\right)\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$不成立时，令$\psi=-\varphi$，则$\psi$也为符号测度，且由引理4.1.1知

$$\psi\left(\mathscr{F}\right)=-\varphi\left(\mathscr{F}\right)\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$

因此存在$N,P\in\mathscr{F}$使得$P\cap N=\varnothing, P\cup N=\Omega$，且

$$\psi\left(P\right)=\inf_{A\in\mathscr{F}}\psi\left(A\right),\quad\psi\left(N\right)=\sup_{A\in\mathscr{F}}\psi\left(A\right)$$

即此时定理解了也成立。 □

定理 4.1.3 (Hahn分解定理) 设φ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的符号测度，则存Ω的分割P和N 使得

$$\varphi\left(A\cap P\right)=\sup_{B\in\mathscr{F}\cap A}\varphi\left(B\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.8}$$

$$\varphi\left(A\cap N\right)=\inf_{B\in\mathscr{F}\cap A}\varphi\left(B\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.9}$$

进一步，对于任意$A\in\mathscr{F}$，记

$$\varphi^{+}\left(A\right)\triangleq\varphi\left(A\cap P\right)\tag{4.10}$$

$$\varphi^{-}\left(A\right)\triangleq-\varphi\left(A\cap N\right)\tag{4.11}$$

$$\left|\varphi\right|\left(A\right)\triangleq\varphi^{+}\left(A\right)+\varphi^{-}\left(A\right)\tag{4.12}$$

则φ^{+}、φ^{-}和$|\varphi|$都是$\mathscr{F}$上的测度，且[1]

$$\varphi=\varphi^{+}-\varphi^{-}\tag{4.13}$$

证明： 由定理4.1.2知存在$P,N\in\mathscr{F}$，使得$\Omega=P\cup N,\varnothing=P\cap N$，且(4.4)成立。

对于给定$A\in\mathscr{F}$，若(4.8)不成立，则存在$B\in\mathscr{F}\cap A$，使得$\varphi\left(A\cap P\right)<\varphi\left(B\right)$。注意到$B\subset A$，由符号测度的可加性得

$$\begin{aligned}\varphi\left(P\right)&=\varphi\left(A\cap P\right)+\varphi\left(A^{c}\cap P\right)\\&<\varphi\left(B\right)+\varphi\left(A^{c}\cap P\right)=\varphi\left(B\cup\left(A^{c}\cap P\right)\right)\end{aligned}$$

与(4.4)相矛盾。因此(4.8)成立。

类似地，利用反证法可以证明(4.9)成立。

注意到$\varphi\left(\varnothing\right)=0$，由(4.8)和(4.9)知$\varphi^{+}$、$\varphi^{-}$和$|\varphi|$都是非负集函数，注意到它们都满足可列可加性知：它们都是$\mathscr{F}$上的测度。由符号测度的可加性得

$$\varphi\left(A\right)=\varphi\left(A\cap P\right)+\varphi\left(A\cap N\right)=\varphi^{+}\left(A\right)-\varphi^{-}\left(A\right)$$

即(4.13)成立。 □

定义 4.1.4 设φ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的符号测度，分别称*(4.10)*至*(4.12)*中的φ^{+}、φ^{-}和$|\varphi|$为φ的**上变差、下变差和全变差**，称*(4.13)*中表达式为φ的***Hahn*分解**。

4.2 符号测度的分解

定义 4.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，φ是$\mathscr{F}$上的集函数。若由$\mu\left(A\right)=0$能推出$\varphi\left(A\right)=0$，其中$A\in\mathscr{F}$，则称φ为μ**连续**，记为$\varphi\ll\mu$；若存在$N\in\mathscr{F}$，使得$\mu\left(N\right)=0$，且

$$\varphi\left(A\cap N^{c}\right)=0,\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

则称φ为μ**奇异**。

定理 4.2.1 (Lebesgue分解定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，φ是$\mathscr{F}$上的符号测度。若μ和φ都是σ有限的，则

$$\varphi=\varphi_{c}+\varphi_{s}\tag{4.14}$$

其中φ_{s}是μ奇异符号测度，$\varphi_{c}\ll\mu$，且

$$\varphi_{c}\left(A\right)=\int_{A}f,\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.15}$$

这里f是一个几乎处处有限的、关于μ积分存在的可测函数。进一步，*(4.15)*的f是几乎处处唯一确定的。

证明： 分四步证明定理结论。

1. 往证μ和φ均为有限测度时(4.14)和(4.15)成立。

记

$$\Phi=\left\{f:f\text{为非负可测函数},\int_{A}f\leqslant\varphi\left(A\right),\forall A\in\mathscr{F}\right\}\tag{4.16}$$

[1]教材上需要条件：当φ^{+}和φ^{-}中至少有一个为有限测度。但是由符号测度定义的合理性，似乎可以不要这个条件。

则
$$0 \leqslant \int f \leqslant \varphi(\Omega) < \infty, \quad \forall f \in \Phi \tag{4.17}$$
因此存在$\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$，使得
$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n = \sup_{g\in\Phi} \int g \tag{4.18}$$
令
$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \tag{4.19}$$
往证$f \in \Phi$。

