Question 1

集合 S 上的一个二元代数运算是指 $S \times S$ 到 S 的一个映射.

定义 (群). 设 G 是一个非空集合. 如果在 G 上定义了一个二元运算 $\circ$, 通常称为乘法, 并且满足:
(1) 结合律: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \forall a, b, c \in G$;
(2) 存在幺元: 存在 $e \in G$, 使得 $e \circ a = a \circ e = a, \forall a \in G$($e$ 称为 G 的幺元);
(3) 存在逆元: 对每 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得 $a \circ b = b \circ a = e$($b$ 称为 a 的逆元, 记作 a^{-1}),
则称 G 关于运算 $\circ$ 构成一个群, 记为 $(G, \circ)$, 或者简记为 G.

试证: 群的定义可以简化为: 如果一个非空集合 G 上定义了一个二元运算 $\circ$, 满足:
(1) 结合律: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \forall a, b, c \in G$;
(2) 存在左幺元: 存在 $e \in G$, 使得 $e \circ a = a, \forall a \in G$;
(3) 存在左逆元: 对每 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得 $b \circ a = e$,
则 G 关于运算 $\circ$ 构成一个群.

证明. 首先证明左逆元也是右逆元:
对任意 $a \in G$, 有 $b \in G$, 使 $b \circ a = e$, 由于 $b \in G$, 所以 b 在 G 中也有左逆元, 即存在 $c \in G$, 使 $c \circ b = e$.
因此,$a \circ b = e \circ (a \circ b) = (c \circ b) \circ (a \circ b) = c \circ ((b \circ a) \circ b) = c \circ b = e$.
再接着证明左幺元也是右幺元:
对任意 $a \in G$, 有 $b \in G$, 使 $b \circ a = e$.
由此, $a \circ e = a \circ (b \circ a) = (a \circ b) \circ a = a$. $\square$