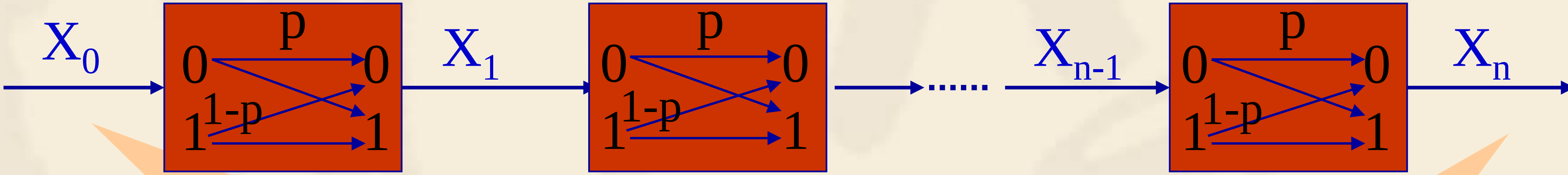
第十三章 马尔可夫链

引言

直观上，过程（或系统）在时刻t_0所处的状态为已知的条件下，过程在时刻$t > t_0$所处状态的条件分布与过程在时刻t_0之前所处的状态无关。

例　　只传输数字0和1的串联系统 ($0-1$ 传输系统)

如图:



X_0是第一级的输入

X_n是第n级的输出$(n \geq 1)$

设一个单位时间传输一级,

设每一级的传真率为 p, 误码率为 $q=1-p$.

分析: $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是一随机过程,

状态空间 $E = \{0, 1\}$,

且当$X_n = i, i \in E$为已知时,

X_{n+1}所处的状态分布只与$X_n = i$有关,

而与时刻 n 以前所处的状态无关.

　　用分布函数表达此性质，设随机过程$\{X(t), t\in T\}$，状态空间为E，若对于t的任意n个值$t_1<t_2<\dots<t_n$, $n\geq 3$, 有

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\},\qquad x_n\in R$$

或 $F_{t_n|t_1t_2\cdots t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$

$=F_{t_n|t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_{n-1};t_{n-1})$

即在 $X(t_i)=x_i, i=1,2,\cdots,n-1$条件下，$X(t_n)$的条件分布函数等于在条件$X(t_{n-1})=x_{n-1}$下$X(t_n)$的条件分布函数。

则称过程$\{X(t), t\in T\}$具有马尔可夫性或马氏性，或称$\{X(t), t\in T\}$为马尔可夫过程或马氏过程。

一、马尔可夫链及其概率分布的定义

状态和时间参数都是离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，或马氏链。

记为｛Xn=X(n), n=0, 1， 2， ...｝, 记链的状态空间为 E＝$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$，$a_i \in R$.简记为E＝$\{0, 1, 2, \ldots\}$。

对于马氏链的情况，马尔可夫性通常用分布率表示：

1. 马氏链的定义

定义　若对于任意的正整数m，n和任意的

$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_r < m, t_i, m, m+n \in T = \{0,1,2,\cdots\}$，有

$$P\{X_{n+m} = j \mid X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_r} = i_r, X_m = i\}$$

$$= P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\},$$

则称 $\{X_n, n=0, 1, 2, \ldots\}$ 为马氏链。

$$P_{ij}(m, m+n) \triangleq P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}$$

称为马氏链在时刻 m 系统处于状态 i 的条件下，在时刻 m+n 转移到状态 j 的转移概率。

定义 设 $\{X_n, n\geq 0\}$，其状态空间为E，若对于任意的正整数n和任意的 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}$，

有
$$P\left\{X_{n+1}=i_{n+1} \middle| X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n\right\}$$
$$=P\left\{X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n\right\}$$

则称 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为马氏链。

例1. 记从数1, 2, …, N中任取一数为X_0，当n≥1时，记从数1, 2, …, X_{n-1}中任取一数为X_n, 问｛X_n, n=0，1，2, …｝是马氏链吗？

