3.3条件分布

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念 .

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

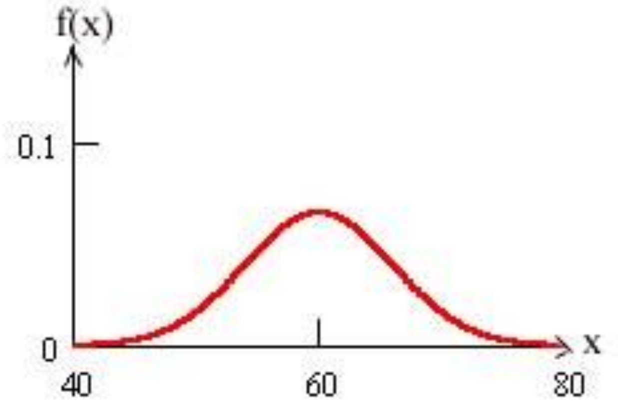
设有两个r.v X,Y， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布.

这个分布就是条件分布.

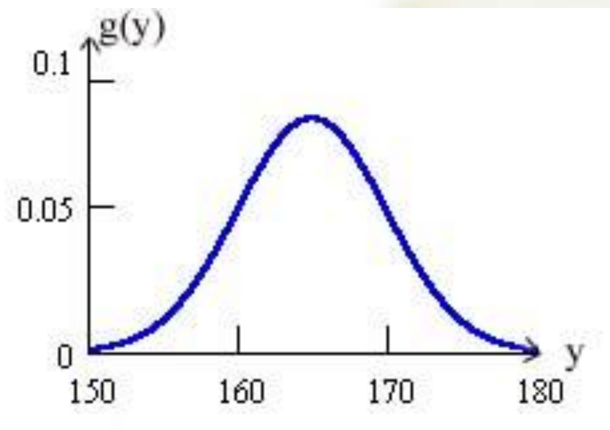
例如，考虑某大学的全体学生，从其中随机抽取一个学生，分别以X和Y表示其体重和身高．则X和Y都是随机变量，它们都有一定的概率分布.

身高Y

体重X



体重X的分布



身高Y的分布

现在若限制$1.7<Y<1.8$(米)，在这个条件下去求X的条件分布，这就意味着要从该校的学生中把身高在1.7米和1.8米之间的那些人都挑出来，然后在挑出的学生中求其体重的分布.

容易想象，这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样.

例如，在条件分布中体重取大值的概率会显著增加 .

一、离

类似定义在$X=x_i$条件下
随机变量Y的条件概率函数.

实际……在
另一种形……

定义1　设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若$P(Y=y_j)>0$，则称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\ldots$$

为在$Y=y_j$条……数.

作为条件的那个r.v,认为取值是给定的，在此条件下求另一r.v的概率分布.

条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质．正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质．

例如：$P(X=x_i \mid Y=y_j) \ge 0$，$i=1,2,\ldots$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i \mid Y=y_j) = 1$$

(1) $P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \ge 0$, $P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \ge 0$,

(2) $$\sum_{j=1}^{+\infty} P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} = \frac{1}{p_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

例1 一射手进行射击，击中目标的概率为p，$(0<p<1)$，射击进行到击中目标两次为止．以X表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数．求X和Y的联合分布及条件分布．

解：设$\{Y=n\}$ 表示在第n次射击时击中目标，且在前$n-1$次射击中有一次击中目标． $n=2,3,\ldots$

$\{X=m\}$表示首次击中目标时射击了m次． $m=1,2,\ldots,n-1$

$$P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$$ 不论$m(m<n)$是多少！

即X和Y联合概率函数为 $P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$

$n=2,3,\ldots;\ m=1,2,\ldots,n-1$

为求条件分布，先求边缘分布.

关于X的边缘概率函数：$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}P(X=m,Y=n)$

$$=\sum_{n=m+1}^{+\infty}p^2(1-p)^{n-2}=p^2\sum_{n=m+1}^{+\infty}(1-p)^{n-2}=p^2\frac{(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)}$$

$$=p(1-p)^{m-1}\quad m=1,2,\ldots$$

关于Y的边缘概率函数：$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P(X=m,Y=n)$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}\quad n=2,3,\ldots$$

于是可求得：当n=2,3, …时，

联合分布

$$P(X=m|Y=n)=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

边缘分布

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1},$$ m=1,2, …,n-1

当m=1,2, …时，

$$P(Y=n|X=m)=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$

$$=p(1-p)^{n-m-1},$$ n=m+1,m+2, …

二、连续型*r.v*的条件分布

1.二维随机变量的条件分布函数

在讨论二维连续型随机变量(*X*,*Y*)的条件分布时，注意到对于任意实数*x*,*y*，$P\{X=x\}=0$ 及$P\{Y=y\}=0$，因此不可以简单地按条件概率的计算公式直接引入条件分布函数.但我们可以用极限的方法来处理.

