3.5两个随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

二、连续型随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $\lvert X-Y \rvert$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

具有可加性的两个离散分布

- 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立,

  则 $X + Y \sim B(n_1+n_2, p)$

- 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立,

  则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

Poisson分布可加性的证明

$X \sim P(\lambda_1),\ Y \sim P(\lambda_2)$, 则

$Z = X + Y$ 的可能取值为 0,1,2, …,

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

二项分布可加性的证明

设 X 与 Y 相互独立, 且

$$X \sim B(n, p), \quad Y \sim B(m, p),$$

则

$$X + Y \sim B(n + \mathrm{m}, p)$$

证 $Z = X + Y$ 的可能取值为

$$0, 1, 2, \ldots, n + m$$

（证明中用到 $\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$ ）

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}C_m^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}$$

$$=C_{n+m}^{k}p^{k}(1-p)^{n+m-k}$$

$$k=0,1,2,\ \ldots,\ \ n+m$$

所以 $X+Y\sim B(n+\mathrm{m},\ p)$

可见，$Z \sim b(n_1+n_2, p)$.

这个结果很容易推广至多个的情形:若

$X_i \sim b(n_i, p)$, $i=1, 2, \ldots, m$, 且$X_1, \ldots, X_m$独立, 则$X_1+X_2+\ldots+X_m \sim b(n_1+n_2+\ldots+n_m, p)$。

直观上，按二项分布的定义, 若$X_i \sim b(n_i, p)$, 则X_i表示n_i次独立重复试验中事件A出现的次数, 而且每次试验中A出现的概率均为p, $i=1, 2, \cdots, m$, 而$X_1, \ldots, X_m$独立, 可知$Y=X_1+X_2+\cdots+X_m$是$n_1+n_2+\cdots+n_m$次独立试验中A出现的次数, 而且每次试验中A出现的概率保持p, 故可得$Y \sim b(n_1+n_2+\ldots+n_m, p)$。

二、连续型随机变量函数的分布

问题　已知*r.v.*(X,Y)的*d.f.*或*p.d.*，$g(x,y)$为已知的二元函数，求 $Z=g(X,Y)$ 的*d.f.*或*p.d.*

方法

1. 从求Z 的分布函数出发,关键步：将Z 的分布函数转化为(X,Y)的事件。

2. 建立新的二维*r.v.*(Z,X)或(Z,Y), 求其边缘分布得Z 的*d.f*

方法1： $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)$

$$=\iint_{D_Z} f(x,y)dxdy \quad \text{其中 } D_Z:\{(x,y)\mid g(x,y)\le z\}$$

例如：欲求平方和的分布函数与密度: $Z = X^2+Y^2$

设(X,Y)的联合 p.d. 为 $f(x,y)$，则

$$F_Z(z) = P(X^2+Y^2 \le z) = \begin{cases} 0, & z<0, \\ \iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy & z\ge 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & z<0, \\ \int_0^{\sqrt{z}}[\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rd\theta]dr, & z\ge 0, \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0, \\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{z}\cos\theta, \sqrt{z}\sin\theta)d\theta, & z\ge 0, \end{cases}$$

例如，$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y 相互独立，$Z = X^2+Y^2$，则

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z\cos^2\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z\sin^2\theta}{2}}\,d\theta, & z\ge 0, \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 0, \end{cases}$$

称为 $\boxed{\text{自由度为2的}\chi^2\text{分布}}$

同法可得 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y 相互独立，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，则Z服从参数为1的瑞利分布（见书118页）

1. $Z=X+Y$ 的分布

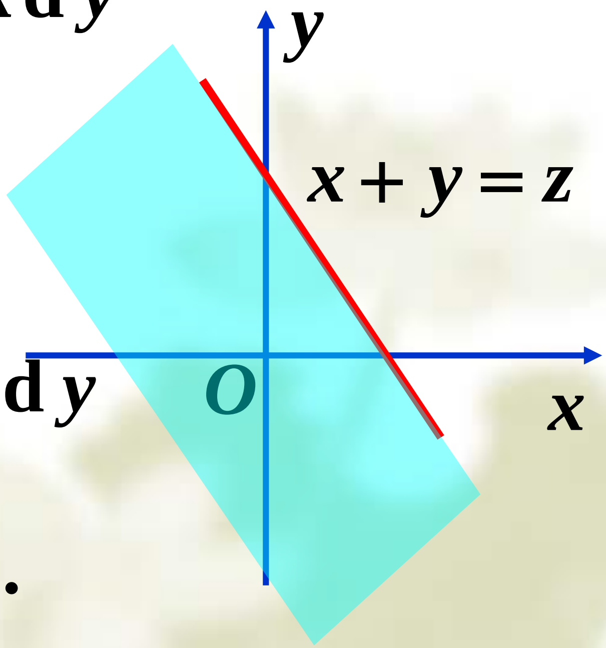
设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\overset{x=u-y}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$