事实上，对于任意$A \in \mathscr{F}$，由单调收敛定理得
$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k \tag{4.20}$$
记$B_1 = \{f_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k\}$，
$$B_k = \left\{ f_k = \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k \right\} \Big\backslash \left(\bigcup_{s=1}^{k-1} B_s \right), \quad \forall 1 < k \leqslant n$$
则$B_1, \ldots, B_n$是Ω的一个分割。注意到$f_k \in \Phi$，由积分的线性性质得
$$\begin{aligned}\int_A \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k &= \int_A \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k \right) \sum_{t=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \int_A f_k \mathbb{1}_{B_k} \leqslant \sum_{t=1}^{n} \varphi(AB_k) = \varphi(A)\end{aligned}$$
再由(4.20)得$f \in \Phi$。记
$$\varphi_c(A) = \int_A f, \quad \varphi_s(A) = \varphi(A) - \varphi_c(A), \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.21}$$
则$\varphi_c \ll \mu$，(4.14)成立。由$f \in \Phi$知φ_s为测度，下需证明 φ_s 为 μ 奇异。

记[2]
$$\psi_n = \varphi_s - \frac{1}{n}\mu \tag{4.22}$$
由Hahn分解定理4.1.3知存在$D_n \in \mathscr{F}$，使得
$$\psi_n(A \cap D_n) \leqslant 0, \quad \psi_n(A \cap D_n^c) \geqslant 0, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.23}$$
记$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$，则
$$\begin{aligned}0 \leqslant \varphi_s(A \cap D) &= \psi_n(A \cap D \cap D_n) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\mu(A \cap D) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall A \in \mathscr{F}\end{aligned}$$
现在只需证明 $\mu(D^c) = 0$，即只需对于任意$n \in \mathbb{N}$证明$\mu(D_n^c) = 0$。

事实上，对于任意$A \in \mathscr{F}$，由积分的线性性质、(4.21)、(4.22)和(4.23)得
$$\begin{aligned}\int_A \left(f + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{D_n^c} \right) &= \varphi_c(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n^c) \\ &= \varphi(A) - \varphi_s(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n^c) \\ &\leqslant \varphi(A) - \varphi_s(A \cap D_n^c) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n^c) \\ &= \varphi(A) - \psi_n(A \cap D_n^c) \leqslant \varphi(A)\end{aligned}$$

[2]直观上，$\int_A f$应该是从小的方向最接近于$\varphi(A)$，因此$\varphi_s - \frac{1}{n}\mu$只能是不超过0的符号测度。

因此$f+\frac{1}{n}\mathbb{1}_{D_n^c}\in\Phi$，再注意到(4.17)和(4.19)得

$$\begin{aligned}\infty>\varphi(\Omega)&\geqslant\int f\geqslant\lim_{n\to\infty}\int f_n=\sup_{g\in\Phi}\int g\\&\geqslant\int\left(f+\frac{1}{n}\mathbb{1}_{D_n^c}\right)=\int f+\frac{1}{n}\mu\left(D_n^c\right)\geqslant 0\end{aligned}$$

注意到$\mu\left(D_n^c\right)\geqslant 0$，立得$\mu\left(D_n^c\right)=0$。

2. 往证μ和φ均为σ有限测度时(4.14)和(4.15)成立。

此时存在Ω的一个分割$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$，使得

$$\mu\left(A_n\right)<\infty,\quad\varphi\left(A_n\right)<\infty,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

记

$$\mu_n(A)=\mu\left(A\cap A_n\right),\quad\varphi_n(A)=\varphi\left(A\cap A_n\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.24}$$

则μ_n和φ_n均为有限测度。因此存在可积函数f_n，使得

$$\varphi_{n,c}(A)=\int_A f_n\mathrm{d}\mu_n\tag{4.25}$$

是μ_n连续测度，并且

$$\varphi_{n,s}=\varphi_n-\varphi_{n,c}\tag{4.26}$$

为μ_n奇异测度。记

$$\varphi_c=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,c},\quad\varphi_s=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,s}\tag{4.27}$$

注意到$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$为Ω的一个分割，由(4.24)至(4.27)和测度的可列可加性得(4.14)；注意到[3]

$$\int_A f_n\mathrm{d}\mu_n=\int_{A\cap A_n}f_n$$

利用单调收敛定理3.9.1

$$\varphi_c(A)=\int_A\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\mathbb{1}_{A_n}\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

即$\varphi_c\ll\mu$；由$\varphi_{n,s}$为μ_n奇异测度知存在$D_n\in\mathscr{F}$，使得$\mu_n\left(D_n\right)=0$，且

$$\varphi_{n,s}\left(A\cap D_n^c\right)=0,\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

记$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$，则$0\leqslant\mu(D)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(D_n\right)=0$，且

$$\varphi_s\left(A\cap D^c\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,s}\left(A\cap D^c\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,s}\left(A\cap D_n^c\right)=0$$

即φ_s为μ奇异测度。

3. 往证μ为σ有限测度、φ是σ有限符号测度时(4.14)和(4.15)成立。

由Hahn分解定理4.1.3知

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^-\tag{4.28}$$

其中φ^+和φ^-均为σ有限测度。因此存在非负可测函数f和g，使得

$$\varphi_c^+(A)=\int_A f,\varphi_c^-(A)=\int_A g,\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.29}$$

$$\varphi^+=\varphi_c^++\varphi_s^+,\quad\varphi^-=\varphi_c^-+\varphi_s^-\tag{4.30}$$

