第四章　不定积分与条件期望

4.1　符号测度

定义 4.1.1 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，称$\varphi:\mathscr{F}\to\bar{\mathbb{R}}$为**可加集函数**或者**符号测度**，如果$\varphi(\varnothing)=0$，且对于不相交集类$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{F}$有

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n) \tag{4.1}$$

进一步，若存在$\{B_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathscr{F}$，使得$\varphi(B_n)\in\mathbb{R}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\Omega$，则称$\varphi$为**$\sigma$有限符号测度**；若$\varphi(\mathscr{F})\subset\mathbb{R}$，称符号测度$\varphi$为**有限符号测度**。

引理 4.1.1 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，φ是符号测度。若存在$A\in\mathscr{F}$使得$\varphi(A)=\infty$，则$\varphi(\Omega)=\infty$；若存在$B\in\mathscr{F}$使得$\varphi(B)=-\infty$，则$\varphi(\Omega)=-\infty$；$\varphi(\mathscr{F})$为$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$或$\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$的子集。

证明： 若存在$A\in\mathscr{F}$使得$\varphi(A)=\infty$，则由符号测度的有限可加性知

$$\varphi(\Omega)=\varphi(A)+\varphi(A^c)=\infty \tag{4.2}$$

若存在$B\in\mathscr{F}$使得$\varphi(B)=-\infty$，则由符号测度的有限可加性知

$$\varphi(\Omega)=\varphi(B)+\varphi(B^c)=-\infty \tag{4.3}$$

由(4.2)和(4.3)知$\varphi(\mathscr{F})$为$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$或$\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$的子集。 □

引理 4.1.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，则$\mathscr{F}$上的符号测度φ具有如下性质：

1° **有限可加性**，即对于任何互不相交的可测集$A_1,A_2,\ldots,A_n$有

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\varphi(A_k)$$

2° **可减性**，即对可测集$A\subset B$，若$\varphi(A)\in\mathbb{R}$，则

$$\varphi(B\backslash A)=\varphi(B)-\varphi(A)$$

3° **加法公式**，即若可测集$A_1,A_2,\ldots,A_n$满足条件$\varphi(A_k)\in\mathbb{R},1\leqslant k\leqslant n$，则有

$$\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\varphi(A_{i_1}\cdots A_{i_k})$$

4° **下方连续性**，即若$A_n\subset A_{n+1},n\in\mathbb{N}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

5° **上方连续性**，即若$A_n\supset A_{n+1},n\in\mathbb{N}$，并且存在$m$使得$\varphi(A_m)\in\mathbb{R}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

证明： 利用定理1.3.1和定理1.3.2的证明思路可得这些性质。 □

定义 4.1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，若$\int f$存在，

$$\varphi(A)\triangleq\int_A f,\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

则称φ为**f对μ的不定积分**。

引理 4.1.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间，若$\int f$存在，则f对μ的不定积分φ为符号测度。进一步，当f可积时，φ是有限的符号测度。

证明： 当$\int f$存在时，记$\varphi^+(A)=\int_A f^+$，$\varphi^-(A)=\int_A f^-$。由定理3.2.1知φ^+和φ^-均为$\mathscr{F}$上的测度，并且它们之中至少有一个为有限测度，因此$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$为符号测度。

当f可积时，由定理3.2.2的积分单调性和可分个性知φ是有限的符号测度。 □

定义 4.1.3 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间。若 $\mathscr{F}$ 的互不相交子集类 $\{A_k: 1\leqslant k\leqslant n\}$ 满足条件 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$ 就称该子集类是A**的一个有限分割**，简称为A**的一个分割**，其中 $n\in\mathbb{N}$；若 $\mathscr{F}$ 的互不相交集类 $\{A_n: n\in\mathbb{N}\}$ 满足条件 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$，就称该子集类是$A$**的一个可数分割**，简称为$A$**的一个分割**。

进一步，设$\mathscr{A}_1$和$\mathscr{A}_2$是A的两个分割，若对于任何$B_2\in\mathscr{A}_2$，都存在$B_1\in\mathscr{A}_1$，使得$B_2\subset B_1$，则称$\mathscr{A}_2$是$\mathscr{A}_1$的一个**加细**。

定理 4.1.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为可测空间，f为可测函数。若$\int f$存在，则f对μ的不定积分φ具有如下性质：

1° 若$\mu(A)=0$，则$\varphi(A)=0$；

2° 若f几乎处处有限，μ是σ有限测度，则φ是$\mathscr{F}$上的σ有限符号测度；

证明： 当$\mu(A)=0$时，$f\mathbb{1}_A=0,$ a.e.由引理3.1.8知

$$\varphi(A)=\int_A f=\int f\mathbb{1}_A=0$$

即1°成立。

当f几乎处处有限，且μ是σ有限测度时，由引理4.1.3知φ为符号测度，且存在Ω的分割$\{B_m: m\in\mathbb{N}\}$使得$\mu(B_m)<\infty$，$m\in\mathbb{N}$。因此

$$|\varphi(A_n\cap B_m)|\leqslant\int_{A_n\cap B_m}|f|\leqslant n\mu(B_m)<\infty,\quad \forall n\geqslant 0, m\geqslant 1$$

其中$A_n=f^{-1}((-n,n])$，$n\in\mathbb{N}$，$A_0=f^{-1}(\{-\infty,\infty\})$。注意到$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_nB_m)=\Omega$ 得2°。 □

定理 4.1.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，φ是符号测度。则存在$P,N\in\mathscr{F}$，使得$\Omega=P\cup N,\varnothing=P\cap N$，且

$$\varphi(P)=\sup_{A\in\mathscr{F}}\varphi(A),\quad \varphi(N)=\inf_{A\in\mathscr{F}}\varphi(A) \tag{4.4}$$

证明： 当$\varphi(\mathscr{F})\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$时，存在$\{A_n: n\in\mathbb{N}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\sup_{A\in\mathscr{F}}\varphi(A) \tag{4.5}$$

取定$n\in\mathbb{N}$，考虑Ω的分割

$$\mathscr{A}_n=\{A_{1,t_1}\cap A_{2,t_2}\cap\cdots\cap A_{n,t_n}: t_k\in\{0,1\}\}$$

其中

$$A_{n,k}=\begin{cases} A_n, & k=0\\ A_n^c, & k=1\end{cases}$$

记

$$\mathscr{A}_n^+=\{A\in\mathscr{A}_n:\varphi(A)>0\},\quad B_n=\bigcup_{A\in\mathscr{A}_n^+}A$$