由此可得概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

由于 X 与 Y 对称， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.$

当 X, Y 独立时， $f_Z(z)$ 也可表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y, \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z)$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

称之为函数 $f_X(z)$ 与 $f_Y(z)$ 的卷积

例3 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$

得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明一般，设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 则 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布，且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布. 即若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2,\cdots,n$ 则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

- 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

  则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$

例4 在一简单电路中，两电阻 R_1 和 R_2 串联联接，设 R_1, R_2 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

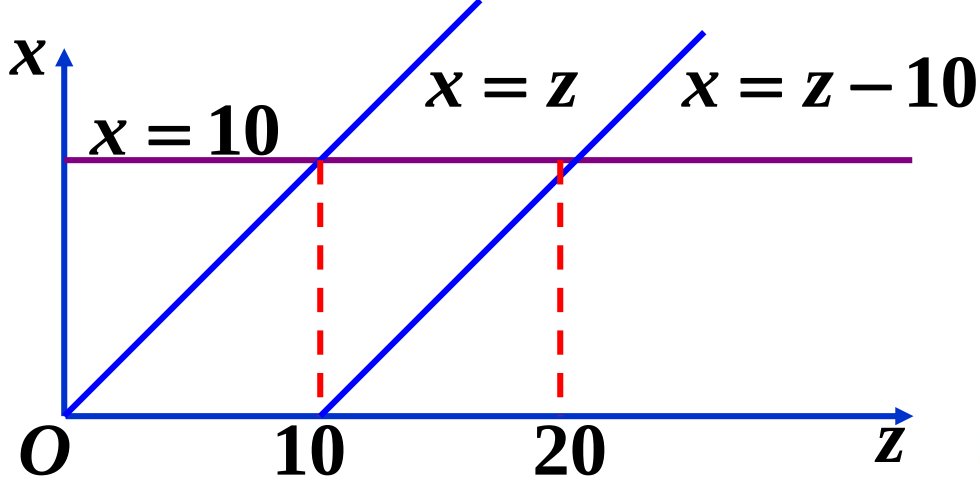
求电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解 由题意知 R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$ 时,



$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z-x)\,\mathrm{d}x$ 中被积函数不为零.

此时

$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x) f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0 \le z < 10, \\ \int_{z-10}^{10} f(x) f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10 \le z \le 20, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (1)$$

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0\le z<10,\\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10\le z\le 20, \quad (1)\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

将 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le z-x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

代入 (1) 式得

$$f_R(z)=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)/15000, & 0\le z<10,\\ (20-z)^3/15000, & 10\le z<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例8 X与Y相互独立，$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，$f_Y(\mathbf{y})=$

$\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

求$\mathrm{Z}=X+Y$ 的概率密度.

解 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$

注意：yoz面的被积函数非零区域为$\mathrm{y}>0, 0<z-\mathrm{y}<1$

则使用“穿刺法”，分三种情况：

当$\mathrm{z}\le 0$时,$f_Z(z)=0$;

当$0<\mathrm{z}<1$时,$f_Z(z)=\int_0^z e^{-y}dy=1-e^{-z}$;

当$\mathrm{z}\ge 1$时,$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}e^{-y}dy=(e-1)e^{-z}$;

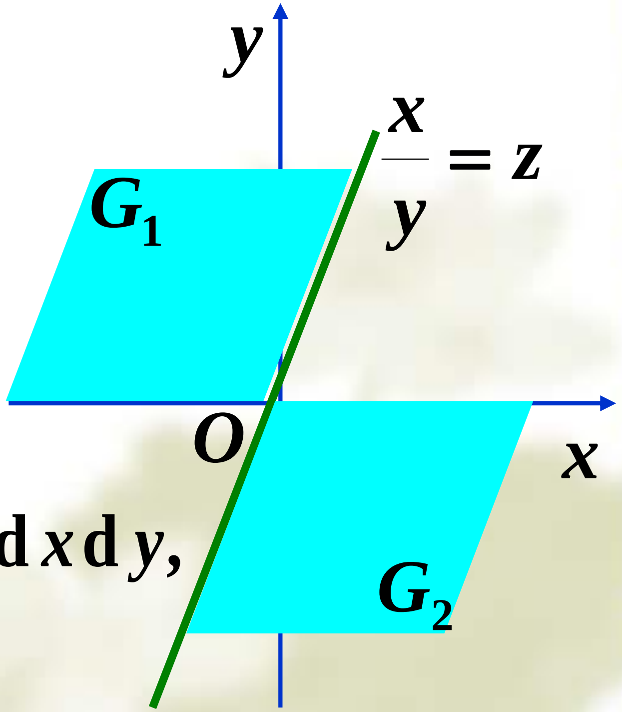
2. $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则 $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\left\{\frac{X}{Y} \le z\right\}$$

