



# 第五章

## 极限定理

概率论是研究随机现象统计规律性的学科. 随机现象的规律性只有在相同的条件下进行大量重复试验时才会呈现出来. 也就是说, 要从随机现象中去寻求必然的法则, 应该研究大量随机现象. 研究大量的随机现象, 常常采用极限形式, 由此导致对极限定理进行研究. 极限定理的内容很广泛, 其中最重要的有两种:

## 大数定律 与 中心极限定理

下面我们先介绍大数定律

# 一、大数定律

主要：

- (1) 频率稳定性
- (2) 大量测量结果算术平均值的稳定性。

## 1. 大数定律的定义

**定义1** 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为一随机变量序列, 如果对于任意正整数 $k$  ( $k \geq 2$ ) 及任意 $k$ 个随机变量

$$X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$$

相互独立, 则称随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立。

定义 2: 如果

$$P\{\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X\} = 1$$

则称 $\{X_n\}$ 以概率 1 收敛到  $X$  或称 $\{X_n\}$ 几乎处处收敛到  $X$ . 记为 $X_n \xrightarrow{a.e} X$  或  $X_n \xrightarrow{a.s} X$ .

定义 3: 设 $\{X_n\}$ 为一随机变量序列,  $E(X_n)$  存在, 记

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)] \quad n = 1, 2, \dots$$

若 $\{Y_n\}$ 几乎处处收敛到 0, 即

$$P\{\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0\} = P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)] = 0\} = 1$$

则称 $\{X_n\}$ 服从强大数定律.

**定义3** 设  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  是一随机变量序列,  $a$  是一常数, 若对任意正数  $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n - Y| < \varepsilon\} = 1$  则称序列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  依概率收敛于  $Y$ , 记为  $Y_n \rightarrow Y(P)$

**定义4** 设  $\{X_n\}$  为一随机变量序列,  $E(X_n)$  存在, 记

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)] \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n| < \varepsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)]\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

则称  $\{X_n\}$  服从 (弱) 大数定律。

**定义 5:** 设  $F(x), F_1(x), F_2(x), \dots$  分别为  $X, X_1, X_2, \dots$  的分布, 如果对  $F(x)$  的任意连续点  $x$  有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称  $\{X_n\}$  以分布收敛到  $X$  记为  $X_n \xrightarrow{W} X$  或  $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$ .

# 几个常见的大数定律

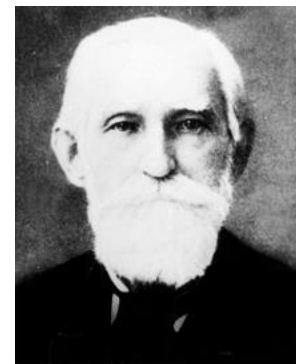
## 定理1（切比雪夫大数定律）

设  $X_1, X_2, \dots$  是相互独立的随机变量序列，它们都有有限的方差，并且方差有共同的上界，即  $D(X_i) \leq K, i=1, 2, \dots$ ，则对任意的  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$\text{证: } Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - \mu] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu,$$

$$\text{由于 } E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu,$$



切比雪夫, П. Л.

切比雪夫

$$D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

由切比雪夫不等式对于任意正数  $\varepsilon$  , 有

$$P\{|Y_n| < \varepsilon\} = P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2 / n}{\varepsilon^2}$$

令  $n \rightarrow \infty$  , 注意到概率不能大于1, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n| < \varepsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$



**注释:** 在切比雪夫大数定理的证明过程中可以看出只要

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 0 \quad (\Delta),$$

则大数定理就能成立。这个条件称为**马尔可夫条件**。因此更一般的定理有马尔可夫大数定理：对于随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ，若条件 $(\Delta)$ 成立，则对于任意 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

证明切比雪夫大数定律主要的数学工具是切比雪夫不等式。

设随机变量 $X$ 有期望 $E(X)$ 和方差 $\sigma^2$ ，则对于任给 $\varepsilon > 0$ ，

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



切比雪夫大数定律表明，独立随机变量序列 $\{X_n\}$ ，如果方差有共同的上界，则

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  与其数学期望  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$  偏差很小的概率接近于1.

即当 $n$ 充分大时， $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 差不多不再是随机的了，其取值任意接近于其数学期望的概率趋近于1.

