3.4随机变量的独立性

两事件A,B独立的定义是：若$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A,B独立 .

1. 定义 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 x, y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是**相互独立**的.

它表明，两个$r.v$相互独立时，联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积

注: X 和 Y 相互独立, 则

对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$,

事件 $\{x_1 < X \le x_2\}$ 与 $\{y_1 < Y \le y_2\}$ 也相互独立.

例1:

解：(X，Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right)$$

边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right),F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right)$$

容易看出，对于任意实数x，y都有

$$F(x,\ y)=F_X(x)F_Y(y),$$

所以X与Y是相互独立的

二、离散型随机变量独立的等价条件

定理　设(X，Y)为离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1, 2, \ldots)$$

其边缘分布分别律为$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$　（i=1，2，…）

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j} \quad (j=1, 2, \ldots)$$

则X与Y相互独立的充要条件是对于任意i，j有：$p_{ij}= p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$

证明：(1)充分性。若对于任意i，j有：

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$$

则对于任意实数x, y有

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x,y_j\le y}p_{ij}=\sum_{x_i\le x,y_j\le y}p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}=\sum_{x_i\le x}p_{i\bullet}\cdot\sum_{y_j\le y}p_{\bullet j}$$

$$=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$ 所以X与Y相互独立。

(2)必要性。若X与Y相互独立，对于任意实数

$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

$$P\{x_1<X\le x_2，y_1<Y\le y_2\}=P\{x_1<X\le x_2\}P\{y_1<Y\le y_2\}$$

于是，对于任意i，j，由概率的连续性

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}P\{x_i-\frac{1}{n}<X\le x_i,y_j-\frac{1}{m}<Y\le y_j\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\{x_i-\frac{1}{n}<X\le x_i\}\cdot\lim_{m\to\infty}P\{y_j-\frac{1}{m}<Y\le y_j\}$$

$$=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}$$

三、连续型随机变量独立的等价条件

定理. 设(X, Y)是连续型随机变量，$f(x, y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为(X, Y)的概率密度和边缘概率密度，则X和Y相互独立的充要条件是等式

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

对$f(x, y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$的所有连续点成立.

证明：（1）充分性。若$f(x, y)=f_X(x) f_Y(y)$ ，则

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\cdot f_Y(v)dvdu$$

$$=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du\cdot\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

所以，X与Y相互独立

(2) 必要性。若X与Y相互独立，则在$f(x, y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$的所有连续点有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F_X(x)F_Y(y)}{\partial x\partial y}$$

$$=\frac{dF_X(x)}{dx}\cdot\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

2.说明 (1) 若离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，边缘概率密度分别为$f_X(x)$, $f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

在$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$的一切连续点(x,y)处

有的书称为“几乎处处成立”，含义是：在平面上除去面积为0的集合外，处处成立.

例2：讨论X与Y的独立性。

X \ Y	-1	0	4	$P\{X=x_i\}=P_{i.}$
1	0.17	0.05	0.21	0.43
3	0.04	0.28	0.25	0.57
$P\{Y=y_j\}=P_{.j}$	0.21	0.33	0.46	1

解：由计算知　$P\{X=1\}=0.43$，$P\{Y=-1\}=0.21$，

且　$P\{X=1,\ Y=-1\}=0.17$

容易看出　$P\{X=1,\ Y=-1\}\neq P\{X=1\}P\{Y=-1\}$

因此X与Y不是相互独立的随机变量.

例3 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8–12时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7–9时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.

