4.3 协方差与相关系数

一、基本概念

二、n维正态变量的性质

问题的提出　对于二维随机变量(X, Y):

已知联合分布 $\underset{\nleftarrow}{\rightarrow}$ 边缘分布

对二维随机变量,除每个随机变量各自的概率特性外,相互之间还有某种联系,问题是用一个怎样的数去反映这种联系.

若随机变量 X 和 Y 相互独立,那么

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

若随机变量 X 和 Y 不相互独立

$$D(X+Y)=?$$

$$D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2$$

$$=D(X)+D(Y)+2\boxed{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}.$$

协方差

反映了随机变量 X，Y 之间的某种关系

一.协方差和相关系数的定义

1. 定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

若 $D(X)>0$, $D(Y)>0$, 称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

无量纲的量

为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

若 $\rho_{XY}=0$, 称 X ,Y 不相关.

2. 说明

(1) X 和 Y 的相关系数又称为标准协方差, 它是一个无量纲的量.

(2) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$= E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]$$
$$= 0.$$

(3) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$= D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) = D(X) + D(Y).$$

3. 协方差的计算公式

法1. 若（ X ，Y ）为离散型，

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]p_{ij}$$

若（ X ，Y ）为连续型，

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)dxdy$$

法2.

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$;

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

证明 (1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=E[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

$$(2)D(X+Y)=E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\}$$

$$=E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y)]^2\}$$

$$=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}$$

$$+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

4. 性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$; $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$

(2) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$， a,b 为常数;

(3) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

例1 已知 X , Y 的联合分布为

$Y \backslash X$	1	0
1	p	0
0	0	q

$0 < p < 1$

$p + q = 1$

求 $\operatorname{cov}(X, Y)$

ρ_{XY}

解

X	1	0
P	p	q

Y	1	0
P	p	q

XY	1	0
P	p	q

$$\left.\begin{array}{l} E(X) = p,\ E(Y) = p, \\ D(X) = pq,\ D(Y) = pq, \\ E(XY) = p, \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \operatorname{cov}(X, Y) = pq, \\ \rho_{XY} = 1 \end{array}$$

例2 $f(x,y)=\begin{cases}6x & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$,求$\rho_{XY}$

解 $E(X)=\frac{1}{2}, E(X^2)=\frac{3}{10}, D(X)=\frac{1}{20}$

$$E(Y)=\frac{3}{4}, E(Y^2)=\frac{3}{5}, D(Y)=\frac{3}{80}$$

$$E(XY)=\frac{2}{5}, \mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{40},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例3 $X \sim U(-1,1), Y = X^2$,求ρ_{XY}

解 $$E(X) = 0, E(X^2) = \frac{1}{3}, D(X) = \frac{1}{3},$$

$$E(Y) = \frac{1}{3}, E(Y^2) = \frac{1}{5}, D(Y) = \frac{4}{45}$$

$$E(XY) = 0, \mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

$$\rho_{XY} = 0$$

$$P\{X \leq -0.5, Y \leq 0.25\} = 0$$
$$\neq 0.25 \times 0.5 = P\{X \leq -0.5\}P\{Y \leq 0.25\}$$

X,Y不独立

例4 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 ρ_{XY}

解1 $\mathrm{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$

$$\overset{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=s,\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=t}{=\!=} \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ste^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s-\rho t)^2-\frac{1}{2}t^2}dsdt$$

令 $s-\rho t=u$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} t(\rho t+u)e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{1}{2}t^2}dudt$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$\therefore\ \rho_{XY}=\rho$$

解2 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1,\ E(Y)=\mu_2,\ D(X)=\sigma_1^2,\ D(Y)=\sigma_2^2.$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\quad u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi},$$

故有$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$.

于是 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho.$$

结论

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

即X ,Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X ,Y 不相关

例5 已知随机变量 X,Y 分别服从 $N(1,3^2)$, $N(0,4^2)$, $\rho_{XY}=-1/2$, 设 $Z=X/3+Y/2$.

(1) 求 Z 的数学期望和方差.

(2) 求 X 与 Z 的相关系数.

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立?为什么?

解 (1)由$E(X)=1,\ D(X)=9,\ E(Y)=0,\ D(Y)=16.$

得 $$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)$$

$$=\frac{1}{3}.$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X}{3}\right) + D\left(\frac{Y}{2}\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= 1 + 4 - 2 = 3.$$

(2) $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=3-3=0.$$

故 $\rho_{XZ}=\mathrm{Cov}(X,Z)\Big/\left(\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}\right)=0.$

(3) 由二维正态随机变量相关系数为零和相互独立两者是等价的结论, 可知: X 与 Z 是相互独立的.

