

## Question 1

设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  是单位闭圆盘.

$$F : D \rightarrow D$$

是一个连续映射, 证明: 一定存在点  $p \in D$ , 使得  $F(p) = p$ .

证明. 我们将证明分别以下几步.

首先假设  $F$  是二阶连续可微的映射. 如果  $F$  没有不动点, 则对于任意的  $p \in D, F(p) \neq p$ . 这时, 由  $F(p)$  到  $p$  的连接射线必与  $D$  的边界  $\partial D$  交于一点  $q := G(p)$ . 利用这一点我们得到一个映射

$$G : D \rightarrow \partial D : p \mapsto G(p). \quad (1)$$

由定义, 将  $G$  限制在边界  $\partial D$  后,  $G : \partial D \rightarrow \partial D$  是恒同映射. 我们希望证明这样的映射是不存在的.

首先, 连接  $F(p)$  与  $p$  的射线可以表示为:

$$q = F(p) + t(p - F(p)), t \geq 0. \quad (2)$$

这时, 对应于  $G(p)$  的  $t$  满足  $t \geq 1$ . 因而由  $(G(p), G(p)) = 1$  解得:

$$t = \frac{-(F(p), p - F(p)) + \sqrt{(p, p - F(p))^2 - \|p - F(p)\|^2(\|F(p)\|^2 - 1)}}{\|p - F(p)\|^2}, \quad (3)$$

因此,

$$\begin{aligned} G(p) = p + & \frac{-(F(p), p - F(p)) + \sqrt{(p, p - F(p))^2 - \|p - F(p)\|^2(\|F(p)\|^2 - 1)}}{\|p - F(p)\|^2} \\ & \times (F(p) - p). \end{aligned} \quad (4)$$

由于  $F(p) - p$  在  $D$  上处处不为 0, 所以  $p \mapsto G(p)$  也是  $D$  上二次连续可微的映射. 我们将其表示为:

$$G : (x, y) \mapsto (g_1(x, y), g_2(x, y)). \quad (5)$$

利用将  $G$  限制在边界  $\partial D$  后,  $G : \partial D \rightarrow \partial D$  是恒同映射, 我们得到:

$$\oint_{\partial D} g_1(x, y) dg_2(x, y) = \oint_{\partial D} x dy = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \pi. \quad (6)$$

而另一方面, 利用 Green 公式, 我们得到:

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial D} g_1(x, y) dg_2(x, y) \\ &= \oint_{\partial D} \left[ g_1(x, y) \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} dy \right] \\ &= \iint_D \left[ \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

但由于  $g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y) \equiv 1$ , 微分得到:

$$g_1(x, y) \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} + g_2(x, y) \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} = 0; \quad (8)$$

$$g_1(x, y) \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} + g_2(x, y) \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

将其看作线性方程组, 则  $(g_1(x, y), g_2(x, y))$  是其一个非零解, 所以必须方程组的系数行列式为 0, 即

$$\frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} \equiv 0. \quad (10)$$

因而,

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial D} g_1(x, y) dg_2(x, y) \\ &= \iint_D \left[ \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

这与

$$\oint_{\partial D} g_1(x, y) dg_2(x, y) = \pi. \quad (12)$$

矛盾. 所以没有不动点的二次连续可微的映射  $F: D \rightarrow D$  是不存在的.

下面, 我们希望利用 Weierstrass 逼近定理进一步证明没有不动点的连续映射  $F: D \rightarrow D$  也是不存在的.

假设这样的  $F$  是存在的, 我们将  $F$  表示为

$$F: (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)), \quad (13)$$

其中  $f_1(x, y), f_2(x, y)$  都是  $D$  上的连续函数. 利用映射

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y), & \text{如果 } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{如果 } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (14)$$

我们就得到一个  $\mathbb{R}^2 \rightarrow D$  的一个连续映射, 其限制在  $D$  上是恒同映射. 将  $F$  复合这一个映射, 则可将  $F$  看作  $\mathbb{R}^2 \rightarrow D$  的连续映射. 特别地, 我们可将  $f_1(x, y), f_2(x, y)$  分别看作  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$  上的连续函数. 因而可以用多项式在  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$  上一致地逼近  $f_1(x, y), f_2(x, y)$ . 这样的逼近在  $D$  上也是一致的.

由假设  $F$  没有不动点, 而  $D$  是一个紧集. 因而存在  $\varepsilon > 0$ , 使得对于任意的  $p \in D$ , 恒有  $\|F(p) - p\| > \varepsilon$ . 由于我们可以用多项式在  $D$  上一致逼近  $f_1(x, y), f_2(x, y)$ , 因而可用以多项式为分量的映射  $H(p)$  逼近映射  $F$ , 使得在  $D$  上,

$$\|H(p) - F(p)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (15)$$

这时,  $\|H(p)\| < 1 + \frac{\varepsilon}{4}$ . 如果令

$$T(p) = \frac{4}{4 + \varepsilon} H(p), \quad (16)$$

则  $T(p)$  是从  $D$  射到自身的一个二次连续可微的映射, 对于任意的  $p \in D$ , 由于

$$\begin{aligned} \|T(p) - F(p)\| &\leq \|T(p) - H(p)\| + \|H(p) - F(p)\| \\ &\leq \|H(p)\| \left| 1 - \frac{4}{4 + \varepsilon} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{4 + \varepsilon}{4} \left| 1 - \frac{4}{4 + \varepsilon} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{3\varepsilon}{4}, \end{aligned} \quad (17)$$

我们得到

$$\|T(p) - p\| \geq \|F(p) - p\| - \|T(p) - F(p)\| > \varepsilon - \frac{3\varepsilon}{4} > 0. \quad (18)$$

因此  $T(p)$  在  $D$  中没有不动点. 这与上面我们得到的  $D$  到自身的二次连续可微的映射一定有不动点矛盾.  $\square$