则由符号测度的可加性知

$$\varphi(A_n)=\sum_{A\in\mathscr{A}_n}\varphi(A_n\cap A)\leqslant\sum_{A\in\mathscr{A}_n^+}\varphi(A_n\cap A)=\varphi(B_n) \tag{4.6}$$

另一方面，记$B_{n,m}=\bigcup_{k=0}^{m}B_{n+k}, m\geqslant 0$，注意到当$s<t$时，分割$\mathscr{A}_t$是$\mathscr{A}_s$的加细，可得

$$\begin{aligned}
B_{n,m} &= B_{n,m-1}\cup B_{n+m}\\
&= B_{n,m-1}\cup\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+},\ A\cap B_{n,m-1}=A} A\right)\\
&\qquad \cup\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+},\ A\cap B_{n,m-1}=\varnothing} A\right)\\
&= B_{n,m-1}\cup\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+},\ A\cap B_{n,m-1}=\varnothing} A\right)
\end{aligned}$$

由符号测度的可加性知：对于任意$m\in\mathbb{N}$有

$$\varphi\left(B_{n,m}\right)=\varphi\left(B_{n,m-1}\right)+\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}_{n+m}^{+}\\ A\cap B_{n,m-1}=\varnothing}}\varphi\left(A\right)\geqslant\varphi\left(B_{n,m-1}\right)$$

因此

$$\varphi\left(B_n\right)=\varphi\left(B_{n,0}\right)\leqslant\varphi\left(B_{n,m}\right),\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

代入到(4.6)得

$$\varphi\left(A_n\right)\leqslant\varphi\left(B_{n,m}\right),\quad\forall m\in\mathbb{N}$$

注意到$B_{n,m}\subset B_{n,m+1}$，由符号测度的下方连续性得

$$\varphi\left(A_n\right)\leqslant\lim_{m\to\infty}\varphi\left(B_{n,m}\right)=\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_{n+k}\right),\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

再注意到

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}B_{n+k}=\bigcup_{k=n}^{\infty}B_k\supset\bigcup_{k=n+1}^{\infty}B_k=\bigcup_{k=0}^{\infty}B_{n+1+k}$$

由(4.5)和符号测度的上方连续性得

$$\sup_{A\in\mathscr{F}}\varphi\left(A\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n+k}\right)=\varphi\left(P\right)\tag{4.7}$$

其中$P=\lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n+k}\right)$。

取$N=P^c$，则$P\cap N=\varnothing, P\cup N=\Omega$。由于

$$0=\varphi\left(\varnothing\right)\leqslant\varphi\left(P\right)<\infty$$

所以当$\varphi\left(\Omega\right)=-\infty$时，

$$\varphi\left(P^c\right)=\varphi\left(\Omega\right)-\varphi\left(P\right)=-\infty\leqslant\varphi\left(A\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

当$\varphi\left(\Omega\right)>-\infty$时，$\varphi\left(\mathscr{F}\right)\subset\mathbb{R}$，从而

$$\varphi\left(A\right)=\varphi\left(\Omega\right)-\varphi\left(A^c\right)\geqslant\varphi\left(\Omega\right)-\varphi\left(P\right)=\varphi\left(N\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

即此时定理结论成立。

当$\varphi\left(\mathscr{F}\right)\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$不成立时，令$\psi=-\varphi$，则$\psi$也为符号测度，且由引理4.1.1知

$$\psi\left(\mathscr{F}\right)=-\varphi\left(\mathscr{F}\right)\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$

因此存在$N,P\in\mathscr{F}$使得$P\cap N=\varnothing, P\cup N=\Omega$，且

$$\psi\left(P\right)=\inf_{A\in\mathscr{F}}\psi\left(A\right),\quad\psi\left(N\right)=\sup_{A\in\mathscr{F}}\psi\left(A\right)$$

即此时定理解了也成立。 □

定理 4.1.3 (Hahn分解定理) 设φ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的符号测度，则存Ω的分割P和N 使得

$$\varphi(A\cap P)=\sup_{B\in\mathscr{F}\cap A}\varphi(B),\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{4.8}$$

$$\varphi(A\cap N)=\inf_{B\in\mathscr{F}\cap A}\varphi(B),\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{4.9}$$

进一步，对于任意$A\in\mathscr{F}$，记

$$\varphi^+(A)\triangleq\varphi(A\cap P) \tag{4.10}$$

$$\varphi^-(A)\triangleq-\varphi(A\cap N) \tag{4.11}$$

$$|\varphi|(A)\triangleq\varphi^+(A)+\varphi^-(A) \tag{4.12}$$

则φ^+、φ^-和$|\varphi|$都是$\mathscr{F}$上的测度，且[1]

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^- \tag{4.13}$$

证明： 由定理4.1.2知存在$P,N\in\mathscr{F}$，使得$\Omega=P\cup N,\varnothing=P\cap N$，且(4.4)成立。

对于给定$A\in\mathscr{F}$，若(4.8)不成立，则存在$B\in\mathscr{F}\cap A$，使得$\varphi(A\cap P)<\varphi(B)$。注意到$B\subset A$，由符号测度的可加性得

$$\begin{aligned}\varphi(P)&=\varphi(A\cap P)+\varphi(A^c\cap P)\\&<\varphi(B)+\varphi(A^c\cap P)=\varphi(B\cup(A^c\cap P))\end{aligned}$$

与(4.4)相矛盾。因此(4.8)成立。

类似地，利用反证法可以证明(4.9)成立。

注意到$\varphi(\varnothing)=0$，由(4.8)和(4.9)知φ^+、φ^-和$|\varphi|$都是非负集函数，注意到它们都满足可列可加性知：它们都是$\mathscr{F}$上的测度。由符号测度的可加性得

$$\varphi(A)=\varphi(A\cap P)+\varphi(A\cap N)=\varphi^+(A)-\varphi^-(A)$$

即(4.13)成立。 □

定义 4.1.4 设φ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的符号测度，分别称*(4.10)*至*(4.12)*中的φ^+、φ^-和$|\varphi|$为φ**的上变差、下变差和全变差**，称*(4.13)*中表达式为φ的*Hahn***分解**。