二、相关系数的意义

1. 问题的提出

问 a, b 应如何选择, 可使 $aX+b$ 最接近 Y?

接近的程度又应如何来衡量?

设 $e = E[(Y-(aX+b))^2]$

则 e 可用来衡量 $aX+b$ 近似表达 Y 的好坏程度.

当 e 的值越小, 表示 $aX+b$ 与 Y 的近似程度越好.

确定 a,b 的值, 使 e 达到最小.

$$e = E[(Y-(aX+b))^2]$$

$$= E(Y^2)+a^2E(X^2)+b^2-2aE(XY)+2abE(X)$$

$$-2bE(Y).$$

将 **e** 分别关于 **a,b** 求偏导数,并令它们等于零,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial b} = 2b+2aE(X)-2E(Y)=0, \\ \dfrac{\partial e}{\partial a} = 2aE(X^2)-2E(XY)+2bE(X)=0. \end{cases}$$

解得 $a_0 = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$, $b_0 = E(Y)-E(X)\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$

$$= E(Y)-E(X)a_0.$$

将 a_0, b_0 代入 $e = E[(Y-(aX+b))^2]$ 中,得

$$\min_{a,b} e = E[(Y-(aX+b))^2]$$

$$= E[(Y-(a_0 X + (EY - EXa_0)))^2]$$

$$= DY + a_0^2 DX - 2a_0 \operatorname{cov}(X,Y)$$

$$= DY - \frac{[\operatorname{cov}(X,Y)]2}{DX} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y).$$

2. 相关系数的意义

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时 e 较小, 表明 X, Y 的线性关系联系较紧密.

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, X, Y 线性相关的程度较差

当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关.

3. 注意

（1）不相关与相互独立的关系

相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **不相关**

（2）在X, Y方差存在不为0条件下, 不相关的充要条件

1° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$;

2° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$;

3° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.

4. 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1.$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$的充要条件是：存在常数 a, b 使

$$P\{Y = aX + b\} = 1.$$

证明 (1) $\min\limits_{a,b} e = E[(Y - (aX + b))^2]$

$$= (1 - \rho_{XY}^2) D(Y) \ge 0$$

$$\Rightarrow 1 - \rho_{XY}^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1.$$

(2) $|\rho_{XY}|=1$的充要条件是,存在常数 a,b 使

$$P\{Y=aX+b\}=1.$$

事实上, $|\rho_{XY}|=1 \Rightarrow E[(Y-(a_0X+b_0))^2]=0$

$$\Rightarrow 0=E[(Y-(a_0X+b_0))^2]$$

$$=D[Y-(a_0X+b_0)]+[E(Y-(a_0X+b_0))]^2$$

$$\Rightarrow D[Y-(a_0X+b_0)]=0,$$

$$E[Y-(a_0X+b_0)]=0.$$

由方差性质知

$P\{Y-(a_0X+b_0)=0\}=1,$ 或 $P\{Y=a_0X+b_0\}=1.$

反之,若存在常数 a^*, b^* 使

$$P\{Y = a^* X + b^*\} = 1 \quad \Leftrightarrow P\{Y - (a^* X + b^*) = 0\} = 1,$$

$$\Rightarrow P\{[Y - (a^* X + b^*)]^2 = 0\} = 1,$$

$$\Rightarrow E\{[Y - (a^* X + b^*)]^2\} = 0.$$

故有

$$0 = E\{[Y - (a^* X + b^*)]^2\} \geq \min_{a,b} E[(Y - (aX + b))^2]$$

$$= E\{[Y - (a_0 X + b_0)]^2\} = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}| = 1.$$

（3）： $\rho_{XY} = 0 \Longleftrightarrow X$， Y 不相关

$$\Longleftrightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\Longleftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

X, Y 相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ X， Y 不相关

若（ X， Y ）服从二维正态分布，

X， Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X， Y 不相关

三.协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都存在, 则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的**协方差矩阵**.

例如　二维随机变量(X_1, X_2)的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

其中　$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\},$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\},$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\},$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}.$$

由于$c_{ij} = c_{ji}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$，所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵.

以二维随机变量(X_1, X_2)为例.

由于

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

引入 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$

及(X_1, X_2)的协方差矩阵$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

由此可得

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$(X-\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1}(X-\mu)$$

$$=\frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].$$

于是 (X_1, X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

推广

n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度可表示为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

其中$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

四、n 维正态变量的性质

1. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 X_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 都是正态变量;

反之, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态变量.

2. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$ 服从一维正态分布(其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零).

3. 若 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布, 设 $Y_1, \cdots, Y_k$ 是 $X_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性函数,则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ 也服从多维正态分布. 线性变换不变性

4. 设 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从n维正态分布,则“$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立”与“$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关”是等价的.