北京郵電大學

Beijing University of Posts and Telecommunications

课程论文

COURSE PAPER

论文题目：测度论总结

学生姓名：杨　勇

学生学号：2019110294

课程名称：概率论与随机过程

联系方式：Yang945841548@bupt.edu.cn

学院(系)：信息与通信工程学院

测度论总结

摘 要

初等概率论是建立在排列组合和微积分等数学方法的基础上的. 在那里, 虽然已经接触过事件、随机变量和数学期望等基本概念, 但是对于这些概念始终未能给出一个明确的定义. 概率论中有许多结论在初等概率论中没有, 也不可能给出严格的数学证明. 概率论作为一个数学分支应当有一个比较严格的数学基础. 1933 年 Kolmogorov 的著作《概率论基础》被公认为概率论公理系统完成的标志. 按照 Kolmogorov 公理系统, 概率论是以测度论为其数学基础的. 由此, 那些在初等概率论中没有解释清楚或不可能解释清楚的概念和公式才可以解释清楚.

概率论与测度论有着许多出色的教材, 例如 Rick Durrett 的《Probability: Theory and Examples》, 再如严加安院士的《测度论讲义》. 我并不指望超越这些经典的教材, 但是我想写一本“看上去比较简单”的笔记. 这本笔记要让每个看到的人都有勇气读完它, 能够短、平、快地大致了解概率论是怎样的一门学问, 了解一些的概率论历史.

关键词： 概率论, 测度论

目　录

插图索引

表格索引

算法索引

主要符号对照表

ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率

ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率
ϵ 介电常数
μ 磁导率

第零章　引言

0.1　主要内容 & 主要参考资料

- 测度论
- 随机过程论

1. R.Durrett, ”Probability: Theory and Examples”, Cambridge Univerisity Press, 2019.
2. 程士宏, ” 测度论与概率论基础”, 北京: 北京大学出版社, 2004.
3. 严加安, ” 测度论讲义”(第二版), 北京: 科学出版社, 2005.
4. Terence Tao, ”Analysis I”, Springer-Verlag, New York, 2016.

0.2　概率论评述

起源

概率论这门学科可以说起源于赌博。尽管早在 15 世纪与 16 世纪意大利的一些数学家（如 Cardano，Pacioli，Tartaglia 等）已经对一些靠运气的游戏中的特定概率进行了计算，但是，概率论作为一门学科起源于 17 世纪。1654 年，一个名叫 A.G.C. de Méré 的法国贵族对赌博以及赌博中的问题很感兴趣，但他对一些问题感到很困惑，为了解决自己的困惑，他向数学家 B.Pascal（1623-1662）求助。为了解答 de Méré 提出的问题，Pascal 与法国数学家 P.Fermat（1601-1655）进行了通信讨论。1655 年，荷兰数学家 C.Huygens(1629-1695) 首次访问巴黎，期间他学习了 Pascal 与 Fermat 关于概率论的工作。Huygens 是一个名声和 Newton 相当的大科学家. 人们熟知他的贡献之一是物理中的单摆公式. 他在概率论的早期发展历史上也占有重要的地位. 1657 年，当他回到荷兰后，他写了一本小册子，名叫《De Ratiociniis in Ludo Aleae》(可译为《机遇的规律》)，这是关于概率论的第一本书。在这部著作中, 他首先引进了” 期望” 这个术语. 在此,” 数学期望” 这个基本概念以及关于概率的可加性、可乘性已经建立。他基于这些术语解决了一些当时感兴趣的博弈问题. 他在这部著作中提出了 14 条命题, 第一条命题是:

如果某人在赌博中以一半的可能性赢 a 元, 以一半的可能性输 b 元, 则他的期望是

$$\frac{a-b}{2}(\text{元}). \tag{0–1}$$

18-19 世纪

概率论在 18 世纪得到了快速发展，这个期间的主要贡献者是 J.Bernoulli(1654-1705) 和 A. de Moivre（1667-1754）。在 19 世纪，概率论的早期理论得到了进一步的发展与推广，这个期间的主要贡献者是 P.S.M. Laplace（1749-1827），S.D. Poisson（1781-1840），C.F. Guass（1777-1855），P.L. Чебышёв(切比雪夫)（1821-1894），马尔可夫 (A.A.Марков)（1856-1922）与李雅普诺夫 (A.M.Ляпунóв)（1857-1918）。这个时期的研究主要围绕着概率极限定理展开。

Jacob Bernoulli 是一位瑞士数学家，是 Bernoulli 家族的第一位数学家。1705 年, 他在瑞士 Basel 去世. 8 年后, 也就是 1713 年, 他在概率论领域的代表作《Ars Conjectandi》一书正式出版（可译为《猜测的艺术》）. 他的这本书正式出版标志着概率论学科的开始. 该书仅包含一个数学定理, 即著名的 Bernoulli 大数定律, 这是概率论的第一个极限定理.

Bernoulli 大数定律: 假设 $\{\xi_n\}$ 为一个独立同分布的随机变量序列,$P(\xi_n = 1) = p, P(\xi_n = 0) = 1 - p$, 其中 $0 < p < 1$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, 那么

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{0–2}$$

17 世纪下半叶, Newton 刚发明微积分不久, 人们对计算各种数列的极限有着相当大的兴趣, 并发展了不少有效的方法和技巧. 但是,"$\varepsilon - N$" 语言并不能很好地解释" 随机试验中频率是否收敛到概率" 这样的问题. 正是 Bernoulli 大数律首次给出了" 频率收敛到概率" 的数学解释和严格证明.

Bernoulli 大数律内涵丰富, 成为了后人发展概率论的源泉. (0.2) 式充分肯定了经验观测可以揭示随机现象规律的基本思想; 提出了随机变量序列依概率收敛到常数 (甚至收敛到随机变量) 的基本概念. 受此启发, 人们自然会问: 如果考虑一般的随便变量的平均值, 情况会如何? 特别, 假设 $\{\xi_n\}$ 为一个独立同分布的随机变量序列,$\mathrm{E}\xi_n = \mu$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, 那么

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty \tag{0–3}$$

成立么?

用观测平均值去计算真值的思想很早以前就已出现, 并一直用于日常生活和社会实践, 关键在于能否给出一个严格的数学证明吗?

回顾 (0.2) 式的证明,Bernoulli 二项分布起着关键作用. 事实上,$S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. 因此

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = \sum_{k:|k-np|>n\varepsilon} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{0–4}$$

利用杨辉三角或者 Pascal 二项组合式, 容易得到

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1. \tag{0–5}$$

但是,(0.4) 的困难在于计算部分和, 而不是对所有 $k = 0, 1, \cdots, n$ 求和. 为此, Bernoulli 利用了 $n!$ 的渐进计算公式. 显然, 这样一个计算技巧对 (0.4) 不合适, 因为 ξ_n 的分布并不知道. 事实上, 即使 ξ_n 只取三个值, Bernoulli 的计算方法仍然显得笨拙而不可行!

为了证明 (0.4), 需要用到下面的 Чебышёв(切比雪夫) 不等式: 假设 X 是随机变量, $\mathrm{E}X = \mu, \mathrm{var}(X) = \sigma^2$, 那么对任意 $x > 0$

$$P(|X - \mathrm{E}X| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathrm{var}(X)}{x^2}. \tag{0–6}$$

在当代概率论中，与 Poisson 相关的有 Poisson 分布、Poisson 过程。Guass 创立了误差理论，特别地，创立了最小二乘的基本方法。切比雪夫 (Чебышёв)，马尔可夫 (Марков) 与李雅普诺夫 (Ляпунóв) 在研究独立但不同分布的随机变量和的极限定理方面发展了有效的方法。Чебышёв(切比雪夫) 被看作俄国现代数学之父. 上述切比雪夫 (Чебышёв) 不等式在概率论学科发展中起着举足轻重的作用. 事实上, 概率自 16 世纪由赌博游戏引入以来, 到 19 世纪末, 历经 300 年. 尽管由不少的大数学家热衷于概率的研究并积极倡导和应用, 但相对于这一时期的分析、代数、几何等其它数学分支而言, 概率论的发展可以说是十分缓慢, 并且, 在总体上来说, 概率论学科还停留在一些具体事件的概率计算上. 在切比雪夫 (Чебышёв) 之前，概率论的主要兴趣在于对随机试验的概率进行计算。而切比雪夫 (Чебышёв) 是第一个清晰认

识并充分利用随机变量及其数学期望的人。切比雪夫 (Чебышёв) 思想的主要倡导者是他忠诚的学生马尔可夫 (Марков)，他将老师的结果完整清晰地展现出来。马尔可夫 (Марков) 自己对概率论的重大贡献之一是创立了概率论的一个分支：研究相依随机变量的理论，成为"马尔可夫 (Марков) 过程". 可以说, 切比雪夫 (Чебышёв) 不等式可以看作一个时代的转折点.

作为应用, 可以用 (0.6) 证明 (0.3):

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\operatorname{var}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2}. \tag{0–7}$$

既然 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的正数, 那么只要验证 $\operatorname{var}(S_n) = o(n^2)$ 就够了. 在二项分布情形,

$$\operatorname{var}(S_n) = \sum_{k=0}^{n}(k-np)^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np(1-p). \tag{0–8}$$

注意, 正如 (0.7) 一样,(0.8) 的计算比 (0.4) 要容易得多. 更为重要的是, 上述讨论不局限于 Bernoulli 二项分布, 而适用于非常广泛的随机变量序列. 以下是切比雪夫 (Чебышёв) 大数定律: 假设 $\{\xi_n\}$ 为一个随机变量序列,$\mathrm{E}\xi_n = \mu_n, \operatorname{var}(\xi_n) = \sigma^2$. 如果

$$\operatorname{var}(S_n) = o(n^2), \tag{0–9}$$

那么

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{0–10}$$

该定理的条件 (17) 包含的范围非常广泛. 如独立同分布且方差有限; 独立不同分布且方差有界; 不独立但互不相关且方差有界; 其它相依情形. 后几种情形更为常见, 在实际观测时, 并不能苛求试验环境, 数据之间不可避免地存在一定联系, 并且不能保证同分布.

切比雪夫 (Чебышёв) 大数律显然是 Bernoulli 大数律的极大推广. 但是条件 (17) 对于一个大数律来说无疑有点强. 辛钦 (Хи́нчин) 改进了切比雪夫 (Чебышёв) 大数律, 在独立同分布且数学期望存在有限的情况下, 证明了 (10). 当然, 此时无法直接使用切比雪夫 (Чебышёв) 不等式 (13), 截尾方法应运而生.

Bernoulli 大数律告诉人们: 给定任意精度, 只要试验重复足够多次, 频率就有很大可能接近概率真值, 以致误差在给定精度内. 人们自然会问, 试验次数究竟多大合适? 该如何确定呢? 当然, 给定精度 $\varepsilon > 0$, 无论 n 多么大, 都无法保证独立重复试验后 $|S_n/n - p| \leqslant \varepsilon$. n 的大小取决于事先给定的可靠度 (置信度), 关键在于如何由精度和可靠度来确定 n. 即, 给定 $\varepsilon > 0, \eta < 1$, 如何有效地表达 (近似)

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = \eta. \tag{0–11}$$

de Moivre 和 Laplace 考虑了上面的问题, 并对独立二点分布的随机变量序列证明了以下中心极限定理: 对任意实数 $a < b$,

$$P\left(\omega : a < \frac{S_n(\omega) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a). \tag{0–12}$$

直接应用该结果, (18) 可写成

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \approxeq 2\left(1 - \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)\right) =: \eta. \tag{0–13}$$

由此可计算 n 的大小 (依赖于 ε, n, p).

de Moivre 是一位法国数学家，但是大部分时间他住在英国. de Moivre 在前人, 特别是 Bernoulli 家族和 Huygens 的基础上, 研究和发展概率论, 可以说, 他开创了概率论的现代方法:1711 年出版了《The Doctrine of Chances》. 在此书中，统计独立性的定义首次出现。该书在 1738 年与 1756 年出了扩版，生日问题出现在 1738 年的版本中，赌徒破产模型出现在 1756 年的版本中, 并在赌徒中很有影响和地位. 1730 年，de Moivre 的另一本专著《Miscellanea Analytica Supplementum》（可译为《解析方法》）正式出版。其中，关于对称 Bernoulli 试验的中心极限定理首次提出并得到证明。他首先考虑了 $p = 1/2$ 情形, 并和他的好朋友 Stirling 同时发现了下列公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}. \tag{0–14}$$

通常称 (21) 为 Stirling 公式, 实际上应该为 de Moivre-Stirling 公式.

差不多 40 年后, Laplace 考虑了 $p \neq 1/2$ 情形. 应该说, Laplace 对概率统计和天体力学的贡献巨大. 他在 1799-1825 年间出版了五卷本《Celestial Mechanics》. 1812 年，Laplace 的伟大专著《Théorie Analytique des Probabilitiiés》(可译为《概率论的解析理论》) 诞生，其中，他阐述了他自己及前辈在概率论方面的结果。特别地，他将 de Moivre 的定理推广到 Bernoulli 试验非对称情形。Laplace 最重要的工作是将概率方法应用到观测误差，在很一般的条件下证明了观测误差的分布一定是渐进正态的。直到今天, 人们在概率极限理论方面的研究还受到 Laplace 的影响.