切比雪夫大数定律给出了  
平均值稳定性的科学描述

作为切比雪夫大数定律的特殊情况，  
有下面的定理。

**定理2**（切比雪夫大数定律的特殊情况）

设 $X_1, X_2, \dots$ 是独立随机变量  
序列，且 $E(X_i)=\mu$ ， $D(X_i)=\sigma^2$ ， $i=1,2,\dots$ ，  
则对任给  $\varepsilon > 0$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

下面给出的伯努里大数定律，  
是定理2的一种特例。

设 $S_n$ 是 $n$ 重伯努里试验中事件 $A$ 发生的次数， $p$ 是事件 $A$ 发生的概率，

引入  $X_i = \begin{cases} 1, & \text{如第} i \text{次试验} A \text{发生} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n$

则 
$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 是事件} A \text{ 发生的频率}$$

于是有下面的定理：

### 定理3（伯努里大数定律）

设 $S_n$ 是 $n$ 重伯努里试验中事件 $A$ 发生的次数， $p$ 是事件 $A$ 发生的概率，则对任给的 $\varepsilon > 0$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

伯努里大数定律表明，当重复试验次数 $n$ 充分大时，事件 $A$ 发生的频率 $S_n/n$ 与事件 $A$ 的概率 $p$ 有较大偏差的概率很小。

伯努里大数定律提供了通过试验来确定事件概率的方法. 是最早的大数定律！

证：引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{在第}k\text{次实验中}A\text{发生} \\ 0 & \text{在第}k\text{次实验中}A\text{不发生} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

显然：  $n_A = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,

由于各次试验是独立的。于是  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的；又由于  $X_k$  服从 (0-1) 分布，所以  $E(X_k) = p$ ,  $D(X_k) = p(1-p)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ 。

由定理一有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

历史上，**J. Bernoulli**第一个研究了大数定律，在其**1718**年发表的论文中(这是概率论的第一篇论文)，他建立了本定理，这是全部大数定律中的第一个。

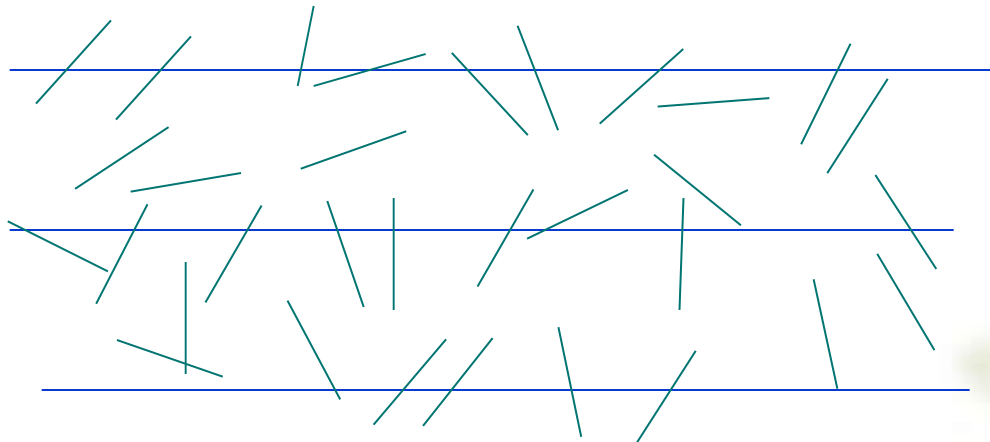


Jacob Bernoulli  
(1654-1705)

蒲丰投针问题中解法的  
理论依据就是大数定律

针长 $L$

线距 $a$



$$\pi \approx \frac{2Ln}{am}$$

当投针次数 $n$ 很大时，用针与线相交的频率 $m/n$ 近似针与线相交的概率 $p$ ，从而求得 $\pi$ 的近似值.



下面给出的独立同分布下的大数定律，不要求随机变量的方差存在。

### 定理3（辛钦大数定律）

设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布，具有有限的数学期 $E(X_i)=\mu$ ， $i=1,2,\dots$ ，则对任给 $\varepsilon > 0$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

辛钦大数不要求随机变量的方差存在.它为寻找随机变量的期望值提供了一条实际可行的途径.



Xinchin(1894-1959)

大数定律以严格的数学形式表达了随机现象最根本的性质之一：

平均结果的稳定性

它是随机现象统计规律的具体表现.

在理论和实际中都有广泛的应用.

## 二、中心极限定理

### 中心极限定理的客观背景

在实际问题中，常常需要考虑许多随机因素所产生总影响。



例如：炮弹射击的落点与目标的偏差，就受着许多随机因素的影响。

自从高斯指出测量误差服从正态分布之后，人们发现，正态分布在自然界中极为常见。



观察表明，如果一个量是由大量相互独立的随机因素的影响所造成，而每一个别因素在总影响中所起的作用不大，则这种量一般都服从或近似服从正态分布。

现在我们就来研究独立随机变量之和所特有的规律性问题：

当 $n$ 无限增大时，这个和的极限分布是什么？

在什么条件下极限分布正态？

由于无穷个随机变量之和可能趋于 $\infty$ ，  
故我们不研究 $n$ 个随机变量之和本身而考虑  
它的标准化的随机变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}}$$

的分布函数的极限.