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，对于给定的x，设对于任意小的 $\varepsilon>0$，均有 $P\{x<X\le x+\varepsilon\}>0,$

于是，对于任意的实数y，可以计算如下条件概率：

$$P\{Y\le y\,|\,x<X\le x+\varepsilon\}=\frac{P\{Y\le y,\ x<X\le x+\varepsilon\}}{P\{x<X\le x+\varepsilon\}}$$

考虑当 $\varepsilon\to 0^{+}$ 时，如果 $P\{Y\le y\,|\,x<X\le x+\varepsilon\}$ 的极限存在，那么就用此极限作为在$X=x$的条件下，Y的条件分布函数.

定义 设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，对于给定的X，若对于任意小的 $\varepsilon>0$ ， 有

$$P\{x<X\le x+\varepsilon\}>0,$$ 且极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{Y\le y \mid x<X\le x+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{Y\le y,\ x<X\le x+\varepsilon\}}{P\{x<X\le x+\varepsilon\}}$$

存在，则称极限 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{Y\le y \mid x<X\le x+\varepsilon\}$ 为在$X=x$的条件下，Y的条件分布函数，记为

$$P\{Y\le y \mid X=x\}$$ 或者 $$F_{Y|X}(y\mid x), -\infty<y<+\infty.$$

同样也可以给出在$Y=y$的条件下，X的条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x,\ y<Y\le x+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$ 其中$-\infty<x<+\infty.$

条件分布函数$F_{Y|X}(y|x)$表示式中，x与y的含义是不同的，y是条件分布函数中的自变量，而x是给定$X=x$条件下的参数，因此$F_{Y|X}(y|x)$，是一个分布函数族. $F_{X|Y}(x|y)$ 也有类似的含义.

2. 二维随机变量的条件概率密度

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，如果$f(x,y)$在(x,y)处连续，且X的边缘概率密度$f_X(x)$在x处连续，以及$f_X(x)>0$，

则 $$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{Y\le y\,|\,x<X\le x+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{Y\le y,\ x<X\le x+\varepsilon\}}{P\{x<X\le x+\varepsilon\}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{x}^{x+\varepsilon}f(u,v)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v}{\int_{x}^{x+\varepsilon}f_X(u)\,\mathrm{d}u}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{y}f(x,v)\,\mathrm{d}v}{f_X(x)}=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}v\qquad -\infty<y<+\infty$$

可见在$X=x$条件下，Y仍然是一个连续型随机变量，由连续型随机变量定义，它的概率密度为$\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

定义 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，如果$f(x,y)$在(x,y)处连续，且X的概率密度 $f_X(x)$ 在x处连续，以及$f_X(x)>0$，则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为在$X=x$的条件下，Y的条件概率密度，记为 $f_{Y|X}(y|x)$，其中$-\infty<y<+\infty$；称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下，X的条件概率密度，记为 $f_{X|Y}(x|y)$，其中 $-\infty<x<+\infty$.

条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$表示式中，$x$与$y$的含义是不同的，$x$是条件概率密度中的自变量，而$y$是给定的参数，因此，$f_{X|Y}(x|y)$ 是一个概率密度族. $f_{Y|X}(y|x)$也有类似的含义.

例2 设(X, Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $f_{Y|X}(y\mid x)$

解：

X的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

当$|x|<1$时，有 $f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}$$

这里是y的取值范围

即当$|x|<1$时，有

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0, & y\text{ 取其它值}\end{cases}$$

X已知下Y的条件密度

例3 设数 X 在区间 $(0, 1)$ 均匀分布，当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时，数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值. 求 Y 的概率密度.

