1.6　事件的独立性

例1.将一颗均匀色子连掷两次，

A：第一次掷出1点，B：第二次掷出6点，

求$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{6},\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},$

$\mathrm{P}(AB)=\frac{1}{6^2},$

有$\mathrm{P}(AB)=P(A)P(B)$

1.6 事件的独立性

两个事件的独立性

定义 设A，B为两事件，如果具有等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称A, B为相互独立的事件, 又称A, B相互独立。

性质

（1）若事件A与事件B相互独立，则A与$\bar{B}$、$\bar{A}$与B、$\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立。

证明：只证若事件A与事件B相互独立，则A与 $\bar{B}$相互独立。

由于 $\bar{B}A=A-AB$，$AB\subset A$，而$P(AB)=P(A)P(B)$，从而

$P(\bar{B}A)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\bar{B})$

所以，A与 $\bar{B}$相互独立。

（2）若$P(A)>0$，$P(B)>0$，则A，B相互独立，与A，B互不相容不能同时成立。

因为若它们同时成立，则$P(AB)=P(\phi)=P(A)P(B)=0$，与$P(A)>0$，$P(B)>0$矛盾。

（3）设A，B是两事件，且$P(A)>0$（$P(B)>0$），则A，B相互独立的充要条件是$P(B|A)=P(B)$（$P(A|B)=P(A)$）。

两个以上事件的独立性

定义　设A，B，C是三事件，如果具有等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C).$$

则称三事件A，B，C两两独立。

一般，当事件A，B，C两两独立时，等式

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

不一定成立，例如：

例2　假设我们掷两次骰子，并定义事件A，B，C如下

A="第一次掷得偶数"，B="第二次掷得奇数"，

C="两次都掷得奇数或偶数"。

证明A，B，C两两独立，但不满足等式$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

证明：容易算出

$P(A)=1/2,\quad P(B)=1/2,\quad P(C)=1/2,$

$P(AB)=1/4,\quad P(AC)=1/4,$

$P(BC)=1/4,\quad P(ABC)=0.$

从而具有等式

$P(AB)=P(A)P(B)$；$P(AC)=P(A)P(C)$；

$P(BC)=P(B)P(C)$

所以A, B, C两两独立.

容易看出 $P(ABC)=0\neq P(A)P(B)P(C)$

例3 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,A表示抽到K的事件,B表示抽到的牌是黑色,事件A,B是否独立?

解 $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, $P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$,

$P(AB)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$,

可见$P(AB)=P(A)P(B)$,

故A,B相互独立.

例4. 甲，乙对同一目标射击，甲，乙击中目标的概率为0.9，0.8，甲乙各射击一次，求目标被击中的概率

解：A：甲击中，B：乙击中，所求

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.98$$

定义 设A，B，C是三事件，如果具有等式

$$\left.\begin{array}{l} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C). \end{array}\right\}$$

则称A，B，C为相互独立的事件。

一般地，设A_1，A_2，…A_n是n个事件，如果对于任意k(1<k≤n)，任意$1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n$，具有等式

$$P(A_{i1}A_{i2}\dots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\dots P(A_{ik})$$

则称A_1，A_2，…，A_n为相互独立的事件。

注意，在上式中包含的等式总数为

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1$$

性质

（1）若$A_1, A_2, \ldots, A_n$相互独立，则其中任意m个事件$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$相互独立（$2 \leqslant m \leqslant n$）。

（2）若A_1，A_2，…，A_n相互独立，则把其中任意m个事件换成各自的对立事件后构成的n个事件也相互独立（$1 \leqslant m \leqslant n$）。

注：若事件是独立的，则许多概率的计算可以大为**简化**，例如若A_1，…，A_n相互独立，则A_1，A_2，…，A_n同时发生的概率为 $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$。

例5.伯恩斯坦反例

一个均匀的正四面体,其第一面染成红色,第二面染成白色,第三面染成蓝色,第四面染上红\白\蓝三种颜色.现以A,B,C分别记为投一次四面体出现红、白、蓝颜色朝下的事件,问事件A，B，C两两独立吗？是

A，B，C相互独立吗？不是，$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$

例6. 1人照看三台机床，在一小时内，甲乙丙机床不需要照看的概率分别为0.9，0.8，0.85

求（1）三台机床都需要照看的概率

（2）至少有一台机床需要照看的概率

（3）有机床无人照看而停工的概率

解：A，B，C表示甲，乙，丙机床不需要照看

(1)$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.003$

(2)$P(\overline{ABC}) = 1 - P(ABC) = 0.388$

(3)$P(\bar{A}\bar{B} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{C}\bar{A}) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{C}\bar{A}) - 3P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 0.059$

例 7　排球比赛现定三局两胜制，若甲队每局获胜的概率为0.6，求甲队获胜的概率

解：A_i：甲在第i局获胜，i=1,2,3，

A：甲队胜

则$\mathrm{A}=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3$，

$$\mathrm{P}(A)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)$$
$$=P(A_1)P(A_2)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$$
$$+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)$$

=0.648

例8 某零件加工可在两种工艺中选择一种，第一种工艺有三道工序，各道工序出现废品的概率分别为0.01，0.02，0.03；第二种工艺有两道工序，出现废品的概率都是0.03.设第一种、第二种工艺在合格品中出现优等品的概率分别是0.8和0.9.试比较（1）那种工艺的废品率低？（2）优等品的概率高?