证：｛X_n, n=0，1，2, …｝的状态空间E={i, 1≤i≤N},

对任意的 n及 $i_0, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in x$,

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\}$$
$$= \begin{cases} 0 & i_{n+1} > i_n \\ \dfrac{1}{i_n} & i_{n+1} \le i_n \end{cases} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$

可见,｛X_n, n=0，1，2, …｝是一个马氏链。

$$P_{ij}(m,\ m+n) \triangleq P\left\{X_{n+m}=j \mid X_m=i\right\}$$

（马氏链在时刻 m 系统处于状态 i 的条件下，在时刻 m+n 转移到状态 j 的转移概率。）

2．转移概率的性质

(1) $P_{ij} \geq 0$；　　(2) $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(m,m+n)=1,\ i=0,1,2,\cdots$

事实上，因为链在m时刻从状态i出发，到m+n时刻必然转移到E中的某一个状态，从而

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(m,m+n)=\sum_{j=0}^{\infty} P\left\{X_{m+n}=j \mid X_m=i\right\}$$

$$=P\left\{\bigcup_{j}\left\{X_{m+n}=j\right\} \mid X_m=i\right\}=1.$$

3. 齐次马尔可夫链及一步转移概率

定义　若对任意的i，j，有

$$P_{ij}(n,n+1)=P_{ij}(m,m+1)$$

即马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的转移概率$P_{ij}(n, n+1)$与n无关，则称转移概率具有平稳性，这时，马尔可夫链称为是齐次的。

$$p_{ij}\triangleq p_{ij}(1)=P\{X_{m+1}=j\mid X_m=i\}$$

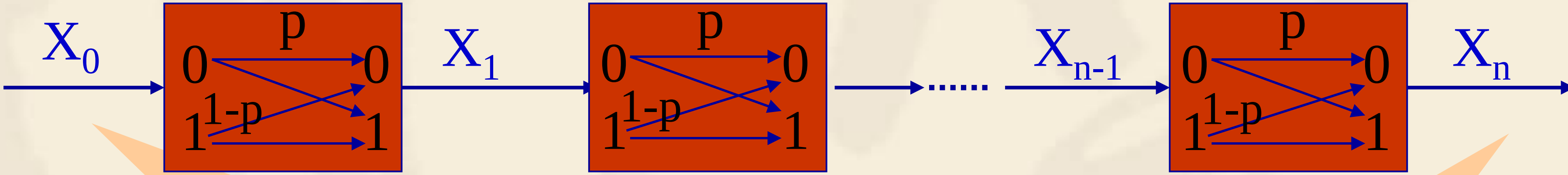
称为齐次马氏链的一步转移概率；

$$P \triangleq P(1) = \left(p_{ij}(1)\right)$$

$$P(1) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \end{array}$$

称为齐次马氏链的一步转移概率矩阵。

例2　只传输数字0和1的串联系统（$0-1$ 传输系统）如图:



X_0是第一级的输入

X_n是第n级的输出$(n \geq 1)$

设一个单位时间传输一级,

设每一级的传真率为 p, 误码率为 $q=1-p$.

分析: $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一随机过程,

状态空间 $E=\{0,1\}$,

且当$X_n = i, i \in E$为已知时,

X_{n+1}所处的状态分布只与$X_n = i$有关,

而与时刻 n 以前所处的状态无关.

所以它是一个马氏链.