4.2 符号测度的分解

定义 4.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，φ是$\mathscr{F}$上的集函数。若由$\mu(A)=0$能推出$\varphi(A)=0$，其中$A\in\mathscr{F}$，则称φ为μ**连续**，记为$\varphi\ll\mu$；若存在$N\in\mathscr{F}$，使得$\mu(N)=0$，且

$$\varphi(A\cap N^c)=0,\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

则称φ为μ**奇异**。

定理 4.2.1 (Lebesgue分解定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，φ是$\mathscr{F}$上的符号测度。若μ和φ都是σ有限的，则

$$\varphi=\varphi_c+\varphi_s \tag{4.14}$$

其中φ_s是μ奇异符号测度，$\varphi_c\ll\mu$，且

$$\varphi_c(A)=\int_A f,\quad\forall A\in\mathscr{F} \tag{4.15}$$

这里f是一个几乎处处有限的、关于μ积分存在的可测函数。进一步，*(4.15)*的f是几乎处处唯一确定的。

证明： 分四步证明定理结论。

1. 往证μ和φ均为有限测度时(4.14)和(4.15)成立。

记

$$\Phi=\left\{f:f\text{为非负可测函数},\int_A f\leqslant\varphi(A),\forall A\in\mathscr{F}\right\} \tag{4.16}$$

[1]教材上需要条件：当φ^+和φ^-中至少有一个为有限测度。但是由符号测度定义的合理性，似乎可以不要这个条件。

则

$$0 \leqslant \int f \leqslant \varphi(\Omega) < \infty, \quad \forall f \in \Phi \tag{4.17}$$

因此存在$\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$，使得

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n = \sup_{g\in\Phi} \int g \tag{4.18}$$

令

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \tag{4.19}$$

往证$f \in \Phi$。

事实上，对于任意$A \in \mathscr{F}$，由单调收敛定理得

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k \tag{4.20}$$

记$B_1 = \{f_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k\}$，

$$B_k = \left\{f_k = \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k\right\} \Big\backslash \left(\bigcup_{s=1}^{k-1} B_s\right), \quad \forall 1 < k \leqslant n$$

则$B_1, \ldots, B_n$是Ω的一个分割。注意到$f_k \in \Phi$，由积分的线性性质得

$$\begin{aligned}\int_A \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k &= \int_A \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k\right) \sum_{t=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \int_A f_k \mathbb{1}_{B_k} \leqslant \sum_{t=1}^{n} \varphi(AB_k) = \varphi(A)\end{aligned}$$

再由(4.20)得$f \in \Phi$。记

$$\varphi_c(A) = \int_A f, \quad \varphi_s(A) = \varphi(A) - \varphi_c(A), \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.21}$$

则$\varphi_c \ll \mu$，(4.14)成立。由$f \in \Phi$知φ_s为测度，下需证明 φ_s 为 μ 奇异。

记[2]

$$\psi_n = \varphi_s - \frac{1}{n}\mu \tag{4.22}$$

由Hahn分解定理4.1.3知存在$D_n \in \mathscr{F}$，使得

$$\psi_n(A \cap D_n) \leqslant 0, \quad \psi_n(A \cap D_n^c) \geqslant 0, \quad \forall A \in \mathscr{F} \tag{4.23}$$

记$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$，则

$$\begin{aligned}0 \leqslant \varphi_s(A \cap D) &= \psi_n(A \cap D \cap D_n) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\mu(A \cap D) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall A \in \mathscr{F}\end{aligned}$$

现在只需证明 $\mu(D^c) = 0$，即只需对于任意$n \in \mathbb{N}$证明$\mu(D_n^c) = 0$。

事实上，对于任意$A \in \mathscr{F}$，由积分的线性性质、(4.21)、(4.22)和(4.23)得

$$\begin{aligned}\int_A \left(f + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{D_n^c}\right) &= \varphi_c(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n^c) \\ &= \varphi(A) - \varphi_s(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n^c) \\ &\leqslant \varphi(A) - \varphi_s(A \cap D_n^c) + \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n^c) \\ &= \varphi(A) - \psi_n(A \cap D_n^c) \leqslant \varphi(A)\end{aligned}$$

[2]直观上，$\int_A f$应该是从小的方向最接近于$\varphi(A)$，因此$\varphi_s - \frac{1}{n}\mu$只能是不超过0的符号测度。

因此$f+\frac{1}{n}\mathbb{1}_{D_n^c}\in\Phi$，再注意到(4.17)和(4.19)得

$$\begin{aligned}\infty>\varphi(\Omega)&\geqslant\int f\geqslant\lim_{n\to\infty}\int f_n=\sup_{g\in\Phi}\int g\\&\geqslant\int\left(f+\frac{1}{n}\mathbb{1}_{D_n^c}\right)=\int f+\frac{1}{n}\mu\left(D_n^c\right)\geqslant 0\end{aligned}$$

注意到$\mu\left(D_n^c\right)\geqslant 0$，立得$\mu\left(D_n^c\right)=0$。

2. 往证μ和φ均为σ有限测度时(4.14)和(4.15)成立。

此时存在Ω的一个分割$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$，使得

$$\mu\left(A_n\right)<\infty,\quad\varphi\left(A_n\right)<\infty,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

记

$$\mu_n(A)=\mu\left(A\cap A_n\right),\quad\varphi_n(A)=\varphi\left(A\cap A_n\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.24}$$

则μ_n和φ_n均为有限测度。因此存在可积函数f_n，使得

$$\varphi_{n,c}(A)=\int_A f_n\mathrm{d}\mu_n\tag{4.25}$$

是μ_n连续测度，并且

$$\varphi_{n,s}=\varphi_n-\varphi_{n,c}\tag{4.26}$$

为μ_n奇异测度。记

$$\varphi_c=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,c},\quad\varphi_s=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,s}\tag{4.27}$$

注意到$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$为Ω的一个分割，由(4.24)至(4.27)和测度的可列可加性得(4.14)；注意到[3]

$$\int_A f_n\mathrm{d}\mu_n=\int_{A\cap A_n}f_n$$

利用单调收敛定理3.9.1

$$\varphi_c(A)=\int_A\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\mathbb{1}_{A_n}\right),\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

即$\varphi_c\ll\mu$；由$\varphi_{n,s}$为μ_n奇异测度知存在$D_n\in\mathscr{F}$，使得$\mu_n\left(D_n\right)=0$，且

$$\varphi_{n,s}\left(A\cap D_n^c\right)=0,\quad\forall A\in\mathscr{F}$$

记$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$，则$0\leqslant\mu(D)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(D_n\right)=0$，且

$$\varphi_s\left(A\cap D^c\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,s}\left(A\cap D^c\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,s}\left(A\cap D_n^c\right)=0$$

