2013 离散数学期中习题

1. (5 分) 求证: $\log_2 3$ 为无理数.

2. (5 分) 假设 n 为整数. 求证: 如果 n^3+5 为奇数, 则 n 为偶数. 用两种方法证明之.

   - 证明其逆否命题.

   - 用反证法.

3. (5 分) 给出 $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq A$ 的严格定义.

4. (5 分) 求证对任意的正整数 k, 存在连续的 k 个整数, 他们都不是完全平方数.

5. (5 分) 求证任意两个无理数之间存在无理数.

6. (5 分) 确定函数 $\sqrt{n}$ 与 $5^{\log_2 n}$ 之间的关系. (O, Ω, Θ)

7. (5 分) 长度为 10 的 0, 1 串中有多少包含 00000 或者 11111.

8. (5 分) 假设 r 为正整数. 求方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le r$$

的正整数解 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的个数.

9. (30 分)从 $\{1, 2, \cdots, 200\}$ 中选出 100 个数, 其中一个小于 16. 求证在选出的 100 数中存在两个数, 他们其中的一个整除另外一个.

10. (30 分) 假设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 以及 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 均为正实数. 数列 $\{x_i\}$ 为单调增. π 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列. 定义

$$S(\pi) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{\pi(k)}$$

- 严格证明：当 $y_{\pi(1)} \leq y_{\pi(2)} \leq \cdots \leq y_{\pi(n)}$ 时，$S(\pi)$ 达到最大值.

- 给出 $S(\pi)$ 达到最大值的充分必要条件.

- $S(\pi)$ 何时达到最小值?