其中φ_s^+和φ_s^-都关于μ奇异。由引理4.1.1知$\varphi^+(\Omega)$和$\varphi^-(\Omega)$中至少有一个为实数，即φ^+和φ^-之中至少有一个为有限测度。因此由(4.28)和(4.30)可得

$$\varphi=\left(\varphi_c^+-\varphi_c^-\right)+\left(\varphi_s^+-\varphi_s^-\right)$$

由(4.29)知$\left(\varphi_c^+-\varphi_c^-\right)\ll\mu$，由$\varphi_s^+$和$\varphi_s^-$都关于$\mu$奇异知$\varphi_s^+-\varphi_s^-$关于$\mu$奇异。

4. 往证(4.15)的f是几乎处处唯一确定的。

[3]详见后面练习题。

若φ有两个不同的分解

$$\varphi(A) = \int_A f + \psi_1(A), \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.31}$$

$$\varphi(A) = \int_A g + \psi_2(A), \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.32}$$

其中ψ_1和ψ_2均为μ奇异符号测度。由μ奇异符号测度的定义知$N \in \mathscr{F}$，使得$\mu(N) = 0$，且

$$\psi_1(A \cap N^c) = \psi_2(A \cap N^c) = 0, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

再由(4.31)和(4.32)知

$$\int_A f \mathbb{1}_{N^c} = \int_A g \mathbb{1}_{N^c}, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

由积分的单调性定理3.2.3得

$$f \mathbb{1}_{N^c} \leqslant g \mathbb{1}_{N^c}, \text{a.e.}, \quad f \mathbb{1}_{N^c} \geqslant g \mathbb{1}_{N^c}, \text{a.e.}$$

即f和g几乎处处相等。

综上所述，定理结论成立。 □

练习 4.2.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，$\int f$存在，$B \in \mathscr{F}$，试证明$\int_A f \mathrm{d}\nu = \int_{A \cap B} f \mathrm{d}\mu$，其中$\nu(A) = \mu(A \cap B)$。

练习 4.2.2 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，$\psi_1$和$\psi_2$均为$\mu$奇异符号测度，试证明存在$N \in \mathscr{F}$，使得

$$\mu(N) = \psi_1(A \cap N^c) = \psi_2(A \cap N^c) = 0, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

定义 4.2.2 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为$\sigma$有限测度空间，$\varphi$为$\mathscr{F}$上的符号测度，若可测函数$f$满足如下条件

$$\varphi(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

则称f为φ关于μ的***Radon*导数**，并将该*Radon*导数记为$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$。

定理 4.2.2 (Radon-Nikodym定理) 设$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，μ是$\mathscr{F}$上的σ有限测度，φ为$\mathscr{F}$上的符号测度。若$\varphi \ll \mu$，则φ是某一可测函数f的不定积分，且f几乎处处由φ唯一决定。

证明： 1. 假设μ是有限测度和φ为测度，往证φ是某一可测函数f的不定积分。

记

$$\mathscr{C} = \left\{A \in \mathscr{F} : \varphi\text{在}A\text{上}\sigma\text{有限}\right\}$$

则$s = \sup_{A \in \mathscr{C}} \mu(A) < \infty$。因此存在$B_n \in \mathscr{C}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = s \tag{4.33}$$

显然$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{C}$，即$\varphi$在$B$上$\sigma$有限。由Legesgue分解定理4.2.1知：存在$\mathscr{F} \cap B$可测函数$g \geqslant 0$，使得

$$\varphi(A \cap B) = \int_A g \mathbb{1}_B + \varphi_s(A \cap B), \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

其中φ_s是μ奇异符号测度。注意到$\varphi \ll \mu$，可得$\varphi_s = 0$，即有

$$\varphi(A \cap B) = \int_A g \mathbb{1}_B, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.34}$$

对于任何$P \in \mathscr{F} \cap B^c$，若$\mu(P) > 0$，由(4.33)知

$$\mu(P \cup B) = \mu(P) + \mu(B) > \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = \sup_{A \in \mathscr{C}} \mu(A)$$

因此$P \cup B \notin \mathscr{C}$，即$\varphi(P) = \infty$。定义

$$f = g \mathbb{1}_B + \varphi(\Omega) \mathbb{1}_{B^c}$$

则f为非负$\mathscr{F}$可测函数，并且

$$\varphi(A) = \int_A f, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.35}$$

2. 假设μ是σ有限测度和φ为测度，往证φ是某一可测函数f的不定积分。

取Ω的分割$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得$\mu(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$。因此存在$\mathscr{F} \cap A_n$可测函数$f_n \geqslant 0$使得

$$\varphi(A \cap A_n) = \int_A f_n \mathbb{1}_{A_n}, \quad \forall A \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$$