即φ_s为μ奇异测度。

3. 往证μ为σ有限测度、φ是σ有限符号测度时(4.14)和(4.15)成立。

由Hahn分解定理4.1.3知

$$\varphi=\varphi^+-\varphi^-\tag{4.28}$$

其中φ^+和φ^-均为σ有限测度。因此存在非负可测函数f和g，使得

$$\varphi_c^+(A)=\int_A f,\varphi_c^-(A)=\int_A g,\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.29}$$

$$\varphi^+=\varphi_c^++\varphi_s^+,\quad\varphi^-=\varphi_c^-+\varphi_s^-\tag{4.30}$$

其中φ_s^+和φ_s^-都关于μ奇异。由引理4.1.1知$\varphi^+(\Omega)$和$\varphi^-(\Omega)$中至少有一个为实数，即φ^+和φ^-之中至少有一个为有限测度。因此由(4.28)和(4.30)可得

$$\varphi=\left(\varphi_c^+-\varphi_c^-\right)+\left(\varphi_s^+-\varphi_s^-\right)$$

由(4.29)知$\left(\varphi_c^+-\varphi_c^-\right)\ll\mu$，由$\varphi_s^+$和$\varphi_s^-$都关于$\mu$奇异知$\varphi_s^+-\varphi_s^-$关于$\mu$奇异。

4. 往证(4.15)的f是几乎处处唯一确定的。

[3]详见后面练习题。

若φ有两个不同的分解

$$\varphi(A)=\int_A f+\psi_1(A),\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{4.31}$$

$$\varphi(A)=\int_A g+\psi_2(A),\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{4.32}$$

其中ψ_1和ψ_2均为μ奇异符号测度。由μ奇异符号测度的定义知$N\in\mathscr{F}$，使得$\mu(N)=0$，且

$$\psi_1(A\cap N^c)=\psi_2(A\cap N^c)=0,\quad \forall A\in\mathscr{F}$$

再由(4.31)和(4.32)知

$$\int_A f\mathbb{1}_{N^c}=\int_A g\mathbb{1}_{N^c},\quad \forall A\in\mathscr{F}$$

由积分的单调性定理3.2.3得

$$f\mathbb{1}_{N^c}\leqslant g\mathbb{1}_{N^c},\text{a.e.},\quad f\mathbb{1}_{N^c}\geqslant g\mathbb{1}_{N^c},\text{a.e.}$$

即f和g几乎处处相等。

综上所述，定理结论成立。 □

练习 4.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，$\int f$存在，$B\in\mathscr{F}$，试证明$\int_A f\mathrm{d}\nu=\int_{A\cap B}f\mathrm{d}\mu$，其中$\nu(A)=\mu(A\cap B)$。

练习 4.2.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，ψ_1和ψ_2均为μ奇异符号测度，试证明存在$N\in\mathscr{F}$，使得

$$\mu(N)=\psi_1(A\cap N^c)=\psi_2(A\cap N^c)=0,\quad \forall A\in\mathscr{F}$$

定义 4.2.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为σ有限测度空间，φ为$\mathscr{F}$上的符号测度，若可测函数f满足如下条件

$$\varphi(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu,\quad \forall A\in\mathscr{F}$$

则称f为φ关于μ的*Radon*导数，并将该*Radon*导数记为$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$。

定理 4.2.2 (Radon-Nikodym定理) 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，μ是$\mathscr{F}$上的σ有限测度，φ为$\mathscr{F}$上的符号测度。若$\varphi\ll\mu$，则φ是某一可测函数f的不定积分，且f几乎处处由φ唯一决定。

证明： 1. 假设μ是有限测度和φ为测度，往证φ是某一可测函数f的不定积分。

记

$$\mathscr{C}=\left\{A\in\mathscr{F}:\varphi\text{在}A\text{上}\sigma\text{有限}\right\}$$

则$s=\sup_{A\in\mathscr{C}}\mu(A)<\infty$。因此存在$B_n\in\mathscr{C}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=s \tag{4.33}$$

显然$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{C}$，即$\varphi$在$B$上$\sigma$有限。由Legesgue分解定理4.2.1知：存在$\mathscr{F}\cap B$可测函数$g\geqslant 0$，使得

$$\varphi(A\cap B)=\int_A g\mathbb{1}_B+\varphi_s(A\cap B),\quad \forall A\in\mathscr{F}$$

其中φ_s是μ奇异符号测度。注意到$\varphi\ll\mu$，可得$\varphi_s=0$，即有

$$\varphi(A\cap B)=\int_A g\mathbb{1}_B,\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{4.34}$$

对于任何$P\in\mathscr{F}\cap B^c$，若$\mu(P)>0$，由(4.33)知

$$\mu(P\cup B)=\mu(P)+\mu(B)>\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\sup_{A\in\mathscr{C}}\mu(A)$$

因此$P\cup B\notin\mathscr{C}$，即$\varphi(P)=\infty$。定义

$$f=g\mathbb{1}_B+\varphi(\Omega)\mathbb{1}_{B^c}$$

则f为非负$\mathscr{F}$可测函数，并且

$$\varphi(A)=\int_A f,\quad \forall A\in\mathscr{F} \tag{4.35}$$

2. 假设μ是σ有限测度和φ为测度，往证φ是某一可测函数f的不定积分。

取Ω的分割$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得$\mu(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$。因此存在$\mathscr{F} \cap A_n$可测函数$f_n \geqslant 0$使得

$$\varphi(A \cap A_n) = \int_A f_n \mathbb{1}_{A_n}, \quad \forall A \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$$

由积分的单调收敛定理和φ的σ可加性知

$$\varphi(A) = \int_A f, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

其中$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbb{1}_{A_n}$。

3. 假设μ是σ有限测度和φ为符号测度，往证φ是某一可测函数f的不定积分。

由Hahn分解定理4.1.3知

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \tag{4.36}$$

存在可测函数g和h，使得

$$\varphi^+(A) = \int_A g, \quad \varphi^-(A) = \int_A h, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

