2.3 连续型随机变量及其概率密度

2.3.1 连续型随机变量及其概率密度

1. **定义**　设随机变量X的分布函数为F(x)，若存在非负函数f(x)，使对于任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称X为**连续型随机变量**，其中函数**f(x)**称为随机变量X的概率密度函数，简称为**概率密度**。

2. 连续型随机变量的分布函数F(x)性质

（1）连续型随机变量的分布函数**F(*x*)**是连续函数。

（2）对于连续型随机变量**X**来说，它取任一指定实数***a***的概率均为零，即**P{X=*a*}=0**。

事实上，$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$且**F(*x*)**为连续函数，

则有**F(*a*-0)=F(*a*)**，得：**P{X=*a*}=0.**

注：**P{X=*a*}=0**，而事件**{X=*a*}**并非不可能事件。就是说，若**A**是不可能事件，则有**P(A)=0**；

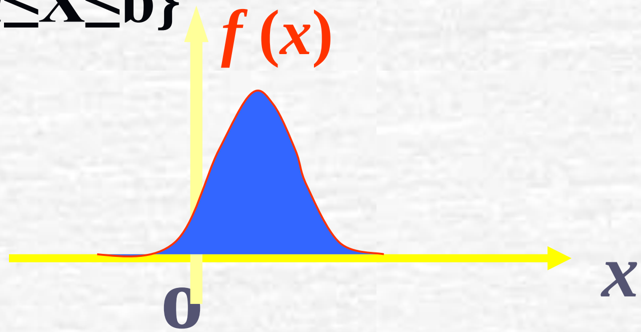
反之，若**P(A)=0**，**A并不一定是不可能事件**。

同样的，对必然事件也有类似的结论。

Back

（3）在计算连续型随机变量X落在某一区间的概率时，不必区分该区间是开区间或闭区间或半开区间。例如有

$P\{a<X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X<b\}=P\{a\le X\le b\}$



3. 概率密度$f(x)$的性质:

（1）$f(x)\ge 0$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$ （这是因为$F(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$）

反之，满足（1）(2）的一个可积函数 $f(x)$ 必是某连续型随机变量X的概率密度，因此，常用这两条性质检验 $f(x)$ 是否为概率密度。

几何意义：曲线$y=f(x)$与x 轴之间的面积等于1.

(3) X落在区间(x_1，x_2)的概率

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

几何意义：X落在区间(x_1，x_2)的概率$P\{x_1<X\le x_2\}$等于区间(x_1，x_2)上曲线$y=f(x)$之下的曲边梯形的面积.

(4) 若$f(x)$在点x处连续，则有$F'(x)=f(x)$。

这是因为$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，当$f(x)$连续时，

$F(x)$可导，所以在$f(x)$的连续点处，$F'(x)=f(x)$.

(5) 概率密度 $f(x)$ 的物理意义

由性质4 在$f(x)$的连续点x处有

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{P(x < X \le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Back

这里我们看到概率密度的定义与物理学中的线密度的定义相类似，若非均匀直线的线密度为$f(x)$，则在区间(x_1, x_2)上的直线的质量为$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$．这就是称$f(x)$为概率密度的原因，它反映了概率在x点处的"密集程度"。

4. 概率密度f(x)与分布函数F(x)的关系：

(1) 若连续型随机变量X具有概率密度为$f(x)$，那么它的分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

(2) 若连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$，那么它的概率密度为$f(x)=F'(x)$.

◄Back

注意：对于**F(*x*)**不可导的点***x***处，***f*(*x*)**在该点***x***处的函数值可任意给出。

例1：设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

(1) 试确定常数***k***，(2) 求**F(*x*)**，(3)并求**P{X>0.1}**。

解：(1) 由于$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} ke^{-3x}dx=\frac{k}{3}=1$，解得***k***=3.

于是X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

(2) 从而 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x 3e^{-3t}dt=1-e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

即 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

(3) $P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{\infty} f(x)dx=\int_{0.1}^{\infty} 3e^{-3x}dx=e^{-0.3}$

例2：确定常数A，B使得函数

$$F(x)=\begin{cases} Ae^{x} & x<0 \\ B-Ae^{-x} & x\geq 0 \end{cases}$$

为连续型随机变量X的分布函数，并求出X的概率密度及概率P{-1<X<2}。

解：由分布函数的性质知

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=B$$

所以 B=1.