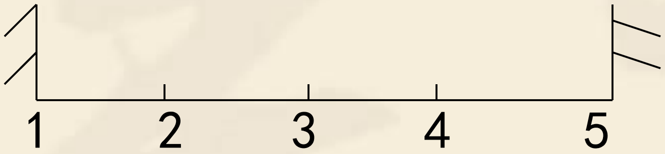
一步转移概率

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} p, j = i \\ q, j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0,1$$

与n无关，所以是齐次马氏链。

一步转移概率矩阵 $$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \end{array}$$

例3(一维随机游动)　设一醉汉Q（或看作一随机游动的质点），在如图所示直线的点集E＝｛1，2，3，4，5｝上作游动，仅仅在1秒、2秒...等时刻发生游动。游动的概率规则是：如果Q现在位于点i ($1<i<5$)，则下一时刻各以1/3的概率向左或向右移动一格，或以1/3的概率留在原处；如果Q现在位于1（或5）这点上，则下一时刻就以概率1移动到2（或4）点上。1和5这两点称为反射壁。上面这种游动称为带有两个反射壁的随机游动。



若以X_n表示时刻n时Q的位置，不同的位置就是X_n的不同状态，那么｛X_n, n=0，1, 2, …｝是一随机过程，状态空间就是E，而且当$X_n=i$, $i\in I$为已知时，X_{n+1}所处的状态的概率分布只与$X_n=i$有关，而与Q在时刻n以前如何到达i是完全无关的，所以｛X_n, n=0，1, 2, … ｝是一马氏链。它的一步转移概率为

$$p_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=\begin{cases}\frac{1}{3}, & j=i-1, i, i+1, 1<i<5\\ 1, & i=1, j=2 \text{ 或 } i=5, j=4\\ 0, & |j-i|\geq 2.\end{cases}$$

与n无关，所以是齐次马氏链。一步转移概率矩阵为

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

如果把1这一点改为吸收壁，即Q一旦到达1，就永远留在点1上。此时，相应链的转移概率矩阵只须把P中第1横行改为（1，0，0，0，0）。总之，改变游动的概率规则，就可得到不同方式的游动和相应的马氏链。

例4　设Xn, n=0，1，2, ...是独立同分布的随机变量列, 记Xn可能取值的全体为E={i, $i\geq 1$}, 证明{Xn}为马氏链, 并求其一步转移概率。

解　对任意的n及　$i_0, i_1, \cdots, i_n, i_{n+1} \in E$

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$$
$$= P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$

所以{Xn}为马氏链。

记 $P\{X_n = i\} = q_i, \quad i \in E$

由于Xn,　n=0，1，2, ...独立同分布，因而

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j\}$$
$$=q_j=P\{X_{m+1}=j \mid X_m=i\}$$

所以{Xn}为齐次马氏链。其一步转移概率P:

$$p_{ij}=q_j, \quad i,j\in E.$$

例5 某计算机机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔15分钟观察一次计算机的运行状态，收集了24小时的数据（共作97次观察），用1表示正常状态，用0表示不正常状态，所得的数据序列如下：

11100100111111100111011111001111111110001101101111
0110110101110111011110111111001101111110 0111

设X_n为第n（n=1, 2, ..., 97） 个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马氏链，状态空间E={0, 1}，96次状态转移的情况是：

0→0，8次，0→1，18次；

1→0，18次，1→1，52次。

因此，一步转移概率可用频率近似地表示为

$$p_{00} = P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0\} \approx \frac{8}{8+18} = \frac{8}{26},$$

$$p_{10} = P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1\} \approx \frac{18}{18+52} = \frac{18}{70},$$

$$p_{01} = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0\} \approx \frac{18}{8+18} = \frac{18}{26},$$

$$p_{11} = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\} \approx \frac{52}{18+52} = \frac{52}{70},$$

为了进一步讨论马尔可夫链的统计性质，我们需讨论多步转移概率和有限维分布，为此我们先给出几个概念，n步转移概率，初始概率分布，绝对概率分布。

4. n步转移概率及C-K方程

回顾定义　称条件概率$P_{ij}(m, m+n) \triangleq P\{X_{n+m}=j \mid X_m=i\}$为马尔可夫链在时刻m处于状态$i$的条件下，在时刻m+n步转移到状态$j$的n步转移概率。