由积分的单调收敛定理和φ的σ可加性知

$$\varphi(A) = \int_A f, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

其中$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{A_n}$。

3. 假设μ是σ有限测度和φ为符号测度，往证φ是某一可测函数f的不定积分。

由Hahn分解定理4.1.3知

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \tag{4.36}$$

存在可测函数g和h，使得

$$\varphi^+(A) = \int_A g, \quad \varphi^-(A) = \int_A h, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

由引理4.1.1知$\varphi^+(A)$和$\varphi^-(A)$至少有一个为实数，因此

$$\varphi(A) = \int_A f, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

其中$f = g - h$。

4. 假设φ是某一可测函数f的不定积分，往证f几乎处处由φ唯一决定。

若φ既是可测函数f的不定积分，也是可测函数g的不定积分，则

$$\int_A f = \int_A g, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

由积分的单调性定理3.2.3可得$f = g$, a.e.。 □

定理 4.2.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为$\sigma$有限测度空间，若$\mathscr{F}$上的测度$\varphi \ll \mu$，$f$为$\mathscr{F}$可测函数，则$f$关于$\varphi$的积分存在的充分必要条件是$\int f \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$存在，且在积分存在的情况下有

$$\int_A f \mathrm{d}\varphi = \int_A f \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

证明： 由Radon-Nikodym定理4.2.2知

$$\varphi(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

从而对于任何非负简单函数f有

$$\int f \mathrm{d}\varphi = \int f \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$$

因此定理结论成立。 □

定理 4.2.4 (分布函数分解定理) 任一有界L-S测度的分布函数F都可以分解为

$$F = F_c + F_d + F_s \tag{4.37}$$

其中

$$F_c(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.38}$$

即F_c可以用$\mathbb{R}$上某非负可积函数p的L积分表示；

$$F_d(x) = \sum_{t \in \{a \in D : a \leqslant x\}} g(t), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.39}$$

这里$D = \left\{x \in R : x\text{为}F\text{的不连续点}\right\}$为可数或有限集，而$g(t) = F(t) - \lim_{n \to \infty} F\left(t - \frac{1}{n}\right)$；$F_s$为一连续有界分布函数，它所对应的$L$-$S$测度关于$L$测度奇异。

证明： 设μ是F所对应的L-S测度，由Legesgue分解定理4.2.1得

$$\mu = \mu_c + \nu \tag{4.40}$$

其中μ_c关于L测度连续，ν关于L测度奇异。

显然$g(t)=\mu(\{t\})$，因此

$$D=\{x:\mu(\{x\})>0\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n \tag{4.41}$$

其中$D_0=\{x:\mu(\{x\})\geqslant 1\}$，

$$D_n=\left\{x:\frac{1}{n}>\mu(\{x\})\geqslant\frac{1}{n+1}\right\},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

注意到F为有界增函数，知D_n为有限集，因此D为可数集。记

$$\mu_d(A)=\nu(A\cap D),\quad \mu_s(A)=\nu(A\cap D^c),\quad \forall A\in\mathscr{B} \tag{4.42}$$

则μ_d和μ_s都关于L测度奇异，且

$$\nu=\mu_d+\mu_s \tag{4.43}$$

$$\mu_d((-\infty,x])=\sum_{t\in\{a\in D:a\leqslant x\}}\mu(\{t\})=F_d(x),\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.44}$$

由(4.40)和(4.43)得

$$\mu=\mu_c+\mu_d+\mu_s \tag{4.45}$$

再由(4.41)和(4.42)得

$$\mu_s(\{x\})=0,\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.46}$$

由Radon-Nikodym定理4.2.2知存在非负可测函数p，使得

$$\mu_c(A)=\int_A p(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall A\in\mathscr{B}$$

因此(4.38)中的$F_c(x)$为μ_c所对应的分布函数；由(4.44)知F_d为右连续的有界增函数，该函数对应的L-S测度为μ_d；由(4.45)知

$$\begin{aligned}\mu_s((-\infty,x])&=\mu((-\infty,x])-\mu_c((-\infty,x])-\mu_d((-\infty,x])\\&=\mu((-\infty,x])-\int_{-\infty}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{t\in\{a\in D:a\leqslant x\}}g(t)\\&=F(x)-\lim_{n\to-\infty}F(n)-F_c(x)-F_d(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

因此$F_s=F-F_c-F_d$为有界右连续增函数，它所对应的L-S测度为μ_s，再由(4.46)知F_s还为连续函数。

综上所述，(4.37)成立。 □

定义 4.2.3 设F为有界*L-S*测度的分布函数，称该函数的分解式*(4.37)*中的F_c为F的**绝对连续部分**，称F_d为F的**离散部分**，称F_s为F的**奇异部分**。

例 2.1 (奇异分布的例子) 考虑集合

$$A_n=\{(x_1,\ldots,x_{n-1},1):x_k\in\{0,2\},1\leqslant k\leqslant n-1\}$$

记

$$D_{n,a}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k},\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}+\frac{1}{3^n}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N},a\in A_n \tag{4.47}$$

$$D_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{a\in A_n}D_{n,a},\quad P_0=[0,1]\setminus D_0 \tag{4.48}$$

其中a_k为a的第k分量。试构造奇异分布函数F，使得当$x\in D_0$时有

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{n+1}},\quad \forall x\in D_{n,a},a\in A_n,n\in\mathbb{N} \tag{4.49}$$

