2. 乘法公式

由条件概率定义，若$P(B)>0$，则$P(AB)=P(A|B)P(B)$

若$P(A)>0$, 则$P(AB)=P(B|A)P(A)$

上述公式可推广到任意有穷多个事件时的情形，例如，

设A，B，C为事件，且$P(AB)>0$，则

$$P(ABC)= P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

这里，注意到由假设$P(AB)>0$可推得$P(A)\geqslant P(AB)>0$.

一般，设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个事件，$n\geqslant 2$, 且$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则有：$P(A_1A_2\ldots A_n)=$

$$P(A_1)\bullet P(A_2|A_1)\ldots\bullet P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2})\bullet P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

例3. 盒中5个白球，2个黑球，连续不放回地取3次球，求第三次才取得黑球的概率。

解：设A_i表示第 i 次取到黑球

$$P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\right)$$

$$=\frac{5\cdot 6\cdot 5}{7\cdot 6\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 5}{5\cdot 6\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 5}=\frac{4}{21}$$

在利用条件概率求无条件P时，条件P往往用古典概型计算。

例4. 设某同学眼镜，第一次落下时打破的概率为1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为7/10，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为9/10，试求透镜落下三次而未打破的概率。

解：A_i (i=1, 2, 3) 表示事件“透镜第i次落下打破”， 以B表示事件“透镜落下三次而未打破”。

因为$B=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ ，故有

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=(1-1/2)(1-7/10)(1-9/10)=3/200$$

◄Back

例5：设袋中装有r只红球，t只白球，每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入a只与所取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率。

解：以A_i(i=1,2,3,4)表示事件“第i次取到红球”，则$\bar{A}_3$，$\bar{A}_4$ 分别表示事件第三、四次取到白球。

则所求概率为：

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=P(\bar{A}_4|A_1A_2\bar{A}_3)P(\bar{A}_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=\frac{t+a}{r+t+3a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{r}{r+t}$$

将复杂问题适当的分解为若干简单问题，从而逐一解决，是常用的工作方法。

全概率公式就是这种方法在概率论上的体现。

全概率公式和贝叶斯公式:先介绍样本空间的划分的定义。

定义： 设S为试验E的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为E的一组事件，若

（1） $B_iB_j=\Phi,\ i\neq j,\ i, j=1, 2, \ldots, n;$

（2） $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S,$

则称B_1，B_2，…, B_n为样本空间S的一个划分。

例如，设试验E为“掷一颗骰子观察其点数”。它的样本空间为Ω={1，2，3，4，5，6}。E的一组事件B_1={1，2，3}，B_2={4，5}，B_3={6}是Ω的一个划分，而事件组C_1={1，2，3}，C_2={3，4}，C_3={5，6}不是S的划分。B和$\overline{B}$

任意试验的基本事件组构成样本空间的一个划分。

◀Back

全概率公式和贝叶斯公式

定理 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，B_1，B_2，…B_n为S的一个划分，且$P(B_i)>0$ ($i=1, 2, \ldots, n$)则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$$

称为全概率公式。

证：因为$A=AS=A(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)=AB_1\cup AB_2\cup\ldots\cup AB_n$

由假设$P(B_i)>0$ ($i=1, 2, \ldots, n$)，且

$(AB_i)\cap(AB_j)=\phi$，$i\neq j$，于是

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n)$$

$$=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$$

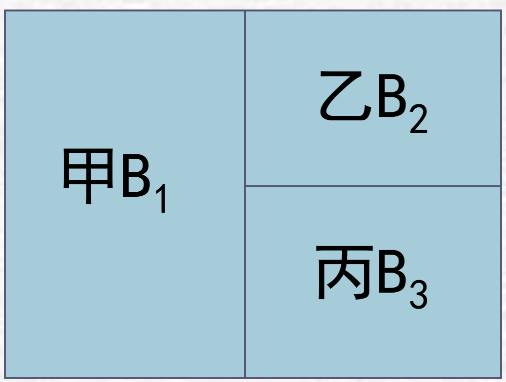
Back

例6　一箱同类型的产品，由三家工厂生产，其中1/2由甲厂生产，乙丙厂各生产1/4，又甲乙厂生产的产品均有2%的次品率，丙厂有4%的次品率，求

1）任取一产品是次品的概率$P(A)$；

2）任取一产品是次品且恰是由甲厂生产的概率$P(AB_1)$；

3）任取一产品发现是次品，问它是由甲厂生产的概率$P(B_1|A)$



解：　$S=\{$箱中的全部产品$\}$

A：任取一产品是次品，

B_i：取到的产品分别是由甲，乙，丙厂生产的.

