14.4 功率谱密度

狄利克莱条件
在一周期内，
1，连续或只有有限个第一类间断点；
2，极大值和极小值的数目应是有限个；
3，信号是绝对可积的

1．时间函数的能谱密度

设x(t)(−∞<t<+∞)是时间t的非周期函数，

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt < +\infty$ ，由傅里叶变换理论：

若x(t)绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$

且满足狄利克莱条件，则x(t)的傅里叶变换存在

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ ，且在x(t)的连续点处

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

称为F(ω)的傅里叶反变换。其中F(ω)一般为复值函数，有

$$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega t}dt=\overline{F(\omega)}$$

$x(t)$和$F(\omega)$之间有巴塞瓦尔等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

若把x(t)看作是通过1Ω电阻上的电流或电压，则等式左边的积分表示在1Ω电阻上的总能量，故右边的被积函数$|F(\omega)|^2$ 相应地称为能谱密度，巴塞瓦尔等式即可看作总能量的谱表示式。

记$S(\omega)=|F(\omega)|^2$, 则上式为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)d\omega$$

其中$S(\omega)$为偶函数。称$S(\omega)$为$x(t)$的能谱密度，

2．时间函数的功率谱密度

上面假定$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt < +\infty$，即$x(t)$的总能量有限，在实际问题中，大多数函数的总能量都是无限的，因而不能满足傅里叶变换条件，在工程技术中通常研究$x(t)$在$(-\infty<t<+\infty)$上的平均功率，即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

及其谱表示。

设上式极限存在，作一截尾函数

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t) & |t|\le T \\ 0 & |t|>T \end{cases}$$

那么$x_T(t)$满足傅里叶变换条件，于是有

$$F_x(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_T(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

由巴塞瓦尔等式有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_T{}^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

两边同除以2T，得$x(t)$在$(-T<t<T)$上的平均功率为

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}x_T{}^2(t)dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

令T→＋∞，并假定积分与极限运算可以交换顺序，则

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

称上式左边为平均功率。记$\overline{S}(\omega) = \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\left|F_x(\omega,T)\right|^2$，

则称 $\overline{S}(\omega)$ 为x(t)的功率谱密度，称

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{S}(\omega)d\omega$$

为x(t)的平均功率的谱表示。

3．随机过程的平均功率与功率谱密度

以上讨论的是普通时间函数的频谱分析，对于随机过程 {X(t)，-∞< t < +∞}可作类似的分析。

设X(t)是均方连续随机过程，作截尾随机过程

$$X_T(t)=\begin{cases}X(t), & |t|\le T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

因为$X_T(t)$均方可积，故存在傅氏变换，于是

$$F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}X_T(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T}X_T(t)e^{-j\omega t}dt$$

利用巴塞瓦尔等式有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}X_T^{\,2}(t)dt=\int_{-T}^{T}X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F_X(\omega,T)|^2\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{\,2}(t)dt = \int_{-T}^{T} X^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega,T)|^2\, d\omega$$

因为X(t)是随机过程，故上式两边都是随机变量，因此平均功率这时不仅要对时间区间[-T，T]取平均，还要求概率意义下对随机变量的平均，于是有

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} E\left[|F_X(\omega,T)|^2\right]d\omega$$

上式就是随机过程X(t)的平均功率和功率谱密度关系的表示式。

定义1：设{X(t), -∞<t<+∞}为均方连续的随机过程，称

$$\Psi^2 = \lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt\right]$$

为X(t)的平均功率，称

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|F_X(\omega,T)|^2]$$

为X(t)在ω处的功率谱密度，简称(自)谱密度。

$$\Psi^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega$$

上式为X(t)的平均功率的频谱展开式，$S_x(\omega)$的物理意义表示X(t)的平均功率关于频率的分布。

注释：谱密度是从频率角度描述X(t)的统计规律的最主要的数字特征。

当X(t)是均方连续的平稳过程时，由$E[X^2(t)]=R_X(0)$，利用均方积分的性质有

$$\Psi^2=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt=R_X(0)=E[X^2(t)]$$