正如 Bernoulli 大数定律一样, de Moivre-Laplace 中心极限定理对概率论学科的发展影响深远, 受 (19) 启发, 人们提出了随机变量序列依分布收敛的概念, 并给出了一般形式的中心极限定理: 假设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是一独立同分布的随机序列,$\mathrm{E}\xi_n = \mu, \mathrm{var}(\xi_n) = \sigma^2$, 那么

$$P\left(\omega : \frac{S_n(\omega) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right) \to \Phi(x), \quad n \to \infty. \tag{0–15}$$

但是, 如何证明呢? 我们需要找到一个有效的工具和判别准则. 随着调和分析的发展, 人们发现 Fourier 变换是研究分布函数的一个有效工具. 在概率论学科中, 大家称分布函数的 Fourier 变换为特征函数. 为证明概率论的中心极限定理，切比雪夫 (Чебышёв) 和马尔可夫 (Марков) 利用的是矩方法，而李雅普诺夫 (Ляпунóв) 利用了特征函数的方法。极限定理的后续发展表明特征函数方法是一种强大的解析工具。

假设 X 是个随机变量, 定义 $\phi(t) = \mathrm{E}e^{itX}$ 为其特征函数 (c.f.). 任意的随机变量都存在特征函数, 并且它具有非常良好的分析性质、运算性质和唯一性. 随着特征函数的引入, 20 世纪 20-30 年代概率论的发展进入了一段黄金时期. 法国数学家 Lévy 建立了连续性定理:$X_n \xrightarrow{d} X$ 当且仅当 $\phi_n(t) \to \phi(t)$. 其中, ϕ_n 和 ϕ 分别为 X_n 和 X 的 c.f.. 由此, 可以证明 (22). 事实上, 令 $X_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$, 那么

$$\mathrm{E}e^{itX_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}e^{it\frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}} = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n \to e^{-t^2/2}. \tag{0–16}$$

所以,(22) 成立. 这被称为 Lévy-Lindeberg 中心极限定理, 这个证明已经写入许多的本科生概率论教材, 具有微积分基础的同学们都能掌握.

Lindeberg 和 Feller 研究了独立不同分布情形, 他们再次运用了特征函数的方法证明了下列定理: 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 为一独立的随机序列, 相应的分布函数分别为 F_n, 并且 $\mathrm{E}\xi_n =$

μ_n, $\mathrm{var}(\xi_n) = \sigma_n^2 < \infty$. 若 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \to \infty$. 那么

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\sigma^2}{B_n^2} \to 0 \tag{0–17}$$

和

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mu_k) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \tag{0–18}$$

成立当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n \int_{|x-\mu_k|>\varepsilon B_n} (x-\mu_k)^2 \mathrm{d}F_k(x) \to 0. \tag{0–19}$$

称 (24) 为 Feller 条件, (26) 为 Lindeberg 条件. 当随机变量同分布且方差都存在时, 这些条件都满足. 当随机变量不同分布时, (24) 意味着各个随机变量 ξ_k/B_n" 一致地无穷小, 没有一个起显著作用". 正如切比雪夫 (Чебышёв) 大数律一样, Lindeberg-Feller 定理应用非常广泛, 譬如说各类测量误差可以近似地用正态分布描述.

中心极限定理不仅适用于独立随机变量的部分和, 而且可以推广到许多相依随机变量序列情形, 如鞅差序列, 马尔可夫 (Марков) 链, 各类混合序列, 正、负相依 (件) 序列等, 从而发展了许多新的方法, 如 20 世纪 70 年代提出的 Stein 方法.

除 Bernoulli 大数律和 de Moivre-Laplace 中心极限定理外, 另一个经典极限定理是 Poisson 极限定理. 它讨论的仍然是二项分布. 假设 $\{S_n; n \geqslant 1\}$ 为一列二项分布随机变量, $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. 如果 $np_n \to \lambda > 0$, 那么对每个 $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : S_n(\omega) = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}. \tag{0–20}$$

注意, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = 1$. 因此, 可以构造一个随机变量 X, 具有分布

$$P(\omega : X(\omega) = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{0–21}$$

称 X 是服从 Poisson 分布的随机变量, 记作 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. (27) 可写作

$$S_n \xrightarrow{d} \mathcal{P}(\lambda). \tag{0–22}$$

(29) 的证明并不难, 利用 Stirling 公式 (21) 直接计算或利用 Lévy 连续性定理均可.

以上三大极限定理讨论的都是 Bernoulli 二项分布的随机变量.

20 世纪

20 世纪可称为概率论发展的现代时期，本时期开始于概率论的公理化。在这个方向上的早期贡献者有 S.N. Berstein（1880-1968），R. von Mises（1883-1953）与 E.Borel（1871-1956）。1933 年，俄罗斯著名数学家柯尔莫哥洛夫 (А.Н.Колмогóров) 出版了他的伟大专著《Foundations of the Theory of Probability》。书中，他为概率论建立了目前广泛采纳的公理化体系。这一时期，中国数学家、概率论先驱许先生（Paolu Hsu，1910-1970）在内曼-皮尔逊理论、参数估计理论、多元分析、极限理论等方面取得卓越成就，许宝騄先生是多元统计分析学科的开拓者之一。

20 世纪 20-30 年代, 人们试图寻求一种普适极限定理, 来描述随机现象的内在规律. 假设 $\{\xi_{n,k}; 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$ 为行内独立的三角组列, 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k} \tag{0–23}$$

表示组列的第 n 行随机变量的和. 如果对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} P(\omega : |\xi_{n,k}(\omega)| > \varepsilon) \to 0\ (n \to \infty), \tag{0–24}$$

那么称 $\{\xi_{n,k}\}$ 满足无穷小条件. 该条件意味着每行内的随机变量" 一致地小, 没有一个起显著作用". 如果 S_n 解释为测量误差, 那么 $\{\xi_{n,k}; 1 \leqslant k \leqslant k_n\}$ 可看作是造成误差的诸多细微的因素, 每一个因素都会导致测量误差, 但没有系统误差. 人们自然会问: 用什么描述 S_n 的分布比较合适? 事实上, 当误差的因素可以细分, 并且满足无穷小条件 (31) 时, 误差 S_n 的分布是无穷可分分布.

假设 X 是随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, $\phi(t)$ 是它的特征函数. 如果对任意 $n \geqslant 1$, 存在随机变量 $\xi_{n,1}, \cdots, \xi_{n,n}$ 使得

$$X \triangleq \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}, \tag{0–25}$$

那么称 X 为无穷可分随机变量. 等价地, 可以用分布函数或特征函数来描述. 无穷可分分布族包括退化单点分布、正态分布、Poisson 分布以及它们的混合分布; 但不包括有界非退化随机变量. 一个分布可以是无穷可分分布当且仅当它的特征函数 $\phi(t)$ 可以写成下列 Lévy-Хйнчин 表示:

$$\phi(t) = \exp\left(\mathrm{i}\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \mathrm{d}G(x)\right), \tag{0–26}$$

其中,γ 为常数, 函数 $G(x)$ 满足单调不减右连续左极限存在, $G(-\infty) = 0$ 并且 $G(\infty) < \infty$.

普适极限定理断言: 如果无穷小三角组列 $\{\xi_{n,k}\}$ 的行和 S_n 依分布收敛到某个随机变量 X, 那么 X 一定是无穷可分分布的随机变量. 进而, 可以给出收敛到某给定的无穷可分分布的充要条件. 事实上, 三大经典极限定理都是普适极限定理的特殊情况. 可以说, 普适极限定理是 20 世纪 20-30 年代的杰作, 它将特征函数方法运用到极致. 然而, 由于理论过于一般化, 证明相当繁琐, 初学者不易掌握.

几乎处处收敛. 假设 $X, X_n, n \geqslant 1$ 为一列定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上的随机变量, 如果存在一个 Ω_0, 使得 $P(\Omega_0) = 1$, 并且对每一个 $\omega \in \Omega_0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \tag{0–27}$$

则称 X_n 几乎处处收敛到 X, 记作 $X_n \to X$, a.s.. 就概念本身而言, 几乎处处收敛是容易理解的. 在随机变量序列的各种各样收敛性中, 几乎必然收敛是最强的收敛性之一. 如何判别某随机变量序列几乎处处收敛呢? 不满看出 $X_n \to X$, a.s. 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon, \text{i.o.}) = 0. \tag{0–28}$$

这等价于

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \sup_{k\geqslant n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0. \tag{0–29}$$

显然, 一个充分条件为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) < \infty. \tag{0–30}$$

更一般地, 有下列 Borel-Cantelli 引理: 假设 $\{A_n; n \geqslant 1\}$ 是一列事件, 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < \infty$, 那么 $P(A_n, \text{i.o.}) = 0$. 当然, 级数收敛这一条件要强得多. 不过, 如果 $\{A_n\}$ 是一列两两独立的事件, 并且 $P(A_n, \text{i.o.}) = 0$, 那么 $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < \infty$.

Borel 强大数律: 假设 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量, $P(\xi_n = 1) = p, P(\xi_n = 0) = 1 - p$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p, \text{a.s.}. \tag{0–31}$$

显然, Borel 强大数律更为深刻地解释了" 频率收敛到概率的基本事实". 值得强调, 从 Bernoulli 大叔律到 Borel 大数律历经两百年, 无数人为此进步付出了毕生精力. 证明是 Borel-Cantelli 引理的简单应用. 事实上,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n} - p| > \varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}|S_n - np|^4}{n^4 \varepsilon^4} < \infty. \tag{0–32}$$

如果有什么需要注意的话, 那就是 (38) 中所有的 ξ_n 都定义在同一个概率空间上, 以至于 $S_{n+1}(\omega) = S_n(\omega) + \xi_{n+1}(\omega)$.

正如我们所注意到的那样, Borel 大数律的证明之所以简单, 在于 $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, 因此, 它的四阶矩存在, 并且 $\mathrm{E}|S_n - np|^4 = o(n^2)$. 能否将辛钦 (Хйнчин) 大数律加强为 a.s. 收敛么? 柯尔莫哥洛夫 (Колмогóров) 强大数律肯定地回答了这个问题.

柯尔莫哥洛夫 (Колмогóров) 是 20 世纪最伟大的数学家之一, 也是现代概率论的奠基人.1920 年, 他进入莫斯科国立大学学习,1929 年获得博士学位. 博士期间他完成了多篇论文, 其中最具代表性的工作有: 强大数律、三级数定理, 以及重对数律.

柯尔莫哥洛夫 (Колмогóров) 强大数律: 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 为独立同分布的随机序列, 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu, \text{a.s.} \tag{0–33}$$

当且仅当 $\mathrm{E}|\xi_1| < \infty, \mathrm{E}\xi_k = \mu$.

条件的必要性是 Borel-Cantelli 引理的简单推论; 但充分性的证明要复杂得多. 为此, 柯尔莫哥洛夫 (Колмогóров) 创造了许多新的方法, 包括子序列方法和独立随机变量部分和的最大值不等式.

1929 年, 柯尔莫哥洛夫 (Колмогóров) 证明了著名的有界重对数律: 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 为一独立随机变量序列. $\mathrm{E}\xi_n = 0, \mathrm{var}(\xi_n) = \sigma_n^2 < \infty$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \to \infty$. 如果 $|\xi| \leqslant M_n = o(\frac{B_n}{\sqrt{\ln\ln B_n^2}})$, a.s., 那么

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n^2 \ln\ln B_n^2}} = 1, \text{a.s.} \tag{0–34}$$

这个定理的意义是多方面的. 它是以一种完全不同于大数律和中心极限定理的形式刻画了独立随机变量和的渐进性质. 它将 Borel-Cantelli 引理用到了极致, 还创建了指数型不等式.

对于独立随机变量序列 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln\ln B_n^2}} = \sigma, \text{a.s.} \tag{0–35}$$

当且仅当 $\mathrm{E}\xi_k = 0, \mathrm{E}\xi_k^2 = \sigma^2 < \infty$.

令人惊讶的是, 该定理直到 1941 年才由 Hartman-Wintner 证明.

19 世纪末、20 世纪初, 整个数学正在经历着一场革命. Lebesgue 测度论、Poincaré 的拓扑学、Hilbert 的 23 个问题, 都给 20 世纪的数学家留下了巨大的发展空间. 概率论学科经过

了 200 多年的孕育后, 于 20 世纪初迎来了发展的黄金时期. 柯尔莫哥洛夫 (Колмого́ров) 于 1933 年出版的著作《Foundations of the Theory of Probability》标志着现代概率论的开始. 此书共分四章, 主要内容包括一、构建概率论的公理化体系; 二、发展条件概率和条件期望; 三、给出无穷维分布的相容性条件; 四、证明独立随机变量和的极限定理. 它们为后来整个概率论学科的发展奠定了基础.

正如大家注意到的那样, 无论大数律、中心极限定理, 还是重对数律, 讨论的都是收敛性的问题. 以 Lévy-Feller 定理为例, 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 独立同分布, $\mathrm{E}\xi_n = 0, \mathrm{var}(\xi_n) = 1$, 那么对每个 x,

$$P\left(\omega : \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) \to \Phi(x), (n \to \infty). \tag{0–36}$$

由于 $\Phi(x)$ 是单调递增的连续函数, 所以上述收敛一致成立, 即

$$\Delta_n \triangleq \sup_{-\infty<x<\infty} \left|P\left(\omega : \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \to 0, (n \to \infty). \tag{0–37}$$

一个自然的问题是:Δ_n 趋于 0 的速度如何? 这不仅仅是个理论问题, 而且在数理统计中有着重要应用. Berry-Esseen 给出了下列结果: 假设 $\xi_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ 独立同分布, $\mathrm{E}\xi_k = 0$, $\mathrm{var}(\xi_k)) = 1$, $\mathrm{E}|\xi_k|^3 < \infty$, 那么存在一个数值常数 $A > 0$, 使

$$\Delta_n \leqslant A\frac{\mathrm{E}|\xi_1|^3}{\sqrt{n}} \tag{0–38}$$

对于独立不同分布情形, 类似结果成立:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left|P\left(\omega : \frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{B_n} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant A\frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{E}|\xi_k|^3}{B_n^3}. \tag{0–39}$$

注意, (45) 和 (46) 对任意 $n \geqslant 1$ 都成立. 有兴趣的是, 这个定理中, 如果不对 ξ_k 的分布加以假设, (45) 中的上界的阶是不能再改进了的. 例如, 如果 $P(\xi_n = \pm 1) = 1/2)$, 那么 $P(S_n = 0) \sim n^{-1/2}$. 但是对于有界对称连续型随机变量, (45) 中上界的阶可以改进到 n^{-1}.