解： 对于任何$x,y\in D_0$，存在

$$n,m\in\mathbb{N},\ a=(a_1,\ldots,a_n)\in A_n,b=(b_1,\ldots,\ b_m)\in A_m$$

使得$x \in D_{n,a}, y \in D_{m,b}$，由(4.47)得

$$x \in \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}\right), \quad y \in \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k} + \frac{1}{3^m}\right) \tag{4.50}$$

1. 往证$F : D_0 \to [0,1]$为增函数。

当$x < y$时，注意到$\{D_{n,a} : n \in \mathbb{N}, a \in A_n\}$中的各个区间互不相交得：若$D_{n,a} \cap D_{m,b} \neq \varnothing$，可得$n = m, a = b$，从而

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = F(y) \tag{4.51}$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k}$，若$D_{n,a} \cap D_{m,b} \neq \varnothing$，存在正数$s$，使得

$$a_s = 0, \quad b_s = 2, \quad a_k = b_k, \quad \forall 1 \leqslant k < s$$

由(4.49)得

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{2}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{s-1} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{\frac{2}{2^{s+2}} - \frac{2}{2^{n+2}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{2}{2^{s+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = F(y) \end{aligned} \tag{4.52}$$

由(4.51)和(4.52)F在D_0上为增函数。

2. 往证当$x, y \in D_0$和$0 < y - x < \frac{1}{3^s}$ 时有

$$0 \leqslant F(y) - F(x) \leqslant \frac{1}{2^s} \tag{4.53}$$

事实上，由(4.50)知

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} - \frac{1}{3^n} < y - x < \frac{1}{3^s}$$

注意到$a_k, b_k \in \{0,1,2\}$可得 $b_k = a_k, \quad \forall 1 \leqslant k < s$，因此

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(y) - F(x) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{k=s}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \sum_{k=s}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^s} \sum_{k=s}^{m} \frac{2}{2^{k+1-s}} \leqslant \frac{1}{2^s} \end{aligned}$$

即(4.53)成立。

3. 构造函数

$$F(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \inf_{x \leqslant t \in D_0} F(t) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.54}$$

往证F为增函数。

注意到F在D_0上为增函数，由下确界的性质和(4.54)知F为开区间$(0,1)$上的增函数。而由(4.49)知$F(\{x : x \in (0,1)\}) \subset [0,1]$，再由(4.54)知$F$为$\mathbb{R}$上增函数。

4. 往证F为开区间$(0,1)$上的连续函数。

考察L测度λ，由测度的可列可加性得

$$\lambda(D_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a \in A_n} \lambda(D_{n,a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a \in A_n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 \tag{4.55}$$

另一方面，由$D_{n,a} \subset [0,1]$知$D_0 \subset [0,1]$。因此对于任何$x \in (0,1) \setminus D_0$，存在递增数列$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D_0$和递减数列$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} y_n$$

从而存在$N_s \in \mathbb{N}$，使得

$$0 < y_n - x_n < \frac{1}{3^s}, \quad \forall n \geqslant N_s$$

由(4.53)得

$$0 \leqslant F(y_n) - F(x_n) < \frac{1}{2^s}, \quad \forall n \geqslant N_s$$

进而

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) \tag{4.56}$$

而由(4.54)得

$$F(x_n) \leqslant F(x) \leqslant F(y_n) \tag{4.57}$$

注意到F为增函数，由(4.56)和(4.57)得

$$\lim_{y\to x} F(y) = F(x), \quad \forall x \in (0,1) \tag{4.58}$$

即F在$(0,1)$上连续。

5. 往证F为$\mathbb{R}$上的连续函数。

由(4.49)、(**??**)和(4.54)知：F在

$$(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,\infty) \tag{4.59}$$

上处处连续，因此只需证明F在0和1点处连续。取 x_n 为区间 $\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)$ 的中点，y_n 为区间 $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^k} + \frac{1}{3^n}, \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}\right)$ 的中点，则$x_n \downarrow 0$，$y_n \uparrow 1$，且

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

注意到F为增函数和(4.54)知0和1为F的连续点。

6. 往证F为奇异分布函数。

用μ表示F所对应的L-S测度，则对于任意$n \in \mathbb{N}, a \in A_n$，$F$在$D_{n,a}$上为常数，因此

$$\mu(D_{n,a}) = 0, \quad \mu(D_0) = 0$$

再注意到$\mu((-\infty,0)) = \mu((1,\infty)) = 0$得

$$\mu(A \cap P_0^c) = 0, \quad \forall A \in \mathscr{B}$$

其中P_0由(4.59)给出。而由(4.55)知

$$\lambda(P_0) = \lambda([0,1]) - \lambda(D_0) = 0$$

即μ关于λ奇异。 □

4.3 条件期望

定义 4.3.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数，$X$和$Y$为随机变量，并且$X$的数学期望存在，

$$\mathbf{P}_{\mathscr{C}} = \mathbf{P}|_{\mathscr{C}}, \quad \mu(A) = \mathbf{E}(X \mathbb{1}_A), \quad \forall A \in \mathscr{C} \tag{4.60}$$