由题意：$P(B_1)=1/2$，$P(B_2)=P(B_3)=1/4$，

$P(A|B_1)=P(A|B_2)=2/100$; $P(A|B_3)=4/100$

且 $B_iB_j=\Phi$, $i\neq j$, $i, j=1, 2, 3$. $B_1\cup B_2\cup B_3=S$

1） 由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=0.025.$$

2) 由乘法公式

$$P(A\ B_1)=P(A|B_1)P(B_1)$$

$$=0.01.$$

3） $P(B_1|A)=P(B_1A)/\ P(A)$,

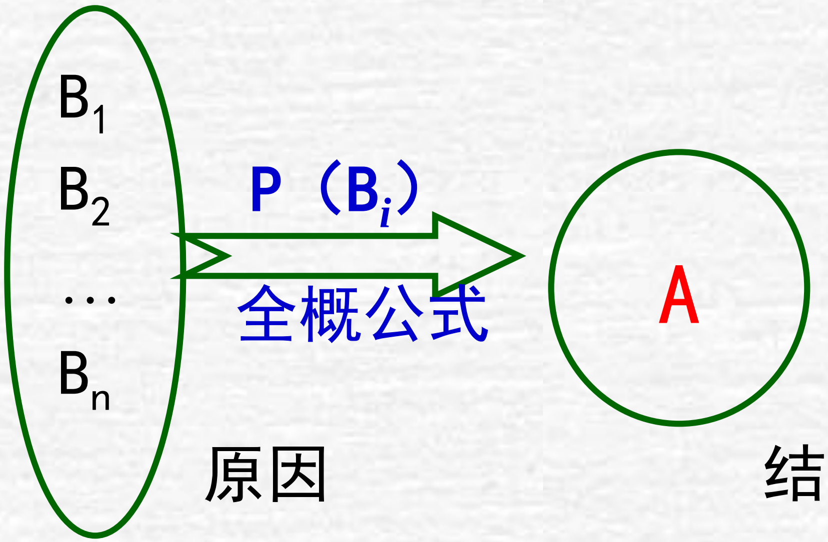
由上面计算为0.4.

◄Back

利用全概率公式求P(A)时,关键是

1)　找到S的一个划分B_1，B_2，...，Bn ， A总随着B_i出现,而 $P(A|B_i)$及$P(B_i)$容易求出.

2)　这个公式还可以从另外一个角度去理解，把Bi看成导致事件A发生的一种可能途径。对于不同的途径，A发生的概率即条件概率P（A|Bi）各不同，而采取哪个途径却是随机的。直观上易理解，在这种机制下，A的综合概率P（A）应在最小的P（A|Bi）和最大的P（A|Bi）之间，它也不一定是所有P（A|Bi）的算术平均，因为各途径被使用的机会P（Bi）各不同，正确的答案就是诸P（A|Bi） I=1,2，...n为权的加权平均值。



$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$$

加权平均值

例7　　盒中12个乒乓球，9个没用过，第一次比赛从盒中任取3个球，用后放回，第二次比赛再从盒中任取3个球，求：第二次比赛时所取的3个球都是没用过的概率。

解：设A:第二次比赛时所取的3个球都是没用过的;

　　　B_i:第一次比赛时所取的3个球恰有i个是没用过的。

则A的发生依赖于B_i的情况，B_i构成了任取3个球这一试验的样本空间的一个划分。

$$P(B_0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3},\quad P(B_1)=\frac{C_9^1\cdot C_3^2}{C_{12}^3},$$

$$P(B_2)=\frac{C_9^2\cdot C_3^1}{C_{12}^3},\quad P(B_4)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3},$$

$$P(A|B_0)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3},\quad P(A|B_1)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3},$$

$$P(A|B_2)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3},\quad P(A|B_4)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3},$$

于是

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{441}{3025}\approx 0.146.$$

例8　10个考签中有4个难签，3人参加抽签，不重复抽取，每人一次，甲先，乙次，丙最后，分别求3人抽到难签的概率。

解 设A,B,C分别表示甲\乙\丙抽到难签的事件.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}$$

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{4}{10}$$

$$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(AB)\mathrm{P}(C|AB)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\bar{B})\mathrm{P}(C|\mathrm{A}\bar{B})$$
$$+\mathrm{P}(\bar{A}B)\mathrm{P}(C|\bar{A}B)+\mathrm{P}(\bar{A}\bar{B})\mathrm{P}(C|\bar{A}\bar{B})=\frac{4}{10}$$

例9　点多赢

在很多游戏中都要投掷骰子，比掷出的点子大小，点子大的优先。甲先掷，乙后掷，谁掷出的点子多谁赢，问甲赢得概率?

设B表示事件“甲赢”，A_i 表示事件“乙掷出i点”，$\mathrm{i}=1,2,3,4,5,6$。由全概率公式，

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{6}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\times\frac{6-i}{6}=\frac{5}{12}$$

直观上，也可有对称性，甲赢和乙赢的概率相等，而和局的概率为$\frac{1}{6}$，可知甲赢的概率等于

$$\left(1-\frac{1}{6}\right)\div 2=\frac{5}{12}$$

◄Back

贝叶斯公式

定理　设试验E的样本空间为S, A为E的事件，B_1，B_2，…，B_n为S的一个划分，且P（A）>0，P（B_i）>0（i=1, 2，…，n），则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

i=1，2，…，n. 称为贝叶斯（Bayes）公式。

证：由条件概率的定义及全概率公式有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i A)}{P(A)}=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)} \quad i=1，2，…，n$$