根据 (45),

$$P(\omega : \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \leqslant x) = \Phi(x) + O(n^{-1/2}). \tag{0–40}$$

类似地

$$P(\omega : \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} > x) = 1 - \Phi(x) + O(n^{-1/2}). \tag{0–41}$$

这些结果对统计推断中置信区间估计和假设检验都非常有用. 但是, 当 x 比较大时, $1 - \Phi(x)$ 本身就很小, 有可能远比 $n^{-1/2}$ 小. 例如, 保险精算中破产概率及其风险的估计中就可能出现这种问题. 这样, 用 (48) 来估计 $P(\omega : S_n > \sqrt{n}x)$ 就当然不准确了. Cramér 证明了

$$\frac{P(\omega : S_n > \sqrt{n}x)}{1 - \Phi(x)} = (1 + o(1))\exp(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})), \tag{0–42}$$

其中 $x = o(\sqrt{n})$, $\lambda(\cdot)$ 为 Cramér 级数. 称 (49) 为 Cramér 型大偏差, 用于描述小概率事件的渐进性质. 20 世纪 60-70 年代, Donsker, Varadhan 等进一步考虑了多维随机变量和随机过程的大偏差. 大偏差理论现在已经成为了概率极限理论的一个重要分支.

为了精确刻画大数律的收敛性, 许宝騄和 Robbins 在 1947 年证明了下列完全收敛性: 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量, $\mathrm{E}\xi_1 = 0$, $\mathrm{E}\xi_1^2 < \infty$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n}| > \varepsilon\right) < \infty. \tag{0–43}$$

显然, 从上式可推出强大数律成立, 从而 $\mathrm{E}|\xi_1| < \infty$ 并且 $\mathrm{E}\xi_1 = 0$. 但是, 方差的存在性并不明显. 事实上, Erdős 在 1950 年证明了方差存在有限是 (50) 成立的必要条件. 而 Baum-Katz 在 1968 年证明了

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P\left(\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n}| > \varepsilon\right) < \infty \tag{0–44}$$

当且仅当 $\mathrm{E}|\xi_1| < \infty$ 并且 $\mathrm{E}\xi_1 = 0$.

随后, 在上世纪 70-80 年代, 有大量文献作着关于各种各样的完全收敛性的讨论. 其中一个非常有意思的问题是: (50) 的左边究竟有多大? 它是如何以来 $\varepsilon > 0$ 的? Hedey 在 1980 年考虑了这个问题并证明了下列结论: 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 是个独立同分布的随机序列, $\mathrm{E}\xi_1 = 0$, $\mathrm{E}\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$, 那么

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\omega : |\frac{S_n(\omega)}{n}| > \varepsilon\right) = \frac{\sigma^2}{2}. \tag{0–45}$$

其证明利用了中心极限定理以及正态分布的尾概率估计. 当然, 可以进一步讨论其它类似的问题. 现在, 文献中称这类问题为精确渐进性.

在 20 世纪，随机过程理论（马尔可夫 (Марков) 过程，平稳过程,Martingales（鞅论）, 随机过程的极限定理等）得到了快速的发展。另外，还有许多分支，比如（排名不分先后）随机微分方程、随机偏微分方程、倒向随机微分方程、随机微分几何、Malliavin 变分、白噪声分析、狄氏型理论、遍历理论、数理金大偏差理论、交互粒子系统、测度值过程、概率不等式、泛函不等式、渗流、最有传输、SLE、随机矩阵、随机优化、随机控制、随机动力系统等众多概率论、随机分析及相关领域中的分支得到了快速的发展。

随机过程的迅猛发展是概率论学科乃至整个数学在 20 世纪取得的最大成就之一. Wiener 过程、Guass 过程、Марков 过程、Lévy 过程、鞅 (martingales) 等都是概率论学家最为熟悉的概念. 在这些过程的研究中, 有关独立随机变量序列的部分和的各种经典概率极限定理得到了广泛的应用和推广. 著名的结果包括 Колмогóров-Smirnov 定理、Donsker 弱不变原理和 Skorohod 强不变原理.

在数理统计中, 总体分布 $F(x)$ 往往并不知道; 人们通常用经验分布 $F_n(x)$ 做统计推断. 对每个固定的 x, 经典的大数律和中心极限定理表明: $F_n(x) \to F(x)$, a.s. 并且, $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x)))$. 但逐点收敛并不能很好地描述概率分布 $F(x)$ 的整体性质, 人们需要一致收敛性. Гливéнко(Glivenko)-Cantelli 定理证明了 $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0$, a.s.; 进而, Колмогóров 和 Smirnov 给出了其渐进分布. 具体地说, $(F_n(x) - F(x), -\infty < x < \infty)$ 作为随机过程序列依分布收敛到 Brown 桥, 并且

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} \sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) > t\right) = \mathrm{e}^{-2t^2} \tag{0–46}$$

和

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sup_{-\infty < x < \infty} \sqrt{n}|F_n(x) - F(x)| > t\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \mathrm{e}^{-2k^2t^2}. \tag{0–47}$$

这些结果可以用来检验总体分布 $F(x)$. 因此, 通常称 $\sqrt{n}|F_n(x) - F(x)|$ 为 Колмогóров-Smirnov 检验统计量.

总所周知, 经典随机游走 (随机徘徊) 和随机过程有着简单且自然的联系. 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量, $P(\xi_n = \pm 1) = 1/2$. 令 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$, 那么 $(S_0, S_1, S_2, \cdots)$ 构成一个随机过程. 事实上, 它是 Марков 过程、独立增量过程, 还是鞅. 它成为了研究随机过程各种性质的基本例子. 如果在时间-位置坐标系中描点, 便得到随机游走的轨迹. 如果限于前 n 个时刻, 那么获得 2^n 条不同的轨迹, 每条轨迹出现的概率均是 $1/2^n$. 如果把相邻的点连起来, 便得到连续的轨迹. 定义部分和过程

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_j + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1},\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{0–48}$$

显然, 根据 Feller-Lévy 中心极限定理知道, 对每个 t 成立 $X_n(t) \to \mathcal{N}(0, t)$. 进而, 作为随机过程来说, $(X_n(t), 0 \leqslant t \leqslant 1)$ 依分布收敛. 特别, Donsker 证明了下列结果

$$X_n \Rightarrow W,\ n \to \infty, \tag{0–49}$$

其中, $W = (W(t), 0 \leqslant t \leqslant 1)$ 为标准 Wiener 过程. 正如中心极限那样, 这一结果不仅仅对简单随机游动成立, 而且可以推广到一般的随机变量序列, 并成为 Donsker 不变原理. 它的重要性体现在两方面:(1) 证明了 Brown 运动的存在性; (2) 结合依分布收敛的连续性, 得到了随机序列部分和产生的各种统计量的极限定理和渐进分布, 从而在数理统计、计量经济、金融数学等学科中有广泛应用.

上述 Колмогóров-Smirnov 定理和 Donsker 不变原理成为了研究一般拓扑空间和距离空间上概率测度弱收敛的基本例子和主要动机. 根本样本轨迹的正则性和有界性, 可以把随机过程看成某个函数空间上的随机元 (r.e.). 例如, 部分和过程可以看成 $C([0,1])$ 上的随机元, 经验过程可以看作 $D([0,1])$ 空间上的随机元. 前者赋有一致拓扑, 后者赋有 Skorohod 拓扑. 距离空间上的概率测度弱收敛定义如下:

假设 (S, ρ) 为距离空间, $P, P_n, n \geqslant 1$ 为 S 上的一列概率测度, 如果对每一有界连续函数 f,

$$\int_S f(s) \mathrm{d}P_n \to \int_S f(s) \mathrm{d}P,\ (n \to \infty), \tag{0–50}$$

那么称 P_n 弱收敛到 P, 记作 $P_n \Rightarrow P$. 这一概念是分布函数弱收敛的推广. 一个自然的问题是, 如何判别概率测度弱收敛呢? 通常分两步:(1) 概率测度序列弱相对紧, (2) 所有子序列的极限测度都相同. Prohorov 定理对于验证概率测度序列弱相对紧起着重要作用. 假设 Π 是 S 上一族概率测度, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个紧子集 K, 使得

$$\sup_{P \in \Pi} P(K^c) < \varepsilon, \tag{0–51}$$

则称 Π 是一致胎紧的 (uniformly tight). Prohorov 定理给出概率测度族弱相对紧的充分条件: 如果 Π 是一致胎紧的, 那么 Π 是弱相对紧的. 其实, 在可分完备距离空间上, 弱相对紧的概率测度族是一致胎紧的. 该定理的兴趣在于: 它将概率测度族的弱收敛性和距离空间的紧致子集的刻画联系起来. 有了 Prohorov 定理, 不同距离空间上的概率测度弱收敛有着各具特色的判别法则.

自 1960 年以来, Hilbert 空间值和 Banach 空间值随机变量的概率极限理论逐渐发展起来. 许多实数值随机变量的极限定理都被推广到 Banach 空间值随机变量的情形, 并获得新

的结果. 特别有趣的结果是概率极限理论可以研究 Banach 空间的局部几何结构, 例如 p-型和 q-余型空间. 为了研究 Banach 空间值随机变量的概率极限定理, 人们建立了许多新型的概率不等式, 如 Hoffman-Jörgensen 不等式, Rosenthal 矩不等式, Talagrand 等周不等式. 这些不等式甚至对实值随机变量的研究都有巨大的帮助. 1991 年, 由 Ledoux 和 Talagrand 编著的《Probability in Banach Spaces》总结了 90 年代以前的主要研究成果, 是 Banach 空间上概率论的经典著作.

1970 年代, 匈牙利 Major 等学者利用 Skorohod 嵌入定理, 建立了与弱不变原理 (56) 相应的强不变原理: 假设 $\{\xi_n; n \geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一列独立同分布的随机变量, $\mathrm{E}\xi_1 = 0, \mathrm{E}\xi_1^2 = 1$. 记 S_n 是其部分和, 那么可以构造一个新的概率空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$, 在其上存在一个 Wiener 过程 W 和一列独立同分布的随机变量序列 $\{\tilde{\xi}_n; n \geqslant 1\}$, 使得 $\{\tilde{S}_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 同分布, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\tilde{S}_n - W(n)|}{\sqrt{n \ln\ln n}} \to 0, \text{a.s.} \tag{0–52}$$

随机过程的样本轨道性质的研究自 1930 年开始.Lévy 在 1937 年首先讨论了 Brown 运动样本曲线的连续大小, 并证明

$$\limsup_{\delta\to 0} \sup_{0\leqslant t_2-t_1\leqslant\delta} \frac{W(t_2) - W(t_1)}{\sqrt{-2\delta\ln\delta}} = 1, \text{a.s.}, \tag{0–53}$$

其中,$W = (W(t), t \geqslant 0)$ 是标准 Brown 运动. 该结果精确地刻画了 Wiener 过程样本曲线的不正则性. 后来, 有关 Wiener 过程和 Guass 过程样本曲线的连续模大小成为了一个当时的热门课题, 吸引了许多的概率论学者的关注. 特别, 以 Csrögö 和 Révesz 为代表的匈牙利学派在该领域做了大量工作, 完整且清晰地刻画了一大类 Guass 过程的样本曲线性质.

第一部分

测度论

第一章 测度空间与概率空间

简言之, 测度论可以理解为再抽象空间上建立类似于实变函数中测度、积分和导数那样的分析系统. 建立近代测度与积分理论的途径大致有两条. 一条是从简单图形的测度 (如矩体的体积) 出发, 逐步把测度的定义域扩张称包含所有" 可测集" 的一个集合类. 然后在测度理论的基础上建立积分的理论. 这是 Lebesgue 和 Carathéodory 等人的方法. 另一条是把把积分看成一类常见函数构成的线性空间上的具有某种性质的" 线性泛函", 然后逐步把线性泛函的定义域扩张成包含所有" 可积函数" 组成的线性空间. 这是 F.Riesz, Daniell 和 Kakutani 等人的方法.

概率论的传统是使用第一条途径, 因为先引进概率后引进期望在直观上较易接受. 但是, 值得强调的是, 第二条途径其实更加简便, 并且对泛函分析的学习更方便一些. 对这有兴趣可以去读严加安先生的《测度论讲义》.

1.1 可测空间

1.1.1 集合及其运算

集合是数学中最原始的概念. 若要给它下定义, 不得不引入新的概念来说明它. 若要给这些新的概念下定义, 又不得不引入另外的新的概念. 这样就会导致无休止的讨论. 因此, 在直观的朴素集合论 (naive set theory) 中, 集合被看成是无需下定义的基本概念. 为了方便, 我们愿意给集合概念一个直观的描述, 但这不是给它下定义. 使用朴素集合论有时会导致悖论, 因而后来有了以 ZF(Zermelo-Fraenkel set theory) 为代表的公理化集合论. 如果对集合论有兴趣, 请见本书附录. 在此, 应当相信我们所提到的构造集合的方法都不会导致悖论. 集合论中涉及数学基础的那些深层问题, 也不会自己跳出来颠覆人们所发展的概率论方法.