考虑

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}}$$

的分布函数的极限.

可以证明，满足一定的条件，上述极限分布是标准正态分布。这就是下面要介绍的

中心极限定理



在概率论中，习惯于把和的分布收敛于正态分布这一类定理都叫做中心极限定理。

我们只讨论几种简单情形。

### 1. 定义：

设随机变量 $X_n$ 和 $X$ 的分布函数分别为 $F_n(x)$ ， $F(x)$ ， $n=1, 2, \dots$  若对 $F(x)$ 的一切连续点 $x$ ，有： $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ ，则称 $X_n$ 依分布收敛到 $X$ 。

# 定理1（独立同分布下的中心极限定理/ Levy—Lindberg）

设 $X_1, X_2, \dots$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i)=\mu$ ， $D(X_i)=\sigma^2$ ， $i=1, 2, \dots$ ，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

它表明，当 $n$ 充分大时， $n$ 个具有期望和方差的独立同分布的r.v之和近似服从正态分布。

## 定理(棣莫佛—拉普拉斯定理)

设随机变量 $\eta_n$ 服从参数 $n, p(0 < p < 1)$ 的二项分布, 则对任意 $x$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

定理表明, 当 $n$ 很大,  $0 < p < 1$ 是一个定值时 (或者说,  $np(1-p)$  也不太小时), 二项变量 $\eta_n$ 的分布近似正态分布  $N(np, np(1-p))$ .

证: 将 $\eta_n$ 看成是 $n$ 个相互独立、服从同一(0-1)分布的随

机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 之和, 即有  $\eta_n = \sum_{k=1}^n X_k$

且 $E(X_k) = p, D(X_k) = p(1-p) (k=1, 2, \dots, n)$ , 由定理1得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

## 中心极限定理中典型的问题

(1) 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立同分布,  
 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 \neq 0, (k=1, 2, \dots)$ , 由定理1, 当  $n$  充分大时,  $\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$  近似服从标准正态分布。

(2) 设  $\eta_n \sim b(n, p)$ , 由定理3, 当  $n$  充分大时,  
 $\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  近似服从标准正态分布。

下面我们举例说明中心极限定理的应用

**例1** 根据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为100小时的指数分布. 现随机地取16只，设它们的寿命是相互独立的. 求这16只元件的寿命的总和大于1920小时的概率.

解：设第 $i$ 只元件的寿命为 $X_i, i=1,2, \dots, 16$

由题给条件知，诸 $X_i$ 独立同分布，

$$E(X_i)=100, D(X_i)=10000$$

16只元件的寿命的总和为  $Y = \sum_{k=1}^{16} X_k$

依题意，所求为 $P(Y>1920)$

解：设第 $i$ 只元件的寿命为 $X_i, i=1,2, \dots, 16$

由题给条件知, 诸 $X_i$ 独立,  $E(X_i)=100, D(X_i)=10000$

16只元件的寿命的总和为

$$Y = \sum_{k=1}^{16} X_k$$

依题意, 所求为 $P(Y>1920)$

由于 $E(Y)=1600, D(Y)=160000$

由中心极限定理,  $\frac{Y - 1600}{400}$  近似 $N(0,1)$

$$P(Y>1920)=1-P(Y\leq 1920) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1920-1600}{400}\right)$$

$$=1-\Phi(0.8) =1-0.7881=0.2119$$



例2. (供电问题) 某车间有200台车床, 在生产期间由于需要检修、调换刀具、变换位置及调换工件等常需停车. 设开工率为0.6, 并设每台车床的工作是独立的, 且在开工时需电力1千瓦.

问应供应多少千瓦电力就能以99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产?

解: 依题意,  $X: B(200, 0.6)$ , 设需 $N$ 千瓦电力,

现在的问题是: 求满足  $P(X \leq N) \geq 0.999$  的最小的 $N$ .  
由德莫佛-拉普拉斯极限定理

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ 近似 } N(0, 1),$$

于是  $P(X \leq N) = P(0 \leq X \leq N)$

$$\approx \Phi\left(\frac{N - 120}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{-120}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(\frac{N - 120}{\sqrt{48}}\right)$$

这里  $np=120$ ,  
 $np(1-p)=48$

由 $3\sigma$ 准则,  
此项为0。



由  $\Phi\left(\frac{N-120}{\sqrt{48}}\right) \geq 0.999$ , 查正态分布函数表得

$$\Phi(3.1) = 0.999$$

故  $\frac{N-120}{\sqrt{48}} \geq 3.1$ ,

从中解得  $N \geq 141.5$ , 即所求  $N=142$ .