$$= \iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$



令 $u = x/y$,

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

令 $u=x/y$,

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y,$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y,$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\int_{0}^{+\infty} yf(uy,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u-\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(uy,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u,$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{0}^{+\infty} y f(yu, y) \mathrm{d} y - \int_{-\infty}^{0} y f(yu, y) \mathrm{d} y \right] \mathrm{d} u.$$

由此可得概率密度为

$$f(z) = \int_{0}^{+\infty} y f(yz, y) \mathrm{d} y - \int_{-\infty}^{0} y f(yz, y) \mathrm{d} y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) \mathrm{d} y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) \mathrm{d} y.$$

例7 设 X,Y 分别表示两只不同型号的灯泡的寿命，X,Y 相互独立，它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数.

解 由公式

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得所求密度函数 (当$z>0$时)

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-yz}\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{(2+z)^2},$$

(当$z\le 0$时) $f_Z(z)=0,$

得

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

3. $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-P\{X\le z\}]\cdot[1-P\{Y\le z\}]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

故有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

例8 X与Y相互独立,同分布概率密度为

$$f_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

求$\mathrm{M} = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$**得概率密度。**

解 $$\boldsymbol{F_X(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{F_M(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} [1 - e^{-\frac{z^2}{2}}]^2 & z > 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}}$$

$$则f_M(z)=\begin{cases}2[1-e^{-\frac{z^2}{2}}]\times ze^{-\frac{z^2}{2}} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$F_N(z)=1-\big(1-F_X(z)\big)\big(1-F_Y(z)\big)$$

$$=\begin{cases}1-[e^{-\frac{z^2}{2}}]^2 & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z^2} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$则f_N(z)=\begin{cases}2ze^{-z^2} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$

则 $M=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 及 $N=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数分别为

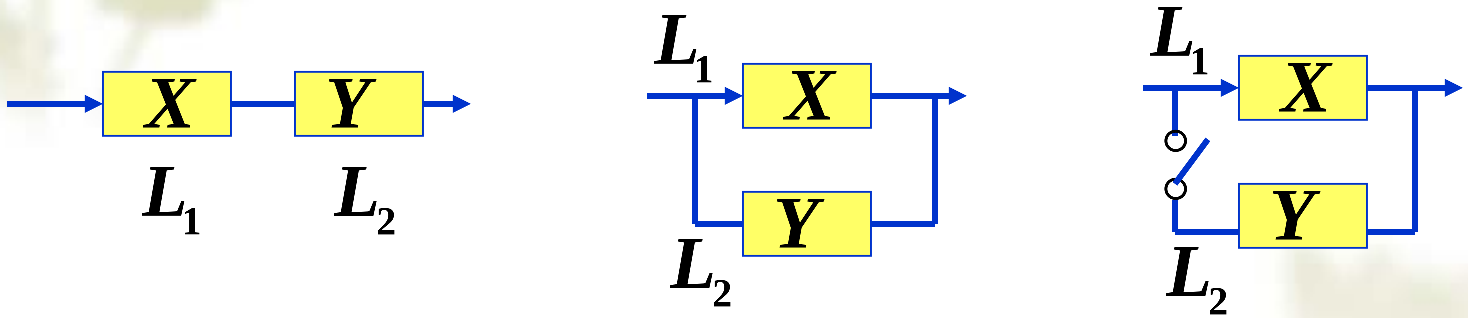
$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$，则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\ F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

例9 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成，连接的方式分别为(i)串联，(ii) 并联，(iii) 备用(当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 开始工作)，如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y，已知概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta \mathrm{e}^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联情况

由于当L_1, L_2中有一个损坏时,系统L就停止工作,所以这时L的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii) 并联情况

由于当且仅当L_1, L_2 都损坏时, 系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X,Y)$.

$Z = \max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii) 备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 才开始工作,

因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和, 即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y} \mathrm{d}y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y} \mathrm{d}y = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$