定义　若对任意的正整数m, n及任意的a_i，a_j，有

$$P_{ij}(n, n+1) = P_{ij}(m, m+1)$$

即马氏链$\{X_n, n\ge 0\}$的转移概率$P_{ij}(n, n+1)$与n无关，则称转移概率具有平稳性，这时，马尔可夫链称为是齐次的。

定理：若{Xn}为齐次马氏链，则对任意正整数n, 及任意的i，j，有$P\left\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\right\}$与m无关。

证明：$$P\left\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\right\}$$

$$=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}} P\left\{X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{n-1},X_{n+m}=j\mid X_m=i\right\}$$

而$P\left\{X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{n-1},X_{n+m}=j\mid X_m=i\right\}$

$$=\frac{P\left\{X_m=i,X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{n+m-1}=j_{n-1},X_{n+m}=j\mid\right\}}{P\left\{X_m=i\right\}}$$

$$=\frac{P\left\{X_m=i\right\}p_{ij_1}\cdot p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j}}{P\left\{X_m=i\right\}}=p_{ij_1}\cdot p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-1}j}$$

所以$P\left\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\right\}$与m无关。

因此，马氏链的齐次性可写为

$$P\left\{X_{m_1+n}=j \mid X_{m_1}=i\right\}=P\left\{X_{m_2+n}=j \mid X_{m_2}=i\right\}$$

定义　称条件概率

$$P_{ij}(n) \triangleq P\left\{X_{m+n}=j \mid X_m=i\right\},$$

$$\left(i, j \in E, m \geq 0, n \geq 1\right)$$

为齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的n步转移概率，并称由$p_{ij}(n)$组成的矩阵

$$P(n)=\left(p_{ij}(n)\right)=\begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1j}(n) & \cdots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2j}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ p_{i1}(n) & p_{i2}(n) & \cdots & p_{ij}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

为齐次马尔可夫链的n步转移概率矩阵。

其中 $p_{ij}(n)\geq 0, \sum_{a_j\in X} p_{ij}(n)=1.$

定理 设{Xn，n=0,1,...}为齐次马氏链，则对于任意的正整数k,m，有 $P_{ij}(m+k)=\sum_{r} P_{ir}(m)P_{rj}(k)$

此方程称为Chapman-kolmogorov(切普曼—柯尔莫哥洛夫)方程,简称C-K方程.

注释：如果把转移概率写成矩阵的形式，那么C—K方程具有以下简单的形式

$$P(m+k)=P(m)P(k) \qquad m,\ k\geqq 0$$

特别地，$P(n)=P^n$，n步转移概率由一步转移概率完全决定。

证：$$P_{ij}(m+k)=P\left\{X_{n+m+k}=j \mid X_n=i\right\}$$

$$=\sum_r P\left\{X_{n+m}=r, X_{n+m+k}=j \mid X_n=i\right\}$$

既:“从Xn= i 出发，经时刻m转移到中间状态r, 再从r经k时段转移到 j 状态”这样一些事件的和事件。

$$=\sum_r \frac{P\left\{X_n=i, X_{n+m}=r, X_{n+m+k}=j\right\}}{P\{X_n=i\}}$$

$$=\sum_r \frac{P\left\{X_n=i\right\} p_{ir}(m) p_{rj}(k)}{P\{X_n=i\}}$$

$$=\sum_r p_{ir}(m) p_{rj}(k)$$

例6　求带有两个反射壁的一维随机游动的两步转移概率矩阵。

$$\text{解：}P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/9 & 5/9 & 2/9 & 1/9 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 3/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & 5/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

例7　在n级0−1传输系统中，设p=0.9，求系统二级传输后的传真率与三级传输后的误码率.

