第十四章 平稳随机过程

§1　平稳过程的概念

一、严平稳随机过程

二、宽平稳随机过程

在实际中，有相当多的随机过程，不仅它现在的状态，而且它过去的状态，都对未来状态的发生有着很强的影响.

如果过程的统计特性不随时间的推移而变化, 则称之为平稳随机过程.

一、(严)平稳过程

1. **定义：** 设 $\{X(t), t\in T\}$ 是随机过程, 如果对于任意的常数h和任意正整数n, 及任意的n维随机向量 $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ 和 $(X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h))$ 具有相同的分布函数, 则称随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 具有平稳性, 称此过程为严平稳过程 (或狭义平稳过程). 其中 $t_1\ldots t_n$ 和 $t_1+h, \ldots, t_n+h \in T$

平稳过程的参数集T，一般为$(-\infty, +\infty)$，$[0, +\infty)$，$\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$，$\{0, 1, 2, \cdots\}$，以下如无特殊说明，均认为参数集$T=(-\infty, +\infty)$.

当定义在离散参数集上时，称过程$\{X_n\}$为严平稳随机序列或平稳时间序列。

说明 (1) 将随机过程划分为平稳过程和非平稳过程有重要的实际意义. 过程若是平稳的可使问题的分析尤为简化.

(2) 平稳过程的数字特征有很好的性质.

例1 设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且

$X_n \sim U(0,1)$, n=1,2,…, 讨论 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是否为严平稳时间序列

并求 $E(X_n)$ 与 $E(X_n X_m)$, n、m=0, 1, 2, ….

解：设 $U(0,1)$ 的分布函数为 $F(x)$,则对任意h及正整数k,,任意 n_k 维随机变量, $\left(X_{n_1}, X_{n_2}, \cdots X_{n_k}\right)$ $\left(X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, \cdots X_{n_k+h}\right)$

的分布函数均为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \prod_{j=1}^{k} F(x_j)$

故 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是严平稳时间序列。

因为 $X_n \sim U(0,1)$，且相互独立， 所以 $E(X_n)=1/2$，

$$E(X_nX_m)=\begin{cases} E(X_n^{\ 2}) & n=m \\ E(X_n)E(X_m) & n\neq m \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4} & n=m \\ \dfrac{1}{4} & n\neq m \end{cases}$$

2. 严平稳过程的数字特征

定理 如果$\{X(t), t\in T\}$是严平稳过程，且对任意的$t\in T$，$\boldsymbol{E}[X^2(t)]<+\infty$，则有(1) $\mu_X(t)=\boldsymbol{E}[X(t)]=$常数$=\mu_X$，$t\in T$；

(2) $\boldsymbol{E}[X(s)X(t)]$只依赖于$t-s$，而与$s, t\in T$的具体取值无关。

说明 (1) 平稳过程的所有样本曲线都在水平直线 $x(t)=\mu_X$ 上下波动，平均偏离度为σ_X.

(2) 若平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_x(s,t)=E[X(s)\cdot X(t)]$存在.

那么平稳过程的自相关函数仅是 $t-s=\tau$ 的 函数.

(即与时间间隔有关，与时间具体取值无关).

进而，$C_X(\tau)=E\{[X(t)-\mu_x][X(t+\tau)-\mu_x]\}=R_X(\tau)-\mu_x^2$只与$\tau$有关；

$\sigma_x^2=C_x(0)=R_x(0)-\mu_x^2$ 为常数.

要确定随机过程的分布函数判定其平稳性在实际中不易办到.

二、(弱)平稳过程

1. 定义 设$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程,如果

(1) $E[X(t)]=\mu_x$(常数), $t\in T$;

(2) 对任意的$t,t+\tau\in T$, $R_x(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$只依赖于$\tau$。

则称$\{X(t),t\in T\}$为宽平稳过程或广义平稳过程,简称平稳过程.

特别地,当T为离散参数集时,若随机序列$\{X_n(t)\}$满足$E(X_n^2)<+\infty$,以及

(1) $E[X_n]=\mu_x$(常数), $n\in T$;

(2) $R_x(m)=E[X_nX_{n+m}]$只与m有关。

称$\{X_n\}$为宽平稳随机序列或宽平稳时间序列。

2. 严平稳和宽平稳的关系

(1). 严平稳过程不一定是宽平稳过程，因为严平稳的过程不一定是二阶矩过程，但当严平稳过程是二阶矩过程时，则它一定是宽平稳过程。

(2). 宽平稳过程不一定是严平稳过程，但对于正态过程，两者是等价的

例2：（白噪声过程）设$\{X_n, n=0, \pm 1, \cdots\}$是互不相关的随机序列，且$E[X_n]=0$，$D(X_n)=\sigma^2>0$，讨论其平稳性.