解：依题意 …… 密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

对任意给……

在 $X=x$ 条件…… $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

概率密度为

已知边缘密度、条件密度，求联合密度

X 和 Y 的联合密度为

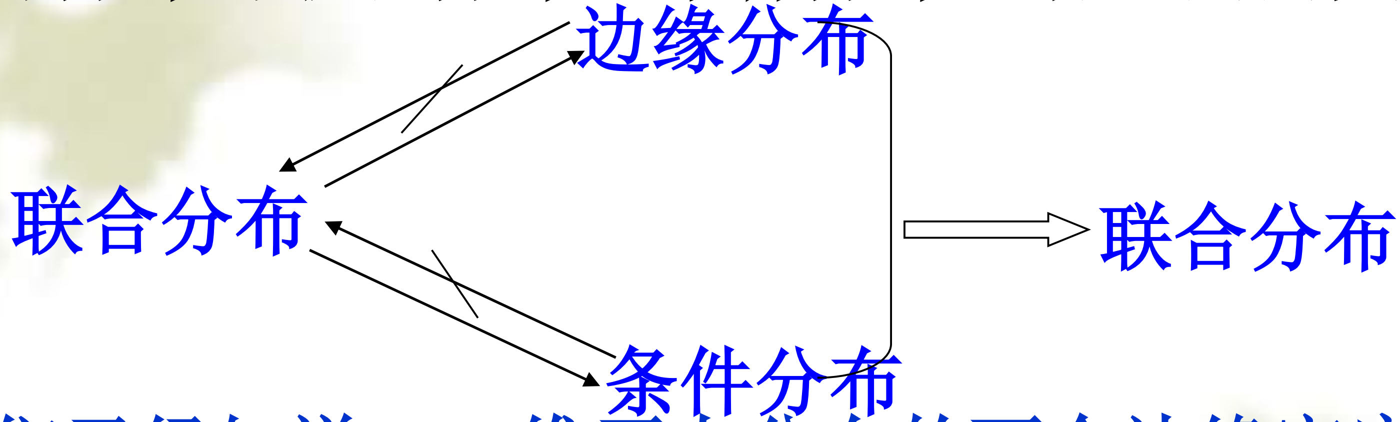
$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

于是得 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

思考：

1边缘分布与联合分布、条件分布三者之间的关系？



2我们已经知道，二维正态分布的两个边缘密度仍是正态分布. 那么，对二维正态分布，已知 $X=x$下，Y 的条件分布，或者已知 $Y=y$下，X的条件分布是否为正态分布？

可验证二维正态分布条件分布都仍是正态分布.
详见附录！

附　录

思考与练习：

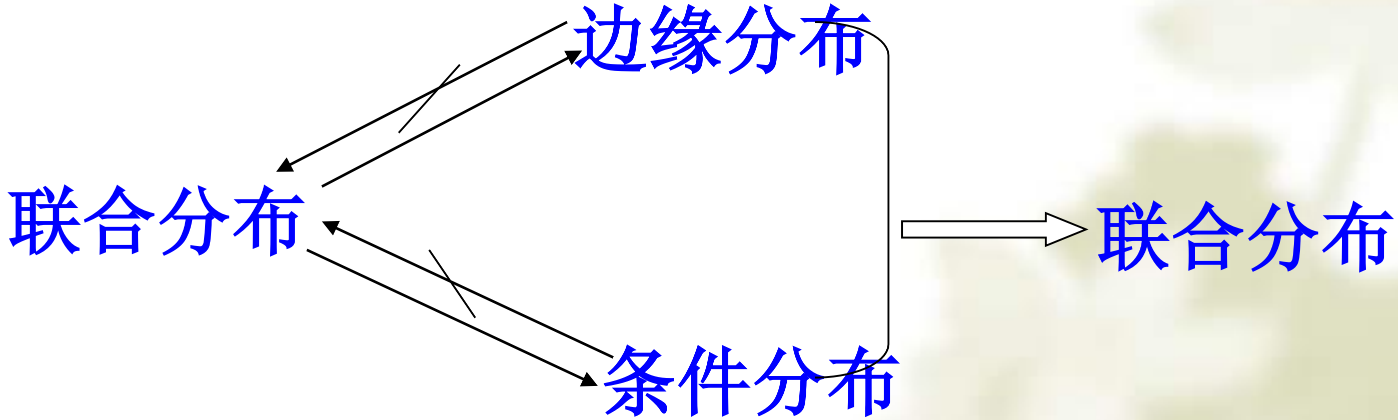
1边缘分布与联合分布、条件分布三者之间的关系？

- 2验证二维正态分布，已知 $X=x$下，Y 的条件分布，或者已知 $Y=y$下，X的条件分布都仍是正态分布.
- 3一个练习题

1设(X,Y)为二维随机变量，条件分布与联合分布也有紧密关系，即联合分布唯一决定了条件分布，但条件分布决定不了联合分布.不过条件分布与边缘分布二者可以唯一确定联合分布，　即

$$p_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\} \cdot p_{\bullet j} = P\{Y = y_j \mid X = x_i\} \cdot p_{i\bullet}$$

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x \mid y)$$



2例 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

试求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 以及 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 由于的(X,Y)边缘概率密度均为正态分布的

概率密度，即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则依据条件概率密度的定义可得:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-(\mu_1+\frac{\sigma_1\rho y-\sigma_1\rho\mu_2}{\sigma_2})\right]^2}$$

$$-\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-(\mu_2+\frac{\sigma_2\rho x-\sigma_2\rho\mu_1}{\sigma_1})\right]^2} \quad -\infty<y<+\infty$$

