概率论与随机过程: 作业 #1

完成于 9 月 22 日, 2019

杨勇,2019110294

习题 1

设 $A_1, A_2, \cdots$ 为任一集序列, 若令

$$A_1' = A_1,\ A_n' = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, n = 2, 3, \cdot. \tag{1}$$

试证:$A_1', \cdots, A_n', \cdots$ 两两互不相交, 且

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'. \tag{2}$$

证明. 为表达方便, 令 $A_0 = \varnothing$. 先证明 $\{A_n' : n \in \mathbb{N}^*\}$ 互不相交. 据 De-Morgan 律知

$$A_n' = A_n A_0^c \cdots A_{n-1}^c \tag{3}$$

对任何不等的 $j, k \in \mathbb{N}^*$, 无妨 $j < k$, 这时有 $A_k' \subset A_j^c$, 而 $A_j' \subset A_j$, 这说明 $A_k' A_j' = \varnothing$.
一方面, 若 $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'$, 则 $\exists n \in \mathbb{N}^*(\omega \in A_n')$. 由于 $A_n' \subset A_n$, 故有 $\exists n \in \mathbb{N}^*(\omega \in A_n)$. 即

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n' \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{4}$$

令一方面, 设 $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, 根据并的定义知:$\exists n \in \mathbb{N}^*(\omega \in A_n)$.
此时, 必有整数 $k \in \{1, \cdots, n\}$ 使得 $\omega \notin A_0, \cdots, A_{k-1}$, 但 $\omega \in A_k$. (否则 $\omega \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, 矛盾) 即 $\omega \in A_k'$. 所以有 $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'$.
这说明

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'. \tag{5}$$

结合式 4与 5知道结论成立. □

习题 2

设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为一可测空间, $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots$, 试证:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \{\omega : \omega\text{属于无穷多个}A_n\}, \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = \{\omega : \omega\text{只不属于有限多个}A_n\}. \tag{6}$$

证明. (1) 若 $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, 则根据交与并的定义知道:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geqslant n\ \ (\omega \in A_k). \tag{7}$$

这说明 $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ 当且仅当 ω 属于集列 $\{A_j\}$ 中的无穷多个集合.
(2) 若 $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$, 则根据交与并的定义知道:

$$\exists j_0 \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant j_0\ \ (x \in A_k). \tag{8}$$

这说明 $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$ 当且仅当 ω 仅不属于集列 $\{A_j\}$ 中的有限多个集合. □

习题 3

若记

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A^\star = \limsup_{n\to\infty} A_n, \tag{9}$$

称为集序列 $\{A_n\}$ 的上限集. 若记

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = A_\star = \liminf_{n\to\infty} A_n, \tag{10}$$

称为集序列 $\{A_n\}$ 的下限集. 试证:

1. $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$;
2. 若 $A_n \uparrow$, 则 $A^\star = A_\star = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$;
3. 若 $A_n \downarrow$, 则 $A^\star = A_\star = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n$;
4. 若 A 为任一集合, 则 $A\backslash A_\star = \limsup_{n\to\infty}(A\backslash A_n), A\backslash A^\star = \liminf_{n\to\infty}(A\backslash A_n)$

证明. 1. 根据习题 2 知道: $\omega \in A_\star$ 当且仅当除去集列 $\{A_j\}$ 中的有限个集合外, 元 ω 属于该序列的其余集合. 这可推出 ω 属于集列 $\{A_j\}$ 中的无穷多个集, 也就是 $\omega \in A^\star$. 即证.

2. 不难看出对一般的集合列 $\{A_j\}$, 总有下列的包含关系:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \tag{11}$$

若 $\{A_n\}$ 非降, 则 $\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n$. 所以 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. 结合式 11知结论成立.

3. $\{A_n\}$ 非增, 则 $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n$. 所以 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. 结合式 11知结论成立.

