Question 1

试证以下的集合等式, 其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+1},+\infty\right)=[1,+\infty).$$

证明. 一方面, 由于 $1>\frac{n}{n+1}$, 所以 $x\geqslant 1\Rightarrow x>\frac{n}{n+1}$.
故

$$\forall n\in\mathbb{N},\ [1,+\infty)\subseteq\left(\frac{n}{n+1},+\infty\right).$$

因而有

$$[1,+\infty)\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+1},+\infty\right).$$

另一方面, 若 $x\notin[1,+\infty)$, 则 $x<1$,
从而 $0<\frac{1}{1-x}$. 再根据实数有 Archimedes 性知道

$$\exists N_0\in\mathbb{N}, N_0>\frac{1}{1-x}.$$

从而

$$x<\frac{N_0-1}{N_0}<\frac{N_0}{N_0+1}.$$

这说明

$$x\notin\left(\frac{N_0}{N_0+1},+\infty\right).$$

根据交集的定义知道

$$x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+1},+\infty\right).$$

因此,

$$x\notin[1,+\infty)\Rightarrow x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+1},+\infty\right).$$

这说明

$$[1,+\infty)\supseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n}{n+1},+\infty\right).$$

根据集合相等的定义, 知结论成立. □