解：因为$E[X_n]=0$，
$$E[X_n X_m] = \begin{cases} \sigma^2 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

故其均值函数$\mu_X(n)=0$为常数，

自相关函数 $R_X(n,m)$只与$m-n$有关，所以它是平稳时间序列。

例3：随机相位正弦波$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，$a$，$\omega_0$为常数，$\Theta$是在$(0, 2\pi)$上服从均匀分布的随机变量，则$\{X(t)\}$是平稳过程，并求其自相关函数.

解：已知Θ的概率密度为
$$f(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & 0<\theta<2\pi \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

于是, X(t)的均值函数为

$$E[X(t)]=E[a\cos(\omega_0 t+\Theta)]=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\,d\theta=0$$

$$E[X(t)X(t+\tau)]=\frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\cos[\omega_0(t+\tau)+\theta]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\cos\omega_0\tau\,d\theta+\int_0^{2\pi}\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\theta]d\theta\right\}\quad=\frac{1}{2}a^2\cos\omega_0\tau$$

与t无关，可见{X(t)}为平稳过程，其自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2}a^2\cos\omega_0\tau\qquad-\infty<\tau<+\infty$$

一般地，设s(t)是一周期为T函数，Θ~U(0, T)称{X(t)=s(t+Θ)}为随机相位周期过程，则其为平稳过程。

例 4. 设状态连续、时间离散的随机过程,

$$X_n = \sin 2\pi\alpha n, n = 1,2,\cdots$$

其中 $\alpha \sim U(0,1)$ 是随机变量。讨论序列的平稳性。

解. 首先验证是否为二阶矩过程。然后考虑

$$E(X_n) = \int_0^1 \sin 2\pi n x \mathrm{d}x = 0$$

$$R_X(n,n+m)=E(X_n X_{n+m})$$

$$=\int_0^1 \sin 2\pi nx\cdot\sin 2\pi(n+m)x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[\cos 2\pi mx-\cos 2\pi(2n+m)x]\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}1/2, m=0\\ 0, m\neq 0\end{cases},$$

只依赖于m，所以是平稳序列。

例 5 设随机过程，

$$X(t) = tY, t \in (-\infty, +\infty),$$

其中Y是非零随机变量，$E(Y^2) < +\infty$, 讨论过程的平稳性。

解. 1）首先验证是否为二阶矩过程。

2）然后考虑期望、相关函数。

$$E[X(t)] = E[tY] = tE(Y),$$

E(X)是否与t有关？取决于E(Y)是否为零。

$$R_X(t,t+\tau)=E[tY\cdot(t+\tau)Y]$$
$$=t(t+\tau)E[Y^2],$$

不依赖于t?

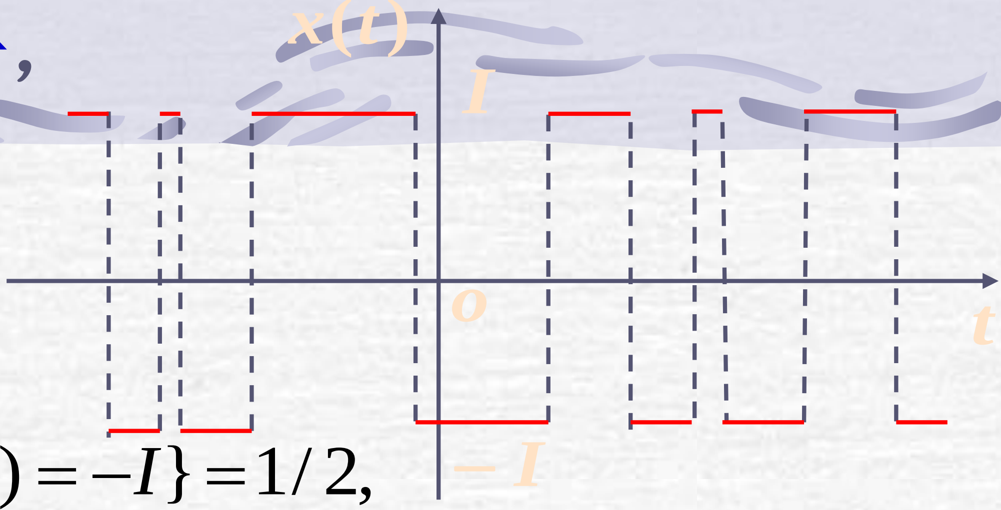
依赖与Y的方差是否为零。

$$E[Y^2]=0\Rightarrow P(Y=0)=1,$$

与题设矛盾，故非平稳。

例6 考虑随机电报信号，

信号$X(t)$由只取$+I$或$-I$的电流给出.