称

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{C}) \triangleq \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathscr{C}}} \tag{4.61}$$

为X在$\mathscr{C}$下（关于$\mathbf{P}$）的条件期望；称 $\mathbf{E}(X|\sigma(Y))$ 为X在Y下的条件期望，简记为$\mathbf{E}(X|Y)$；若$A \in \mathscr{F}$，称

$$\mathbf{P}(A|\mathscr{C}) \triangleq \mathbf{E}(\mathbb{1}_A|\mathscr{C}) \tag{4.62}$$

为事件A在$\mathscr{C}$下的条件概率，称

$$\mathbf{P}(A|\sigma(Y)) \triangleq \mathbf{E}(\mathbb{1}_A|\sigma(Y)) \tag{4.63}$$

为事件A在Y下的条件概率。

引理 4.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数，随机变量$X$的数学期望存在。若$\mathscr{C}$可测函数$f$满足条件

$$\int_A X\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_A f\mathrm{d}\mathbf{P},\quad \forall A\in\mathscr{C} \tag{4.64}$$

则$f=\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)$。进一步，条件期望具有平滑性

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\right)=\mathbf{E}\left(X\right) \tag{4.65}$$

证明： 由(4.60)和(4.64)得

$$\mu\left(A\right)=\int_A f\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_A f\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathscr{C}},\quad \forall A\in\mathscr{C}$$

由Radon导数的定义知$f=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathscr{C}}}$，即$f=\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)$。进一步，在(4.64)中取$A=\Omega$，得条件期望的平滑性(4.65) □

由引理4.3.1知$\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)$是一个满足(4.64)的$\mathscr{C}$可测函数。

引理 4.3.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$为$\sigma$代数，$X$和$Y$是随机变量。若$X$的数学期望存在，则存在$\mathscr{B}$可测函数$g$，使得

$$\mathbf{E}\left(X\,|\sigma\left(Y\right)\right)=g\left(Y\right) \tag{4.66}$$

进一步，当X为$\mathscr{C}$可测函数时，

$$\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)=X \tag{4.67}$$

证明： 由于$\mathbf{E}\left(X\,|\sigma\left(Y\right)\right):\Omega\to\mathbb{R}$为$\sigma\left(Y\right)$可测函数，因此由定理2.5.5知存在$\mathscr{B}$可测函数$g$，使得(4.66)成立。进一步，由引理(4.3.1)知(4.67)成立。 □

为表达方便，对于随机变量X和Y，记

$$\mathbf{E}\left(X\,|Y\,\right)\triangleq g\left(Y\right),\quad \mathbf{E}\left(X\,|Y=y\,\right)\triangleq g\left(y\right),\quad \forall y\in\mathbb{R}$$

其中$g\left(Y\right)$满足(4.66)。对于任何$A\in\mathscr{F}$和$y\in\mathbb{R}$，记

$$\mathbf{P}\left(A\,|Y\,\right)\triangleq\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A\,|Y\,\right),\quad \mathbf{P}\left(A\,|Y=y\,\right)\triangleq\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A\,|Y=y\,\right)$$

引理 4.3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$为$\sigma$代数，则

$$\mathbf{P}\left(A\,|\mathscr{C}\,\right)=\mathbb{1}_A,\quad \forall A\in\mathscr{C} \tag{4.68}$$

$$\mathbf{P}\left(A\cap B\right)=\int_B\mathbf{P}\left(A\,|\mathscr{C}\,\right)\mathrm{d}\mathbf{P},\quad \forall A,B\in\mathscr{C} \tag{4.69}$$

证明： 显然当$A\in\mathscr{C}$时，$\mathbb{1}_A$为$\mathscr{C}$可测函数，由引理4.3.2知$\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A\,|\mathscr{C}\,\right)=\mathbb{1}_A$，即(4.68)成立。而由(4.68)和引理4.3.1知(4.69)成立。 □

定义 4.3.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$B\in\mathscr{F}$。若$\mathscr{F}\cap B=\{\varnothing,B\}$，则称$B$为$\mathscr{F}$的一个原子。

$\mathscr{F}$的一个原子是“最小”的非空可测集，实际上将所有原子作为样本空间，不会影响$\mathscr{F}$中随机事件的测度性质的研究。

定理 4.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$为$\sigma$代数，$B$为$\mathscr{C}$的一个非空原子。若$\mathbf{P}\left(B\right)>0$，则

$$\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\left(\omega\right)=\frac{1}{\mathbf{P}\left(B\right)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P},\quad \forall\omega\in B \tag{4.70}$$

证明： 取$\omega_0\in B$，记$a=\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\left(\omega_0\right)$

$$B_0=\{\omega\in B:\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\left(\omega\right)=a\}\subset B$$

注意到B为$\mathscr{C}$的原子，并且可测集$B_0\neq\varnothing$，知$B=B_0$，即

$$\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\mathbb{1}_B=a\mathbb{1}_B \tag{4.71}$$