解 (1)$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 0.0589$;

$P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}) = 0.0591$

(2)优等品率=0.9411×0.8=0.753;

另一个0.847

例9 要验收一批（100件）乐器，验收方案如下：自该批乐器中取3件测试（独立），如果三件中至少有一件在测试中被认为音色不纯，则这批乐器就被拒绝接收。设一件音色不纯的乐器被检测查出其音色不纯的概率为095；而一件音色纯的乐器经检测被误认为音色不纯的概率为0.01。如果已知这100件乐器中恰有4件音色不纯。试问这批乐器被接收的概率？

解 H_i:“随机取3件，其中恰有i件音色不纯”，i=0，1，2，3，

A：“这批乐器被接收”，则

$P(H_0)=C_{96}^3/C_{100}^3$, $P(H_1)=C_4^1C_{96}^2/C_{100}^3$,
$P(H_2)=C_4^2C_{96}^1/C_{100}^3$,$P(H_3)=C_4^3/C_{100}^3$

$P(A|H_0)=0.99^3$, $P(A|H_1)=0.99^2\times 0.05^1$,
$P(A|H_2)=0.99^1\times 0.05^2$，$P(A|H_3)=0.05^3$

故$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A|H_i)=0.8629$

例10 “近防炮“是一种舰艇车辆上使用的防空、反导系统，它可以在短时间内发射大量的子弹对目标进行撞击。假设每发子弹是否命中互不影响，且命中率均为0.004.若发射100发子弹，求至少命中一发的概率？为确保以0.99的概率击中导弹，至少要发射多少发子弹？

解：（1）A: 导弹被击中，A_i:第i发子弹击中导弹，$\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}$

$$\mathrm{p}=\mathrm{P}(A_i)=0.004$$

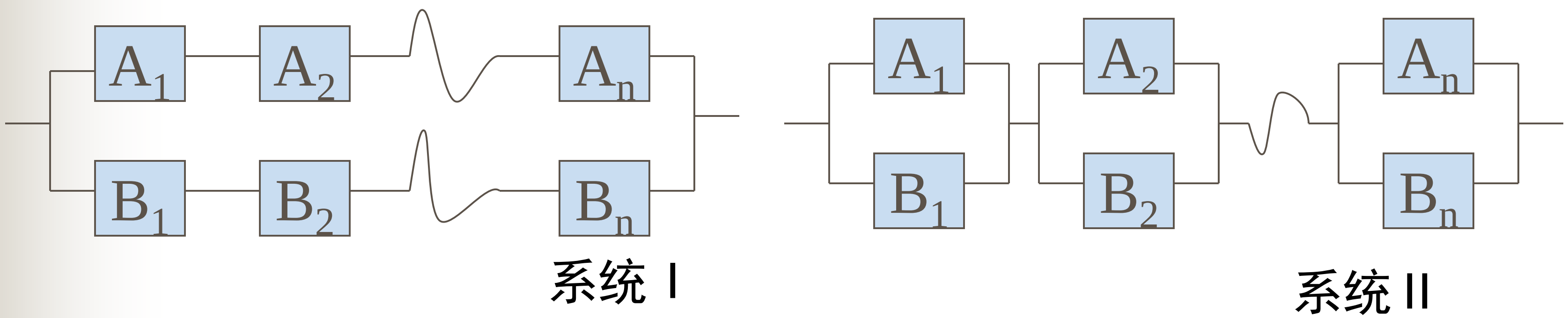
$$\mathrm{P}(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})=1-(1-p)^{100}\approx 0.33$$

（2）$\mathrm{P}(A)\geq 0.99$,问$\mathrm{n}\geq$？

$$\mathrm{P}(A)=1-(1-p)^n=1-(1-0.004)^n\geq 0.99$$

解得

例11 电路系统的可靠性。如图，两个系统各有2n个元件，其中系统Ⅰ先串联后并联，系统Ⅱ 先并联后串联。求两个系统的可靠性大小并加以比较。



解： Ⅰ. 设A_i表示第i个元件正常工作。

P(A)： Ⅰ中第一条支路的可靠性，

P(B)： Ⅰ中第二条支路的可靠性。

所以$A\cup B$表示Ⅰ正常工作（并联）

$$而P(A)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)=r^n(串联).$$

同理　$P(B)=r^n$

所以　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=r^n+r^n-r^{2n}=R_{I}$$

Ⅱ　第一对元件可靠性

$P(A_1\cup B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1)P(B_1)=2r-r^2$,