由引理4.1.1知$\varphi^+(A)$和$\varphi^-(A)$至少有一个为实数，因此

$$\varphi(A) = \int_A f, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

其中$f = g - h$。

4. 假设φ是某一可测函数f的不定积分，往证f几乎处处由φ唯一决定。

若φ既是可测函数f的不定积分，也是可测函数g的不定积分，则

$$\int_A f = \int_A g, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

由积分的单调性定理3.2.3可得$f = g$, a.e.。 □

定理 4.2.3 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为$\sigma$有限测度空间，若$\mathscr{F}$上的测度$\varphi \ll \mu$，$f$为$\mathscr{F}$可测函数，则$f$关于$\varphi$的积分存在的充分必要条件是$\int f \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$存在，且在积分存在的情况下有

$$\int_A f \mathrm{d}\varphi = \int_A f \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

证明： 由Radon-Nikodym定理4.2.2知

$$\varphi(A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}$$

从而对于任何非负简单函数f有

$$\int f \mathrm{d}\varphi = \int f \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu$$

因此定理结论成立。 □

定理 4.2.4 (分布函数分解定理) 任一有界*L-S*测度的分布函数F都可以分解为

$$F = F_c + F_d + F_s \tag{4.37}$$

其中

$$F_c(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t) \mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.38}$$

即F_c可以用$\mathbb{R}$上某非负可积函数p的L积分表示；

$$F_d(x) = \sum_{t \in \{a \in D : a \leqslant x\}} g(t), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.39}$$

这里$D = \big\{x \in R : x\text{为}F\text{的不连续点}\big\}$为可数或有限集，而$g(t) = F(t) - \lim_{n\to\infty} F\left(t - \frac{1}{n}\right)$；$F_s$为一连续有界分布函数，它所对应的*L-S*测度关于L测度奇异。

证明： 设μ是F所对应的L-S测度，由Legesgue分解定理4.2.1得

$$\mu = \mu_c + \nu \tag{4.40}$$

其中μ_c关于L测度连续，ν关于L测度奇异。

显然$g(t)=\mu(\{t\})$，因此

$$D=\{x:\mu(\{x\})>0\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n \tag{4.41}$$

其中$D_0=\{x:\mu(\{x\})\geqslant 1\}$，

$$D_n=\left\{x:\frac{1}{n}>\mu(\{x\})\geqslant\frac{1}{n+1}\right\},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

注意到F为有界增函数，知D_n为有限集，因此D为可数集。记

$$\mu_d(A)=\nu(A\cap D),\quad \mu_s(A)=\nu(A\cap D^c),\quad \forall A\in\mathscr{B} \tag{4.42}$$

则μ_d和μ_s都关于L测度奇异，且

$$\nu=\mu_d+\mu_s \tag{4.43}$$

$$\mu_d((-\infty,x])=\sum_{t\in\{a\in D:a\leqslant x\}}\mu(\{t\})=F_d(x),\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.44}$$

由(4.40)和(4.43)得

$$\mu=\mu_c+\mu_d+\mu_s \tag{4.45}$$

再由(4.41)和(4.42)得

$$\mu_s(\{x\})=0,\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{4.46}$$

由Radon-Nikodym定理4.2.2知存在非负可测函数p，使得

$$\mu_c(A)=\int_A p(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall A\in\mathscr{B}$$

因此(4.38)中的$F_c(x)$为μ_c所对应的分布函数；由(4.44)知F_d为右连续的有界增函数，该函数对应的L-S测度为μ_d；由(4.45)知

$$\begin{aligned}\mu_s((-\infty,x])&=\mu((-\infty,x])-\mu_c((-\infty,x])-\mu_d((-\infty,x])\\&=\mu((-\infty,x])-\int_{-\infty}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{t\in\{a\in D:a\leqslant x\}}g(t)\\&=F(x)-\lim_{n\to-\infty}F(n)-F_c(x)-F_d(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

因此$F_s=F-F_c-F_d$为有界右连续增函数，它所对应的L-S测度为μ_s，再由(4.46)知F_s还为连续函数。

综上所述，(4.37)成立。 □

定义 4.2.3 *设F为有界L-S测度的分布函数，称该函数的分解式(4.37)中的F_c为F的***绝对连续部分***，称F_d为F的***离散部分***，称F_s为F的***奇异部分***。*

例 2.1 (奇异分布的例子) 考虑集合

$$A_n=\{(x_1,\ldots,x_{n-1},1):x_k\in\{0,2\},1\leqslant k\leqslant n-1\}$$

记

$$D_{n,a}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k},\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}+\frac{1}{3^n}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N},a\in A_n \tag{4.47}$$

$$D_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{a\in A_n}D_{n,a},\quad P_0=[0,1]\setminus D_0 \tag{4.48}$$

其中a_k为a的第k分量。试构造奇异分布函数F，使得当$x\in D_0$时有

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{n+1}},\quad \forall x\in D_{n,a},a\in A_n,n\in\mathbb{N} \tag{4.49}$$

解： 对于任何$x,y\in D_0$，存在

$$n,m\in\mathbb{N},\ a=(a_1,\ldots,a_n)\in A_n,b=(b_1,\ldots,\ b_m)\in A_m$$

使得$x \in D_{n,a}, y \in D_{m,b}$，由(4.47)得

$$x \in \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right), \quad y \in \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k} + \frac{1}{3^m} \right) \tag{4.50}$$

1. 往证$F: D_0 \to [0,1]$为增函数。

当$x<y$时，注意到$\{D_{n,a}: n \in \mathbb{N}, a \in A_n\}$中的各个区间互不相交得：若$D_{n,a} \cap D_{m,b} \neq \varnothing$，可得$n=m, a=b$，从而

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = F(y) \tag{4.51}$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k}$，若$D_{n,a} \cap D_{m,b} \neq \varnothing$，存在正数$s$，使得

$$a_s = 0, \quad b_s = 2, \quad a_k = b_k, \quad \forall 1 \leqslant k < s$$

由(4.49)得

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{2}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{s-1} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{\frac{2}{2^{s+2}} - \frac{2}{2^{n+2}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{s-1} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{2}{2^{s+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = F(y) \end{aligned} \tag{4.52}$$

由(4.51)和(4.52)F在D_0上为增函数。

2. 往证当$x, y \in D_0$和$0 < y - x < \frac{1}{3^s}$ 时有

$$0 \leqslant F(y) - F(x) \leqslant \frac{1}{2^s} \tag{4.53}$$

事实上，由(4.50)知

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} - \frac{1}{3^n} < y - x < \frac{1}{3^s}$$

注意到$a_k, b_k \in \{0,1,2\}$可得 $b_k = a_k, \quad \forall 1 \leqslant k < s$，因此

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(y) - F(x) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{k=s}^{m} \frac{b_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \sum_{k=s}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^s} \sum_{k=s}^{m} \frac{2}{2^{k+1-s}} \leqslant \frac{1}{2^s} \end{aligned}$$

