笔试参考解答

北邮数学人学术部

Beijing University of Posts and Telecommunications

Oct 17th, 2019

题目 1

[

]Proof 不妨设 $x > y > 0$, 可在原不等式两端各项同除以 y, 并令 $t = x/y(t > 1)$. 则必须且只需证明:

$$\sqrt{t} \leqslant \frac{t-1}{t} \leqslant \frac{t+1}{2}.$$

这等价于

$$\frac{2(t-1)}{t+1} \leqslant t \leqslant \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

记 $f(r) = r - \dfrac{2(r-1)}{r+1}, r \geqslant 1$, 则

$$f'(r) = \frac{(r-1)^2}{r(r+1)^2} \geqslant 0,$$

所以 $f(t) \geqslant f(1) = 0$

题目 2

求极限

- $$\underset{n\to\infty}{}\ \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}.$$

- $$\underset{x\to 0}{}\ \frac{((1+x)))-(1+\ x)}{(^{x}-1)-\ ^{x}+1}.$$

题目 3

用“$\varepsilon-\delta$ language”证明：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^2-7x+4}=-2.$$

题目 4

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)=0$, $f'(0)f'(1)>0$, 求证:

$$\exists\xi\in(0,1),\text{使}f''(\xi)=0.$$

题目 5

设 S 为有上界的非空数集，并且上确界 $S \notin S$. 求证：存在严格单调递增的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = S$.

题目 6

证明: 函数 $x^5 + ax^4 + bx^3 + c(c \neq 0)$ 不可能有 5 个不同的实根

题目 7

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $x>0$ 有

$$\underset{n\to\infty}{} f(x+n)=0. \tag{1}$$

证明: $\underset{x\to+\infty}{} f(x)=0.$

题目 8

通过计算求出 a 的值, 使得 $x - y + a = 0$ 是函数

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1}$$

的渐近线.

题目 9

计算

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix}$$

并证明 Euler 恒等式:

$$\begin{aligned} &(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \\ &+ (x_1y_1 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 \\ &+ (x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2)^2 \\ &+ (x_1y_4 - x_2y_4 + x_3y_2 - x_4y_1)^2. \end{aligned}$$

题目 10

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域. 定义数域 $\mathbb{F}$ 上的两个一元多项式:

$$f(x) = x_0(x - x_1)\cdots(x - x_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = y_0(x - y_1)\cdots(x - y_m) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是如下的一个 $m+n$ 阶的矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\
 & & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{行} \\
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{行}
\end{array}$$

证明:

$$(\boldsymbol{A}) = x_0^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = (-1)^{mn} y_0^n \prod_{j=1}^{m} f(y_j).$$

谢　谢