Question 1

设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ **是单位闭圆盘.**

$$F:D\to D$$

是一个连续映射, 证明: 一定存在点 $p\in D$**, 使得** $F(p)=p$.

证明. 我们将证明分别以下几步.

首先假设 F 是二阶连续可微的映射. 如果 F 没有不动点, 则对于任意的 $p\in D, F(p)\neq p$. 这时, 由 $F(p)$ 到 p 的连接射线必与 D 的边界 ∂D 交于一点 $q:=G(p)$. 利用这一点我们得到一个映射

$$G:D\to\partial D:p\mapsto G(p). \tag{1}$$

由定义, 将 G 限制在边界 ∂D 后, $G:\partial D\to\partial D$ 是恒同映射. 我们希望证明这样的映射是不存在的.

首先, 连接 $F(p)$ 与 p 的射线可以表示为:

$$q=F(p)+t(p-F(p)),t\geqslant 0. \tag{2}$$

这时, 对应于 $G(p)$ 的 t 满足 $t\geqslant 1$. 因而由 $(G(p),G(p))=1$ 解得:

$$t=\frac{-(F(p),p-F(p))+\sqrt{(p,p-F(p))^2-\|p-F(p)\|^2(\|F(p)\|^2-1)}}{\|p-F(p)\|^2}, \tag{3}$$

因此,

$$G(p)=p+\frac{-(F(p),p-F(p))+\sqrt{(p,p-F(p))^2-\|p-F(p)\|^2(\|F(p)\|^2-1)}}{\|p-F(p)\|^2}\times(F(p)-p). \tag{4}$$

由于 $F(p)-p$ 在 D 上处处不为 0, 所以 $p\mapsto G(p)$ 也是 D 上二次连续可微的映射. 我们将其表示为:

$$G:(x,y)\mapsto(g_1(x,y),g_2(x,y)). \tag{5}$$

利用将 G 限制在边界 ∂D 后, $G:\partial D\to\partial D$ 是恒同映射, 我们得到:

$$\oint_{\partial D}g_1(x,y)\mathrm{d}g_2(x,y)=\oint_{\partial D}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\pi. \tag{6}$$

而另一方面, 利用 Green 公式, 我们得到:

$$\begin{aligned}&\oint_{\partial D} g_1(x,y)\mathrm{d}g_2(x,y)\\&=\oint_{\partial D}\left[g_1(x,y)\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\\&=\iint_D\left[\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{7}$$

但由于 $g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)\equiv 1$, 微分得到:

$$g_1(x,y)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}+g_2(x,y)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}=0;\tag{8}$$

$$g_1(x,y)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}+g_2(x,y)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}=0.\tag{9}$$

将其看作线性方程组, 则 $(g_1(x,y),g_2(x,y))$ 是其一个非零解, 所以必须方程组的系数行列式为 0, 即

$$\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\equiv 0.\tag{10}$$

因而,

$$\begin{aligned}&\oint_{\partial D} g_1(x,y)\mathrm{d}g_2(x,y)\\&=\iint_D\left[\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\end{aligned}\tag{11}$$

这与

$$\oint_{\partial D} g_1(x,y)\mathrm{d}g_2(x,y)=\pi.\tag{12}$$

矛盾. 所以没有不动点的二次连续可微的映射 $F:D\to D$ 是不存在的.

下面, 我们希望利用 Weierstrass 逼近定理进一步证明没有不动点的连续映射 $F:D\to D$ 也是不存在的.

假设这样的 F 是存在的, 我们将 F 表示为

$$F:(x,y)\mapsto(f_1(x,y),f_2(x,y)),\tag{13}$$

其中 $f_1(x,y),f_2(x,y)$ 都是 D 上的连续函数. 利用映射

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(x,y), & \text{如果}x^2+y^2\leqslant 1;\\ \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{如果}x^2+y^2>1.\end{cases}\tag{14}$$

我们就得到一个 $\mathbb{R}^2 \to D$ 的一个连续映射, 其限制在 D 上后是恒同映射. 将 F 复合这一个映射, 则可将 F 看作 $\mathbb{R}^2 \to D$ 的连续映射. 特别地, 我们可将 $f_1(x,y), f_2(x,y)$ 分别看作 $A = [-1,1] \times [-1,1]$ 上的连续函数. 因而可以用多项式在 $A = [-1,1] \times [-1,1]$ 上一致地逼近 $f_1(x,y), f_2(x,y)$. 这样的逼近在 D 上也是一致的.

由假设 F 没有不动点, 而 D 是一个紧集. 因而存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 $p \in D$, 恒有 $\|F(p) - p\| > \varepsilon$. 由于我们可以用多项式在 D 上一致逼近 $f_1(x,y), f_2(x,y)$, 因而可用以多项式为分量的映射 $H(p)$ 逼近映射 F, 使得在 D 上,

$$\|H(p) - F(p)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{15}$$

这时, $\|H(p)\| < 1 + \frac{\varepsilon}{4}$. 如果令

$$T(p) = \frac{4}{4+\varepsilon} H(p), \tag{16}$$

则 $T(p)$ 是从 D 射到自身的一个二次连续可微的映射, 对于任意的 $p \in D$, 由于

$$\begin{aligned} &\|T(p) - F(p)\| \leqslant \|T(p) - H(p)\| + \|H(p) - F(p)\| \\ &\leqslant \|H(p)\| \left|1 - \frac{4}{4+\varepsilon}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{4+\varepsilon}{4} \left|1 - \frac{4}{4+\varepsilon}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{3\varepsilon}{4}, \end{aligned} \tag{17}$$

我们得到

$$\|T(p) - p\| \geqslant \|F(p) - p\| - \|T(p) - F(p)\| > \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} > 0. \tag{18}$$

因此 $T(p)$ 在 D 中没有不动点. 这与上面我们得到的 D 到自身的二次连续可微的映射一定有不动点矛盾. $\square$