考虑一个任意非空集合 Ω, 称之为样本空间. Ω 的子集以大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 等记之, 称之为这个样本空间的集合. 元素 x 属于 (belong to) 集合 A, 记作 $x \in A$; 反之, x 不属于集合 A, 则用记号 $x \notin A$ 来表示. Ω 上定义的实函数

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1–1}$$

称为 A 的示性函数(indicator function). 集合

$$A^c \triangleq \{x : x \notin A\} \tag{1–2}$$

称为 A 的余. 如果

$$x \in A \Rightarrow x \in B \tag{1–3}$$

则说集合 A包含于(be included in)B, 或集合 B包含(include) 集合 A, 记为 $A \subset B$ 或 $B \subset A$. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 等于集合 B, 记为 $A = B$.

给定集合 A 和 B, 集合

$$A \cup B \triangleq \{x : x \in A或x \in B\}, \qquad AB \triangleq \{x : x \in A且x \in B\},$$
$$A \backslash B \triangleq \{x : x \in A且x \notin B\}, \qquad A \triangle B \triangleq (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \tag{1–4}$$

分别称为集合 A 与 B 的并、交、差、对称差. 如果 $B \subset A$, 则还说 $A \backslash B$ 为 A 与 B 的真差.

集合的并与交的运算满足交换律和结合律, 还满足下面两个分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{1–5}$$

如果两个集合 A 与 B 满足 $AB = \varnothing$, 则称它们为不交的.

并和交的概念可以推广到任意多个集合的情形. 对一族集合 $\{A_t, t \in T\}$ (T 表示一个集合, 它的元素用 t 表示. $\{A_t, t \in T\}$ 意味着每一个 T 中的元素 t, 都对应着 Ω 中的一个集合 A_t), 集合

$$\bigcup_{t \in T} A_t \triangleq \{x : \exists t \in T, \text{使得} x \in A_t\} \tag{1–6}$$

称为它们的并; 集合

$$\bigcap_{t \in T} A_t \triangleq \{x : \forall t \in T, x \in A_t\} \tag{1–7}$$

称为它们的交. 如果对任何 $s, t \in T$, 均有 $A_s A_t = \varnothing$, 那么称这族集合 $\{A_t, t \in T\}$ 是两两不交的. 注意, 反映并和交运算之间关系的有下列的 De-Morgan 法则:

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c; \quad \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t \in T} A_t^c. \tag{1–8}$$

设 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是一个集合序列. 如果对每个 $n = 1, 2, \cdots$, 有

$$A_n \subset A_{n+1}, \tag{1–9}$$

则称 $\{A_n\}$ 是非降的, 记为 $A_n \uparrow$, 并把集合 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n \triangleq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 叫做它的极限; 如果对每个 $n = 1, 2, \cdots$, 有

$$A_n \supset A_{n+1}, \tag{1–10}$$

则称 $\{A_n\}$ 是非增的, 记为 $A_n \downarrow$, 并称 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n \triangleq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为它的极限. 非降或非增的集合序列统称为单调序列. 因此, 单调序列总有极限. 对于任意给定的一个集合序列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 集合序列

$$\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, n = 1, 2, \cdots\right\} \text{和} \left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, n = 1, 2, \cdots\right\} \tag{1–11}$$

分别是非降的和非增的, 因而分别有极限

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ 和 } \limsup_{n \to \infty} A_n \triangleq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1–12}$$

我们把 $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n$ 和 $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ 分别叫做 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 的下极限和上极限. 显然, 记号 $\omega \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ 意味着元素 ω 属于序列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 的无穷多个集合, 而记号 $\omega \in \liminf\limits_{n \to \infty} A_n$ 则表明除去 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 中的有限个集合外, 元素 ω 属于该序列的其余集合. 于是我们有

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \subset \limsup_{n \to \infty} A_n. \tag{1–13}$$

如果 $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n = \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$, 我们将认为 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 的极限存在, 并把

$$\lim_{n \to \infty} A_n \triangleq \liminf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n \tag{1–14}$$

称为它的极限.

1.1.2 集类

以空间 Ω 中的一些集合为元素组成的集合称为 Ω 上的集合类. 换句话说, 集合类就是由集合组成的集合. 集合类一般用花体字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E},\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H},\cdots$ 来表示. 为什么不仅要讨论集合, 还要讨论集合类呢? 道理和实分析中的情形一样: 为了研究一般集合的测度理论, 也就是为了建立测度, 需要先明确研究对象和研究范围. 即必须确定出一些可测集, 而这些可测集的全体就组成了一个集合类. 在抽象空间中确定可测集时可能用到的集合类有 π 类、半环、半代数、环、代数、σ 环、σ 代数、单调类、λ 类等. 这些集合类中最重要的是 σ 代数, 下面一一介绍这些集合类.

定义 1.1 (π 类) 如果 Ω 上的非空集合类 $\mathscr{P}$ 对交运算封闭, 即

$$A,B\in\mathscr{P} \implies AB\in\mathscr{P}. \tag{1–15}$$

则称 $\mathscr{P}$ 为一个 π 类.

例 1.1 $\mathscr{P}_{\mathbb{R}=\{(-\infty,a]:a\in\mathbb{R}\}}$ 对有限交的运算封闭, 因而组成实数空间 $\mathbb{R}$ 上的 π 类.

定义 1.2 (半环) 满足下列条件的 π 类 $\mathscr{Q}$ 称为半环: 对任意的 $A,B\in\mathscr{Q}$ 且 $A\supset B$, 存在有限个两两不交的 $\{C_k\in\mathscr{Q},k=1,\cdots,n\}$, 使得

$$A\backslash B=\bigcup_{k=1}^{n}C_k. \tag{1–16}$$

例 1.2 容易看出, 由实数轴 $\mathbb{R}$ 上的开区间全体组成的集合类、左开右闭区间全体组成的集合类、左闭右开区间全体组成的集合类和闭区间全体组成的集合类都是 π 类. 记由全体左开右闭区间全体组成的集合为

$$\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}\triangleq\{(a,b]\;:\;a,b\in\mathbb{R}\}, \tag{1–17}$$

则对任何 $(a,b],(c,d]\in\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$, 容易验证 $(a,b]\backslash(c,d]$ 可表成 $\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$ 中至多两个不交集合之并. 因此, 它是 $\mathbb{R}$ 上的半环.

例 1.3 如果 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 是由有限个元素组成的集合, 则有 Ω 上的所有单点集组成的集合类 $\mathscr{P}=\{\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}\}$ 是一个 π 类, 也是一个半环.

定义 1.3 (半 (集) 代数) 设 Ω 是给定的一个非空集合, 它的一些子集组成的集类 $\mathscr{S}$ 称为 Ω 的一个半代数, 如果它满足

(i) $\Omega\in\mathscr{S}$;

(ii) (是 π 类) 若 $A,B\in\mathscr{S}$, 则 $AB\in\mathscr{S}$;

(iii) (真差可分割) 若 $A,A_1\in\mathscr{S}$, 并且 $A_1\subset A$, 则存在 $A_j\in\mathscr{S}$, 使得 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{S}$ 互不相交, 且 $A=\bigcup_{j=1}^{n}A_j$.

半集代数由较好的集合运算结构, 它构成了测度理论的基本研究对象和研究范围, 这个结构保证了交运算封闭性, 以及可分割性: 大的研究对象可以分割成小的研究对象之并. 由下面的引理可以得到半集代数的一个等价定义.

引理 1.1 Ω 的集类 $\mathscr{S}$ 为半集代数的充分必要条件是满足:

(i) $\Omega\in\mathscr{S}$;

(ii) (是 π 类) 若 $A, B \in \mathscr{S}$, 则 $AB \in \mathscr{S}$;
(iii)' 若 $A \in \mathscr{S}$, 则存在 $A_j \in \mathscr{S}$, 使得 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 互不相交, 且 $A^c = \bigcup_{j=1}^n A_j$.

证明 只需要在 (i) 和 (ii) 成立的前提下证明 (iii) 和 (iii)' 等价.

假设 (iii) 成立, 往证 (iii)' 成立. 事实上, 当 $A \in \mathscr{S}$, 注意到 $A \subset \Omega \in \mathscr{S}$, 由 (iii) 知存在 $A_j \in \mathscr{S}$, 使得

$$A = A_0, A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{S} \tag{1–18}$$

互不相交, 且 $\Omega = \cup_{j=0}^n A_j$, 即 $A^c = \cup_{j=1}^n A_j$.

假设 (iii)' 成立, 往证 (iii) 成立. 若 $\mathscr{S}$ 中集 A 和 A_1 满足条件 $A_1 \subset A$, 则由 (iii)' 知存在 $B_j \in \mathscr{S}$, 使得 $B_2, B_3, \cdots, B_n$ 互不相交, 且 $A_1^c = \cup_{j=2}^n B_j$, 因此

$$\begin{aligned} A &= A\Omega = A(A_1 \cup A_1^c) \\ &= (AA_1) \cup \left(\bigcup_{j=2}^n (AB_j) \right) = \bigcup_{j=1}^n A_j, \end{aligned} \tag{1–19}$$

其中 $A_j = AB_j$, $2 \leqslant j \leqslant n$. 显然 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$ 互不相交, 因此 (iii) 成立. □

例 1.4 $\Omega = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2 \cdots\}$, 试证明

$$\mathscr{S} = \{\mathbb{Z}_+ \cap [a, b) : a \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b \in \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}\} \tag{1–20}$$

为半集代数.

证明 显然, $\Omega, \varnothing \in \mathscr{S}$, 并且 $\mathscr{S}$ 对于交运算封闭. 若

$$A_1 = \mathbb{Z}_+ \cap [a_1, b_1) \subset A = \mathbb{Z}_+ \cap [a, b) \tag{1–21}$$

取

$$A_1 = \mathbb{Z}_+ \cap [a, a_1), \quad A_3 = \mathbb{Z}_+ \cap [b_1, b) \tag{1–22}$$

则 A_1, A_2, A_3 互不相交, 且 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 即 $\mathscr{S}$ 为半集代数. □

例 1.5 $\Omega = \mathbb{R}^1$, 试证明

$$\mathscr{S} = \left\{(a, b] : a \in \mathbb{R}, a \leqslant b \in \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}\right\} \tag{1–23}$$

为半集代数.

证明 Omitted. □

定义 1.4 (环) 非空集合类 $\mathscr{R}$ 称为一个环, 如果它对对并和差的运算是封闭的, 即若 $A, B \in \mathscr{R}$, 则 $A \cup B, A \backslash B \in \mathscr{R}$,

例 1.6 不难验证

$$\mathscr{R}_{\mathbb{R}=\{\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] : a_k, b_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*\}} (1–24)$$

是 $\mathbb{R}$ 上的环.

例 1.7 由有限个元素组成的集合 Ω 的一切子集组成的集合类 $\mathscr{T}$ 形成一个环.

引理 1.2 非空集合类 $\mathscr{R}$ 是一个环的充分必要条件是: 若 $A, B \in \mathscr{R}$, 则 $AB, A\triangle B \in \mathscr{R}$.

证明 设 $\mathscr{R}$ 是一个环, 则

$$\begin{aligned} A\triangle B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \in \mathscr{R}, \\ AB &= (A \cup B)\backslash(A\triangle B) \in \mathscr{R}. \end{aligned} \tag{1–25}$$

另一方面, 设 $\mathscr{R}$ 满足引理中的条件, 则

$$\begin{aligned} A\backslash B &= A(A\triangle B) \in \mathscr{R}, \\ A \cup B &= (AB)\triangle(A\triangle B) \in \mathscr{R}. \end{aligned} \tag{1–26}$$

因此, $\mathscr{R}$ 是一个环当且仅当 $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow AB, A\triangle B \in \mathscr{R}$. □

定理 1.3 设 $\mathscr{R}$ 是一个环, 并定义加法 $A + B \triangleq A\triangle B$ 和乘法 $A \cdot B \triangleq AB$, 则 $(\mathscr{R}, +, \cdot)$ 构成一个抽象代数学中的“环”.

证明 须证:$(\mathscr{R}, +)$ 构成一个 Abel 群, $\mathscr{R}$ 对乘法满足结合律, 对加法和乘法满足分配律.

容易按照集合的运算规律逐一验证:

- $(\mathscr{R}, +)$ 满足结合律: $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$;
- 存在幺元 $\varnothing$, 使 $\forall A \in \mathscr{R}, A\triangle\varnothing = \varnothing\triangle A = A$;
- 对每个 $A \in \mathscr{R}$, 存在加法的逆元 $B = A$, 使 $A\triangle B = B\triangle A = \varnothing$;
- $\mathscr{R}$ 对加法有交换律 $A\triangle B = B\triangle A$;
- $\mathscr{R}$ 对乘法满足结合律: $AB = BA$;
- $\mathscr{R}$ 中的加法对乘法有分配律:

$$A(B\triangle C) = (AB)\triangle(AC); \ \ (B\triangle C)A = (BA)\triangle(CA). \tag{1–27}$$

□

我们需要更好的集合运算结构, 需要一个对于集合的交、并、差和补这些运算封闭的一个结构, 所以引入下面的集代数.

定义 1.5 ((集) 代数) Ω 的非空子集类 $\mathscr{A}$ 称为 Ω 的一个集代数, 如果它满足

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$;
(ii) (是 π 类) 若 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $AB \in \mathscr{A}$;
(iii) (对补运算封闭) 若 $A \in \mathscr{A}$, 则 $A^c \in \mathscr{A}$.

下面给出几个集代数的等价定义

引理 1.4 对于 Ω 上的集类 $\mathscr{A}$, 下列条件都是 $\mathscr{A}$ 为集代数的充分必要条件:

(1) 定义1.5中的 (i) 和 (iii) 成立, 并且满足 (ii)’ (对并运算封闭) 若 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $A \cup B \in \mathscr{A}$;
(2) 定义1.5中的 (i) 成立, 并且满足 (iv) (对差运算封闭) 若 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $A\backslash B \in \mathscr{A}$.