解　先求出n步转移概率矩阵**P**(n)=**P**^{n}。

$P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$ 有相异特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=p-q$，由线性代数知识，可将矩阵P表示为对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix}$ 的相似矩阵。

具体做法是：求出λ_1，λ_2对应的特征向量

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$令\ H=(e_1,e_2)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

则$P=H\Lambda H^{-1}$。于是，容易算得

$$P^n=H\Lambda^n H^{-1}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \qquad\qquad 0 \qquad\qquad & \qquad\qquad 1 \qquad\qquad \end{array}\\
\begin{array}{c} 0 \\[3ex] 1 \end{array} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\end{pmatrix}
\end{array}$$

由上式可知，当p=0.9时，系统经二级传输后的传真率与三级传输后的误码率分别为

$$P_{11}(2)=P_{00}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.9-0.1)^2=0.820$$

$$P_{10}(3)=P_{01}(3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0.9-0.1)^3=0.244$$

对于只有两个状态的马氏链，一步转移概率矩阵一般可表示为：

$$P=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix},0<a,b<1$$

利用类似的方法，可得n步转移概率矩阵为

$$P(n) = P^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \qquad n=1,2,\ldots.$$

5、有限维分布

1. 有限维分布

设马氏链{Xn, n≥0}, 状态空间E，n步转移概率矩阵P(n).

(1)一维分布

称X_0的分布 $p_j(0) \triangleq P\{X_0 = j\}, j = 0,1,2,\cdots$

为{X_n, n=0, 1, …}的初始分布.

称X_n的分布 $p_j(n) \triangleq P\{X_n = j\}, j = 0,1,2,\cdots$

为{X_n, n=0, 1, …}的绝对分布。

显然有 $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(n) = 1$.

由全概公式有：

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\},$$

$$p_j(n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(0) p_{ij}(n)\ ,\ \ j = 1, 2, \cdots$$

若将一维分布用行向量表示

$$\mathbf{p}(\mathrm{n}) = (p_0(n), p_1(n), \cdots, p_j(n), \cdots),$$

利用矩阵的乘法：$\boldsymbol{p}(\mathrm{n}) = \boldsymbol{p}(0)\mathrm{P}(\mathrm{n})$

说明马氏链在任一时刻n的一维分布由初始分布与n步转移概率矩阵确定。

例1：设{Xn， n≥0}是具有三个状态0，1，2的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}0 & 1 & 2\end{array}\\\begin{bmatrix}3/4 & 1/4 & 0\\1/4 & 1/2 & 1/4\\0 & 3/4 & 1/4\end{bmatrix}\end{array}$$

初始分布$p_i(0)$=P{X_0=$\boldsymbol{i}$}=1/3， $\boldsymbol{i}$=0, 1, 2. 试求

（1） P{X_0=0, X_2=1}；（2） P{X_2=1}.

解：先求出二步转移概率矩阵

$$P(2)=P^2=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}0 & 1 & 2\end{array}\\\begin{bmatrix}5/8 & 5/16 & 1/16\\5/16 & 1/2 & 3/16\\3/16 & 9/16 & 1/4\end{bmatrix}\end{array}$$

于是

（1） $P\{X_0=0, X_2=1\}=P\{X_0=0\}P\{X_2=1|X_0=0\}$

$= p_0(0)p_{01}(2)$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{16}$

(2) $P\{X_2=1\}= p_0(0)p_{01}(2)+p_1(0)p_{11}(2)+p_2(0)p_{21}(2)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\right)=\frac{11}{24}$$

(2) r维分布

对任意r个时刻 $0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_r$, 马氏链的r维分布

$$P\left\{X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_r}=i_r\right\}$$

$$=P\left\{X_{n_1}=i_1\right\} \cdot P\left\{X_{n_2}=i_2 \mid X_{n_1}=i_1\right\} \cdot \cdots \cdot$$

$$P\left\{X_{n_r}=i_r \mid X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_{r-1}}=i_{r-1}\right\}$$

$$=P\left\{X_{n_1}=i_1\right\} \cdot P\left\{X_{n_2}=i_2 \mid X_{n_1}=i_1\right\} \cdot \cdots \cdot P\left\{X_{n_r}=i_r \mid X_{n_{r-1}}=i_{r-1}\right\}$$