4. 回忆 de Morgen 法则:

$$A\backslash \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\backslash B_\lambda), \quad A\backslash \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\backslash B_\lambda). \tag{12}$$

我们由此知道

$$\begin{aligned} A\backslash \liminf_{n\to\infty} A_n &= A\backslash \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(A\backslash \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}(A\backslash A_k) = \limsup_{n\to\infty}(A\backslash A_n), \end{aligned} \tag{13}$$

和

$$A\backslash \limsup_{n\to\infty} A_n = A\backslash \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(A\backslash \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$$
$$= \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty}(A\backslash A_k) = \liminf_{n\to\infty}(A\backslash A_n). \tag{14}$$

□

习题 4

证明: 包含一切形如 $(-\infty, x)$ 的区间的最小 σ-代数是一维 Borel 域.

证明. 根据定义, 一维 Borel 集合系 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 是由 π-系 $\mathscr{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ 生成的 σ-代数:

$$\mathscr{B}_R = \sigma(\mathscr{P}_{\mathbb{R}}). \tag{15}$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty, a+\frac{1}{n}\right) = (-\infty, a], \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right] = (-\infty, a) \tag{16}$$

因此, 对任何 $x \in \mathbb{R}, (-\infty, x) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. 所以 $\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
另外, 对任何 $x \in \mathbb{R}, (-\infty, x] \in \sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\})$. 所以 $\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) \supset \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
二者结合起来便说明 $\sigma(\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}) = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. □

习题 5

求包含二集合 A, B 的最小 σ-代数, 其中 $\Omega, AB \neq \varnothing, A\cup B \neq \Omega$, 且 A, B 互不包含.
解. 所求的集合系为:

$$\mathscr{A} = \{\varnothing, A, B, A\cup B, A\triangle B, A\backslash B, B\backslash A, \Omega, A^c, B^c, A^cB^c, AB^c, BA^c, (AB)^c, (A\triangle B)^c\} \tag{17}$$

证明. 由于 $\mathscr{A}$ 对任何可列次的集合运算封闭, 且 $\Omega \in \mathscr{A}$, 所以 $\mathscr{A}$ 是 σ 代数. 又因为 σ 代数对有限次的集合运算都封闭, 所以任何一个包含 $\{A, B\}$ 的 σ 代数都包含 $\mathscr{A}$ 中的所有集. 因此, 集类 $\mathscr{A} = \sigma(\{A, B\})$. □

习题 6

若 $\mathscr{G} = \{A_k : A_k \subset \Omega, k = 1, 2, \cdots, \text{两两不交}\}$, 试求 $\sigma(\mathscr{G})$.

解. 引入 $A_0 = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k\right)^c$, 则所求为:

$$\sigma(\mathscr{G}) = \left\{\bigcup_{k\in K} A_k : K \subset \mathbb{N}\right\}. \tag{18}$$

证明. 不妨记 (18) 式右端为 $\mathscr{D}$. 由于 σ 代数是对于可列并的运算以及补的运算封闭的, 故 $\sigma(\mathscr{G}) \supset \mathscr{D}$. 因此, 要完成这个定理的证明, 必须且只需证 $\sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{D}$. 为此, 又只需证 $\mathscr{D}$ 是 σ-代数. 下面, 分别验证 σ-代数的三个条件:

1) $\Omega = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathscr{D}$;

2) $A = \bigcup\limits_{k\in K} A_k \in \mathscr{D} \Rightarrow A^c = \bigcup\limits_{k\in(\mathbb{N}\setminus K)} A_k \in \mathscr{D}$;

3) 对 $B_n \in \mathscr{D}, n \in \mathbb{N}^*$, 有对应的 $K_n \in \mathbb{N}$, 使 $B_n = \bigcup_{k\in K_n} A_k, n = 1, 2, \cdots$. 这时,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k\in K_n} A_k = \bigcup_{k\in K} A_k \in \mathscr{D}, \quad K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n. \tag{19}$$

由此知道 $\mathscr{D}$ 确是 σ 代数. □

习题 7

设 Ω 是不可列集, $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一切有限子集、可列子集及以有限子集或可列子集为余集的子集所作成的集合类, 试证 $\mathscr{A}$ 是一 σ-代数.