证明 在定义1.5中的 (i) 和 (iii) 成立的情况下, 由集合运算的对偶公式

$$(AB)^c = A^c \cup B^c, \ \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \tag{1–28}$$

知定义1.5中的 (ii) 与 (ii)’ 等价. 因此 (I) 是集类 $\mathscr{A}$ 为代数的充分必要条件.

当定义1.5中的 (i) 成立, 并且满足 (iv) 时, 有

$$\begin{aligned} A^c &= \Omega \backslash A \in \mathscr{A}, \forall A \in \mathscr{A}, \\ AB &= A \backslash B^c \in \mathscr{A}, \forall A, B \in \mathscr{A}. \end{aligned} \tag{1–29}$$

即 $\mathscr{A}$ 为集代数; 反之, 当 $\mathscr{A}$ 为集代数时, 定义1.5中的 (i)、(ii) 和 (iii) 成立. 由 (ii) 和 (iii) 知

$$A \backslash B = AB^c \in \mathscr{A}, \forall A, B \in \mathscr{A}. \tag{1–30}$$

综上所述, (1) 和 (2) 都是集类 $\mathscr{A}$ 为集代数的充分必要条件. □

有的文献中, 也把代数叫做域.

引理 1.5 半环必是 π 类, 半代数必是半环, 环必是半环, 代数必是环.

证明 根据定义, 半环必然满足 π 类的条件; 半代数也满足半环的条件.

若 $\mathscr{R}$ 是一个环, 则

$$\begin{aligned} A, B \in \mathscr{R} &\Rightarrow A \cup B, A \backslash B, B \backslash A \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow A \triangle B = [(A \backslash B) \cup (B \backslash A)] \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow AB = (A \cup B) \backslash (A \triangle B) \in \mathscr{R}, \end{aligned} \tag{1–31}$$

由此可见, 环必是半环.

又设 $\mathscr{A}$ 是一个代数, 则

$$\begin{aligned} A, B \in \mathscr{R} &\Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathscr{A} \\ A, B \in \mathscr{R} &\Rightarrow A \backslash B = AB^c \in \mathscr{A} \end{aligned} \tag{1–32}$$

因而代数必是环. □

可以看到, 前面的几个集合运算结构都只是对于集合的有限次运算封闭, 但是不能保证它对于可数次集合运算封闭. 对于建立测度来说, 只有有限运算是不够的. 因此, 还必须引进一些在可列运算下的集合类.

定义 1.6 (单调类) 集合类 $\mathscr{M}$ 称为一个单调类, 如果对 $\mathscr{M}$ 中的任何单调序列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$.

定义 1.7 (λ 类) 集合类 $\mathscr{L}$ 称为一个λ 类, 如果它满足下列条件:

(i) $\Omega \in \mathscr{L}$;

(ii) (对真差封闭) 当 $A, B \in \mathscr{L}$ 且 $A \subset B$ 时有 $B \backslash A \in \mathscr{L}$;

(iii) (对非降列极限封闭) 对于 $\mathscr{L}$ 中的非降序列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$, 有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$.

例 1.8 对于 Ω 上的集类 $\mathscr{L}$, 以下条件是 $\mathscr{L}$ 为 λ 类的充分必要条件: 定义1.7中的 (iii) 成立, 并且满足:

(i)' 若 $A \in \mathscr{L}$, 则 $A^c \in \mathscr{L}$;

(ii)' 若 $A, B \in \mathscr{L}$, 且 $AB = \varnothing$, 则 $A \cup B \in \mathscr{L}$.

定义 1.8 (σ 环) 称非空集合类 $\mathscr{R}$ 是一个 σ 环, 如果

$$A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathscr{R};$$

$$A_n \in \mathscr{R}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}. \tag{1–33}$$

易见:一个对可列并运算封闭的环是 σ 环.

定义 1.9 (σ 代数) 满足下列三个条件的集合类 $\mathscr{F}$ 称为σ 代数:

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(ii) (对补运算封闭) 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $A^c \in \mathscr{F}$;

(iii) (对可列并运算封闭) 若 $A_m \in \mathscr{F}, n \in \mathscr{N}^*$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

易见:一个包括 Ω 的 σ 环是 σ 代数.

有的文献中, 也把 σ 代数称作σ 域. 有两个很特殊的 σ 代数, 它们分别是 Ω 上含集合最少的 σ 代数 $\{\varnothing, \Omega\}$ 和 Ω 上含集合最多的 σ 代数 $\mathscr{T} \triangleq \{A : A \subset \Omega\}$. 因此, 例 1.7 中的环也是 σ 代数. 但是, 沿例 1.1, 例 1.2, 例 1.6 的那条线出来的 σ 代数会比较复杂, 要在下一节才能说清楚.

引理 1.6 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 代数的充分必要条件是它满足定义中的 (i)、(ii) 和如下条件 (iii)' 若 $A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

证明 可由集合运算的 De-Morgan 法则 (公式1–8) 得到. □

这一事实又可进一步推出 $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow AB = A \cap B \cap B \cap \cdots \in \mathscr{F}$. 因此, σ 代数是代数.

σ 代数的集合运算结构合理, 对于集合的可列次运算封闭, 能够满足具有可列可加性的测度的建立. 下面, 我们来讨论单调类、λ 类和 σ 代数三者之间的关系.

引理 1.7 λ 类是单调类; σ 代数是 λ 类.

证明 设 $\mathscr{L}$ 是 λ 类, 如果对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $A_n \in \mathscr{L}$ 而且 $A_n \downarrow$, 则由 λ 类的定义知

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathscr{L}. \tag{1–34}$$

这一事实加上 λ 类定义的第三条便说明了 λ 类是单调类.

设 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 代数, 则 $\mathscr{F}$ 显然满足 λ 类定义的第一条和第三条. 由于 σ 代数是代数, 所以它也就满足 λ 类定义的第二条, 因此, σ 代数是 λ 类. □

至于什么时候其它的集合类能够称为 σ 代数, 有如下两个定理.

定理 1.8 ((集合形式的) 单调类定理) 一个既是单调类又是代数的集合类必是 σ 代数.

证明 把这个集合类记为 $\mathscr{F}$. 由于 $\mathscr{F}$ 是集代数, 故它对有限并是封闭的. 由因为 $\mathscr{F}$ 是单调类, 所以它对非降序列的极限也是封闭的. 因此,

$$A_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \lim_{n \to \infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}, \tag{1–35}$$

可见, $\mathscr{F}$ 确是 σ 代数. □

定理 1.9 (Dynkin's $\pi - \lambda$ 定理) 一个既是 λ 类又是 π 类的集合类必是 σ 代数.

证明 记此集合类为 $\mathscr{F}$. 由于 $\mathscr{F}$ 是 λ 类, 从 λ 类定义的前两条得到

$$\begin{aligned} &\Omega \in \mathscr{F}; \\ &A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathscr{F}. \end{aligned} \tag{1–36}$$

此结论加上 $\mathscr{F}$ 由是 π 类, 便知 $\mathscr{F}$ 是集代数. 又由于 $\mathscr{F}$ 是 λ 类, 所以 $\mathscr{F}$ 还是个单调类. 所以 $\mathscr{F}$ 既是集代数又是单调类, 所以 $\mathscr{F}$ 确是 σ 代数. □

小结: 以上讨论得到的结论可以总结成这几个集合类之间从严紧到宽松的顺序:

$$\begin{array}{ccccc} \sigma\text{ 代数} & \Longleftrightarrow & \pi\text{ 类} & + & \lambda\text{ 类} \\ & \Longleftrightarrow & \text{代数} & + & \text{单调类} \end{array};$$

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma\text{ 代数} & \Longrightarrow & \text{代数} & \Longrightarrow & \text{半代数} & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \sigma\text{ 环} & \Longrightarrow & \text{环} & \Longrightarrow & \text{半环} & \Longrightarrow & \pi\text{ 类} \end{array}; \quad \sigma\text{ 代数} \Rightarrow \lambda\text{ 类} \Rightarrow \text{单调类}.$$

这些集合类的核心是 σ 代数, 它的成员即将成为我们常说的可测集. 换句话说, 我们最终是要在 σ 代数上建立测度. 今后, 非空集合 Ω 和它上面的一个 σ 代数 $\mathscr{F}$ 放在一切写成的 $(\Omega, \mathscr{F})$ 将称为可测空间.

1.1.3 集类的生成

考虑更深入的问题: 如何由简单的集合类生产更复杂的集合类? 首先, 要明确一下生产这个概念.

定义 1.10 (集类的生成) 称 $\mathscr{S}$ 为由集合类 $\mathscr{E}$生成的环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数), 如果下列条件被满足:

(i) $\mathscr{S} \supset \mathscr{E}$;

(ii) 对任意一个环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数)$\mathscr{S}'$ 均有: 若 $\mathscr{S}' \supset \mathscr{E}$, 则 $\mathscr{S}' \supset \mathscr{S}$.

换言之, 由集合类 $\mathscr{E}$生成的环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数), 也就是包含$\mathscr{E}$的最小的环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数). 下列命题是展开这个讨论的理论依据.

引理 1.10 由任意集合类 $\mathscr{E}$ 生产的环、集代数、单调类、λ 类和 σ 代数均存在.

证明 以 $\mathscr{T}$ 记由 Ω 的所有子集合所组成的集合类. 前已说明, $\mathscr{T}$ 为一个 σ 代数. 因此, $\mathscr{T}$ 是一个环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数). 把包含集合类 $\mathscr{E}$ 的环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数) 的全体记为 □, 则 $\mathscr{T} \in$ □. 因而 □ 非空.

不难验证:$\mathscr{S} \triangleq \bigcap_{\mathscr{A} \in \square} \mathscr{A}$ 还是一个环 (或集代数, 或单调类, 或 λ 类, 或 σ 代数), 并且满足定义 1.10 中的条件. □

把由集合类 $\mathscr{E}$ 生成的环、集代数、单调类、λ 类和 σ 代数分别记作 $r(\mathscr{E})$,$a(\mathscr{E})$, $m(\mathscr{E})$, $\lambda(\mathscr{E})$ 和 $\sigma(\mathscr{E})$. 有的文献中, 也把这些符号记成作 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$,$\mathscr{A}(\mathscr{E})$, $\mathscr{M}(\mathscr{E})$, $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ or $\Lambda(\mathscr{E})$ or $l(\mathscr{E})$ 和 $\sigma(\mathscr{E})$. 这些都只是记号, 各种形式都有人用, 无特殊意义. 阅读时, 应从上下文通晓其意.

定理 1.11 设 $\mathscr{S}$ 是一个半环, 则

$$r(\mathscr{S})=\left\{\bigcup_{j=1}^{n}A_j\ :\ A_1,A_2,\cdots,A_n\text{为}\mathscr{S}\text{互不相交集合},n\in\mathbb{N}^*\right\}. \tag{1–37}$$

证明 记式1–37右端的集合类为 $\mathscr{R}$. 由于环对于有限并的运算是封闭的, 故 $r(\mathscr{S})\supset\mathscr{R}$. 因此, 要完成定理的证明, 必须且只需证 $r(\mathscr{S})\subset\mathscr{R}$. 为此, 又只需证明 $\mathscr{R}$ 为一个环. 若 $A,B\in\mathscr{R}$, 则存在互不相交的 $\{A_i\in\mathscr{S},i=1,\cdots,n\}$ 和互不相交的 $\{B_j\in\mathscr{S},j=1,\cdots,m\}$ 使得

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\ \text{和}\bigcup_{j=1}^{m}B_j. \tag{1–38}$$

注意到对每对 (i,j), 存在 $k_{i,j}$ 个互不相交的集合 $\{C_l^{i,j}\in\mathscr{S},l=1,\cdots,k_{i,j}\}$, 使得

$$A_i\backslash B_j=A_i\backslash(A_iB_j)=\bigcup_{l=1}^{k_{i,j}}C_l^{i,j}, \tag{1–39}$$

由此, 可把 $A\backslash B$ 表示成 $\mathscr{S}$ 中有限个互不相交的集合的并:

$$\begin{aligned}A\backslash B&=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}[A_i\backslash B_j]\\&=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{l=1}^{k_{i,j}}C_l^{i,j}\\&=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\substack{l_1=1,\cdots,k_{i,1}\\ \cdots\\ l_m=1,\cdots,k_{i,m}}}(C_{l_1}^{i,1}\cap\cdots\cap C_{l_m}^{i,m})\end{aligned} \tag{1–40}$$

这表明 $\mathscr{R}$ 对于差运是封闭的. 在此基础上, 又可以把 $A\cup B$ 按下列方式表示成 $\mathscr{S}$ 中有限个互不相交的集合的并:

$$\begin{aligned}A\cup B&=B\cup(A\backslash B)\\&=\left(\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right)\cup(A\backslash B)\\&=\left(\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right)\cup\left[\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\substack{l_1=1,\cdots,k_{i,1}\\ \cdots\\ l_m=1,\cdots,k_{i,m}}}(C_{l_1}^{i,1}\cap\cdots\cap C_{l_m}^{i,m})\right]\end{aligned} \tag{1–41}$$

可见, $\mathscr{R}$ 对有限并也是封闭的. 这个亚子, 我们就证明了 $\mathscr{R}$ 确实是一个环. □

定理 1.12 设 $\mathscr{S}$ 是一个半集代数, 则

$$a(\mathscr{S})=\left\{\bigcup_{j=1}^{n}A_j\ :\ A_1,A_2,\cdots,A_n\text{为}\mathscr{S}\text{上的互不相交集合},n\in\mathbb{N}^*\right\}. \tag{1–42}$$

证明 记式1–42右端为 $\mathscr{A}$. 由于代数对于有限并的运算是封闭的, 故 $a(\mathscr{S}) \supset \mathscr{A}$. 因此, 要完成定理的证明, 必须且只需证 $a(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A}$. 为此, 又只需证明 $\mathscr{A}$ 为集代数. 显然,$\Omega \in \mathscr{S} \subset \mathscr{A}$. 若 $A, B \in \mathscr{R}$, 则存在互不相交的 $\{A_i \in \mathscr{S}, i = 1, \cdots, n\}$ 和互不相交的 $\{B_j \in \mathscr{S}, j = 1, \cdots, m\}$ 使得

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ 和} \bigcup_{j=1}^{m} B_j. \tag{1–43}$$

从而,

$$AB = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} [A_i B_j] \tag{1–44}$$

注意到互不相交集构成的集类

$$\{A_i B_j : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\} \subset \mathscr{S} \tag{1–45}$$

可得 $AB \in \mathscr{A}$. 进一步, 由 De-Morgan 律 (式1–8) 得

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \tag{1–46}$$

而由 $\mathscr{S}$ 为半代数知道 $A_i^c \in \mathscr{S}$. 因此, $A^c \in \mathscr{S} \subset \mathscr{A}$. 综上所述, $\mathscr{A}$ 为集代数. □

定理 1.13 设 $\mathscr{S}$ 是一个半集代数, 则

$$a(\mathscr{S}) = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \tag{1–47}$$

证明 根据定理1.12知道

$$a(\mathscr{S}) \subset \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \tag{1–48}$$

另一方面, 对于任何

$$A \in \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \tag{1–49}$$

存在 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{S}$, 使得 $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$. 注意到 $\mathscr{S} \subset a(\mathscr{S})$, 且 $a(\mathscr{S})$ 为代数, 可得 $A \in a(\mathscr{S})$, 即

$$\left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset a(\mathscr{S}), \tag{1–50}$$

所以命题中的等式成立. □

定理 1.14 如果 $\mathscr{A}$ 是一个集代数, 则 $\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A})$.

