Question 1

对于任意一个分式线性变换
$$L(x)=\frac{ax+b}{cx+d},$$
由于可以约分, 所以总可假定 $ad-bc=1$. 若以矩阵
$$E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d. \end{pmatrix}$$
来对应这个分式线性变换:
$$E\mapsto L(x)=\frac{ax+b}{cx+d}.$$
证明: 如果 $E\mapsto L, E_1\mapsto L_1, E_2\mapsto L_2$, 则
$$E_1\cdot E_2\mapsto L_1\circ L_2;$$
$$E^{-1}\mapsto L^{-1}.$$

证明.
$$E^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a. \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a. \end{pmatrix}$$
注意到
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{dy-b}{-cy+a}$$
这说明
$$E^{-1}\mapsto L^{-1}.$$
另一方面, 设
$$E=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$
则
$$E_1\cdot E_2=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}.$$
又有
$$L_1\circ L_2(x)=\frac{a_1(L_2(x))+b_1}{c_1(L_2(x))+d_1}=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)x+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)x+c_1b_2+d_1d_2}.$$
因此,
$$E_1\cdot E_2\mapsto L_1\circ L_2.$$

□