又由连续型随机变量的分布函数的连续性知 F(x)在x=0处有F(0-0)=F(0), 即：A=1-A,

所以：A=1/2

于是X分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

X的概率密度为

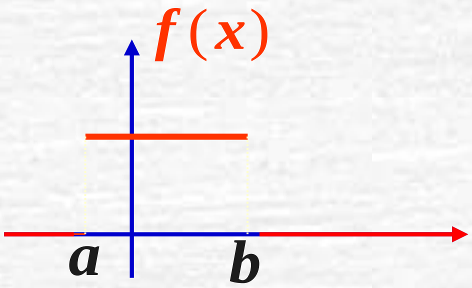
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ \frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

$$P\{-1<X<2\}=F(2)-F(-1)=1-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-1}$$

2.3.2 三种重要的连续型分布：

1．设连续随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

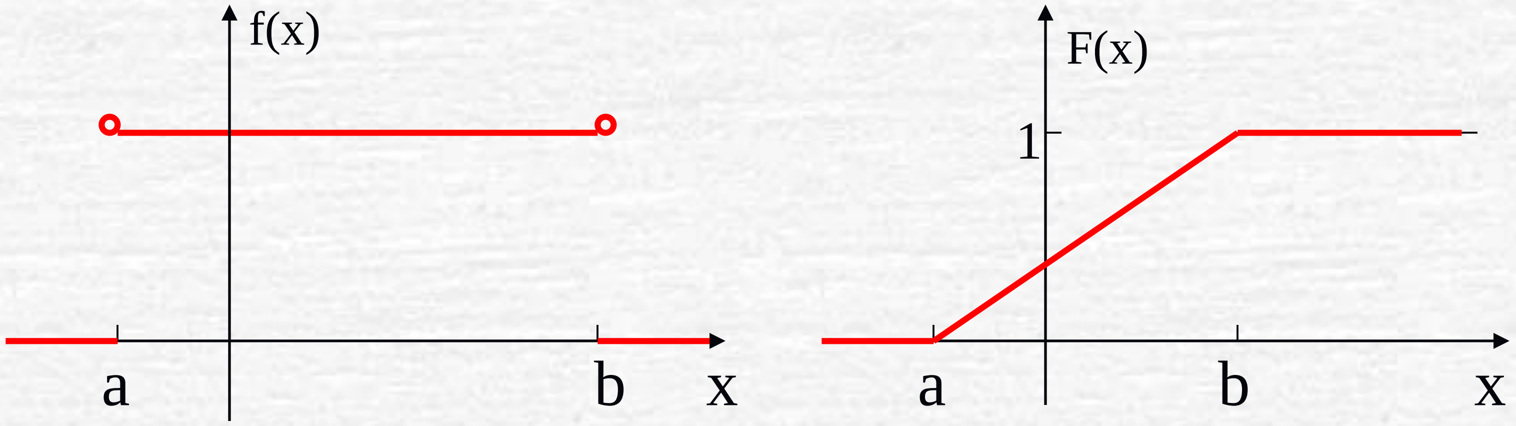


则称X在区间(a，b)上服从**均匀分布**，记为X~U(a，b).

若X~U(a，b)，则容易计算出X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

f(x)及F(x)的图形分别如:



◀Back

均匀分布

在数值计算时,由于四舍五入,小数点后某一位小数引入的误差;

公交线路车站上两辆公共汽车前后通过某汽车站的时间,即乘客候车时间

例3：设电阻值R是一个随机变量，均匀分布在900欧—1100欧。求R的概率密度及R落在950欧—1050欧的概率。

解：按题意，R的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{1100-900} & 900<r<1100\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\text{故有}P\{950<R\leq 1050\}=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}dr=0.5$$

◀Back

例 4 某公共汽车站从上午7时起，每隔15分钟来一辆班车，即7：00，7：15，7：30，7：45等时刻有班车到达此站。如果乘客到达此站的时间X在7：00到7：30之间服从均匀分布。

- 求：（1）乘客候车时间小于5分钟的概率；
- （2）乘客候车时间超过10分钟的概率。
- 解 (1) $P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \frac{1}{3}$;
- (2) $P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\} = \frac{1}{3}$

注释

（1） 均匀分布的特性：若X~U(a，b)，对于任意的区间(c，c+l)∈(a，b)，则

$$P\{c < X < c+l\} = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{l}{b-a}$$

