

Question 1

设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数, 且处处存在右导数. 试证明: 若 $f'_+(x)$ 恒非负则 $f(x)$ 单调非降.

证明. 用反证法, 若 $f(x)$ 并不是单调非降, 则存在 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) > f(x_2)$.

因而存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f(x_1) > f(x_2) + \varepsilon$.

令 $g(x) = f(x) + \varepsilon \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. 则 $g(x)$ 连续, 且处处右可导, 右导数恒正.

设 $x_1 \leq c < x_2$ 为 $g(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的最大值点, 则 $g'_+(c) \leq 0$. 矛盾! □