也就是说, 应供应142 千瓦电力就能以99.9%的概率保证该车间不会因供电不足而影响生产.

例3：保险业是最早使用概率论的部门之一，保险公司为了估计企业的利润，需要计算各种概率。假设现要设置一项保险：一辆自行车年交保费2元，若自行车丢失，保险公司赔偿200元，设在一年内自行车丢失的概率为0.001，问至少要有多少辆自行车投保才能以不小于0.9的概率保证这一保险不亏本？

解：设有 $n$ 辆自行车投保， $\eta_n$ 表示一年内 $n$ 辆自行车中丢失的数量。则  $\eta_n \sim b(n, 0.001)$ ，问题归结为 $n$ 至少为多少时，

$$P\{2n - 200 \eta_n \geq 0\} \geq 0.9 \quad \text{上式化为 } P\{\eta_n \leq 0.01n\} \geq 0.9$$

$$P\{\eta_n \leq 0.01n\} = P\left\{\frac{\eta_n - 0.001n}{\sqrt{0.000999n}} \leq \frac{0.01n - 0.001n}{\sqrt{0.000999n}}\right\} = \Phi\left(\frac{0.009n}{\sqrt{0.000999n}}\right) \geq 0.9$$

查表得  $\frac{0.009n}{\sqrt{0.000999n}} \geq 1.29$ ，解不等式得  $n \geq 21$ 。

例4：一加法器同时收到20个噪声电压 $V_k$  ( $k=1, 2, \dots, 20$ )，  
设它们是相互独立的随机变量，且都在区间 $(0, 10)$ 上服从  
均匀分布，记  $V = \sum_{k=1}^n V_k$ ，求 $P\{V > 105\}$  的近似值。

解：易知 $E(V_k)=5$ ， $D(V_k)=100/12$  ( $k=1, 2, \dots, 20$ )。

由定理1，随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^n V_k - 20 \times 5}{\sqrt{100/20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{100/20} \cdot \sqrt{20}}$$

近似服从正态分布 $N(0, 1)$ ，

$$\text{于是 } P\{V > 105\} = P\left\{ \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{100/20} \cdot \sqrt{20}} > \frac{105 - 20 \times 5}{\sqrt{100/20} \cdot \sqrt{20}} \right\}$$