Back

例10 某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件制造厂提供的，根据以往的记录有以下的数据。元件制造厂次品率及提供晶体管的份额

1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志（1）在仓库中随机地取一只晶体管求它是次品的概率。（2）在仓库中随机地取一只晶体管，若已知取到的是次品，求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少。

解：设A表示“取到的是一只次品”，$B_i(i=1,2,3)$表示“所取到的产品是由第i家工厂提供的”，易知，B_1，B_2，B_3是样本空间S的一个划分，且有$P(B_1)=0.15$，$P(B_2)=0.80$，$P(B_3)=0.05$，$P(A|B_1)=0.02$，$P(A|B_2)=0.01$，$P(A|B_3)=0.03$

（1）由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$
$$=0.0125$$

（2）由贝叶斯公式

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times 0.15}{0.0125}=0.24$$

$P(B_2|A)=0.64$，$P(B_3|A)=0.12$

Back

例11 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为90%，而当机器发生某一故障时，其合格率为30%。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为75%，试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少？

先验概率

解：设A为事件"产品合格"，B为事件"机器调整良好"

已知：$P(A|B)=0.9$，$P(A|\bar{B})=0.3$，$P(B)=0.75$，

所需求的概率为$P(B|A)$，由贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

后验概率

$$=\frac{0.9\times 0.75}{0.9\times 0.75+0.3\times 0.25}=0.9$$

Back

例12 据调查某地区居民的肝癌发病率为0.0004，若记“该地区居民患肝癌”为事件B_1并记$B_2=\overline{B}_1$，则

$$P(B_1)=0.0004,\ P(B_2)=0.9996$$

现用甲胎蛋白法检查肝癌，若呈阴性，表明不患肝癌，若呈阳性，表明患肝癌，由于技术和操作不完善以及种种特殊原因，是肝癌者还未必检出阳性，不是患者也有可能检出呈阳性，据多次实验统计这二者错误发生的概率为：

$$P(A|B_1)=0.99,\ P(A|B_2)=0.05$$

其中事件A表示“阳性”，现设某人已检出呈阳性，问他患肝癌的概率$P(B_1|A)$是多少？

解：

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2)}$$

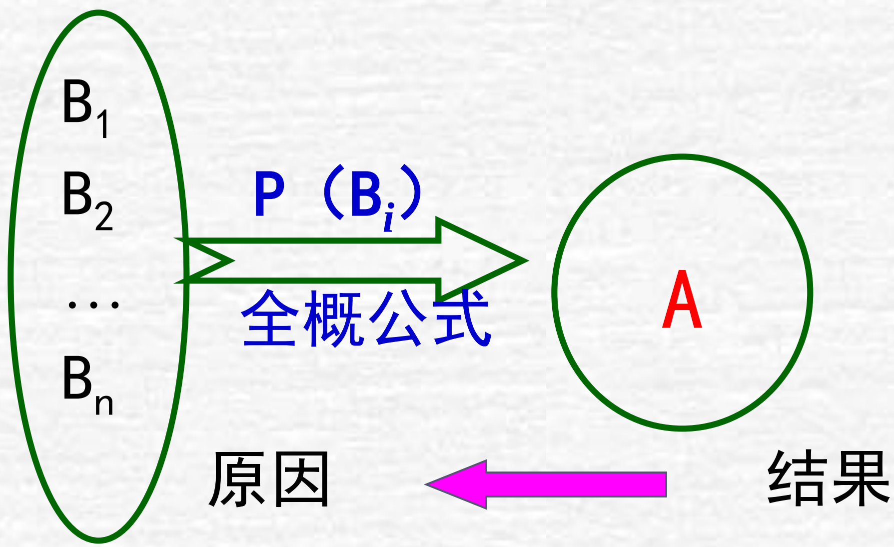
$$= \frac{0.0004 \times 0.99}{0.0004 \times 0.99 + 0.9996 \times 0.05} = 0.00786$$

在实际中，医生常用另一些简单易行的辅助方法先进行初查，排除大量明显不是肝癌的人，当医生怀疑某人有可能患肝癌时，才建议用甲胎蛋白法检验。这时在被怀疑的对象中，肝癌的发病率已显著提高了，比如说 P（B_1）=0.4，这时再用贝叶斯公式进行计算，可得

$$P(B_1 \mid A) = \frac{0.99 \times 0.4}{0.99 \times 0.4 + 0.05 \times 0.6} = 0.9296$$

这样就大大提高了甲胎蛋白法的准确率了。

对于全概率公式



$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\ldots+P(A|B_n)P(B_n)$$

加权平均值

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

贝叶斯公式的解释：$P(B_1)$，$P(B_2)$...，它是在没有进一步的信息（不知A是否发生）的情况下，人们对B_1，B_2...，发一可能性大小的认识，现在有了新的信息（知道A发生），人们对B_1，B_2...发生可能性大小有了新的估价。贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化。

贝叶斯公式作用在于“由结果推原因”，现在有一个“结果”A发生了，在众多可能的“原因”中，到底是哪一个导致了这个结果？这是一个在日常生活和科学技术中常要问的问题。

◄Back