证明. 对集类 $\mathscr{A}$ 分别验证 σ-代数的三个条件:

1) 由于 $\varnothing$ 是 Ω 的一个有限子集, 所以 $\Omega = \varnothing^c \in \mathscr{A}$;

2) 设 $A \in \mathscr{A}$, 即 A 是 Ω 的至多可列子集或以 Ω 的至多可列子集为余集的子集, 则 A^c 分别是 Ω 的以至多可列子集为余集的子集或 Ω 的至多可列子集, 因此, $A^c \in \mathscr{A}$;

3) 设 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A}$. 若诸 A_j 均是 Ω 的至多可列子集, 则 $\cup_j A_j$ 仍是 Ω 的至多可列子集; 若诸 A_j 中至少有一个是以 Ω 的至多可列子集为余集的子集, 则 $\cup_j A_j$ 仍是以 Ω 的至多可列子集为余集的子集.

   所以总有 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

由此知道 $\mathscr{A}$ 确是 σ-代数. □

习题 8

设 $\mathscr{G}$ 是由 Ω 的子集组成的集合类, A 是 Ω 的一个非空子集, 令

$$\mathscr{G} \cap A = \{A' : A' = B \cap A, B \in \mathscr{G}\}, \tag{20}$$

试证:$\sigma(\mathscr{G}) \cap A$ 是以 A 为空间的包含集合类 $\mathscr{G} \cap A$ 的最小 σ-代数.

证明. 先证明 $\sigma(\mathscr{G}) \cap A = \{BA : B \in \sigma(\mathscr{G})\}$ 是以 A 为空间的一个 σ-代数. 为此, 我们分别对它验证 σ-代数的三个条件.

1) 因 $\Omega \in \sigma(\mathscr{G})$, 所以 $A = \Omega \cap A \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$;

2) 设 $E \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$. 即 $E = AB$, 其中 $B \in \sigma(\mathscr{G})$. E 相对 A 的补是 $A \backslash E = A \backslash AB = AB^c$. 因为 $B^c \in \sigma(\mathscr{G})$, 所以 $A \backslash E \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$;

3) 设 $E_1, E_2, \cdots \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A$. 即 $E_j = AB_j$, 其中 $B_j \in \sigma(\mathscr{G}), j \in \mathbb{N}^*$. 由于 $\sigma(\mathscr{G})$ 是一个 σ-代数, 所以 $\cup_{j=1}^{+\infty} B_j \in \sigma(\mathscr{G})$. 这说明

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} AB_j = A\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j\right) \in \sigma(\mathscr{G}) \cap A. \tag{21}$$

再设某个以 A 为空间的 σ-代数 $\mathscr{E} \supset (\mathscr{G} \cap A)$, 下证 $(\sigma(\mathscr{G}) \cap A) \subset \mathscr{E}$. 因 $\mathscr{E} \supset (\mathscr{G} \cap A)$, 所以 $\forall B \in \mathscr{G}, AB \in \mathscr{E}$. 令

$$\mathscr{H}_A = \{H \subset \Omega : AH \in \mathscr{E}\}. \tag{22}$$

则 $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_A$. 继续证明 $\mathscr{H}_A$ 是一个 σ-代数. 注意到 $\mathscr{E}$ 是以 A 为空间的一个 σ-代数, 所以有

1) $A\Omega = A \in \mathscr{E}$, 即 $\Omega \in \mathscr{H}_A$;

2) 设 $H \in \mathscr{H}_A$, 则 $AH \in \mathscr{E}$. 利用上面条件, 有 $AH^c = A \backslash AH \in \mathscr{E}$. 这说明 $H^c \in \mathscr{H}_A$;

3) 再设 $H_1, H_2, \cdots \in \mathscr{H}_A$, 则 $AH_j \in \mathscr{E}, j = 1, 2, \cdots$. 再次利用 $\mathscr{E}$ 是以 A 为空间的一个 σ-代数, 得到

$$A\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} H_j\right) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} AH_j \in \mathscr{E}. \tag{23}$$

这说明 $\bigcup_{j=1}^{+\infty} H_j \in \mathscr{H}_A$.