就是说在同样长的子区间内概率是相同的，这个概率只依赖于区间的长度而不依赖于区间的位置。

（2） 我们现在能把一个区间[a，b]上随机地选取一个点P的直观概念加以精确化。简单地说就是所选取的点P的坐标X在[a，b]上是均匀分布的。

2. 指数分布

设连续型随机变量X具有概率密度为

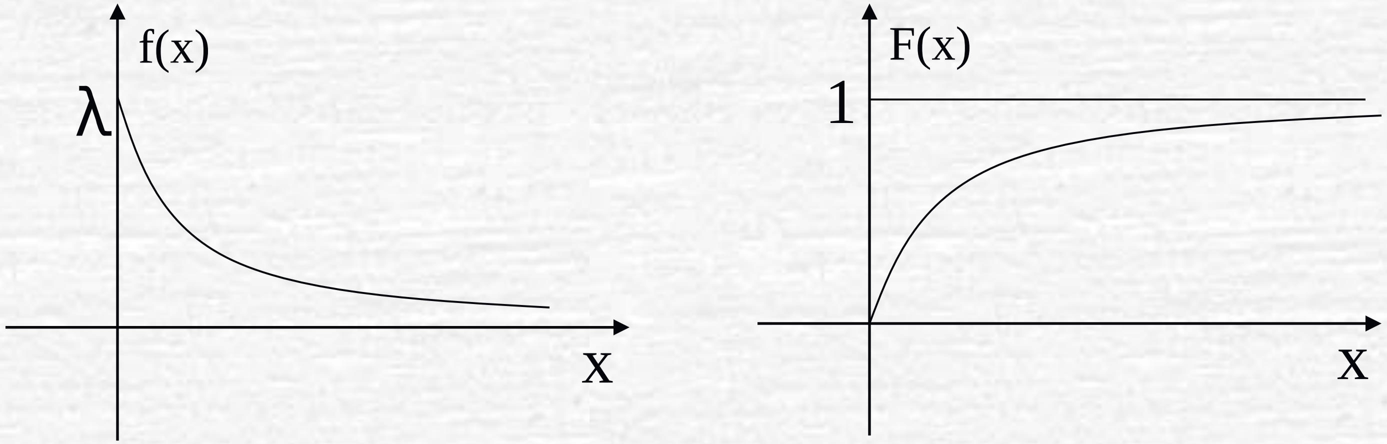
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中λ>0为常数，则称X服从参数为λ的指数分布。

容易验证: 指数分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

f(x)及F(x)的图形



指数分布的一个重要特性是"无记忆性".

设随机变量X满足：对于任意的s>0，t>0, 有

$$P\{X \geq s+t \mid X \geq s\} = P\{X \geq t\}$$

则称随机变量X具有无记忆性。

设随机变量X服从参数为λ的指数分布，则

$$P\{X \geq s+t \mid X \geq s\} = \frac{P\{X \geq s+t, X \geq s\}}{P\{X \geq s\}}$$

$$= \frac{P\{X \geq s+t\}}{P\{X \geq s\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

因此P{X≥s+t|X≥s}=P{X≥t}，即指数分布具有”无记忆性”.

例5 设设备在任何长为t 时间内发生故障的次数N(t)~π(λt)的Possion分布,求首次发生故障时刻T的分布函数。

解：当t>0时，时间间隔大于t，在[0，t]时间内未发生故障。则{T>t}={N(t)=0},

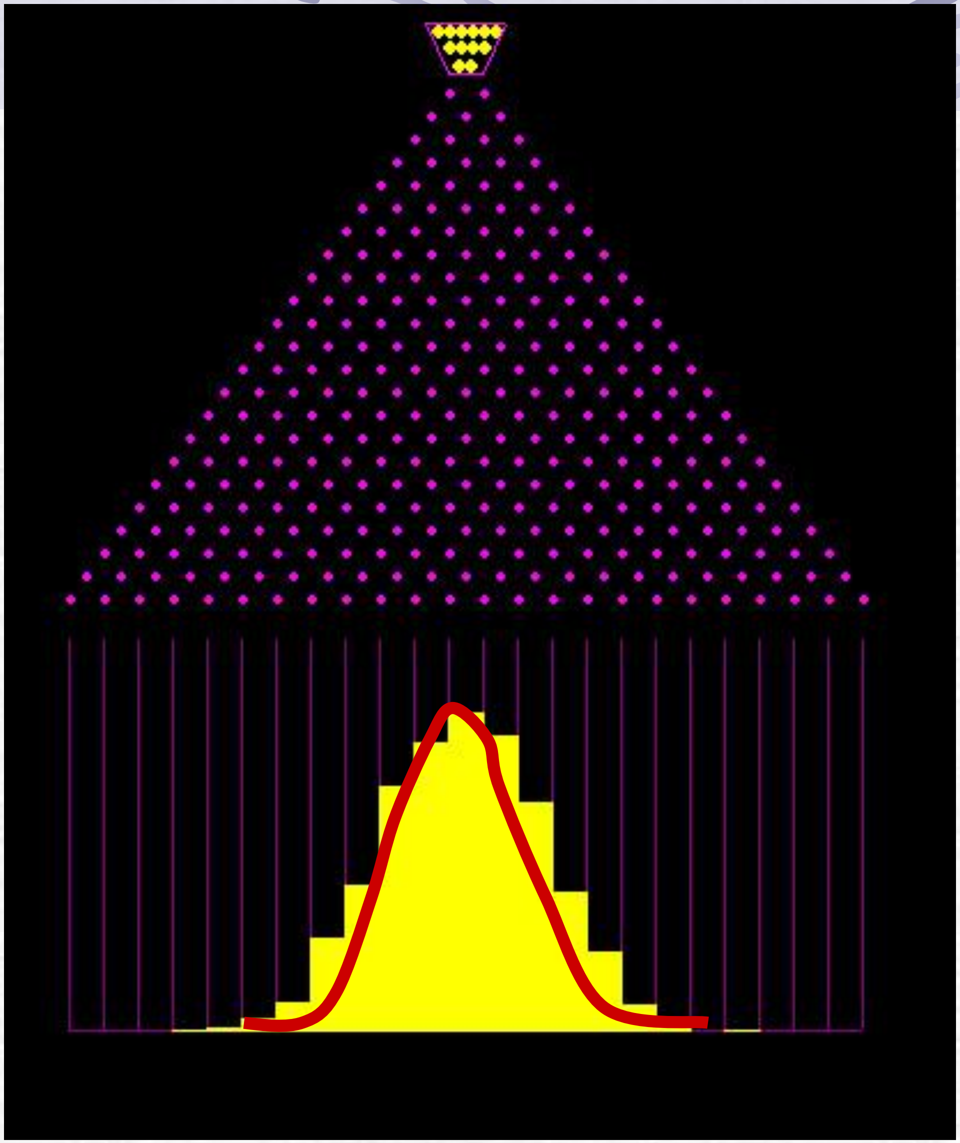
$$P\{T > t\} = P\{N(t) = 0\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t},$$