由引理4.3.1知

$$\begin{aligned}a=\frac{1}{\mathbf{P}\left(B\right)}\int a\mathbb{1}_B\mathrm{d}\mathbf{P}=&\frac{1}{\mathbf{P}\left(B\right)}\int\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\mathbb{1}_B\mathrm{d}\mathbf{P}\\=\frac{1}{\mathbf{P}\left(B\right)}\int_B\mathbf{E}\left(X\,|\mathscr{C}\,\right)\mathrm{d}\mathbf{P}=&\frac{1}{\mathbf{P}\left(B\right)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P}\end{aligned}$$

结合(4.71)得(4.70)。 □

$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})$ 在$\mathscr{C}$ 的原子B 上是常数：当$\mathbf{P}(B)>0$时，这个常数是 X 在B 上的平均；当$\mathbf{P}(B)=0$时，这个常数可以是任何实数。

例 3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\{B_n:n\in D\}$是$\Omega$的一个分割，$\mathscr{C}=\sigma(\{B_n:n\in D\})$，试证明

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})=\sum_{n\in\{n\in D:\mathbf{P}(B_n)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{B_n}}{\mathbf{P}(B_n)}\int_{B_n}X\mathrm{d}\mathbf{P},\text{a.e.}$$

证明： 显然，$\{B_n:n\in D\}$中的各个事件都是$\mathscr{C}$的原子，注意到D为有限或可数集，由定理4.3.1知

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X|\mathscr{C})&=\sum_{n\in D}\mathbf{E}(X|\mathscr{C})\mathbb{1}_{B_n}\\&=\sum_{n\in\{n\in D:\mathbf{P}(B_n)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{B_n}}{\mathbf{P}(B_n)}\int_{B_n}X\mathrm{d}\mathbf{P},\text{a.e.}\end{aligned}$$

□

为表述方便，对于概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$和$\sigma$代数$\mathscr{C}$，以及数学期望存在的随机变量$X$，引入如下符号

$$\mathbf{E}(X|B)\triangleq\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega_0),\quad \mathbf{P}(A|B)\triangleq\mathbf{P}(A|\mathscr{C})(\omega_0)$$

其中B是$\mathscr{C}$的一个原子，$A\in\mathscr{F}$，$\omega_0\in B$。

例 3.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$B\in\mathscr{F}$，$\mathscr{C}=\sigma(\{B\})$，$\mathbf{P}(B)>0$，试证明

$$\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)},\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.72}$$

证明： 显然B是$\mathscr{C}$的一个非空原子，取$\omega_0\in\mathscr{C}$，由定理4.3.1得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|B)&=\mathbf{E}(\mathbb{1}_A|B)=\mathbf{E}(\mathbb{1}_A|\mathscr{C})(\omega_0)\\&=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mathbf{P}=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)},\quad\forall A\in\mathscr{F}\end{aligned}$$

即(4.72)成立。 □

由此我们可以进一步理解初等条件概率的定义和概率测度中的定义之间的关系。

例 3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$X$为随机变量，$B\in\mathscr{F}$，$\mathscr{C}=\sigma(\{B\})$，$\mathbf{P}(B)>0$，试证明$\mathbf{E}(X|B)=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P}$

证明： 显然B是$\mathscr{C}$的一个非空原子，取$\omega_0\in B$，由定理4.3.1 得$\mathbf{E}(X|B)=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega_0)=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P}$。 □

例 3.4 用简单随机抽样方法抽取了N个样本数据，这里N是一个数学期望存在的随机变量，并且N与各个样本数据相互独立，求所有观测数据之和的数学期望。

解： 用X_k表示第k个样本数据，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\middle|\sigma(N)\right)\\&=\sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{\{N=n\}}}{\mathbf{P}(N=n)}\int_{\{N=n\}}\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\right)\mathrm{d}\mathbf{P}\\&=\sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{\{N=n\}}}{\mathbf{P}(N=n)}\int_{\{N=n\}}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\mathrm{d}\mathbf{P}\\&=\sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{\{N=n\}}}{\mathbf{P}(N=n)}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(X_k\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)\end{aligned}$$

注意到X_k和$\mathbb{1}_{\{N=n\}}$相互独立可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(X_k\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k)\,\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)\\&=n\mathbf{P}(N=n)\,\mathbf{E}(X_1)\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| \sigma(N)\right) = \mathbf{E}(X_1) \sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}} n\mathbb{1}_{\{N=n\}}$$

由引理4.3.2得

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| \sigma(N)\right)\right) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N)$$

□

4.4　条件期望的性质

定理 4.4.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$为$\sigma$代数，则有如下结论：

1° 若$X=a,$a.e.，则$\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)=a$a.e.;

2° 线性性质，即当X、Y和$aX+bY$的数学期望都存在时有

$$\mathbf{E}(aX+bY\,|\mathscr{C}\,)=a\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)+b\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,)$$

其中$a,b\in\mathbb{R}$;

3° 单调性，即当X和Y的数学期望都存在，且$X\leqslant Y$时，有

$$\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)\leqslant\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,),\text{a.e.}$$

4° **单调收敛性**，即若可积$Y\leqslant X_n\uparrow X,$a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n\,|\mathscr{C}\,)=\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,),\text{a.e.}$$

5° *Fatou*收敛性，即若可积$Y\leqslant X_n,$a.e.，则

$$\mathbf{E}\left(\varliminf_{n\to\infty} X_n\,|\mathscr{C}\right)\leqslant\varliminf_{n\to\infty} X_n\mathbf{E}(|\mathscr{C}\,),\text{a.e.}$$