证明 由于 $\sigma(\mathscr{A})$ 是一个 σ 代数, 从而也就是一个单调类. 由于 $m(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的最小单调类. 所以有

$$\sigma(\mathscr{A}) \supset m(\mathscr{A}). \tag{1–51}$$

往证 $\sigma(\mathscr{A}) \subset m(\mathscr{A})$. 则必须且只需证明 $m(\mathscr{A})$ 为一个 σ 代数. 注意到 $m(\mathscr{A})$ 是一个单调系, 所以又只需证明 $m(\mathscr{A})$ 是一个集代数.

(i) 由于 $\mathscr{A}$ 是集代数, 所以 $\Omega \in \mathscr{A} \subset m(\mathscr{A})$;

(ii) 对任意 $A \in \mathscr{A}$, 令 $\mathscr{G}_A = \{B \in m(\mathscr{A}) : A \backslash B \in m(\mathscr{A})\}$. 则 $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}_A$.

下证 $\mathscr{G}_A$ 是个单调类. 设单调列 $\{B_n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathscr{G}_A$. 则 $B_n, A \backslash B_n \in m(\mathscr{A})$.

由于 B_n 单调, 所以 $A \backslash B_n$ 也单调. 由于 $m(\mathscr{A})$ 是单调类, 所以

$$\lim_{n\to\infty} B_n, A \backslash \left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} (A \backslash B_n) \in m(\mathscr{A}). \tag{1–52}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n \in \mathscr{G}_A$. 因此,$\mathscr{G}_A$ 是个单调类. 这进一步说明了 $m(\mathscr{A}) \subset \mathscr{G}_A$.

即: 若 $A \in \mathscr{A}, B \in m(\mathscr{A})$, 则 $A \backslash B \in m(\mathscr{A})$.

再对任意 $B \in m(\mathscr{A})$, 令 $\mathscr{H}_B = \{A \in m(\mathscr{A}) : A \backslash B \in m(\mathscr{A})\}$.

由前面的讨论知道 $\mathscr{A} \subset \mathscr{H}_B$. 下面继续证明 $\mathscr{H}_B$ 也是一个单调类.

任选单调列 $\{A_n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathscr{H}_B$. 则 $A_n, A_n \backslash B \in m(\mathscr{A})$. 从而根据 $m(\mathscr{A})$ 为单调类知道

$$\lim_{n\to\infty} A_n, \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \backslash B = \lim_{n\to\infty} (A_n \backslash B) \in m(\mathscr{A}). \tag{1–53}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{H}_B$. 即 $\mathscr{H}_B$ 也是单调类.

所以有, $m(\mathscr{A}) \subset \mathscr{H}_B$.

$$\forall A, B \in m(\mathscr{A}), \text{总有 } A \backslash B \in m(\mathscr{A}). \tag{1–54}$$

根据 (i) 和 (ii) 说明, $m(\mathscr{A})$ 也是一个集代数. 证毕. □

推论 1.15 如果 $\mathscr{A}$ 是集代数, $\mathscr{M}$ 是单调类, 则

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \Rightarrow \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}. \tag{1–55}$$

定理 1.16 如果 $\mathscr{P}$ 是一个 π 类, 则 $\sigma(\mathscr{P}) = \lambda(\mathscr{P})$.

证明 由于 σ 代数是 λ 类. 所以总有 $\sigma(\mathscr{P}) \supset \lambda(\mathscr{P})$.

往证 $\sigma(\mathscr{P}) \subset \lambda(\mathscr{P})$, 则只需证 $\lambda(\mathscr{P})$ 是一个 σ 代数. 由于它本身是一个 λ 类, 所以又只需证明它是一个 π 类.

对任意 $A \in \mathscr{P}$, 令 $\mathscr{G}_A = \{B \in \lambda(\mathscr{P}) : AB \in \lambda(\mathscr{P})\}$. 不难验证:$\mathscr{P} \subset \mathscr{G}_A$ 并且 $\mathscr{G}_A$ 是一个 λ 类. 因此, $\lambda(\mathscr{P}) \subset \mathscr{G}_A$. 这说明 $\forall A \in \mathscr{P}, B \in \lambda(\mathscr{P})$, 有 $AB \in \lambda(\mathscr{P})$.

对任意 $B \in \lambda(\mathscr{P})$, 令 $\mathscr{H}_B = \{A \in \lambda(\mathscr{P}), AB \in \lambda(\mathscr{P})\}$. 根据前面的论证知道 $\mathscr{P} \subset \mathscr{H}_B$. 又不难验证 $\mathscr{H}_B$ 是一个 λ 类, 所以有 $\lambda(\mathscr{P}) \subset \mathscr{H}_B$.

这说明 $\forall A, B \in \lambda(\mathscr{P}), AB \in \lambda(\mathscr{P})$. 即 $\lambda(\mathscr{P})$ 是一个 π 类. 证毕. □

推论 1.17 如果 $\mathscr{P}$ 是 π 类, $\mathscr{L}$ 是 λ 类, 则

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{L} \Rightarrow \sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}. \tag{1–56}$$

例 1.9 对例 1.4 中的 $\mathscr{S}, \sigma(\mathscr{S})$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 的所有子集全体. 对于例子 1.1 中的 $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}$, 称 $\sigma(\mathscr{P}_{\mathbb{R}})$ 是一维 Borel σ 代数记 $\mathscr{O}_{\mathbb{R}}$ 是由 $\mathbb{R}$ 中的开集组成的集合类, 则容易证明 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathscr{O}_{\mathbb{R}})$. 由此出发, 可将 Borel σ 代数的概念一般化: 对于拓扑空间 (topological space)(X, τ). 其中 τ 是其所有开集构成的集合类. 我们将把

$$\mathscr{B} \triangleq \sigma(\tau) \tag{1–57}$$

称为拓扑空间 X 上的 Borel σ 代数, 其中的集合称为 X 中的 Borel 集, 而 $(X, \mathscr{B})$ 就是所谓的拓扑可测空间.

在测度论中, 为了讨论可测函数. 一般还会引入广义实数集$\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. 今后,$\overline{\mathbb{R}}$中的元素将称为广义实数. 关于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中元素的顺序, 除了实数按原有顺序外, 还规定

$$-\infty < a < +\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{1–58}$$

根据这种顺序, 又可定出 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的区间: 对任何 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, 令

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\};\\ [a,b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leqslant x < b\};\\ (a,b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leqslant b\};\\ [a,b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leqslant x \leqslant b\};\end{aligned} \tag{1–59}$$

关于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的运算, 规定

$$\begin{aligned}(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) &= a - (\mp\infty)\\ &= \pm\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R};\end{aligned} \tag{1–60}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty; \tag{1–61}$$

$$\begin{aligned}(\pm\infty)\cdot a &= a \cdot (\pm\infty)\\ &= \begin{cases}\pm\infty, & 0 < a \leqslant +\infty,\\ 0, & a = 0,\\ \mp\infty, & -\infty \leqslant a < 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{1–62}$$

注意: 诸如 $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, $\cdots$ 等是没有定义的. 对 $a \in \overline{\mathbb{R}}$, 记

$$a^+ = \max(a, 0) \ \text{ 和 } \ a^- = \max(-a, 0), \tag{1–63}$$

分别把它们叫做 a 的正部和负部. 易见, $a = a^+ - a^-$. 另外, 还记

$$\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \{-\infty, +\infty\}). \tag{1–64}$$

定理 1.18 下列等式成立:

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}} &= \sigma(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\})\\ &= \sigma(\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\})\\ &= \sigma(\{[a, \infty] : a \in \mathbb{R}\})\\ &= \sigma(\{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\})\end{aligned} \tag{1–65}$$

1.2 测度与测度的构造

1.2.1 测度、可测空间与测度空间

1.2.2 测度在集代数上的扩张

1.2.3 外测度

1.2.4 从半集代数到代数上的测度扩张

1.3 测度的性质

1.3.1 测度的运算性质

1.3.2 测度空间的完全化

1.3.3 Lebesgue-Stieltjes 测度

第二章　可测函数与随机变量

2.1　可测函数与分布

定义 2.1 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间,$A \in \mathscr{F}$, 记

$$A \cap \mathscr{F} \triangleq \{AB : B \in \mathscr{F}\} \tag{2–1}$$

如果函数 $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ 满足条件

$$f^{-1}(B) \triangleq \{\omega \in A : f(\omega) \in B\} \in A \cap \mathscr{F},\ \ \forall B \in \mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}}, \tag{2–2}$$

其中 $\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}} = \sigma\left(\left\{\mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \bar{\mathbb{R}}\right\}\right)$, 则称 f 为定义在 A 上的 $\mathscr{F}$ 可测函数, 或者广义随机变量, 简称为可测函数; 如果 A 上的可测函数 f 满足条件 $f(A) \subset \mathbb{R}$, 则称 f 为 A 上的有限实值随机变量; 将 A 上的有限实值随机变量简称为随机变量, 记为 r.v.

上述概念可以进一步推广到一般映射的情况.

定义 2.2 对于映射 $f : \Omega \to E$, 称

$$f^{-1}(A) \triangleq \{f \in A\} \triangleq \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\},\ \ \forall A \subset E \tag{2–3}$$

为 A 对 f 的原像, 简记为 $\{f \in A\}$; 称

$$f^{-1}(\mathscr{E}) \triangleq \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{E}\} \tag{2–4}$$

为集类 $\mathscr{E}$ 对 f 的原像, 其中 $\mathscr{E}$ 是 E 的子集类; 如果 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和 $(E, \mathscr{E})$ 为可测空间,f 满足

$$f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{F} \tag{2–5}$$

则称 f 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(E, \mathscr{E})$ 的 $\mathscr{F}$ 可测映射, 简称为可测映射; 而 $\sigma(f) \triangleq f^{-1}(\mathscr{E})$ 叫做使映射 f 可测的最小 σ 代数. 如果 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和 $(E, \mathscr{E})$ 为可测空间, $\mathscr{F}$ 上有概率测度 $\mathbf{P}$, 则称映射 f 为 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 到 $(E, \mathscr{E})$ 的随机元. 如果 f 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 到 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 的随机元, 则称 f 为n 维随机变量.

定理 2.1 集合的原像有以下性质: 设 f 是 Ω 到 E 上的映射, 则有

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(E) = \Omega,\ \ f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \\
&B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \\
&f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c, \forall B \subset E \\
&f^{-1}(A \backslash B) = (f^{-1}A) \backslash (f^{-1}B), \forall A, B \subset E \\
&f^{-1} \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} f^{-1} A_t \\
&f^{-1} \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} f^{-1} A_t,
\end{aligned} \tag{2–6}$$

其中, $\{A_t : t \in T\}$ 为 Y 的子集类.

证明 Omitted. □

引理 2.2 设 f 是 $\Omega \to E$ 的映射, $\mathscr{E}$ 是 E 上的 σ 代数, 则 $f^{-1}(\mathscr{E})$ 是 Ω 的 σ 代数.

证明 可由定理2.1得结论. □

定理 2.3 设 f 是 Ω 到 E 上的映射, 对 E 上的非空子集类 $\mathscr{E}$, 有

$$\sigma(f^{-1}\mathscr{E}) = f^{-1}\sigma(\mathscr{E}). \tag{2–7}$$

证明 由引理2.2易见 $f^{-1}\sigma(\mathscr{E})$ 是一个 σ 代数. 因此 $\sigma(f^{-1}\mathscr{E}) \subset f^{-1}\sigma(\mathscr{E})$. 另一方面, 令

$$\mathscr{G} = \{B \subset E : f^{-1}B \in \sigma(f^{-1}\mathscr{E})\} \tag{2–8}$$

则 $\mathscr{G}$ 是一个 σ 代数, 且 $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$, 因此 $\sigma(f^{-1}\mathscr{E}) \supset f^{-1}\sigma(\mathscr{E})$, 即结论成立. □

2.2 分布与分布函数

2.2.1 可测函数的运算

测度论中的典型方法 在测度论和概率论中, 为了证明一个关于可测函数的命题, 常常分解为如下几个比较容易的步骤进行:

- (1) 证明该命题对最简单的函数——示性函数成立.
- (2) 证明该命题对非负简单函数——示性函数的线性组合成立.
- (3) 证明该命题对非负可测函数——非降的非负简单函数列的极限成立.
- (4) 证明该命题对一般的可测函数——两个非负可测函数, 即它的正部和负部之差成立.