这里 $P\{X(t)=+I\}=P\{X(t)=-I\}=1/2$,

而正负号在区间$(t,t+l)$内变化的次数$N(t,t+l)$是随机的,

假设$N(t,t+l)$服从泊松分布. 即事件 $A_k=\{N(t,t+l)=k\}$

的概率为 $P(A_k)=\dfrac{(\lambda l)^k}{k!}e^{-\lambda l}, \quad k=0,1,2,\cdots,$

其中$\lambda>0$是单位时间内变号次数的数学期望.

试讨论$X(t)$的平稳性.

解 $\forall t\in(-\infty,+\infty),\ \mu_X(t)=E[X(t)]\ =-I\times\frac{1}{2}+I\times\frac{1}{2}=0,$

下求 $E[X(t)X(t+\tau)]=I^2P\{X(t)X(t+\tau)=I^2\}-I^2P\{X(t)X(t+\tau)=-I^2\}$

对$\tau>0, P\{X(t)X(t+\tau)=I^2\}=$ $P\{X(t)$在$(t,t+\tau)$内变号偶数次$\}$

$$=P\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\{N(t,t+\tau)=2k\}\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(t,t+\tau)=2k\}\ =\sum_{k=0}^{\infty}P\{A_{2k}\}$$

$$=P(A_0)+P(A_2)+P(A_4)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\ \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda\tau},$$

同理$P\{X(t)X(t+\tau)=-I^2\}=P\{X(t)$在$(t,t+\tau)$内变号奇数次$\}$

$$=P\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\{N(t,t+\tau)=2k+1\}\}\ =\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(t,t+\tau)=2k+1\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\ \frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda\tau},$$

所以 $E[X(t)X(t+\tau)] = I^2\sum_{k=0}^{\infty}P(A_{2k}) - I^2\sum_{k=0}^{\infty}P(A_{2k+1})$

结果与t无关

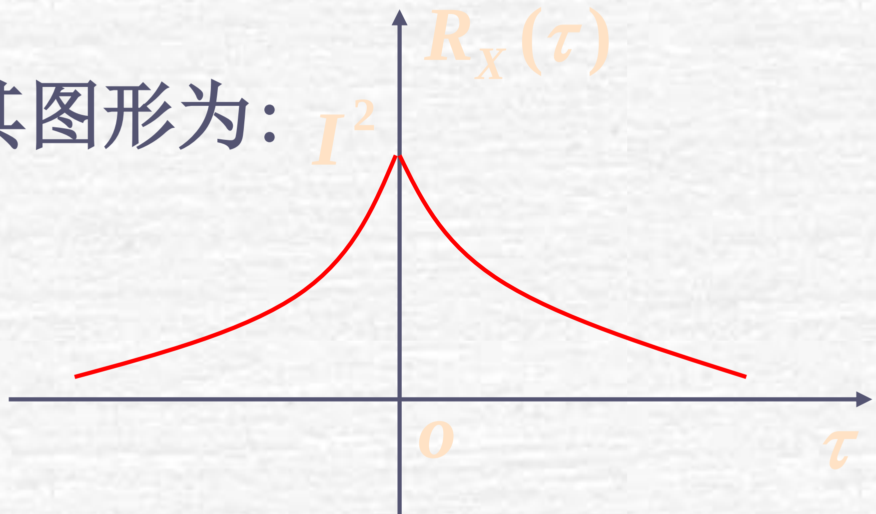
$$= I^2 e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} = I^2 e^{-2\lambda\tau}.$$

而$\tau < 0$时, 令 $t' = t + \tau$, $E[X(t)X(t+\tau)] = I^2 e^{2\lambda\tau}$,

则自相关函数: $E[X(t)X(t+\tau)] = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$,

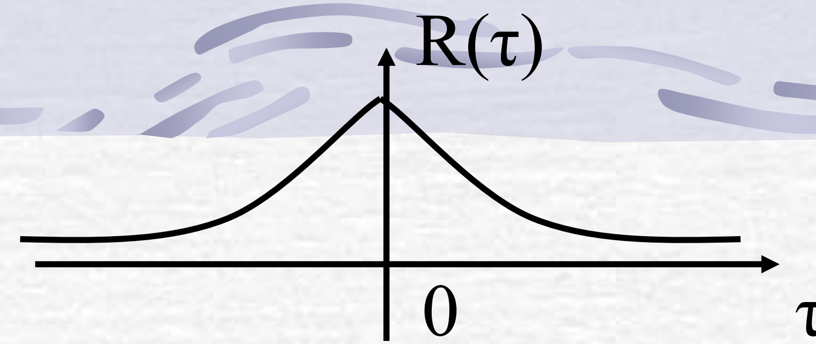
只与τ有关

其图形为:



所以随机电报信号$X(t)$是一平稳过程.