即(4.53)成立。

3. 构造函数

$$F(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \inf_{x \leqslant t \in D_0} F(t) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.54}$$

往证F为增函数。

注意到F在D_0上为增函数，由下确界的性质和(4.54)知F为开区间$(0,1)$上的增函数。而由(4.49)知$F(\{x : x \in (0,1)\}) \subset [0,1]$，再由(4.54)知$F$为$\mathbb{R}$上增函数。

4. 往证F为开区间$(0,1)$上的连续函数。

考察L测度λ，由测度的可列可加性得

$$\lambda(D_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a \in A_n} \lambda(D_{n,a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a \in A_n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 \tag{4.55}$$

另一方面，由$D_{n,a} \subset [0,1]$知$D_0 \subset [0,1]$。因此对于任何$x \in (0,1) \setminus D_0$，存在递增数列$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D_0$和递减数列$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D_0$，使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x = \lim_{n \to \infty} y_n$$

从而存在$N_s \in \mathbb{N}$，使得

$$0 < y_n - x_n < \frac{1}{3^s}, \quad \forall n \geqslant N_s$$

由(4.53)得

$$0 \leqslant F(y_n) - F(x_n) < \frac{1}{2^s}, \quad \forall n \geqslant N_s$$

进而

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) \tag{4.56}$$

而由(4.54)得

$$F(x_n) \leqslant F(x) \leqslant F(y_n) \tag{4.57}$$

注意到F为增函数，由(4.56)和(4.57)得

$$\lim_{y\to x} F(y) = F(x), \quad \forall x \in (0,1) \tag{4.58}$$

即F在$(0,1)$上连续。

5. 往证F为$\mathbb{R}$上的连续函数。

由(4.49)、(**??**)和(4.54)知：F在

$$(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,\infty) \tag{4.59}$$

上处处连续，因此只需证明F在0和1点处连续。取x_n为区间$\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)$的中点，$y_n$为区间$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3^k} + \frac{1}{3^n}, \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}\right)$的中点，则$x_n \downarrow 0$，$y_n \uparrow 1$，且

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

注意到F为增函数和(4.54)知0和1为F的连续点。

6. 往证F为奇异分布函数。

用μ表示F所对应的L-S测度，则对于任意$n \in \mathbb{N}, a \in A_n$，$F$在$D_{n,a}$上为常数，因此

$$\mu(D_{n,a}) = 0, \quad \mu(D_0) = 0$$

再注意到$\mu((-\infty,0)) = \mu((1,\infty)) = 0$得

$$\mu(A \cap P_0^c) = 0, \quad \forall A \in \mathscr{B}$$

其中P_0由(4.59)给出。而由(4.55)知

$$\lambda(P_0) = \lambda([0,1]) - \lambda(D_0) = 0$$

即μ关于λ奇异。 □

4.3 条件期望

定义 4.3.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数，$X$和$Y$为随机变量，并且$X$的数学期望存在，

$$\mathbf{P}_{\mathscr{C}} = \mathbf{P}|_{\mathscr{C}}, \quad \mu(A) = \mathbf{E}(X\mathbb{1}_A), \quad \forall A \in \mathscr{C} \tag{4.60}$$

称

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{C}) \triangleq \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathscr{C}}} \tag{4.61}$$

为X在$\mathscr{C}$下（关于$\mathbf{P}$）的条件期望；称$\mathbf{E}(X|\sigma(Y))$为X在Y下的条件期望，简记为$\mathbf{E}(X|Y)$；若$A \in \mathscr{F}$，称

$$\mathbf{P}(A|\mathscr{C}) \triangleq \mathbf{E}(\mathbb{1}_A|\mathscr{C}) \tag{4.62}$$

为事件A在$\mathscr{C}$下的条件概率，称

$$\mathbf{P}(A|\sigma(Y)) \triangleq \mathbf{E}(\mathbb{1}_A|\sigma(Y)) \tag{4.63}$$

为事件A在Y下的条件概率。

引理 4.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数，随机变量$X$的数学期望存在。若$\mathscr{C}$可测函数$f$满足条件

$$\int_A X\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_A f\mathrm{d}\mathbf{P},\quad \forall A\in\mathscr{C} \tag{4.64}$$

则$f=\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)$。进一步，条件期望具有平滑性

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,))=\mathbf{E}(X) \tag{4.65}$$

证明： 由(4.60)和(4.64)得

$$\mu(A)=\int_A f\mathrm{d}\mathbf{P}=\int_A f\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathscr{C}},\quad \forall A\in\mathscr{C}$$

由Radon导数的定义知$f=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathscr{C}}}$，即$f=\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)$。进一步，在(4.64)中取$A=\Omega$，得条件期望的平滑性(4.65) □

由引理4.3.1知$\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)$是一个满足(4.64)的$\mathscr{C}$可测函数。

引理 4.3.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$为$\sigma$代数，$X$和$Y$是随机变量。若$X$的数学期望存在，则存在$\mathscr{B}$可测函数$g$，使得

$$\mathbf{E}(X\,|\sigma(Y))=g(Y) \tag{4.66}$$

进一步，当X为$\mathscr{C}$可测函数时，

$$\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)=X \tag{4.67}$$

证明： 由于$\mathbf{E}(X\,|\sigma(Y)):\Omega\to\mathbb{R}$为$\sigma(Y)$可测函数，因此由定理2.5.5知存在$\mathscr{B}$可测函数$g$，使得(4.66)成立。进一步，由引理(4.3.1)知(4.67)成立。 □

为表达方便，对于随机变量X和Y，记

$$\mathbf{E}(X\,|Y\,)\triangleq g(Y),\quad \mathbf{E}(X\,|Y=y\,)\triangleq g(y),\quad \forall y\in\mathbb{R}$$

其中$g(Y)$满足(4.66)。对于任何$A\in\mathscr{F}$和$y\in\mathbb{R}$，记

$$\mathbf{P}(A\,|Y\,)\triangleq\mathbf{E}(\mathbb{1}_A\,|Y\,),\quad \mathbf{P}(A\,|Y=y\,)\triangleq\mathbf{E}(\mathbb{1}_A\,|Y=y\,)$$

引理 4.3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$为$\sigma$代数，则

$$\mathbf{P}(A\,|\mathscr{C}\,)=\mathbb{1}_A,\quad \forall A\in\mathscr{C} \tag{4.68}$$