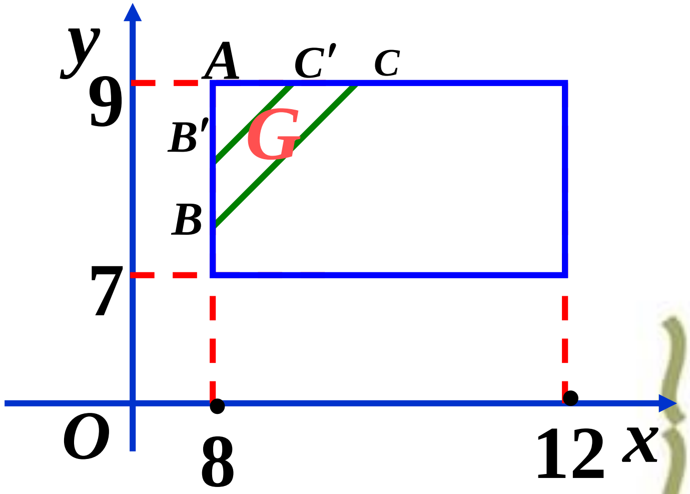
解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间，由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<y<9,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立，得 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1/8, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1/8, & 8<x<12, 7<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$P\{|X-Y|\le 1/12\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积}).$$

而 G的面积$=\Delta ABC$的面积$-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$

于是 $P\{|X-Y|\le 1/12\}=\dfrac{1}{48}$.

因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不

超过5分钟的概率为$\dfrac{1}{48}$.

例5 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 证明X与Y相互独立$\Leftrightarrow \rho=0$

证 $\Longrightarrow$ 对任何 ***x,y*** 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1, y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$ 故 $\rho=0$

$\Longleftarrow$ 将 $\rho=0$ 代入 $f(x,y)$ 即得

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 所以X与Y相互独立

随机变量相互独立的概念推广到n维随机变量

1定义：若 $P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$

$$= P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2)\cdots P(X_n \le x_n)$$

则称 r.v. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

等价定义：设n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots x_n)$，若X_k的边缘分布函数为$F_{Xk}(x_k)$,$k=1,2,\ldots,n$,

$$F(x_1,\ldots x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\ldots.F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立，或称$(X_1,X_2,\ldots X_n)$是独立的

离散型随机变量的情形，若对任意数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 有

$$P\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}=P\{X_1=x_1\}\ldots P\{X_n=x_n\}$$

则称离散型随机变量X_1, X_2, …, X_n相互独立。

设X_1，X_2，…，X_n为n 个连续型随机变量，若对任意的 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ，

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\ldots f_{X_n}(x_n)$$

几乎处处成立，则称X_1，X_2，…，X_n相互独立。

2定义： 设n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$的分布函数为$F_X(x_1,x_2,\ldots x_n)$；m维随机变量$(Y_1,Y_2,\ldots Y_m)$的分布函数为$F_Y(y_1,y_2,\ldots y_m)$, $X_1,X_2,\ldots X_n,Y_1,Y_2,\ldots Y_m$组成的n+m维随机变量（$X_1,X_2,\ldots X_n,Y_1,Y_2,\ldots Y_m$)的分布函数为F（$x_1,x_2,\ldots x_n, y_1,y_2,\ldots y_m$).如果

$$F(x_1,x_2,\ldots x_n, y_1,y_2,\ldots y_m)= F_X(x_1,x_2,\ldots x_n)\, F_Y(y_1,y_2,\ldots y_m)$$

则称n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$与m维随机变量$(Y_1,Y_2,\ldots Y_m)$独立。

定理1：若X_1，…，X_n相互独立，则

1对任意k 个随机变量 $X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k}$ 相互独立，

其中 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$

2随机变量$g_1(X_1)$，…$g_n(X_n)$ 独立。

其中$g_1(\,.\,)$，…$g_n(\,.\,)$为连续函数。

定理2：设$(X_1,X_2,\dots,X_n)$与$(Y_1,Y_2,\dots,Y_m)$相互独立

则1：$X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k}$与 $Y_{j_1},Y_{j_2},\dots,Y_{j_l}$ 相互独立；

2：又若h, g是连续函数，则$h(X_1,X_2,\dots,X_n)$与$g(Y_1,Y_2,\dots,Y_m)$相互独立.