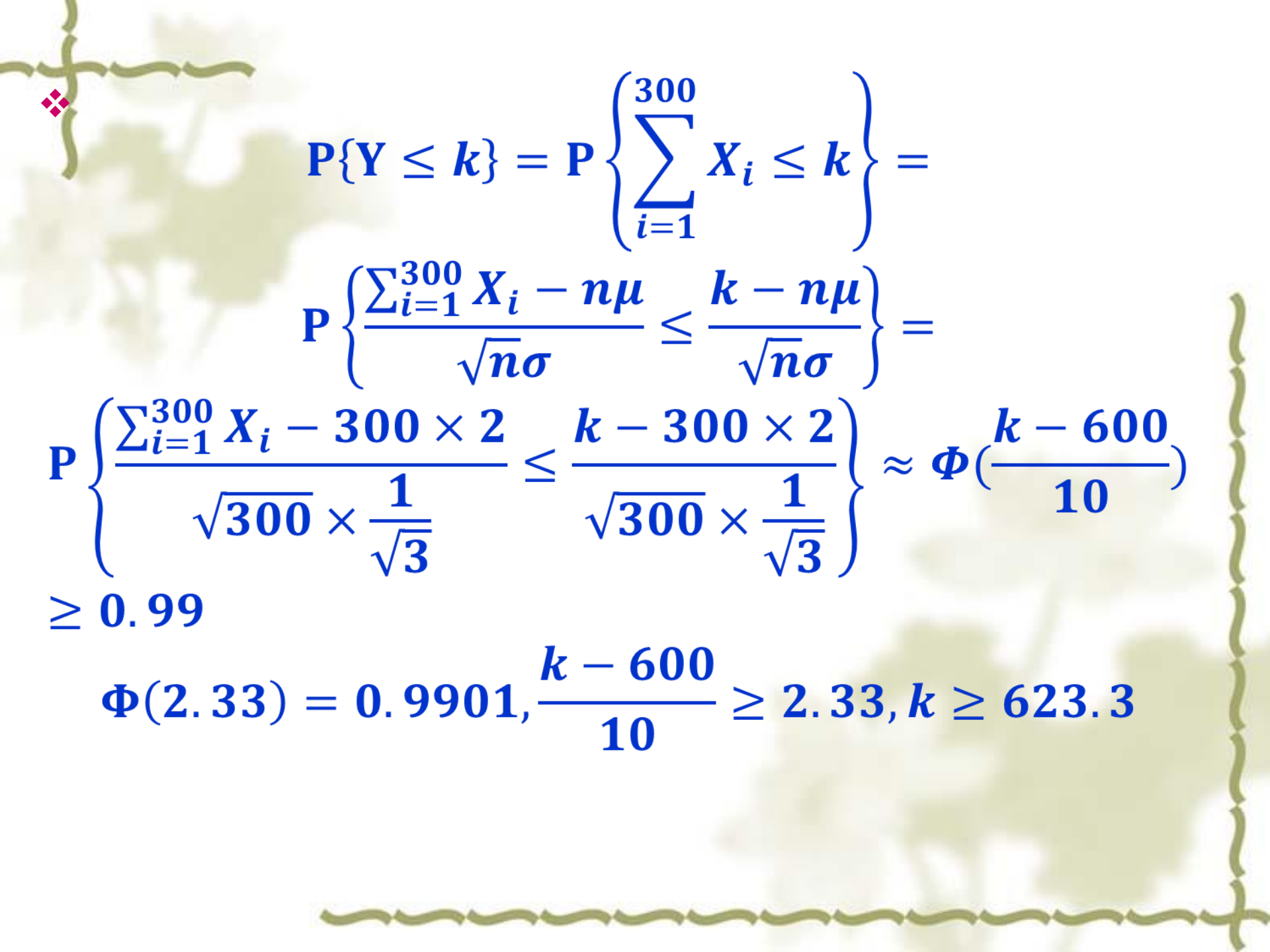
$$= P\left\{ \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{100/20} \cdot \sqrt{20}} > 0.387 \right\} = 1 - P\left\{ \frac{V - 20 \times 5}{\sqrt{100/20} \cdot \sqrt{20}} \leq 0.387 \right\}$$

$$= 1 - \Phi(0.387) \approx 0.348 \quad \text{即有} \quad P\{V > 105\} \approx 0.348。$$

**例5** 城市设计院对某小区设计时估算用电负荷，设该小区有**300**户居民，晚**5:00~7:30**每户居民使用电器总功率 $X_i \sim U(1, 3)$ （单位：千瓦），则该小区用电负荷设计至少多大才能以**0.99**概率保证居民正常用电？

解 设用电负荷设计为**K**千瓦，记**Y**为该小区总电器功率，则 $Y = \sum_{i=1}^{300} X_i$ ，注意 $X_1, X_2, \dots, X_{300}$ 相互独立，同分布。由题意，由 $P\{Y \leq k\} \geq 0.99$ ，求**k**。

$$E(X_i) = 2 = \mu, D(X_i) = 1/3 = \sigma^2, n = 300$$


$$\mathbf{P}\{Y \leq k\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{300} X_i \leq k\right\} =$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right\} =$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - 300 \times 2}{\sqrt{300} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \leq \frac{k - 300 \times 2}{\sqrt{300} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{k - 600}{10}\right) \\ \geq 0.99$$

$$\Phi(2.33) = 0.9901, \frac{k - 600}{10} \geq 2.33, k \geq 623.3$$

(选讲)

定理2(李雅普诺夫Liapunov定理)

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 它们具有数学期望和方差,  $E(X_k) = \mu_k$ ,  $D(X_k) = \sigma_k^2 \neq 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ),

记  $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$  若存在正数  $\sigma$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\sigma}} \sum_{k=1}^n E \left\{ |X_k - \mu_k|^{2+\sigma} \right\} \rightarrow 0$$

则随机变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E \left( \sum_{k=1}^n X_k \right)}{\sqrt{D \left( \sum_{k=1}^n X_k \right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对任意 $x$ , 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$



注释：(1) 定理2表明，在定理的条件下，随机变量，

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

当n很大时，近似地服从正态分布  $N(0, 1)$ 。

由此，当n很大时，

$$\sum_{k=1}^n X_k = B_n Z_n + \sum_{k=1}^n \mu_k \sim N\left(\sum_{k=1}^n \mu_k, B_n^2\right)$$

近似地服从正态分布.

(2) 同时定理也提供了大量独立随机变量之和有关的事件概率的近似计算方法.