即二维正态分布的条件分布仍为正态分布，

在$Y=y$的条件下，X的条件分布和在$X=x$的条件下，Y的条件分布分别为

$$N(\mu_1+\frac{\sigma_1\rho y-\sigma_1\rho\mu_2}{\sigma_2},\sigma_1^2(1-\rho^2)), \quad N(\mu_2+\frac{\sigma_2\rho x-\sigma_2\rho\mu_1}{\sigma_1},\sigma_2^2(1-\rho^2))$$

3.综合练习题 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0\le x\le 1,\ x\le y\le 3x, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 (1)条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$ 以及$f_{Y|X}(y|x)$

(2)求$P\{Y\ge 2|X\ge \frac{1}{2}\}$,

$P\{Y<1|X=\frac{1}{2}\},P\{|X|\ge \frac{3}{4}|Y=\frac{3}{2}\}$

解 (1) 由边缘概率密度的定义可知(积分区域见图1):

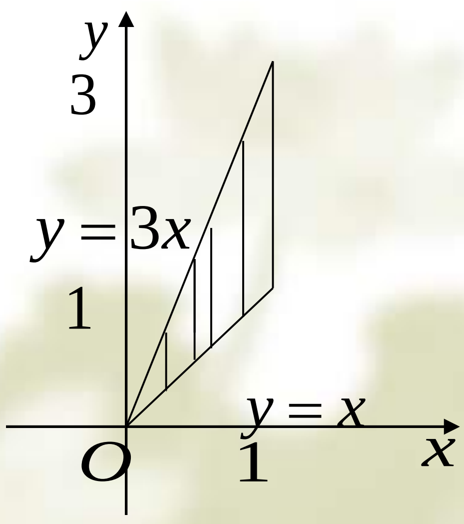


图1

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{x}^{3x} xy\,\mathrm{d}y=4x^3, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

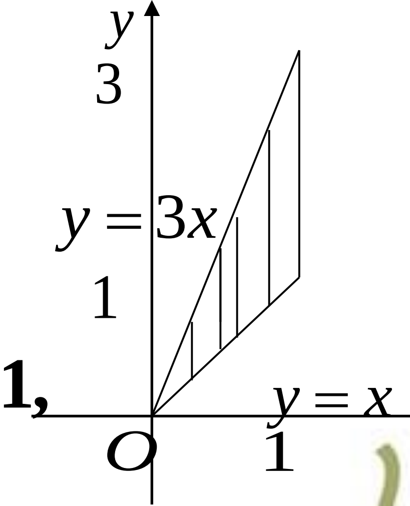


图1

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{y}{3}}^{y} xy\,\mathrm{d}x=\frac{4}{9}y^3, & 0\le y\le 1,\\ \displaystyle\int_{\frac{y}{3}}^{1} xy\,\mathrm{d}x=\frac{y}{2}\Big(1-\frac{y^2}{9}\Big), & 1\le y\le 3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对于任意的0<x≤1， $f_X(x)\neq 0$， 因此 $f_{Y|X}(y\mid x)$存在.

由条件概率密度定义可知：当0<x≤1时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{xy}{4x^3}=\dfrac{y}{4x^2}, & x\le y\le 3x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对于任意的0<y<3, $f_Y(y)\neq 0$， 因此 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 存在.

由条件概率密度定义可知：当0<y<1时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{9x}{4y^2}, & \dfrac{y}{3}\le x\le y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$1\le y<3$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{18x}{9-y^2}, & \dfrac{y}{3}\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 由于$P\{X\ge\frac{1}{2}\}>0$，因此由条件概率的定义可知

$$P\{Y \geq 2 \mid X \geq \frac{1}{2}\} = \frac{P\{Y \geq 2, X \geq \frac{1}{2}\}}{P\{X \geq \frac{1}{2}\}}$$

$$= \frac{\int_{\frac{2}{3}}^{1} x \,\mathrm{d}x \int_{2}^{3x} y \,\mathrm{d}y}{\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^3 \,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{25}{72}}{\frac{15}{16}} = \frac{10}{27}$$

但对于 $P\{Y < 1 \mid X = \frac{1}{2}\}, P\{|X| \geq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{3}{2}\}$, 由于 $P\{X = \frac{1}{2}\}, P\{Y = \frac{3}{2}\}$均为0，因而其概率的计算只能用条件概率密度在某区间上的积分进行计算.

$$P\{Y < 1 \mid X = \frac{1}{2}\} = \int_{-\infty}^{1} f_{Y|X}(y \mid \frac{1}{2})\,\mathrm{d}\,y = \int_{\frac{1}{2}}^{1} y\,\mathrm{d}\,y = \frac{3}{8}$$

$$P\{|X| \geq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{3}{2}\} = \int_{|x| \geq \frac{3}{4}} f_{X|Y}(x \mid \frac{3}{2})\,\mathrm{d}\,x = \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{8}{3} x\,\mathrm{d}\,x = \frac{7}{12}.$$