$$\boldsymbol{P\{T \le t\} = 1 - e^{-\lambda t} = F(t)}$$

$$\text{所以}F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

服从参数为λ的指数分布。

指数分布常用于可靠性统计研究中，如元件的寿命.



高尔顿钉板试验

这条曲线就近似我们将要介绍的正态分布的密度曲线。

◀Back

3．正态分布

（1）定义1：设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

其中μ，σ（$\sigma>0$）为常数，则称X服从参数为μ,σ^2的正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

验证f(x)是一个合理的概率密度函数：

①显然，$f(x)\geqq 0$；

②下面验证 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

Back

对于积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$，作代换 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

定义2： 当μ=0，σ=1时称X服从标准正态分布，记为

X~N(0，1)，其概率密度为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Back

(2) 正态密度函数f(x)的几何特征

因为

$$f'(x)=\frac{-(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ f''(x)=\frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^5}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

得：驻点：$x=\mu$, 为函数的极大值点；

拐点：$x=\mu\pm\sigma$. 作图如下

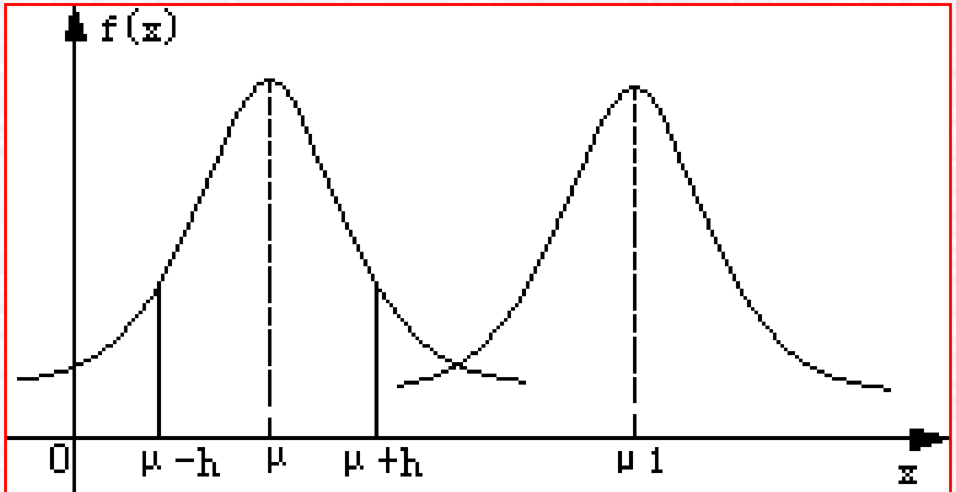


图2—10

所以

① 曲线关于$x=\mu$对称，这表明对于任意h>o，有

$$P\{\mu-h<X\leq\mu\}=P\{\mu<X\leq\mu+h\};$$

②当$x=\mu$时取到最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

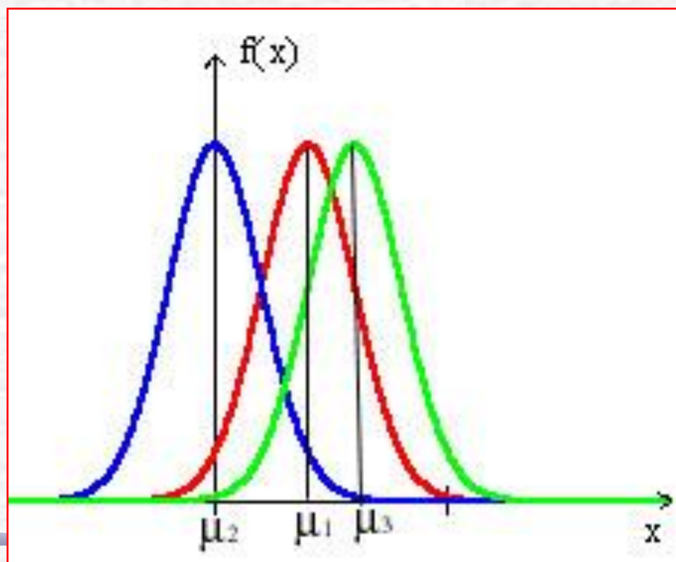
X离μ越远，f(x)的值越小，表明对于同样长度的区间，当区间离μ越远，X落这个区间上的概率越小。

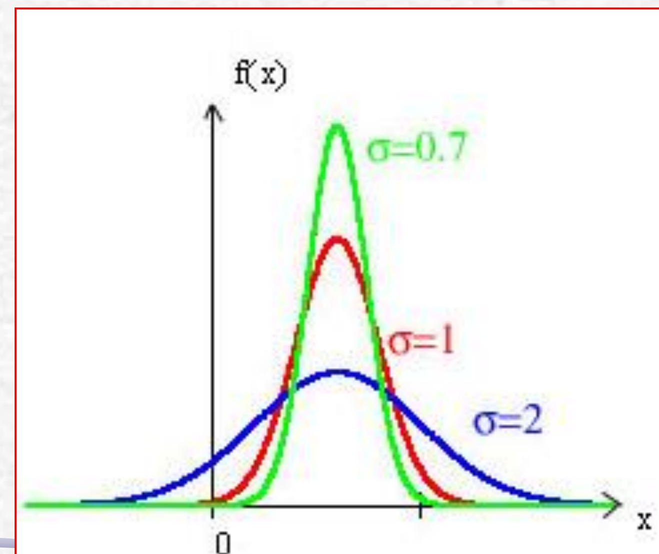
③在$x=\mu\pm\sigma$处曲线有拐点，又由于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，所以曲线以x轴为水平渐近线。

Back

④如果固定σ，改变μ的值，则图形沿着Ox轴平移，而不改变其形状，可见正态分布的概率密度曲线y=f(x)的位置完全由参数μ所确定，μ称为位置参数。

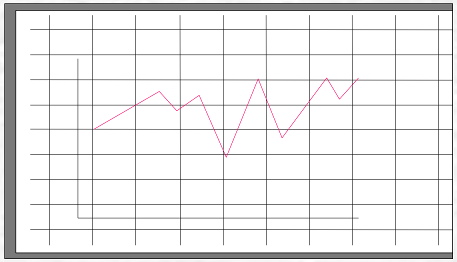
如果固定μ，改变σ，由于最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$，可知当σ越小时图形变得越尖，因而X落在μ附近的概率越大。





Back

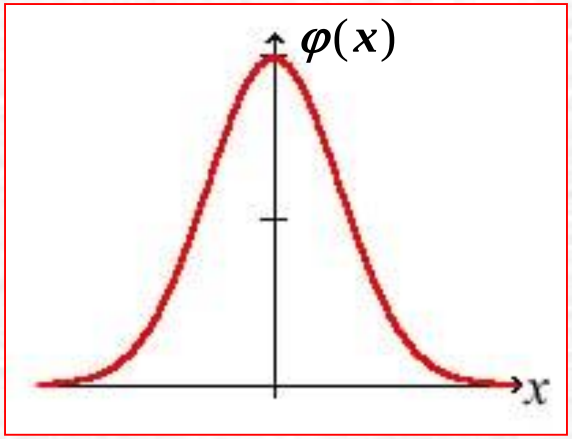
如我们遇到过的年降雨量和身高，在正常条件下各种产品的质量指标，如
零件的尺寸；
纤维的强度和张力；
农作物的产量，小麦的穗长、株高；
测量误差，射击目标的水平或垂直偏差；
信号噪声等等，都服从或近似服从正态分布.

