北京邮电大学 2017--2018 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案（A 卷）

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题（本题共 40 分，每小题 4 分）

1．从 0 到 9 十个数字中任取三个不同的数字，事件 $A=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$，

则概率 $P(A)=\underline{\frac{14}{15}}$。　　或者 $\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}$

2．设在三次独立试验中，事件 A 出现的概率均相等，且 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则在一次试验中事件 A 出现的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$。

$(1-p)^3=\frac{8}{27} \to p=\frac{1}{3}$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$　$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=3$　$X\sim\pi(\lambda)$　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$

3．设随机变量 $X_1\sim U[0,6], X_2\sim N(0,2^2), X_3\sim$ 泊松分布 ~~$P(1)$~~，且 X_1,X_2,X_3 相互独立，

$E(X)=\lambda$　$E(X^2)=\lambda^2+\lambda$

若 $Y=3X_3+X_1-2X_2$，则 $D(Y)=\underline{28}$。

$E(X)=\mu$　$D(X)=\sigma^2=2^2=4$

4．设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5，则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq\underline{\frac{1}{12}}$。

5．设随机变量 K 服从区间[1，6]上的均匀分布，则方程 $x^2+Kx+1=0$ 有实根的概率为 $\underline{0.8}$。

$f(k)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1<k<6\\ 0, & 其他\end{cases}$　$F(k)=\begin{cases}0 & k<1\\ \frac{k-1}{5} & 1<k<6\\ 1 & k>6\end{cases}$

6．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x\in[0,1]\\ \frac{2}{9} & x\in[3,6]\\ 0 & 其他\end{cases}$，若 K 使得 $P(X\geq K)=\frac{2}{3}$，

则 K 的取值范围是：$\underline{[1，3]}$。

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

7.设随机变量 X 服从正态分布 $N(10,(0.02)^2)$，设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，

已知 $\Phi(2.5)=0.9938$,则 X 落在区间（9.95,10.05）内的概率为 $\underline{0.9876}$。

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X □ $N(1,2)$， Y □ $N(0,1)$，则随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数 $f(z)=$ $\underline{\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}}$。

9. 设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}}$ 服从 $\underline{t(2)}$ 分布。(给出分布类型及参数)

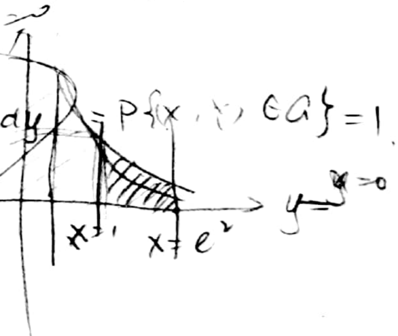
10. 设零件长度服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现随机抽取 11 个零件，测得其长度的样本方差 $S^2=1$，则总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为

$$\underline{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{10\times1}{20.48},\ \frac{10\times1}{3.25}\right)=(0.49\,,3.08)}。$$

（$\chi^2_{0.975}(10)=3.25,\chi^2_{0.025}(10)=20.48$）

二、(**12 分**) 设 D 是由曲线 $xy=1$ 与直线 $x=1,y=0,x=e^2$ 围成的平面区域，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则

（1）给出 (X,Y) 的概率密度函数；$S=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$ $\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dxdy=P\{(x,y)\in G\}=1$



（2）求 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度函数及其在 $x=2$ 处的值，

（3）求 $E(2X+1)$。

解：（1）由 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$， 因为 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，

设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$。(**4 分**)

（2）当 $1\le x\le e^2$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}$，

则 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & 1\le x\le e^2\\ 0 & 其它\end{cases}$。（4 分）

$f_X(x)$ 在 $x=2$ 处的值为 $\dfrac{1}{4}$.

（3）$E(X)==\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2}(e^2-1)$，则 $E(2X+1)=e^2$。 （4 分）

三、（8 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$，求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。

解：(X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

Z 的分布函数为：

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{2X+Y\le z\}=\iint\limits_{2x+y\le z}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}\iint\limits_{2x+y\le z}0dxdy=0 & z<0\\ \int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\dfrac{z}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-z} & 0\le z<2\\ \int_0^1dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=1-\dfrac{1}{2}e^{2-z}+\dfrac{1}{2}e^{-z} & z\ge 2\end{cases}$$ （4 分）

从而 Z 的概率密度为：$f_z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0\le z<2\\ \dfrac{1}{2}(e^2-1)e^{-z} & z\ge 2\end{cases}$ （4 分）