第二对元件的可靠性

$P(A_2\cup B_2)=P(A_2)+P(B_2)-P(A_2)P(B_2)=2r-r^2$,

……

第n对元件的可靠性

$$P(A_n \cup B_n)=P(A_n)+P(B_n)-P(A_n)P(B_n)=2r-r^2$$

于是 $R_{II}=[r(2-r)]^n=r^n(2-r)^n$

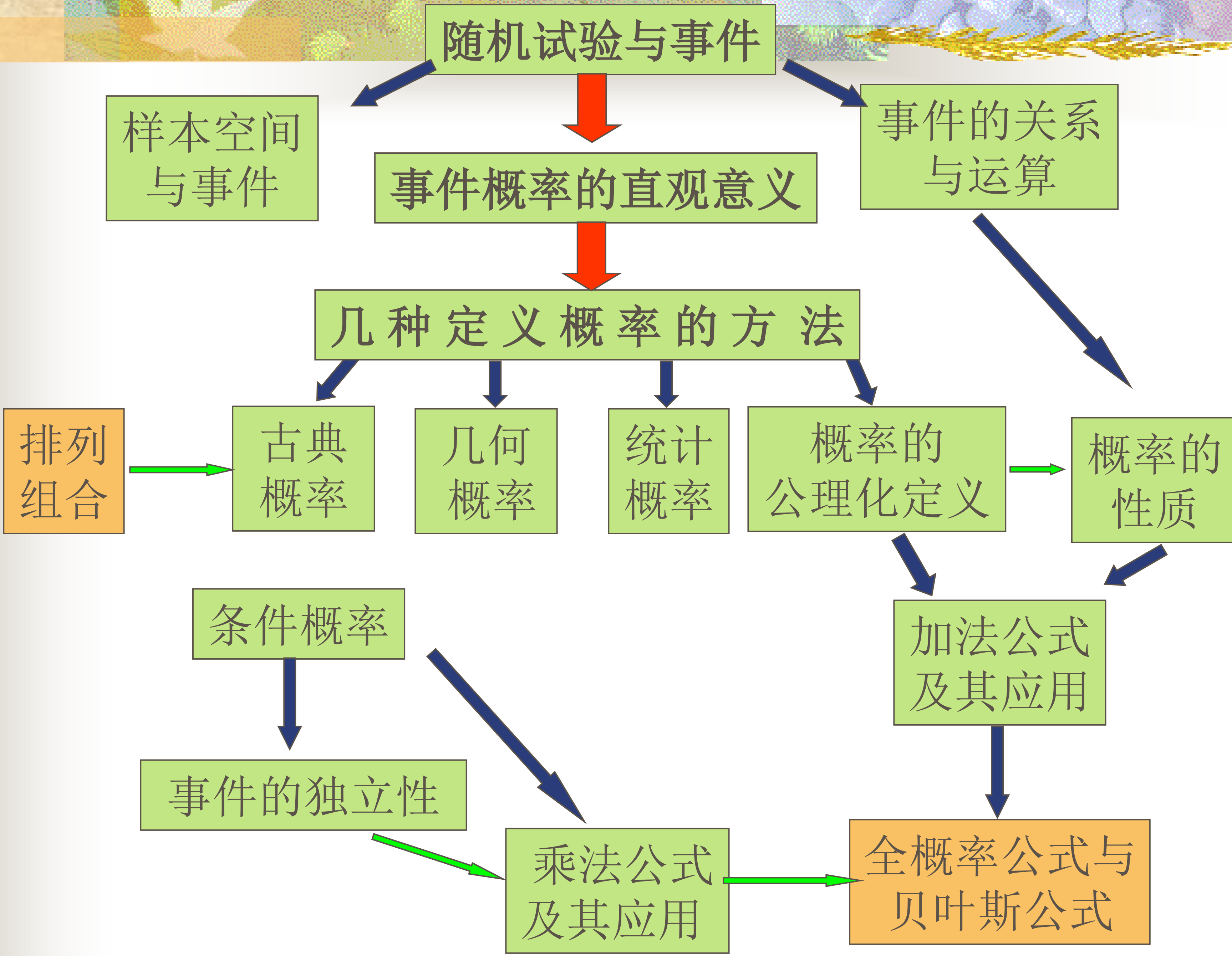
III 比较大小. 比较$2-r^n$与$(2-r)^n$的大小。

当n>1时： $2-r^n<(2-r)^n$.

小结：

1. 条件概率是概率论中的重要概念，其与独立性有密切的关系，在不具有独立性的场合，它将扮演主要的角色。
2. 乘法公式、全概公式、贝叶斯公式在概率论的计算中经常使用，请牢固掌握。
3. 独立性是概率论中的最重要概念之一，亦是概率论特有的概念，应正确理解并应用于概率的计算。

第一章内容总框图


随机试验与事件
样本空间与事件
事件概率的直观意义
事件的关系与运算
几种定义概率的方法
排列组合
古典概率
几何概率
统计概率
概率的公理化定义
概率的性质
条件概率
加法公式及其应用
事件的独立性
乘法公式及其应用
全概率公式与贝叶斯公式