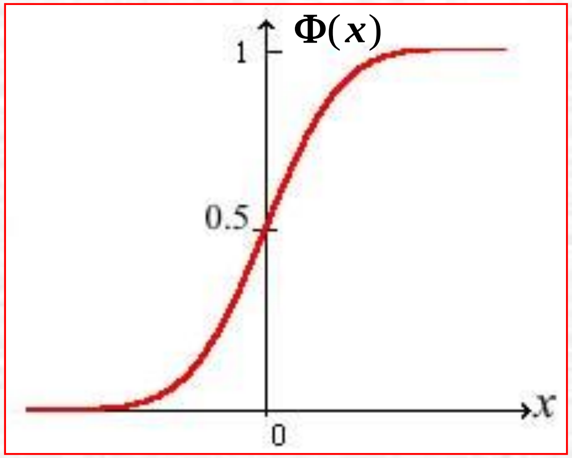


(3) 正态分布的概率计算

①标准正态分布的概率计算

若X~N(0，1)，则概率密度 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，如图。



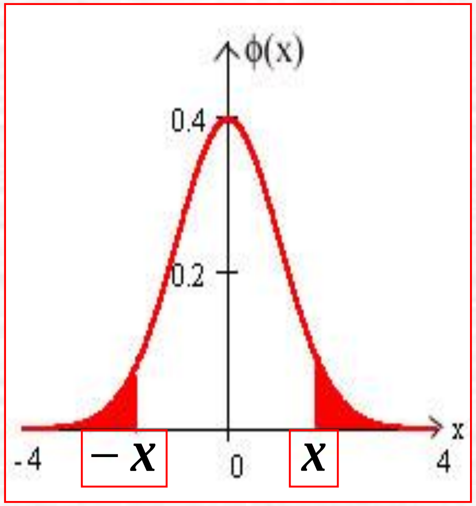


X的分布函数为： $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

一般的，$P\{a < X \le b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$ 通过查表求得。

常用性质:

A. 对于任意实数x，有$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.



$$B.\ \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

②一般正态分布的概率计算

若X~N(μ，σ²)，则X的分布函数为:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

对此积分作代换 s=(t-μ)/σ，则

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

因此计算F(x)时化为求 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，可查表求得.

一般的，$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

例6：设X~N(1.5，2^2)，求P{-1≤X≤2}。

解:

$$P\{-1 \le X \le 2\} = F(2) - F(-1) = \Phi\left(\frac{2-1.5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1.5}{2}\right)$$

$$= \Phi(0.25) - \Phi(-1.25) = \Phi(0.25) + \Phi(1.25) - 1$$

$$= 0.5987 + 0.8944 - 1$$

$$= 0.4931$$

例7：设X具有分布N(3，4)，求数c，使得

P{X>c}=2P{X≤c}。

解：

$$P\{X>c\}=1-P\{X\le c\}=1-\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)$$

$$P\{X\le c\}=\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)$$

因此 $\mathbf{1-\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)}$，即

$$\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)=\frac{1}{3},\text{从而}\Phi\left(\frac{3-c}{2}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

查表得：(3-c)/2=0.43，即c=2.14

Back

例8 假设测量的随机误差$X\sim N(0, 10^2)$,试求在100次独立重复测量中至少有三次测量误差的绝对值大于19.6的概率。

解：设p为每次测量误差绝对值大于19.6的概率,

$$p=P\{|X|>19.6\}=P\{|X|/10 > 19.6/10\}$$

$$=P\{|X|/10>1.96\} =1- P\{|X|/10\le 1.96\}$$

$$=1-\Phi(1.96)+\Phi(-1.96)$$

$$=1-\Phi(1.96)+1-\Phi(1.96)$$

$$=2-2\Phi(1.96)$$

$$=0.05$$

设**Y**表示**100**次独立测量中事件**A**（**测量误差的绝对值大于19.6**）出现的次数,则：**Y~b(100 , 0.05)**

$$\lambda = np = 100 \times 0.05 = 5$$

$$P\{Y \geq 3\} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^k e^{-5}}{k!} = 0.8753$$

性质 已知X~ N(μ, σ²).

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

例9　已知**X~ N(μ, σ²).求：**

$$1)\ P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1))$$

$$=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$$

2）P{|X-μ|<2σ}=2Φ(2)-1=0.9544

3）P{|X-μ|<3σ}=2Φ(3)-1=0.9944

说明：X~ N(μ, σ²)落在(μ-3σ, μ+3σ)内的概率为0.9944,

这一事实称为“**3σ**规则”这也是**N(0 , 1)**表只作**(-3 , 3)**内

的概率的原因。

例10 公共汽车车门的高度是按男子与车门顶头碰头机会在0.01以下来设计的. 设男子身高$X\sim N(170, 6^2)$, 问车门高度应如何确定?

