Question 1

在 Zermelo-Fraenkel 集合论体系下叙述什么是自然数集 $\mathbb{N}$、整数环 $\mathbb{Z}$、有理数域 $\mathbb{Q}$ 和实数域 $\mathbb{R}$.

以下是关于 ZF 集合论的简介:
最常用的集合论公理系统是 ZF 及其保守扩张 GB(这里 Z,F,G,B 分别是其发明人 Zermelo, Fraenkel, Gödel 以及 Bernays 名字的第一个字母)

ZF 是Zermelo-Fraenkel 集合论(Zermelo-Fraenkel set theory) 的简称，包括九条公理，每条公理是一个逻辑命题. 注意 ZF 系统的所有命题中提到的对象都可以是集合，包括其中提到集合的元素时，这些元素课都可以是集合. 仔细观察以下不难发现，这些公理中“某某集合存在”表达的其实都是“某某方式构造是对象算是集合”的意思.

外延公理(axiom of extensionality) 如果 $x \in X$ 当且仅当 $x \in Y$，则 $X = Y$，即集合由其元素完全决定

无序对公理(axiom of pairing)$\forall x, y$，存在集合 $\{x, y\}$（无序对）, 使得 $z \in \{x, y\}$ 当且仅当 $z = x$ 或 $z = y$.
Note: 这里允许 $x = y$，此时 $\{x, y\} = \{x\}$. 能区分 x, y 地位的有序对则定义为集合

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}. \tag{1}$$

并集公理(axiom of union)$\forall \mathcal{A}$, 存在集合 $\cup\mathcal{A}$, 使得 $x \in \cup\mathcal{A}$ 当且仅当存在 $A \in \mathcal{A}$ 满足 $x \in A$.
结合无序对公理和并集公理可以归纳定义无序多元组如下:

$$\{x_1, \cdots, x_{n+1}\} = \{x_1, \cdots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}. \tag{2}$$

幂集公理(axiom of power set)$\forall X$, 存在集合 2^X(幂集), 使得 $A \in 2^X$ 当且仅当 $A \subset X$.
这里 $A \subset X$ 是逻辑命题

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in X \tag{3}$$

(即 A 是 X 的子集) 的简写.

分离公理(axiom schema of separation 或 axiom schema of specification) 任取集合 X 以及关于 x 的命题 $P(x)$, 存在集合 A 使得 $x \in A$ 当且仅当 $x \in X$ 并且 $P(x)$ 成立. 集合 A 通常记为 $\{x \in X | P(x)\}$.

结合分离公理和并集公理, 就可以把交集定义为

$$\cap\mathcal{A} = \{x \in \cup\mathcal{A} | \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}. \tag{4}$$

注意到当 $x \in X, y \in Y$ 时, 前面定义的有序对 (x, y) 其实是一个由 $X \cup Y$ 的子集构成的集合, 这样的集合是 $2^{X\cup Y}$ 的子集, 也就是 $2^{(2^{X\cup Y})}$ 的元素, 因此利用分离公理, 可以把直积 (direct product) 定义为

$$X \times Y = \{z \in 2^{(2^{X\cup Y})} | \exists x \in X, y \in Y, \text{使得} z = (x, y)\}. \tag{5}$$

直积也称作笛卡儿积 (Cartesian product), 其中英文 Cartesian 其实是将 Descartes(笛卡儿) 的名字形容词化之后的结果.
每个从 X 射到 Y 的映射 $f : X \to Y$ 可以用它在 $X \times Y$ 中的函数图像来刻画, 因此也不需要添加新的公理, 就可以把从 X 打到 Y 的映射定义为集合

$$Y^X = \{f \in 2^{X\times Y} | \forall x \in X, \text{存在唯一 } y \in Y \text{ 使得} (x, y) \in f\} \tag{6}$$

的元素. 并且此时如果 $(x, y) \in f$, 则把 y 记为 $f(x)$.
空集公理(axiom of empty set) 存在集合 $\emptyset$(空集), 使得 $\forall x, x \notin \emptyset$.
由外延公理可以知道空集是唯一的. 你也许会认为空集公理是多余的, 因为有了分离公理可以随便取个集合, 再取一个该集合中元素永远不满足的性质, 然后就可以构造出空集来了, 比如说 $\emptyset = \{x \in A | x \notin A\}$. 很多的书籍上也确实是这么写的, 但是这实际上依赖于另外的一条其它公理中没有提到的假设: 在这个世界上确实至少存在着那么一个集合 A. 缺少这个假设, 形式逻辑的推理过程就没有了起点. 当然, 也有群体认为下面的一条公理" 无穷公理" 本身就包含了一定存在一个空集的意思.
无穷公理(axiom of infinity) 存在一个集合 ω(含有无穷多个元素的集合), 使得 $\emptyset \in \omega$, 并且 $x \in \omega$ 蕴含 $x \cup \{x\} \in \omega$.
在集合论中, 每个自然数 n 被归纳地定义成一个恰好有 n 个元素的特殊集合:

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, \cdots, n + 1 = \{0, \cdots, n\} = n \cup \{n\}. \tag{7}$$

比较一下这个定义和上述无穷公理不难看出, 自然数集 $\mathbb{N}$ 就是满足无穷公理的最小集合.
替换公理(axiom schema of replacement) 任取集合 X 以及关于 x, y 的逻辑命题 $R(x, y)$, 如果 R 满足 $\forall x \in X$, 存在唯一 y 使得该命题成立, 则存在集合 Y, 使得 $y \in Y$ 当且仅当存在一个 $x \in X$ 使得 $R(x, y)$ 成立.

如果我们把 $R(x, y)$ 理解成一个映射 $f : x \mapsto y$, 那么替换公理构造的 Y 其实就是 X 的象集 $f(X)$.

正则公理(axiom of regularity) 任取非空集合 X, 其中元素关于 $\in$ 关系存在一个极小元素, 即存在 $x \in X$, 使得 $\forall y \in X, y \notin x$.

注意: 极小元素的选取并不一定唯一, 也不一定是最小元素.
ZF 是集合论的公理化体系中最简单可靠的一个. 当然, 简单可靠的代价就是应用上的局限性. 选择公理是一个饱受争议的公理, 数学家们一方面对于是否应该允许“同时”进行无穷多项的构造提出了强烈的质疑, 另一方面又利用它证明了很多虚无缥缈、无法构造的东西存在. 有许多数学中的著名论断都需要在 ZF 之外再添加这条选择公理才能推推导出来. 比如线性代数中任意线性空间中基的存在性, 或者抽象代数中任意环的极大理想的存在性, 或者实变函数 (测度论) 中不可测集的存在性, 或者泛函分析中的 Hahn-Banach 定理, 它们的证明过程中都直接或者间接地用到了选择公理, 或者用到了在 ZF 中与选择公理等价的良序定理或 Zorn 引理.

选择公理(axiom of choice) 任取一个由两两不相交的集合构成的集合族 $\mathcal{A}$, 存在一个集合 C, 它与 $\mathcal{A}$ 的每个元素 (元素是集合) 都恰好交于一点.

选择公理的一个简单推论是: 任取一个集合族 $\mathcal{A}$(不一定两两不交), 存在一个映射 $f : \mathcal{A} \mapsto \cup\mathcal{A}$, 使得 $\forall A \in \mathcal{A}, f(A) \in A$. 换言之, 允许同时在集合族 $\mathcal{A}$ 的每个元素 (集合) 里选择一个元素.