$$=p_{i_1}(n_1) \cdot p_{i_1 i_2}(n_2-n_1) \cdots p_{i_{r-1} i_r}(n_r-n_{r-1})$$

所以，马氏链的有限维分布完全由初始分布和转移概率确定。

例2：在n级0-1传输系统中，设初始分布

$p_1(0)=P\{X_0=1\}=\alpha$, $p_0(0)=P\{X_0=0\}=1-\alpha$，又已知系统经n级传输后输出为1，问原发字符也是1的概率是多少？

解：根据贝叶斯公式，当已知系统经n级传输后输出为1，原发字符也是1的概率为

$$P\{X_0=1|X_n=1\}=\frac{P\{X_0=1\}P\{X_n=1|X_0=1\}}{P\{X_n=1\}}$$

$$=\frac{p_1(0)p_{11}(n)}{p_0(0)p_{01}(n)+p_1(0)p_{11}(n)}=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}$$

解：根据贝叶斯公式，当已知系统经n级传输后输出为1，原发字符也是1的概率为

$$P\{X_0=1|X_n=1\}=\frac{P\{X_0=1\}P\{X_n=1|X_0=1\}}{P\{X_n=1\}}$$

$$=\frac{p_1(0)p_{11}(n)}{p_0(0)p_{01}(n)+p_1(0)p_{11}(n)}=\frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}$$

$$P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \qquad P^n=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n \end{array}$$

6 遍历性

对于一般的两个状态的马氏链，有

$$P(n)=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}+\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

当0＜a，b＜1时，$P_{ij}(n)$有极限

$$\lim_{n\to\infty}P_{00}(n)=\lim_{n\to\infty}P_{10}(n)=\frac{b}{a+b}\triangleq\pi_0$$

$$\lim_{n\to\infty}P_{01}(n)=\lim_{n\to\infty}P_{11}(n)=\frac{a}{a+b}\triangleq\pi_1,\ \pi_0+\pi_1=1$$

当n>>1时就可得到n步转移概率的近似值：$p_{ij}(n)\approx\pi_j$

定义　设马尔可夫链的状态空间为χ，如果对于所有的 $a_i, a_j \in \chi$，转移概率p_{ij}(n)，当n→∞时，存在不依赖于i的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$

或 $$P(n) = P^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

则称此链具有遍历性，又若$\sum_j \pi_j = 1$，称 $\pi=(\pi_1, \pi_2, \ldots)$为链的极限分布。

马氏链的遍历性表明:

不论从哪一个状态i出发，当转移的步数n充分大时，转移到状态j的概率都接近于正常数 $\pi(j)$.

遍历性的定理

定理　设齐次马氏链｛$X_n, n\geq 0$｝的状态空间为χ＝{a_1，a_2, ⋯, a_N}，P是它的一步转移概率矩阵，如果存在正整数m，使对任意的$a_i, a_j \in \chi$，都有

$P_{ij}(m)>0$，$i, j=1, 2, \ldots, N$

则此链具有遍历性，且有极限分布$\pi=(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$，它是方程组

$$\pi = \pi P \text{ 或 } \pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \qquad j = 1,2,\ldots, N$$

的满足条件$\pi_j>0, \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$的唯一解。

注1：定理表明不论从链中哪一状态i出发，都能以正概率经有限次转移到达链中预先指定的其他任一状态。

注2：定理给出了求极限分布$\pi(j)$的方法。

例1： 试说明带有两个反射壁的随机游动是遍历的

解：为简便，以符号“×”代表转移概率矩阵的正元素。

于是，由一步转移概率矩阵P，得

$$P(2)=P^{2}=\begin{pmatrix}0&\times&0&0&0\\ \times&\times&\times&0&0\\ 0&\times&\times&\times&0\\ 0&0&\times&\times&\times\\ 0&0&0&\times&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&\times&0&0&0\\ \times&\times&\times&0&0\\ 0&\times&\times&\times&0\\ 0&0&\times&\times&\times\\ 0&0&0&\times&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\times&\times&\times&0&0\\ \times&\times&\times&\times&0\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ 0&\times&\times&\times&\times\\ 0&0&\times&\times&\times\end{pmatrix}$$