例1:设有随机过程X(t)=acos(ωt+Θ), a, ω为常数，在下列情况下，求X(t)的平均功率:

(1) Θ是在(0, 2π)上服从均匀分布的随机变量。

(2) Θ是在(0, π/2)上服从均匀分布的随机变量。

解:(1) X(t)是平稳过程，且相关函数为 $R_x(t,t)=\frac{a^2}{2}$

故X(t)的平均功率为 $\Psi^2=R_x(0)=\frac{a^2}{2}$

(2) $E[X^2(t)]=E[a^2\cos^2(\omega t+\Theta)]=E[\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\cos(2\omega t+2\Theta)]$

$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\omega t+2\theta)\frac{2}{\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{\pi}\sin(2\omega t)$$

故X(t)为非平稳过程，X(t)的平均功率为

$$\Psi^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{\pi}\sin 2\omega t]dt=\frac{a^2}{2}$$

功率谱密度的性质

性质1.　$S_x(\omega)$ 是 ω 的实的、非负的偶函数；

证：因为 $|F_x(\omega, T)|2=F_x(\omega, T)F_x(-\omega, T)$

是 ω 的实的、非负的偶函数，所以它的均值的极限

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|F_X(\omega,T)|^2]$$

必是 ω 的实的、非负的偶函数。

性质2. 平稳过程的功率谱密度可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega<\infty.$

功率谱密度与自相关函数之间的关系

定理 设{X(t), -∞<t< ∞}为均方连续的平稳过程， Rx(τ) 和 Sx(ω) 分别是其自相关函数和功率谱密度，且$\int_{-\infty}^{+\infty}|Rx(\tau)|d\tau<+\infty$ 则Sx(ω) 和Rx(τ) 是傅里叶变换对，即

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

它们统称为维纳—辛钦公式。

证：

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt|^2]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X(t_1)X(t_2)e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2]$$

作变量替代，$\begin{cases}\tau_1=t_1+t_2\\ \tau_2=-t_1+t_2\end{cases}$，可以得到：

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E[X(t_1)X(t_2)]e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_1dt_2$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau|}{2T})R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X^T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

其中

$$R_x^T(\tau) = \begin{cases} \left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau) & |\tau| \le 2T \\ 0 & |\tau| > 2T \end{cases}$$

当T➞＋∞时，注意到 $R_X^T(\tau) \to R_X(\tau)$ 对每一个 τ 都成立，

于是就可得到公式 $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

最后一步在理论上要求 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|d\tau < +\infty$

此外，由于$S_x(\omega)$和$R_x(\tau)$都是偶函数，所以维纳一辛钦公式还可以写成如下的形式

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}S_X(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

维纳一辛钦公式又称为平稳过程自相关函数的谱表示式，它揭示了从时间角度描述平稳过程X(t)的统计规律和从频率角度描述X(t)的统计规律之间的联系。据此，在应用上我们可以根据实际情形选择时间域方法或等价的频率域方法去解决实际问题。

例1：考虑随机电报信号，它是平稳过程且自相关函数为$R_X(\tau)=Ae^{-\beta|\tau|}$，A>0, β>0，求过程的功率谱密度。

解：应用公式

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau=2\int_0^{+\infty}Ae^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau$$

$$=2A\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau=\frac{2A}{\beta}\int_0^{+\infty}\cos\omega\tau d\left(-e^{-\beta\tau}\right)$$

$$=\frac{2A}{\beta}\left[1+\frac{\omega}{\beta}e^{-\beta\tau}\sin\omega\tau\Big|_0^{+\infty}-\frac{\omega^2}{\beta}\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d(\tau)\right]$$

$$=\frac{2A}{\beta}-\frac{\omega^2}{\beta^2}S_X(\omega)$$

得：$$S_X(\omega)=\frac{2A\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

例2:已知谱密度 $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$

求平稳过程X(t)的自相关函数和均方值

解: $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{\omega^2+1}-\dfrac{5}{\omega^2+9}\right)$