因此, $\mathscr{H}_A$ 确是个 σ-代数. 又因为 $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}_A$. 根据 σ-代数的生成的定义, $\sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{H}_A$. 即

$$\forall B \in \sigma(\mathscr{G}), \text{总有} BA \in \mathscr{E}. \tag{24}$$

这正是 $(\sigma(\mathscr{G}) \cap A) \subset \mathscr{E}$. □

习题 9

设 A 是 Ω 的一个子集, $\mathscr{G}$ 是 Ω 的包含 A 的一切子集所组成的集合类, 试问 $\sigma(\mathscr{G})$ 是由哪些子集组成的?

解.

$$\sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{G} \cup \{G \cup A^c : G \in \mathscr{G}\}. \tag{25}$$

习题 10

设 $\xi(\omega)$ 是定义在 Ω 上而值域为 $\mathbb{R}^{(1)}$ 的单值实函数, $B \subset \mathbb{R}^{(1)}$, $\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ 表示使 $\xi(\omega)$ 的值属于 B 的一切 $\omega(\in \Omega)$ 的集合, 试证:

1. $\overline{\{\omega : \xi(\omega) \in B\}} = \{\omega : \xi(\omega) \in \overline{B}\}$;
2. 若 $B_k \subset \mathbb{R}^{(1)}, k = 1, 2, \cdots$, 则有

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{\omega : \xi(\omega) \in B_k\} = \left\{\omega : \xi(\omega) \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right\}. \tag{26}$$

分析: 回忆数学分析中引入的**映射的原像**(preimage/inverse image).
设映射 $\varphi : A \to B$, 集合 $D \subset B$ 的原像定义为

$$\varphi^{-1}(D) \triangleq \{x \in A : \varphi(x) \in D\}. \tag{27}$$

那时候, 曾经证明过这样两个关于映射与集合运算之间关系的公式.

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi^{-1}\left(E_\lambda\right); \tag{28}$$

$$\left(\varphi^{-1}(D)\right)^c = \varphi^{-1}(D^c). \tag{29}$$

我们愿意在此重新温习一下它的证明.

证明.

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) &\iff \exists y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \left(y = \varphi(x)\right) \\ &\iff \exists \lambda \in \Lambda \exists y \in E_\lambda \left(y = \varphi(x)\right) \\ &\iff \exists \lambda \in \Lambda \left(x \in \varphi^{-1}(E_\lambda)\right). \end{aligned} \tag{30}$$

还需要讨论空集的情况.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)=\varnothing \iff & \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right)\bigcap \mathrm{Im}\varphi=\varnothing \\
\iff & \forall\lambda\in\Lambda\,(E_\lambda\cap\mathrm{Im}\varphi)=\varnothing \\
\iff & \forall\lambda\in\Lambda\,\big(\varphi^{-1}(E_\lambda)=\varnothing\big) \\
\iff & \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi^{-1}(E_\lambda)=\varnothing.
\end{aligned}\tag{31}$$

再考虑另一个公式.

$$\begin{aligned}
x\in\big(\varphi^{-1}(D)\big)^c \iff & x\notin\varphi^{-1}(D)\iff\varphi(x)\notin D \\
\iff & \varphi(x)\in D^c\iff x\in\varphi^{-1}(D^c)
\end{aligned}\tag{32}$$

□

利用这两个公式, 就容易完成本题的证明.

证明. 1.

$$\overline{\{\omega:\xi(\omega)\in B\}}=\big(\xi^{-1}(B)\big)^c=\xi^{-1}(B^c)=\{\omega:\xi(\omega)\in\overline{B}\};\tag{33}$$

2.

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{\omega:\xi(\omega)\in B_k\}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\xi^{-1}(B_k)=\xi^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k\right)=\left\{\omega:\xi(\omega)\in\bigcup_{k=1}^{+\infty}B_k\right\}.\tag{34}$$

□