解: 设车门高度为h cm, 按设计要求

$$P(X \geq h) \leq 0.01$$

或 $$P(X < h) \geq 0.99,$$

下面我们来求满足上式的最小的 h.

因为$X\sim N(170, 6^2)$, $\dfrac{X-170}{6} \sim N(0,1)$

故 $P(X < h) = \Phi\left(\dfrac{h-170}{6}\right) \geq 0.99$

Back

查表得$\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

所以 $\dfrac{h-170}{6}=2.33$,

即 $h=170+13.98\approx 184$

后面第五章中，我们还将介绍为什么这么多随机现象都近似服从正态分布．

Back

4. 其它常用的连续型分布有以下几个：

（1）Γ 分布：设**X**具有概率密度

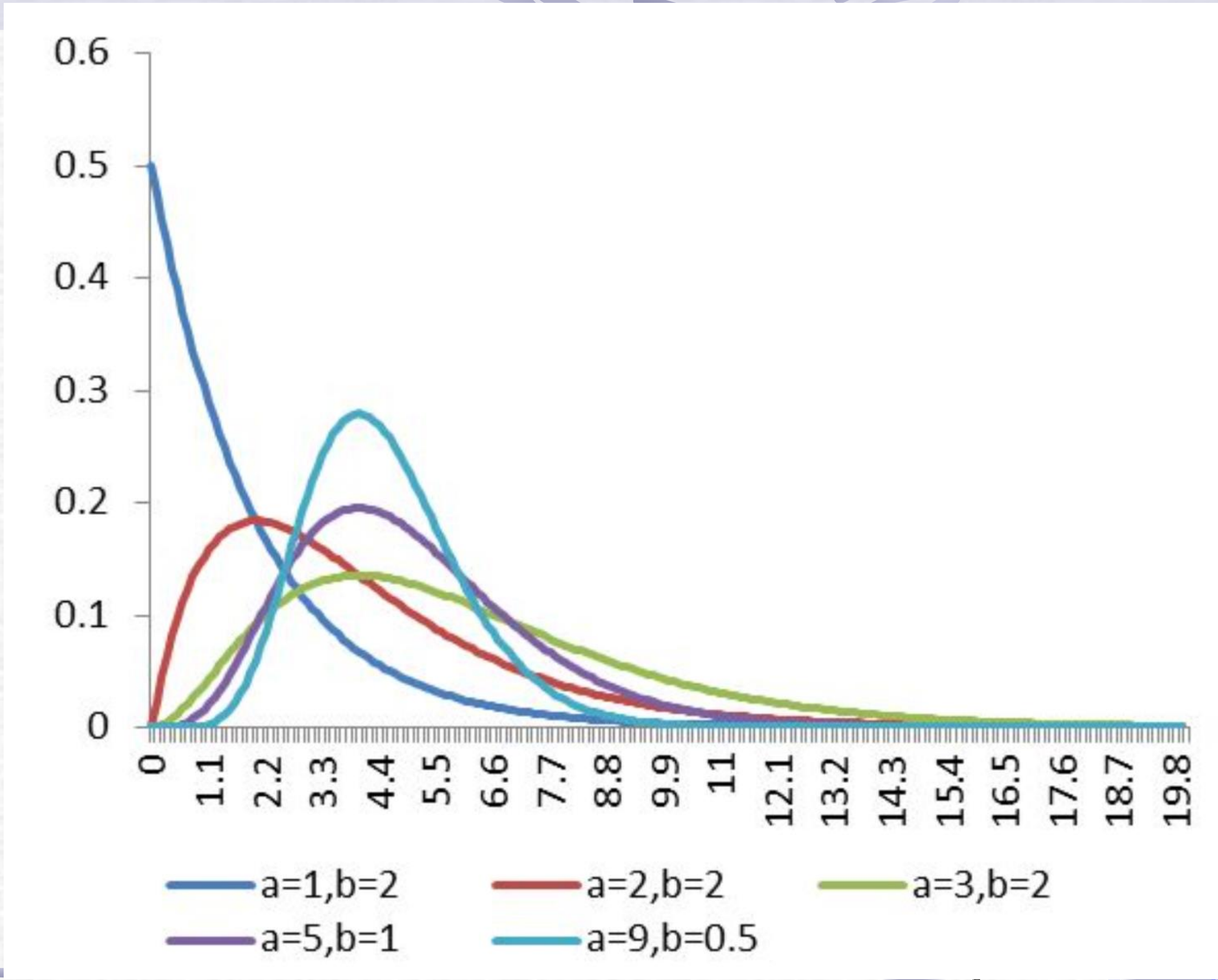
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中**α>0，β>0**为参数，则称**X**服从Γ 分布，记为 **X~Γ(α, β)**。