四、（12 分）设一箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80、10、10 件，

现从中任取一件，且 $X_i=\begin{cases}1 & 抽到i等品\\ 0 & 其它\end{cases}$，$i=1,2,3$。**求：**

（1）随机变量 X_1 **与** X_2 **的联合分布，**

（2） X_1 **与** X_2 **的相关系数** ρ， （3） X_1 与 X_2 是否独立？

解：设事件 $A_i=\{$从 100 件产品种任取一件是 i 等品$\}$， $i=1,2,3$ ，据题意可知

$$P(A_1)=0.8, P(A_2)=P(A_3)=0.1$$

（1）随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布如下：

$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$

$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.8$

$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.1$

$P(X_1=1,X_2=1)=P\left(A_1A_2\right)=0$ （4 分）

（2）关于 X_1 的边缘概率分布如下：

$P(X_1=0)=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=0,X_2=1)=0.1+0.1=0.2$

$P(X_1=1)=P(X_1=1,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)=0.8+0=0.8$

关于 X_2 的边缘概率分布如下：

$P(X_2=0)=P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=0)=0.1+0.8=0.9$

$P(X_2=1)=P(X_1=0,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=1)=0.1+0=0.1$

由（1），可得 $E(X_1X_2)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.1+1\times0\times0.8+1\times1\times0=0$

因此 $Cov(X_1,X_2)=E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]$

$=E(X_1X_2)-EX_1EX_2=0-0.8\times0.1=-0.08$

因此 $\rho=\dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\dfrac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}}=-\dfrac{2}{3}$ 。（4 分）

（3） X_1 与 X_2 不是不相关，故不独立。 （4 分）

（或者利用（1）及边缘分布的结果，用独立的定义判断，不独立）

五、（12 分）设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是来自总体 X 的简单随机样本，

（1）求未知参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$，

（2）判断$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2=n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$是否是$\theta$的无偏估计量，

（3）判断$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$的有效性。

解：（1）密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}\text{，则 }E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\theta\ 。$$

将$E(X)$替换成$\overline{X}$，得θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$为$\hat{\theta}_1=\overline{X}$。（4 分）

（2）由于$E(\overline{X})=E(X)=\theta$，所以$\hat{\theta}_1=\overline{X}$是$\theta$的无偏估计量。

令$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，

$$F_Z(z)=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i\le z))=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{n}{\theta}e^{-\frac{nz}{\theta}} & z\ge 0\end{cases}$，则 $Z\sim E\left(\frac{n}{\theta}\right)$ $\therefore E(Z)=\frac{\theta}{n}\ \therefore E(nZ)=\theta$，

所以$\hat{\theta}_2=n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$是$\theta$的无偏估计量。（4 分）

（3）$\because D(\overline{X})=\frac{\theta^2}{n}$，$D(n\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\})=\theta^2$，所以$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效。（4 分）

六、（8 分）设总体 X 服从[0, λ]区间上的均匀分布，参数$\lambda>0$，$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是来自总体 X 的简单随机样本，

（1）求 λ 的最大似然估计，（2）若 $\beta=3\lambda+2$，求 β 的最大似然估计。

解：（1）$X\sim f(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda} & 0\le x\le\lambda\\ 0 & 其它\end{cases}$

所以，似然函数为 $L(x_1,x_2,\dots,x_n;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda^n} & 0\le x_1,x_2,\dots,x_n\le\lambda\\ 0 & 其它\end{cases}$

考虑 L 的取值，要使 L 取值最大，λ 应最小。

当 $\lambda=\max(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 时，L 取值最大，

所以，最大似然估计为 $\hat{\lambda}=\max(x_1,x_2,\dots,x_n)$。　　　　（5 分）

（2）　由极大似然估计的不变性，

因此，β 的最大似然估计量为　$\hat{\beta}=3\hat{\lambda}+2=3\max(x_1,x_2,\dots,x_n)+2$。　　　　（3 分）

七、（8 分）设考生的某次考试成绩服从正态分布，从中任取 36 位考生的成绩，其平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在 0.05 的显著性水平下，可否认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分，给出检验过程。

附表：　t 分布数值表

$t_{0.025}(35)=2.0301$，$t_{0.025}(36)=2.0281$，$t_{0.05}(35)=1.6896$，$t_{0.05}(36)=1.6883$

解：要检验的假设为 $H_0:\mu=\mu_0(\mu_0=70),H_1:\mu\ne\mu_0$

检验用的统计量 $t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

拒绝域为　$|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}},t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301,$　　　　（4 分）

而观测值为 $|t|=\dfrac{|66.5-70|}{15/\sqrt{36}}=1.4$，$|t|=1.4<t_{0.025}(35)=2.0301$，没落在拒绝域内，

所以接受 H_0，故可认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分。　　　　（4 分）