按上述步骤证明命题的方法叫做测度论中的典型方法. 典型方法符合人们的认识过程, 是一种具有普遍意义、行之有效的方法, 必须熟练掌握.

2.3 复合映射的可测性

2.4 可测映射列极限的可测性

2.5 可测函数的构造

第三章　积分与数学期望

3.1　积分的定义

3.2　积分的性质

3.3　空间 $L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$

3.4　概率空间的积分

第四章　不定积分与条件期望

4.1　符号测度

4.2　符号测度的分解

4.2.1　Hahn 分解和 Jordan 分解

4.2.2　Radon-Nikodym 定理

4.2.3　Lebesgue 分解

4.3　条件期望与条件概率

第五章　乘积空间

5.1　有限维乘积空间

5.2　多维 Lebesgue-Stieltjes 测度

5.3　可列维乘积空间的概率测度

5.4　任意无穷维乘积空间的概率测度

第六章　离散鞅论

6.1　基本概念

6.2　停时定理

6.3　收敛定理

6.4　鞅的不等式

第七章 简介

这是 BUPTTHESIS 的示例文档，基本上覆盖了模板中所有格式的设置。建议大家在使用模板之前，除了阅读《BUPTTHESIS 使用文档》，这个示例文档也最好能看一看。

7.1 二级标题

7.1.1 三级标题

7.1.1.1 四级标题

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

7.2 脚注

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. [1]

7.3 字体

上海交通大学是我国历史最悠久的高等学府之一，是教育部直属、教育部与上海市共建的全国重点大学，是国家“七五”、“八五”重点建设和“211 工程”、“985 工程”的首批建设高校。经过 115 年的不懈努力，上海交通大学已经成为一所“综合性、研究型、国际化”的国内一流、国际知名大学，并正在向世界一流大学稳步迈进。

十九世纪末，甲午战败，民族危难。中国近代著名实业家、教育家盛宣怀和一批有识之士秉持“自强首在储才，储才必先兴学”的信念，于 1896 年在上海创办了交通大学的前身——南洋公学。建校伊始，学校即坚持“求实学，务实业”的宗旨，以培养“第一等人才”为教育目标，精勤进取，笃行不倦，在二十世纪二三十年代已成为国内著名的高等学府，被誉为“东方 MIT”。抗战时期，广大师生历尽艰难，移转租界，内迁重庆，坚持办学，不少学生投笔从戎，浴血沙场。解放前夕，广大师生积极投身民主革命，学校被誉为“民主堡垒”。

新中国成立初期，为配合国家经济建设的需要，学校调整出相当一部分优势专业、师资设备，支持国内兄弟院校的发展。五十年代中期，学校又响应国家建设大西北的号召，根据国务院决定，部分迁往西安，分为交通大学上海部分和西安部分。1959 年 3 月两部分同时被列为全国重点大学，7 月经国务院批准分别独立建制，交通大学上海部分启用“上海交通大学”校名。历经西迁、两地办学、独立办学等变迁，为构建新中国的高等教育体系，促进社会主义建设做出了重要贡献。六七十年代，学校先后归属国防科工委和六机部领导，积极投身国防人才培养和国防科研，为“两弹一星”和国防现代化做出了巨大贡献。

[1] Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

改革开放以来，学校以“敢为天下先”的精神，大胆推进改革：率先组成教授代表团访问美国，率先实行校内管理体制改革，率先接受海外友人巨资捐赠等，有力地推动了学校的教学科研改革。1984 年，邓小平同志亲切接见了学校领导和师生代表，对学校的各项改革给予了充分肯定。在国家和上海市的大力支持下，学校以“上水平、创一流”为目标，以学科建设为龙头，先后恢复和兴建了理科、管理学科、生命学科、法学和人文学科等。1999 年，上海农学院并入；2005 年，与上海第二医科大学强强合并。至此，学校完成了综合性大学的学科布局。近年来，通过国家“985 工程”和“211 工程”的建设，学校高层次人才日渐汇聚，科研实力快速提升，实现了向研究型大学的转变。与此同时，学校通过与美国密西根大学等世界一流大学的合作办学，实施国际化战略取得重要突破。1985 年开始闵行校区建设，历经 20 多年，已基本建设成设施完善，环境优美的现代化大学校园，并已完成了办学重心向闵行校区的转移。学校现有徐汇、闵行、法华、七宝和重庆南路（卢湾）5 个校区，总占地面积 4840 亩。通过一系列的改革和建设，学校的各项办学指标大幅度上升，实现了跨越式发展，整体实力显著增强，为建设世界一流大学奠定了坚实的基础。

交通大学始终把人才培养作为办学的根本任务。一百多年来，学校为国家和社会培养了 20 余万各类优秀人才，包括一批杰出的政治家、科学家、社会活动家、实业家、工程技术专家和医学专家，如江泽民、陆定一、丁关根、汪道涵、钱学森、吴文俊、徐光宪、张光斗、黄炎培、邵力子、李叔同、蔡锷、邹韬奋、陈敏章、王振义、陈竺等。在中国科学院、中国工程院院士中，有 200 余位交大校友；在国家 23 位“两弹一星”功臣中，有 6 位交大校友；在 18 位国家最高科学技术奖获得者中，有 3 位来自交大。交大创造了中国近现代发展史上的诸多“第一”：中国最早的内燃机、最早的电机、最早的中文打字机等；新中国第一艘万吨轮、第一艘核潜艇、第一艘气垫船、第一艘水翼艇、自主设计的第一代战斗机、第一枚运载火箭、第一颗人造卫星、第一例心脏二尖瓣分离术、第一例成功移植同种原位肝手术、第一例成功抢救大面积烧伤病人手术等，都凝聚着交大师生和校友的心血智慧。改革开放以来，一批年轻的校友已在世界各地、各行各业崭露头角。

截至 2011 年 12 月 31 日，学校共有 24 个学院 / 直属系（另有继续教育学院、技术学院和国际教育学院），19 个直属单位，12 家附属医院，全日制本科生 16802 人、研究生 24495 人（其中博士研究生 5059 人）；有专任教师 2979 名，其中教授 835 名；中国科学院院士 15 名，中国工程院院士 20 名，中组部“千人计划”49 名，“长江学者”95 名，国家杰出青年基金获得者 80 名，国家重点基础研究发展计划（973 计划）首席科学家 24 名，国家重大科学研究计划首席科学家 9 名，国家基金委创新研究群体 6 个，教育部创新团队 17 个。

学校现有本科专业 68 个，涵盖经济学、法学、文学、理学、工学、农学、医学、管理学和艺术等九个学科门类；拥有国家级教学及人才培养基地 7 个，国家级校外实践教育基地 5 个，国家级实验教学示范中心 5 个，上海市实验教学示范中心 4 个；有国家级教学团队 8 个，上海市教学团队 15 个；有国家级教学名师 7 人，上海市教学名师 35 人；有国家级精品课程 46 门，上海市精品课程 117 门；有国家级双语示范课程 7 门；2001、2005 和 2009 年，作为第一完成单位，共获得国家级教学成果 37 项、上海市教学成果 157 项。

第八章　浮动体

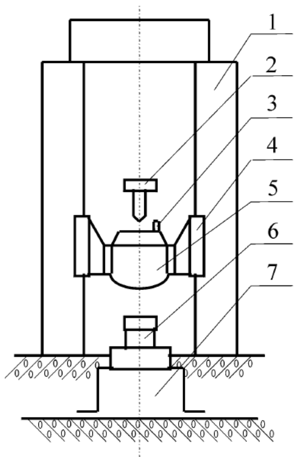
8.1　插图

插图功能是利用 TEX 的特定编译程序提供的机制实现的，不同的编译程序支持不同的图形方式。有的同学可能听说“LATEX 只支持 EPS”，事实上这种说法是不准确的。XETEX 可以很方便地插入 EPS、PDF、PNG、JPEG 格式的图片。

一般图形都是处在浮动环境中。之所以称为浮动是指最终排版效果图形的位置不一定与源文件中的位置对应，这也是刚使用 LATEX 同学可能遇到的问题。如果要强制固定浮动图形的位置，请使用 float 宏包，它提供了 [H] 参数。

8.1.1　单个图形

图要有图题，研究生图题采用中英文对照，并置于图的编号之后，图的编号和图题应置于图下方的居中位置。引用图应在图题右上角标出文献来源。当插图中组成部件由数字或字母等编号表示时，可在插图下方添加图注进行说明，如图 8–1 所示。



1. 立柱 2. 提升释放机构 3. 标准冲击加速度计
4. 导轨 5. 重锤 6. 被校力传感器 7. 底座

图 8–1 单个图形示例[he1999]。如果表格的标题很长，那么在表格索引中就会很不美观。可以在前面用中括号写一个简短的标题，这个标题会出现在索引中。

Figure 8–1 Stay hungry, stay foolish.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisici elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

8.1.2 多个图形

简单插入多个图形的例子如图 8–2 所示。这两个水平并列放置的子图共用一个图形计数器，没有各自的子图题。

图 8–2 中文题图

Figure 8–2 English caption

如果多个图形相互独立，并不共用一个图形计数器，那么用 `minipage` 或者 `parbox` 就可以，如图 8–3 与图 8–4。

图 8–3 并排第一个图

图 8–4 并排第二个图

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisici elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

如果要为共用一个计数器的多个子图添加子图题，建议使用较新的 subcaption 宏包，不建议使用 subfigure 或 subfig 等宏包。

推荐使用 subcaption 宏包的 `\subcaptionbox` 并排子图，子图题置于子图之下，子图号用 a)、b) 等表示。也可以使用 subcaption 宏包的 `\subcaption`（放在 minipage 中，用法同 `\caption`）。

搭配 bicaption 宏包时，可以启用 `\subcaptionbox` 和 `\subcaption` 的双语变种 `\bisubcaptionbox` 和 `\bisubcaption`，如图 8–5 所示。

a) $R_3 = 1.5$mm 时轴承的压力分布云图

a) Pressure contour of bearing when $R_3 =$ 1.5mm

b) $R_3 = 2.5$mm 时轴承的压力分布云图

b) Pressure contour of bearing when $R_3 =$ 2.5mm

图 8–5 包含子图题的范例（使用 subcaptionbox）

Figure 8–5 Example with subcaptionbox

subcaption 宏包也提供了 subfigure 和 subtable 环境，如图 8–6。

a) 校徽

b) 校名。注意这个图略矮些，subfigure 中同一行的子图在顶端对齐。

图 8–6 包含子图题的范例（使用 subfigure）

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisici elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

8.2 表格

8.2.1 基本表格

编排表格应简单明了，表达一致，明晰易懂，表文呼应、内容一致。表题置于表上，研究生学位论文可以用中、英文两种文字居中排写，中文在上，也可以只用中文。

表格的编排建议采用国际通行的三线表[1]。三线表可以使用 booktabs 提供的 `\toprule`、`\midrule` 和 `\bottomrule`。它们与 longtable 能很好的配合使用。

表 8–1 一个颇为标准的三线表[2]

Item		
Animal	Description	Price ($)
Gnat	per gram	13.65
	each	0.01
Gnu	stuffed	92.50
Emu	stuffed	33.33
Armadillo	frozen	8.99

8.2.2 复杂表格

我们经常会在表格下方标注数据来源，或者对表格里面的条目进行解释。可以用 threeparttable 实现带有脚注的表格，如表 8–2。

[1]三线表，以其形式简洁、功能分明、阅读方便而在科技论文中被推荐使用。三线表通常只有 3 条线，即顶线、底线和栏目线，没有竖线。

[2]这个例子来自 《Publication quality tables in LaTeX》（booktabs 宏包的文档）。这也是一个在表格中使用脚注的例子，请留意与 threeparttable 实现的效果有何不同。

表 8–2 一个带有脚注的表格的例子

Table 8–2 A Table with footnotes

total	20[a]		40		60	
	www	k	www	k	www	k
	4.22 (2.12)	120.0140[b]	333.15	0.0411	444.99	0.1387
	168.6123	10.86	255.37	0.0353	376.14	0.1058
	6.761	0.007	235.37	0.0267	348.66	0.1010

[a] the first note.