$$P(4)=P^{4}=\begin{pmatrix}\times&\times&\times&0&0\\ \times&\times&\times&\times&0\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ 0&\times&\times&\times&\times\\ 0&0&\times&\times&\times\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\times&\times&\times&0&0\\ \times&\times&\times&\times&0\\ \times&\times&\times&\times&\times\\ 0&\times&\times&\times&\times\\ 0&0&\times&\times&\times\end{pmatrix}=(\times)$$

定义　设（ P_{ij} ）是马氏链｛Xn, n≥0｝的转移概率矩阵，如果非负数列$\{\pi_j\}$满足

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1, \quad \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i p_{ij} \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

则称$\{\pi_j\}$是｛Xn, n≥0｝的平稳分布。

在定理的条件下，马氏链的极限分布又是平稳分布。

平稳分布的意义：若用π作为链的初始分布，即$\boldsymbol{p}(0)=\pi$，则链在任一时刻n的分布$\boldsymbol{p}(n)$永远与π一致. 因为

$$p(n)=p(0)P(n)=\pi P^{n}=\pi P^{n-1}=\cdots=\pi P=\pi$$

例1： 求 带有两个反射壁的随机游动极限分布。

解：为简便，以符号“×”代表转移概率矩阵的正元素。

于是，由一步转移概率矩阵P，得

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

$$P(4)=P^4=\begin{pmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}=(\times)$$

例1：求 带有两个反射壁的随机游动 的极限分布。

解：极限分布π满足的方程组

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$\begin{cases} \pi_2/3=\pi_1 \\ \pi_1+\pi_2/3+\pi_3/3=\pi_2 \\ \pi_2/3+\pi_3/3+\pi_4/3=\pi_3 \\ \pi_3/3+\pi_4/3+\pi_5=\pi_4 \\ \pi_4/3=\pi_5 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5=1 \end{cases}$$

先由前四个方程，解得 $3\pi_1=\pi_2=\pi_3=\pi_4=3\pi_5$. 将它们代入归一条件，即最后一个方程，解之得唯一解：

$\pi_1=\pi_5=1/11$， $\pi_2=\pi_3=\pi_4=3/11$

所以极限分布为 $\pi=(1/11, 3/11, 3/11, 3/11, 1/11)$.

例2 设一马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

试讨论它的遍历性。

解：先算得

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P(3)=P^3=P$$

进一步可验证：当n为奇数时，P(n)=P(1)=P；

n为偶数时，P(n)＝P(2)。

这表明对任一固定的 j(=1,2,3,4)，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ 都不存在。按定义，此链不具遍历性。

例:设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间I={1，2,3}。其一步转移概率矩阵为

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

证明此链具有遍历性，并求出平稳分布。

解:

$$P_2 = (P_1)^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

所以，当m=2时，对于一切i, j, $p_{ij}^{(2)} > 0$ ，因此该马氏链具有遍历性。

由遍历性定理得，

$$
\begin{cases}
\pi(1) = \dfrac{1}{3}\pi(1) + \dfrac{1}{3}\pi(2) \\
\pi(2) = \dfrac{2}{3}\pi(1) + \dfrac{1}{3}\pi(3) \\
\pi(3) = \dfrac{2}{3}\pi(2) + \dfrac{2}{3}\pi(3) \\
\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1
\end{cases}
$$

解得，$\pi(1) = \dfrac{1}{7}$，$\pi(2) = \dfrac{2}{7}$，$\pi(3) = \dfrac{4}{7}$