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\int_B\mathbf{P}(A\,|\mathscr{C}\,)\mathrm{d}\mathbf{P},\quad \forall A,B\in\mathscr{C} \tag{4.69}$$

证明： 显然当$A\in\mathscr{C}$时，$\mathbb{1}_A$为$\mathscr{C}$可测函数，由引理4.3.2知$\mathbf{E}(\mathbb{1}_A\,|\mathscr{C}\,)=\mathbb{1}_A$，即(4.68)成立。而由(4.68)和引理4.3.1知(4.69)成立。 □

定义 4.3.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$B\in\mathscr{F}$。若$\mathscr{F}\cap B=\{\varnothing,B\}$，则称$B$为$\mathscr{F}$的一个原子。

$\mathscr{F}$的一个原子是“最小”的非空可测集，实际上将所有原子作为样本空间，不会影响$\mathscr{F}$中随机事件的测度性质的研究。

定理 4.3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$为$\sigma$代数，$B$为$\mathscr{C}$的一个非空原子。若$\mathbf{P}(B)>0$，则

$$\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)(\omega)=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P},\quad \forall\omega\in B \tag{4.70}$$

证明： 取$\omega_0\in B$，记$a=\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)(\omega_0)$

$$B_0=\{\omega\in B:\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)(\omega)=a\}\subset B$$

注意到B为$\mathscr{C}$的原子，并且可测集$B_0\neq\varnothing$，知$B=B_0$，即

$$\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)\mathbb{1}_B=a\mathbb{1}_B \tag{4.71}$$

由引理4.3.1知

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int a\mathbb{1}_B\mathrm{d}\mathbf{P}=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)\mathbb{1}_B\mathrm{d}\mathbf{P}\\&=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B\mathbf{E}(X\,|\mathscr{C}\,)\mathrm{d}\mathbf{P}=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P}\end{aligned}$$

结合(4.71)得(4.70)。 □

$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})$ 在$\mathscr{C}$ 的原子B 上是常数：当$\mathbf{P}(B)>0$时，这个常数是 X 在B 上的平均；当$\mathbf{P}(B)=0$时，这个常数可以是任何实数。

例 3.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\{B_n:n\in D\}$是$\Omega$的一个分割，$\mathscr{C}=\sigma(\{B_n:n\in D\})$，试证明

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})=\sum_{n\in\{n\in D:\mathbf{P}(B_n)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{B_n}}{\mathbf{P}(B_n)}\int_{B_n}X\mathrm{d}\mathbf{P},\text{a.e.}$$

证明： 显然，$\{B_n:n\in D\}$中的各个事件都是$\mathscr{C}$的原子，注意到D为有限或可数集，由定理4.3.1知

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X|\mathscr{C})&=\sum_{n\in D}\mathbf{E}(X|\mathscr{C})\mathbb{1}_{B_n}\\&=\sum_{n\in\{n\in D:\mathbf{P}(B_n)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{B_n}}{\mathbf{P}(B_n)}\int_{B_n}X\mathrm{d}\mathbf{P},\text{a.e.}\end{aligned}$$

□

为表述方便，对于概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$和$\sigma$代数$\mathscr{C}$，以及数学期望存在的随机变量$X$，引入如下符号

$$\mathbf{E}(X|B)\triangleq\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega_0),\quad\mathbf{P}(A|B)\triangleq\mathbf{P}(A|\mathscr{C})(\omega_0)$$

其中B是$\mathscr{C}$的一个原子，$A\in\mathscr{F}$，$\omega_0\in B$。

例 3.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$B\in\mathscr{F}$，$\mathscr{C}=\sigma(\{B\})$，$\mathbf{P}(B)>0$，试证明

$$\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)},\quad\forall A\in\mathscr{F}\tag{4.72}$$

证明： 显然B是$\mathscr{C}$的一个非空原子，取$\omega_0\in\mathscr{C}$，由定理4.3.1得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|B)&=\mathbf{E}(\mathbb{1}_A|B)=\mathbf{E}(\mathbb{1}_A|\mathscr{C})(\omega_0)\\&=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mathbf{P}=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)},\quad\forall A\in\mathscr{F}\end{aligned}$$

即(4.72)成立。 □

由此我们可以进一步理解初等条件概率的定义和概率测度中的定义之间的关系。

例 3.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$X$为随机变量，$B\in\mathscr{F}$，$\mathscr{C}=\sigma(\{B\})$，$\mathbf{P}(B)>0$，试证明$\mathbf{E}(X|B)=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P}$

证明： 显然B是$\mathscr{C}$的一个非空原子，取$\omega_0\in B$，由定理4.3.1 得$\mathbf{E}(X|B)=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega_0)=\frac{1}{\mathbf{P}(B)}\int_B X\mathrm{d}\mathbf{P}$。 □

例 3.4 用简单随机抽样方法抽取了N个样本数据，这里N是一个数学期望存在的随机变量，并且N与各个样本数据相互独立，求所有观测数据之和的数学期望。

解： 用X_k表示第k个样本数据，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^N X_k\middle|\sigma(N)\right)\\&=\sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{\{N=n\}}}{\mathbf{P}(N=n)}\int_{\{N=n\}}\left(\sum_{k=1}^N X_k\right)\mathrm{d}\mathbf{P}\\&=\sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{\{N=n\}}}{\mathbf{P}(N=n)}\int_{\{N=n\}}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)\mathrm{d}\mathbf{P}\\&=\sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}}\frac{\mathbb{1}_{\{N=n\}}}{\mathbf{P}(N=n)}\sum_{k=1}^n\mathbf{E}\left(X_k\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)\end{aligned}$$

注意到X_k和$\mathbb{1}_{\{N=n\}}$相互独立可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\mathbf{E}\left(X_k\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)&=\sum_{k=1}^n\mathbf{E}(X_k)\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)\\&=n\mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}(X_1)\end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| \sigma(N)\right) = \mathbf{E}(X_1) \sum_{n\in\{m\in\mathbb{N}:\mathbf{P}(N=m)>0\}} n\mathbb{1}_{\{N=n\}}$$

由引理4.3.2得

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \middle| \sigma(N)\right)\right) = \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(N)$$

□

4.4 条件期望的性质

定理 4.4.1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$为$\sigma$代数，则有如下结论：

1° 若$X=a,\text{a.e.}$，则$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})=a\text{a.e.}$;