[b] the second note.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisici elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

如某个表需要转页接排，可以用 longtable 实现。接排时表题省略，表头应重复书写，并在右上方写“续表 xx”，如表 8–3。

表 8–3 实验数据

Table 8–3 Experimental data

测试程序	正常运行时间 (s)	同步时间 (s)	检查点时间 (s)	卷回恢复时间 (s)	进程迁移时间 (s)	检查点文件（KB）
CG.A.2	23.05	0.002	0.116	0.035	0.589	32491
CG.A.4	15.06	0.003	0.067	0.021	0.351	18211
CG.A.8	13.38	0.004	0.072	0.023	0.210	9890
CG.B.2	867.45	0.002	0.864	0.232	3.256	228562
CG.B.4	501.61	0.003	0.438	0.136	2.075	123862
CG.B.8	384.65	0.004	0.457	0.108	1.235	63777
MG.A.2	112.27	0.002	0.846	0.237	3.930	236473
MG.A.4	59.84	0.003	0.442	0.128	2.070	123875
MG.A.8	31.38	0.003	0.476	0.114	1.041	60627
MG.B.2	526.28	0.002	0.821	0.238	4.176	236635
MG.B.4	280.11	0.003	0.432	0.130	1.706	123793
MG.B.8	148.29	0.003	0.442	0.116	0.893	60600
LU.A.2	2116.54	0.002	0.110	0.030	0.532	28754
LU.A.4	1102.50	0.002	0.069	0.017	0.255	14915
LU.A.8	574.47	0.003	0.067	0.016	0.192	8655
LU.B.2	9712.87	0.002	0.357	0.104	1.734	101975
LU.B.4	4757.80	0.003	0.190	0.056	0.808	53522

续下页

续表 8–3

测试程序	正常运行 时间 (s)	同步 时间 (s)	检查点 时间 (s)	卷回恢复 时间 (s)	进程迁移 时间 (s)	检查点 文件（KB）
LU.B.8	2444.05	0.004	0.222	0.057	0.548	30134
EP.A.2	123.81	0.002	0.010	0.003	0.074	1834
EP.A.4	61.92	0.003	0.011	0.004	0.073	1743
EP.A.8	31.06	0.004	0.017	0.005	0.073	1661
EP.B.2	495.49	0.001	0.009	0.003	0.196	2011
EP.B.4	247.69	0.002	0.012	0.004	0.122	1663
EP.B.8	126.74	0.003	0.017	0.005	0.083	1656
SP.A.2	123.81	0.002	0.010	0.003	0.074	1854
SP.A.4	51.92	0.003	0.011	0.004	0.073	1543
SP.A.8	31.06	0.004	0.017	0.005	0.073	1671
SP.B.2	495.49	0.001	0.009	0.003	0.196	2411
SP.B.4	247.69	0.002	0.014	0.006	0.152	2653
SP.B.8	126.74	0.003	0.017	0.005	0.082	1755

8.3 算法环境

算法环境可以使用 algorithms 宏包或者较新的 algorithm2e 实现。算法 8–1 是一个使用 algorithm2e 的例子。关于排版算法环境的具体方法，请阅读相关宏包的官方文档。

算法 8–1 算法示例

Data: this text
Result: how to write algorithm with LaTeX 2_ε

initialization;
while *not at end of this document* **do**
    read current;
    if *understand* **then**
        go to next section;
        current section becomes this one;
    else
        go back to the beginning of current section;
    end
end

8.4 代码环境

我们可以在论文中插入算法，但是不建议插入大段的代码。如果确实需要插入代码，建议使用 listings 宏包。

```
#include <stdio.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>
```

```c
#include <sys/wait.h>

int main() {
  pid_t pid;

  switch ((pid = fork())) {
  case -1:
    printf("fork failed\n");
    break;
  case 0:
    /* child calls exec */
    execl("/bin/ls", "ls", "-l", (char*)0);
    printf("execl failed\n");
    break;
  default:
    /* parent uses wait to suspend execution until child finishes */
    wait((int*)0);
    printf("is completed\n");
    break;
  }

  return 0;
}
```

第九章　数学与引用文献的标注

9.1　数学

9.1.1　数字和单位

宏包 siunitx 提供了更好的数字和单位支持：

- 12 345.678 90
- $1 \pm 2\mathrm{i}$
- 0.3×10^{45}
- $1.654 \times 2.34 \times 3.430$
- $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
- µm µm
- Ω Ω
- 10 和 20
- 10, 20 和 30
- 0.13 mm, 0.67 mm 和 0.80 mm
- 10～20
- 10 ℃～20 ℃

9.1.2　数学符号和公式

微分符号 d 应使用正体，本模板提供了 `\dif` 命令。除此之外，模板还提供了一些命令方便使用:

- 圆周率 $\uppi$：`\uppi`
- 自然对数的底 e：`\upe`
- 虚数单位 i, j：`\upi` `\upj`

公式应另起一行居中排版。公式后应注明编号，按章顺序编排，编号右端对齐。

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0 \tag{9–1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \int f(x) \,\mathrm{d}x \tag{9–2}$$

公式较长时最好在等号“=”处转行。

$$\begin{aligned}
& I(X_3; X_4) - I(X_3; X_4 \mid X_1) - I(X_3; X_4 \mid X_2) \\
= & [I(X_3; X_4) - I(X_3; X_4 \mid X_1)] - I(X_3; X_4 \mid \tilde{X}_2) \qquad (9\text{–}3) \\
= & I(X_1; X_3; X_4) - I(X_3; X_4 \mid \tilde{X}_2) \qquad (9\text{–}4)
\end{aligned}$$

如果在等号处转行难以实现，也可在 +、−、×、÷ 运算符号处转行，转行时运算符号仅

书写于转行式前，不重复书写。

$$\frac{1}{2}\Delta(f_{ij}f^{ij}) = 2\left(\sum_{i<j}\chi_{ij}(\sigma_i-\sigma_j)^2 + f^{ij}\nabla_j\nabla_i(\Delta f) + \nabla_k f_{ij}\nabla^k f^{ij} + f^{ij}f^k\left[2\nabla_i R_{jk} - \nabla_k R_{ij}\right]\right) \quad (9\text{–}5)$$

9.1.3 定理环境

示例文件中使用 ntheorem 宏包配置了定理、引理和证明等环境。用户也可以使用 amsthm 宏包。

这里举一个“定理”和“证明”的例子。

定理 9.1 (留数定理) 假设 U 是复平面上的一个单连通开子集，$a_1,\cdots,a_n$ 是复平面上有限个点，f 是定义在 $U\backslash\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上的全纯函数，如果 γ 是一条把 $a_1,\cdots,a_n$ 包围起来的可求长曲线，但不经过任何一个 a_k，并且其起点与终点重合，那么：

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{I}(\gamma,a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k) \quad (9\text{–}6)$$

如果 γ 是若尔当曲线，那么 $\mathrm{I}(\gamma,a_k)=1$，因此：

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k) \quad (9\text{–}7)$$

在这里，$\mathrm{Res}(f,a_k)$ 表示 f 在点 a_k 的留数，$\mathrm{I}(\gamma,a_k)$ 表示 γ 关于点 a_k 的卷绕数。卷绕数是一个整数，它描述了曲线 γ 绕过点 a_k 的次数。如果 γ 依逆时针方向绕着 a_k 移动，卷绕数就是一个正数，如果 γ 根本不绕过 a_k，卷绕数就是零。

定理 9.1 的证明。

证明 首先，由……

其次，……

所以…… □

9.2 引用文献的标注

按照教务处的要求，参考文献外观应符合国标 GB/T 7714 的要求。模版使用 BibLaTeX 配合 biblatex-gb7714-2015 样式包[1] 控制参考文献的输出样式，后端采用 biber 管理文献。

请注意 biblatex-gb7714-2015 宏包 2016 年 9 月才加入 CTAN，如果你使用的 TeX 系统版本较旧，可能没有包含 biblatex-gb7714-2015 宏包，需要手动安装。BibLaTeX 与 biblatex-gb7714-2015 目前在活跃地更新，为避免一些兼容性问题，推荐使用较新的版本。

正文中引用参考文献时，使用 `\cite{key1,key2,key3...}` 可以产生“上标引用的参考文献”，如[**Meta_CN, chen2007act, DPMG**]。使用 `\parencite{key1,key2,key3...}` 则可以产生水平引用的参考文献，例如 **JohnD**, **zhubajie**, **IEEE-1363**。请看下面的例子，将会穿插使用水平的

[1] https://www.ctan.org/pkg/biblatex-gb7714-2015

和上标的参考文献：关于书的**Meta_CN**, **JohnD**, **IEEE-1363**，关于期刊的[chen2007act, chen2007ewi]，会议论文 **DPMG**, **kocher99**, **cnproceed**，硕士学位论文**zhubajie**, **metamori2004**，博士学位论文[shaheshang, FistSystem01, bai2008]，标准文件 **IEEE-1363**，技术报告[NPB2]，电子文献 **xiaoyu2001**, **CHRISTINE1998**，用户手册 **RManual**。

当需要将参考文献条目加入到文献表中但又不在正文中引用，可以使用 `\nocite{key1,key2,key3...}`。使用 `\nocite{*}` 可以将参考文献数据库中的所有条目加入到文献表中。

全文总结

这里是全文总结内容。

2015年2月28日，中央在北京召开全国精神文明建设工作表彰暨学雷锋志愿服务大会，公布全国文明城市（区）、文明村镇、文明单位名单。上海交通大学荣获全国文明单位称号。

全国文明单位这一荣誉是对交大人始终高度重视文明文化工作的肯定，是对交大长期以来文明创建工作成绩的褒奖。在学校党委、文明委的领导下，交大坚持将文明创建工作纳入学校建设世界一流大学的工作中，全体师生医护员工群策群力、积极开拓，落实国家和上海市有关文明创建的各项要求，以改革创新、科学发展为主线，以质量提升为目标，聚焦文明创建工作出现的重点和难点，优化文明创建工作机制，传播学校良好形象，提升社会美誉度，显著增强学校软实力。2007至2012年间，上海交大连续三届荣获“上海市文明单位”称号，成为创建全国文明单位的新起点。

上海交大自启动争创全国文明单位工作以来，凝魂聚气、改革创新，积极培育和践行社会主义核心价值观。坚持统筹兼顾、多措并举，将争创全国文明单位与学校各项中心工作紧密结合，着力构建学校文明创建新格局，不断提升师生医护员工文明素养，以“冲击世界一流大学汇聚强大精神动力”为指导思想，以“聚焦改革、多元推进、以评促建、丰富内涵、彰显特色”为工作原则，并由全体校领导群策领衔“党的建设深化、思想教育深入、办学成绩显著、大学文化丰富、校园环境优化、社会责任担当”六大板块共28项重点突破工作，全面展现近年来交大文明创建工作的全貌和成就。

进入新阶段，学校将继续开拓文明创建工作新格局，不断深化工作理念和工作实践，创新工作载体、丰富活动内涵、凸显创建成效，积极服务于学校各项中心工作和改革发展的大局面，在上级党委、文明委的关心下，在学校党委的直接领导下，与时俱进、开拓创新，为深化内涵建设、加快建成世界一流大学、推动国家进步和社会发展而努力奋斗！

上海交通大学医学院附属仁济医院也获得全国文明单位称号。

附录 A　Maxwell Equations

选择二维情况，有如下的偏振矢量：

$$E = E_z(r,\theta)\hat{z} \tag{A–1a}$$

$$H = H_r(r,\theta)\hat{r} + H_\theta(r,\theta)\hat{\theta}\mathbf{0} \tag{A–1b}$$

对上式求旋度：

$$\nabla\times E = \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\hat{\theta}\mathbf{0} \tag{A–2a}$$

$$\nabla\times H = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\hat{z} \tag{A–2b}$$

因为在柱坐标系下，$\overline{\overline{\mu}}$ 是对角的，所以 Maxwell 方程组中电场 E 的旋度：

$$\nabla\times E = \mathrm{i}\omega B \tag{A–3a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\hat{\theta}\mathbf{0} = \mathrm{i}\omega\mu_r H_r\hat{r} + \mathrm{i}\omega\mu_\theta H_\theta\hat{\theta}\mathbf{0} \tag{A–3b}$$

所以 H 的各个分量可以写为：

$$H_r = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_r}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\theta} \tag{A–4a}$$

$$H_\theta = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_\theta}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{A–4b}$$

同样地，在柱坐标系下，$\overline{\overline{\epsilon}}$ 是对角的，所以 Maxwell 方程组中磁场 H 的旋度：

$$\nabla\times H = -\mathrm{i}\omega D \tag{A–5a}$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\hat{z} = -\mathrm{i}\omega\overline{\overline{\epsilon}}E = -\mathrm{i}\omega\epsilon_z E_z\hat{z} \tag{A–5b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta} = -\mathrm{i}\omega\epsilon_z E_z \tag{A–5c}$$

由此我们可以得到关于 E_z 的波函数方程：

$$\frac{1}{\mu_\theta\epsilon_z}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mu_r\epsilon_z}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\theta^2} + \omega^2 E_z = 0 \tag{A–6}$$

附录 B　绘制流程图

图 B–1 是一张流程图示意。使用 tikz 环境，搭配四种预定义节点（`startstop`、`process`、`decision` 和`io`），可以容易地绘制出流程图。

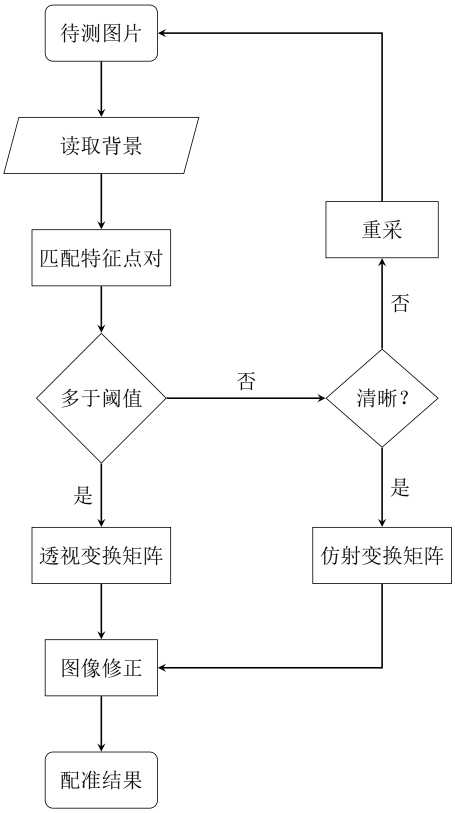


图 B–1 绘制流程图效果
Figure B–1 Flow chart

致　谢

感谢那位最先制作出博士学位论文 LaTeX 模板的交大物理系同学！
感谢 William Wang 同学对模板移植做出的巨大贡献！
感谢 @weijianwen 学长一直以来的开发和维护工作！
感谢 @sjtug 以及 @dyweb 对 0.9.5 之后版本的开发和维护工作！
感谢所有为模板贡献过代码的同学们, 以及所有测试和使用模板的各位同学！
感谢 LaTeX 和 BUPTTHESIS，帮我节省了不少时间。