若可积$Y\geqslant X_n,$a.e.，则

$$\mathbf{E}\left(\varlimsup_{n\to\infty} X_n\,|\mathscr{C}\right)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty} X_n\mathbf{E}(|\mathscr{C}\,),\text{a.e.}$$

6° **控制收敛性**，即若存在可积随机变量X和Y，使得$X\leqslant X_n\leqslant Y,$a.e.，且$X_n\xrightarrow[a.e.]{n\to\infty}X,$a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n\,|\mathscr{C}\,)=\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,),\text{a.e.}$$

证明： 往证1°成立。显然a是$\mathscr{C}$可测函数，且满足(4.64)，由引理4.3.1知1°成立。

往证2°。由数学期望的线性性质知$\mathbf{E}(aX+bY)$，注意到$a\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)+b\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,)$为$\mathscr{C}$可测函数得

$$\begin{aligned}\int_B(a\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)+b\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,))&=a\int_B\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)+b\int_B\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,)\\&=a\int_B X+b\int_B Y=\int_B(aX+bY),\quad\forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

即2°成立。

往证3°成立。对于任意$B\in\mathscr{C}$，由积分的单调性知

$$\int_B\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)=\int_B X\leqslant\int_B Y=\int_B\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,)$$

由积分单调性定理3.2.3知3°成立。

往证4°成立。显然$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n\,|\mathscr{C}\,)$是$\mathscr{C}$可测函数，且可积函数

$$\mathbf{E}(Y\,|\mathscr{C}\,)\leqslant\mathbf{E}(X_n\,|\mathscr{C}\,),\text{a.e.}$$

由积分单调收敛定理得

$$\begin{aligned}\int_B\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n\,|\mathscr{C}\,)&=\lim_{n\to\infty}\int_B\mathbf{E}(X_n\,|\mathscr{C}\,)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_B X_n=\int_B X=\int_B\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,),\quad\forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

因此4°成立。

类似于定理3.9.2可以证明5°，类似于定理3.9.3可以证明6°。 □

定理 4.4.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\sigma$代数$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，$X$和$Y$是随机变量。若$\mathbf{E}(XY)$和$\mathbf{E}(Y)$存在，且$X$是$\mathscr{C}$可测函数，则

$$\mathbf{E}(XY|\mathscr{C})=X\mathbf{E}(Y|\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.73}$$

证明： 对于任意$A\in\mathscr{C}$，显然$\mathbb{1}_A\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})$为$\mathscr{C}$可测函数，且

$$\begin{aligned}\int_B\mathbb{1}_A\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})&=\int_{B\cap A}\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})=\int_{B\cap A}Y\\&=\int_BY\mathbb{1}_A=\int_B\mathbf{E}(\mathbb{1}_AY|\mathscr{C}),\quad\forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

即

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_AY|\mathscr{C})=\mathbb{1}_A\mathbf{E}(Y|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

由条件期望的线性质知：当X为非负$\mathscr{C}$可测简单函数时(4.73)成立。由条件期望的单调收敛性知：当X为非负$\mathscr{C}$可测函数时(4.73)成立。最后，再次利用条件期望的线性性质得(4.73)。 □

定理 4.4.3 (条件期望的平滑性) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$和$\mathscr{C}'$为$\sigma$代数，满足条件$\mathscr{C}\subset\mathscr{C}'\subset\mathscr{F}$。若随机变量$X$的数学期望存在，则

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|\mathscr{C}')=\mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.74}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C}')|\mathscr{C})=\mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.75}$$

证明： 注意到$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})$为$\mathscr{C}'$可测函数，由定理4.4.2和条件期望的性质知

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|\mathscr{C}')=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})\mathbf{E}(1|\mathscr{C}')=\mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

即(4.74)成立。

对于任何$B\in\mathscr{C}$，注意到$\mathscr{C}\subset\mathscr{C}'$有

$$\int_B\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C}')|\mathscr{C})=\int_B\mathbf{E}(X|\mathscr{C}')=\int_BX=\int_B\mathbf{E}(X|\mathscr{C})$$

即(4.75)成立。 □

定理 4.4.4 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\sigma$代数$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$。若复值随机变量$X$可积，则

$$|\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|=\mathbf{E}(|X||\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.76}$$

证明： 记$X=Y+\mathrm{i}Z$，

$$r(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\omega)}=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega)$$

其中

$$r(\omega)=\sqrt{(\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})(\omega))^2+(\mathbf{E}(Z|\mathscr{C})(\omega))^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}=\begin{cases}\frac{r(\omega)}{\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega)}, & r(\omega)>0\\ 1, & r(\omega)=0\end{cases}$$

都是$\mathscr{C}$可测函数。由条件期望的平滑性得

$$|\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|=r(\omega)=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}=\mathbf{E}\left(X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}|\mathscr{C}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_B|\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|&=\int_BX\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}\leqslant\int_B\left|X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}\right|\\&=\int_B|X|=\int_B\mathbf{E}(|X||\mathscr{C}),\quad\forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

由积分单调性定理3.2.3得(4.76)。 □

索引