2° 线性性质，即当X、Y和$aX+bY$的数学期望都存在时有

$$\mathbf{E}(aX+bY|\mathscr{C}) = a\mathbf{E}(X|\mathscr{C}) + b\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})$$

其中$a,b\in\mathbb{R}$;

3° 单调性，即当X和Y的数学期望都存在，且$X\leqslant Y$时，有

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{C}) \leqslant \mathbf{E}(Y|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

4° **单调收敛性**，即若可积$Y\leqslant X_n\uparrow X,\text{a.e.}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n|\mathscr{C}) = \mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

5° *Fatou*收敛性，即若可积$Y\leqslant X_n,\text{a.e.}$，则

$$\mathbf{E}\left(\varliminf_{n\to\infty} X_n|\mathscr{C}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} X_n\mathbf{E}(|\mathscr{C}),\text{a.e}$$

若可积$Y\geqslant X_n,\text{a.e.}$，则

$$\mathbf{E}\left(\varlimsup_{n\to\infty} X_n|\mathscr{C}\right) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} X_n\mathbf{E}(|\mathscr{C}),\text{a.e}$$

6° **控制收敛性**，即若存在可积随机变量X和Y，使得$X\leqslant X_n\leqslant Y,\text{a.e.}$，且$X_n\xrightarrow[a.e.]{n\to\infty}X,\text{a.e.}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n|\mathscr{C}) = \mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

证明： 往证1°成立。显然a是$\mathscr{C}$可测函数，且满足(4.64)，由引理4.3.1知1°成立。

往证2°。由数学期望的线性性质知$\mathbf{E}(aX+bY)$，注意到$a\mathbf{E}(X|\mathscr{C})+b\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})$为$\mathscr{C}$可测函数得

$$\begin{aligned}\int_B (a\mathbf{E}(X|\mathscr{C})+b\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})) &= a\int_B \mathbf{E}(X|\mathscr{C}) + b\int_B \mathbf{E}(Y|\mathscr{C})\\ &= a\int_B X + b\int_B Y = \int_B (aX+bY),\quad \forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

即2°成立。

往证3°成立。对于任意$B\in\mathscr{C}$，由积分的单调性知

$$\int_B \mathbf{E}(X|\mathscr{C}) = \int_B X \leqslant \int_B Y = \int_B \mathbf{E}(Y|\mathscr{C})$$

由积分单调性定理3.2.3知3°成立。

往证4°成立。显然$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n|\mathscr{C})$是$\mathscr{C}$可测函数，且可积函数

$$\mathbf{E}(Y|\mathscr{C}) \leqslant \mathbf{E}(X_n|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

由积分单调收敛定理得

$$\begin{aligned}\int_B \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n|\mathscr{C}) &= \lim_{n\to\infty}\int_B \mathbf{E}(X_n|\mathscr{C})\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_B X_n = \int_B X = \int_B \mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\quad \forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

因此4°成立。

类似于定理3.9.2可以证明5°，类似于定理3.9.3可以证明6°。 □

定理 4.4.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\sigma$代数$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$，$X$和$Y$是随机变量。若$\mathbf{E}(XY)$和$\mathbf{E}(Y)$存在，且$X$是$\mathscr{C}$可测函数，则

$$\mathbf{E}(XY|\mathscr{C})=X\mathbf{E}(Y|\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.73}$$

证明： 对于任意$A\in\mathscr{C}$，显然$\mathbb{1}_A\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})$为$\mathscr{C}$可测函数，且

$$\begin{aligned}\int_B \mathbb{1}_A\mathbf{E}(Y|\mathscr{C}) &= \int_{B\cap A}\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})=\int_{B\cap A}Y\\ &=\int_B Y\mathbb{1}_A=\int_B\mathbf{E}(\mathbb{1}_AY|\mathscr{C}),\quad \forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

即

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_AY|\mathscr{C})=\mathbb{1}_A\mathbf{E}(Y|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

由条件期望的线性质知：当X为非负$\mathscr{C}$可测简单函数时(4.73)成立。由条件期望的单调收敛性知：当X为非负$\mathscr{C}$可测函数时(4.73)成立。最后，再次利用条件期望的线性性质得(4.73)。 □

定理 4.4.3 (条件期望的平滑性) 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\mathscr{C}$和$\mathscr{C}'$为$\sigma$代数，满足条件$\mathscr{C}\subset\mathscr{C}'\subset\mathscr{F}$。若随机变量$X$的数学期望存在，则

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|\mathscr{C}')=\mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.74}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C}')|\mathscr{C})=\mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.75}$$

证明： 注意到$\mathbf{E}(X|\mathscr{C})$为$\mathscr{C}'$可测函数，由定理4.4.2和条件期望的性质知

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|\mathscr{C}')=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})\mathbf{E}(1|\mathscr{C}')=\mathbf{E}(X|\mathscr{C}),\text{a.e.}$$

即(4.74)成立。

对于任何$B\in\mathscr{C}$，注意到$\mathscr{C}\subset\mathscr{C}'$有

$$\int_B\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{C}')|\mathscr{C})=\int_B\mathbf{E}(X|\mathscr{C}')=\int_B X=\int_B\mathbf{E}(X|\mathscr{C})$$

即(4.75)成立。 □

定理 4.4.4 设$(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$为概率空间，$\sigma$代数$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$。若复值随机变量$X$可积，则

$$|\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|=\mathbf{E}(|X||\mathscr{C}),\text{a.e.} \tag{4.76}$$

证明： 记$X=Y+\mathrm{i}Z$，

$$r(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\omega)}=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega)$$

其中

$$r(\omega)=\sqrt{(\mathbf{E}(Y|\mathscr{C})(\omega))^2+(\mathbf{E}(Z|\mathscr{C})(\omega))^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}=\begin{cases}\frac{r(\omega)}{\mathbf{E}(X|\mathscr{C})(\omega)}, & r(\omega)>0\\ 1, & r(\omega)=0\end{cases}$$

都是$\mathscr{C}$可测函数。由条件期望的平滑性得

$$|\mathbf{E}(X|\mathscr{C})|=r(\omega)=\mathbf{E}(X|\mathscr{C})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}=\mathbf{E}\left(X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}|\mathscr{C}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_B|\mathbf{E}(X|\mathscr{C})| &= \int_B X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}\leqslant\int_B\left|X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\omega)}\right|\\ &=\int_B|X|=\int_B\mathbf{E}(|X||\mathscr{C}),\quad\forall B\in\mathscr{C}\end{aligned}$$

由积分单调性定理3.2.3得(4.76)。 □