Solution

Yong YANG, 2019110294

Beijing University of Posts and Telecommunications

October 13, 2019

求 $x \to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解:

当 $n \leqslant t < n+1$ 时,

$$\mathrm{e}^{n^2 \ln x} \geqslant \mathrm{e}^{t^2 \ln x} > \mathrm{e}^{(n+1)^2 \ln x},$$

积分得到

$$\mathrm{e}^{n^2 \ln x} \geqslant \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{t^2 \ln x} \mathrm{d}t > \mathrm{e}^{(n+1)^2 \ln x}.$$

求和, 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{n^2 \ln x} \geqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x} \mathrm{d}t > \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{n^2 \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{n^2 \ln x} - 1.$$

接上页...

因此，与其等价的无穷大量是

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{n^2 \ln x} \sim \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

谢 谢