（2）瑞利(Ragleiqh)分布:设**X**具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中**σ>0**为常数，称**X**服从参数为的瑞利分布。


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1.1
2.2
3.3
4.4
5.5
6.6
7.7
8.8
9.9
11
12.1
13.2
14.3
15.4
16.5
17.6
18.7
19.8
a=1,b=2
a=2,b=2
a=3,b=2
a=5,b=1
a=9,b=0.5

Back

4. 其它常用的连续型分布有以下几个：

（1）Γ 分布：设X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中α>0，β>0为参数，则称X服从Γ 分布，记为 X~Γ(α, β)。

（2）瑞利(Ragleiqh)分布:设X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中σ>0为常数，称X服从参数为的瑞利分布。

Back

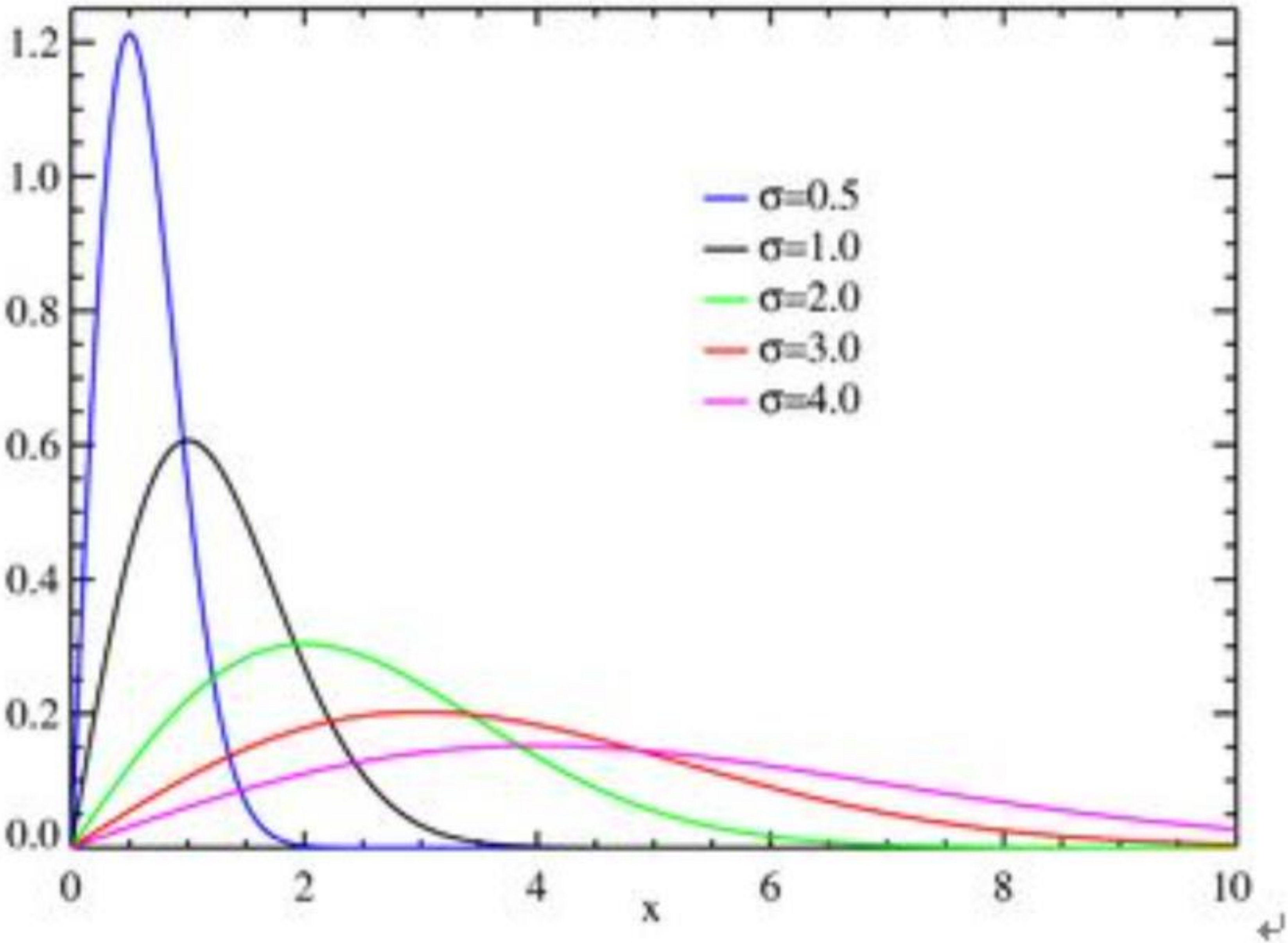


图 1：瑞利分布的概率密度函数