3. 自相关函数的性质



性质1.$R_x(0) \geq 0$;

证: $R_x(0)=E[X^2(t)] \geq 0$

性质2. $R_x(\tau)$为偶函数，即$R_x(-\tau)=R_x(\tau)$

证: $R_x(-\tau)=E[X(t)X(t-\tau)]= E[X(t-\tau)X(t)]= R_x(\tau)$

性质3. $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

证：由柯西-施瓦兹不等式

$$|R_X(\tau)|=|E[X(t)X(t+\tau)]| \leq \sqrt{E[X^2(t)]E[X^2(t+\tau)]}$$

$$= \sqrt{R_X(0)R_X(0)} = R_X(0)$$

性质4. Rx(τ)非负定性. 即对任意n, 任意实数

$a_1, a_2, \dots, a_n$, 任意$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$有 $\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j)a_i a_j \ge 0$

证：
$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j)a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} E[X(t_i)X(t_j)]a_i a_j$$
$$= E\left\{\sum_{i,j=1}^{n} X(t_i)X(t_j)a_i a_j\right\} = E\left\{[\sum_{i=1}^{n} X(t_i)a_i]^2\right\} \ge 0$$

性质5.若平稳过程X(t)＝X(t+T),则称其为周期T的平稳周期过程

周期为T的平稳过程的自相关函数是以T为周期的周期函数。

证： $R_X(\tau+T)=E[X(t)X(t+\tau+T)]= E[X(t)X(t+\tau)]= R_X(\tau)$

4. 平稳相关与互相关函数

（1）定义：设$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$，$t\in T$为两个平稳过程，如果它们的互相关函数$R_{XY}(t, t+\tau)$只是τ 的函数，即$R_{XY}(t, t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]= R_{XY}(\tau)$，则称$\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$是平稳相关的，或称$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$是联合平稳过程. 并称

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

为$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的互相关函数。

(2) 互相关函数的性质

性质1. $|R_{XY}(\tau)|^2 \le R_X(0)R_Y(0)$

证: $|R_{XY}(\tau)|^2 = \{E[X(t)Y(t+\tau)]\}^2$

$$\le E[X^2(t)]E[Y^2(t+\tau)] = R_X(0)R_Y(0)$$

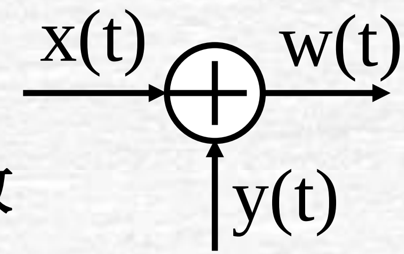
性质2. $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$

证: $R_{XY}(-\tau) = E[X(t+\tau)Y(t)] = E[Y(t)X(t+\tau)] = R_{YX}(\tau)$

性质3. $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$

性质4. $|R_{XY}(\tau)| \le \dfrac{1}{2}\{R_X(0) + R_Y(0)\}$

例7：如图所示，将两个平稳过程X(t)，Y(t)同时输入加法器中，加法器输出随机过程W(t)=X(t)+Y(t)，若X(t)与Y(t)平稳相关，则W(t)为平稳过程



证：$\mu_W(t)=E[X(t)]+E[Y(t)]=\mu_X+\mu_Y$为常数

$$E[W(t)W(t+\tau)]=E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}$$

$$=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t)Y(t+\tau)]+E[Y(t)X(t+\tau)]+E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)$$

可见W(t)的自相关函数Rw(t, t+τ)只依赖于τ，所以w(t)为平稳过程.

例8：设$X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，$Y(t)=B\sin(\omega t+\Theta-\Phi)$, A, B, Φ，ω为常数，Θ在$(0,2\pi)$上服从均匀分布，求$R_{XY}(\tau)$。

解：X(t), Y(t)均为平稳过程.

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[A\sin(\omega t+\Theta)B\sin(\omega t+\omega\tau+\Theta-\Phi)]$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\Phi)\,d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(\omega\tau-\Phi)-\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta-\Phi)]\,d\theta$$

$$=\frac{AB}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cos(\omega\tau-\Phi)\cdot 2\pi=\frac{AB}{2}\cdot\cos(\omega\tau-\Phi)$$

三、复平稳随机过程

1. **定义：** Z(t)=$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$+i $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t})$ 为复随机过程满足：

① $\mu_Z(t)=E[Z(t)]=\mu_X+i\mu_Y$为复常数，

② $R_Z(t,t+\tau)=E(\overline{Z(t)}Z(t+\tau))=R_Z(\tau)$只与$\tau$有关.

则称Z(t)为复平稳随机过程

2性质：

①若X(t),Y(t)为联合平稳的实随机过程，则

Z(t)=$X(t)$+i$Y(t)$为复平稳随机过程

② $\psi_Z^2(t)=R_Z(0)=E[|Z(t)|^2]\geq 0,$

③ $R_Z(\tau)=\overline{R_Z(-\tau)}$