Question 1

任何集合 S 上都可以定义恒同映射(identity): $\mathrm{id}_S : S \to S, s \mapsto s$.
若有两个映射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$, 则可以定义复合映射(composition):

$$g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x)).$$

下面, 设 X 和 Y 是两个非空集合, $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$ 是两个映射. 如果 $g \circ f = \mathrm{id}_X$, 则称 g 是 f 的一个左逆; 如果 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, 则称 g 为 f 的一个右逆.
如果 g 既是 f 的左逆又是 f 的右逆, 则称 g 为 f 的一个逆.
证明:

(a) *f 有左逆当且仅当 f 是单射;*

证明. 设 f 有左逆 g. 设 $x_1, x_2 \in X$, 且 $x_1 \neq x_2$, 只需证 $f(x_1) \neq f(x_2)$.
用反证法. 假设 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, 矛盾.
故 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 因此, f 是单射.
另一方面, 设 f 是单射, 对于 $y \in f(X)$, 定义 $g(y)$ 为 y 在 f 下的原像; 对于 $y \in Y \backslash f(X)$, 定义 $g(y)$ 为 X 中的任一元素, 则 g 是 f 的左逆. □

(b) *f 有右逆当且仅当 f 是满射;*

证明. 设 f 有右逆 g. 假若 f 不是满射, 取 $y \in Y \backslash f(X)$, 则 $f(g(y)) \neq y$, 这与 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ 矛盾.
另一方面, 设 f 是满射, 对于每一 $y \in Y$, 定义 $g(y)$ 为 y 在 f 下的任一原像, 则 g 是 f 的右逆. □

(c) *f 有左逆 g, 同时又有右逆 h, 则 $g = h$.*

证明. 由条件知道:$g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ h = \mathrm{id}_Y$, 因此

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h.$$

□

Question 2

假设有两个映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$, 证明:

(a) 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射;

证明. 用反证法. 假设存在 $x_1, x_2 \in X$, 且 $x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) = f(x_2)$,
则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 与 $g \circ f$ 是单射矛盾.
这说明 f 必是单射. □

(b) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射.

证明. 由于 $g \circ f$ 是满射, 故 $\forall z \in Z, \exists x \in X$, 使得 $g(f(x)) = z$.
因此, $\forall z \in Z, \exists y = f(x) \in Y$, 使得 $g(y) = z$. 即 g 是满射. □