利用上例及傅氏变换的线性性质

$$\frac{3}{\omega^2+1}=\frac{2\times\frac{3}{2}\times 1}{\omega^2+1},\qquad \frac{5}{\omega^2+9}=\frac{2\times\frac{5}{6}\times 3}{\omega^2+9}$$

于是 $R_X(\tau)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{2}e^{-|\tau|}+\dfrac{5}{6}e^{-3|\tau|}\right)=\dfrac{1}{48}\left(9e^{-|\tau|}+5e^{-3|\tau|}\right)$

均方值为 $\Psi_X{}^2=R_X(0)=\dfrac{7}{24}$

例3：　已知平稳过程的自相关函数为$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau$ ，其中$a>0$，ω_0为常数，求谱密度$S_X(\omega)$。

解：$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}e^{-a\tau}\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\,d\tau$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-a\tau}[\cos(\omega_0+\omega)\tau+\cos(\omega-\omega_0)\tau]d\tau$$

$$=\frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$$

例4:　已知平稳过程的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

求其功率谱密度Sx(ω)。

解:

$$S_X(\omega)=\int_{-1}^{1}\left(1-|\tau|\right)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\int_{0}^{1}\left(1-\tau\right)\cos\omega\tau d\tau=\frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}.$$

有些平稳过程，自相关函数或谱密度的傅立叶变换或逆变换不存在，若允许含有 δ 函数，问题能得到解决.

$$\because \delta(t) \leftrightarrow 1, \qquad 即\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1, \qquad \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1 \bullet e^{i\omega\tau}d\tau$$

$$\therefore 2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}d\tau \qquad \therefore 2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega\tau d\tau$$

例5 求随机相位正弦波过程 所对应谱密度 $S_X(\omega)$.

$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta),\Theta\sim U(0,2\pi).a,\omega_0$为常数

解 $\because R_X(\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$ 所要求的谱密度为

$$\therefore S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{a^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos(\omega-\omega_0)\tau+\cos(\omega+\omega_0)\tau]d\tau$$

$$\because 2\pi\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega\tau d\tau \qquad =\frac{\pi}{2}a^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

白噪声(用功率谱密度特性给出的平稳过程)

1. **理想白噪声定义** 均值为零而谱密度为正常数，即

$$S_X(\omega)=\frac{N_0}{2},\qquad -\infty<\omega<+\infty(N_0>0)$$

的平稳过程$X(t)$ 称为白噪声过程，简称白噪声.

其名出于白光具有均匀光谱的缘故.

2. **白噪声的自相关函数**

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

白噪声是一种理想化的数学模型. 它的平均功率是无限的.

白噪声在数学处理上具有简单、方便优点. 如果某种噪声(或干扰)在比实际考虑的有用频带宽得多的范围内，具有比较 “平坦” 的谱密度，那就可把它近似地当作白噪声来处理.

3. 限带白噪声定义

如果噪声X(t)在有限频带上有正常数的功率谱密度,而在此频带之外为0，则称限带白噪声。 **分为低通型①和带通型②。**

低通型① $S_X(\omega)=\begin{cases} S_0 & |\omega|\le W \\ 0 & |\omega|>W \end{cases}, \qquad (S_0>0)$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W}S_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{WS_0\sin W\tau}{\pi W\tau}$$

$(\tau=0\text{时}, \dfrac{\sin W\tau}{W\tau}\text{看成}1)$

带通型② $S_X(\omega)=\begin{cases} S_0 & \omega_0-\dfrac{W}{2}<|\omega|<\omega_0+\dfrac{W}{2}, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$R_X(\tau)=\frac{WS_0\sin(\frac{W\tau}{2})\cos(\omega_0\tau)}{\pi\frac{W\tau}{2}}$$

互谱密度的定义

定义 设 $R_{XY}(\tau)$平稳相关过程 **X(t), Y(t)**的互相关函数，且绝对可积，则**X(t), Y(t)**的互谱密度为

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

互谱密度与互相关函数之间的关系

定理 互谱密度与互相关函数是傅里叶变换对，即

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$