

第十二章 随机过程及其统计描述

引言

现实世界中的许多现象是随时间的进展而变化与发展的，这些现象通常称为过程。可分为两类：

- (1) 确定性的变化过程
- (2) 不确定的变化过程

1. 飞机飞行高度 $H(t), t \in [0, +\infty)$;
2. 第 n 年参保人寿保险的死亡人数 $X_n, n=1, 2, \dots, +\infty$;
3. 第 n 年末水库的贮水量 $X_n, n = 1, 2, \dots, +\infty$;
4. $[0, t]$ 时间段通过路口的汽车数 $X(t), t \in [0, +\infty)$;
5. 运动物体距离的测量误差 $\varepsilon(t), t \in [0, +\infty)$;
6. 某生物种群生物总数 $X(t), t \in [0, +\infty)$; 第 n 代生物总数 X_n .

随时间变化的随机变量



12.1 随机过程的概念

随时间的进展而变化与发展的随机现象为随机过程。

1.1 随机过程的定义

1. **定义** 设 E 是一随机实验，样本空间为 $\Omega = \{\omega\}$ ，参数 $T \subset (-\infty, +\infty)$ ，如果对任意 $t \in T$ ，有一定义在 Ω 上的随机变量 $X(\omega, t)$ 与之对应，则称随机变量族 $\{X(\omega, t), t \in T\}$ 为参数集为 T 的随机过程，简记为 $\{X(t), t \in T\}$ 或 $\{X(t)\}$ ，也可记为 $X(t)$ 。

当 T 是离散集合时，称为随机序列， $\{X_n\}$

注：（1）随机过程是有限维随机变量的推广。

（2）随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是定义在 $\Omega \times T$ 上的二元函数。固定 $\omega (\in \Omega)$ ，总有一个确定的时间函数 $X(\omega, t)$ 与之对应，称这一个函数称为这个随机过程的**样本函数（轨道）**。

（3）通常将随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 解释为一个物理系统， $X(t)$ 表示系统在时刻 t 所处的状态， $X(t)$ 的所有可能状态所构成的集合称为**状态空间**，记为 E 。

对于给定的 $t_0 \in T$ ，及 $x \in E$ ， $X(t_0) = x$ 说成是在时刻 t_0 ，系统处于**状态** x 。

2. 随机过程的例子

例1: (分枝过程) 一个个体 (第0代) 可能生产 $0, 1, 2, \dots$ 个子女形成第一代, 每一个子女再生子女, 他们合在一起形成第二代, 等等, 假定第 n 代的个体数目为 X_n , 则 $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是随机过程。

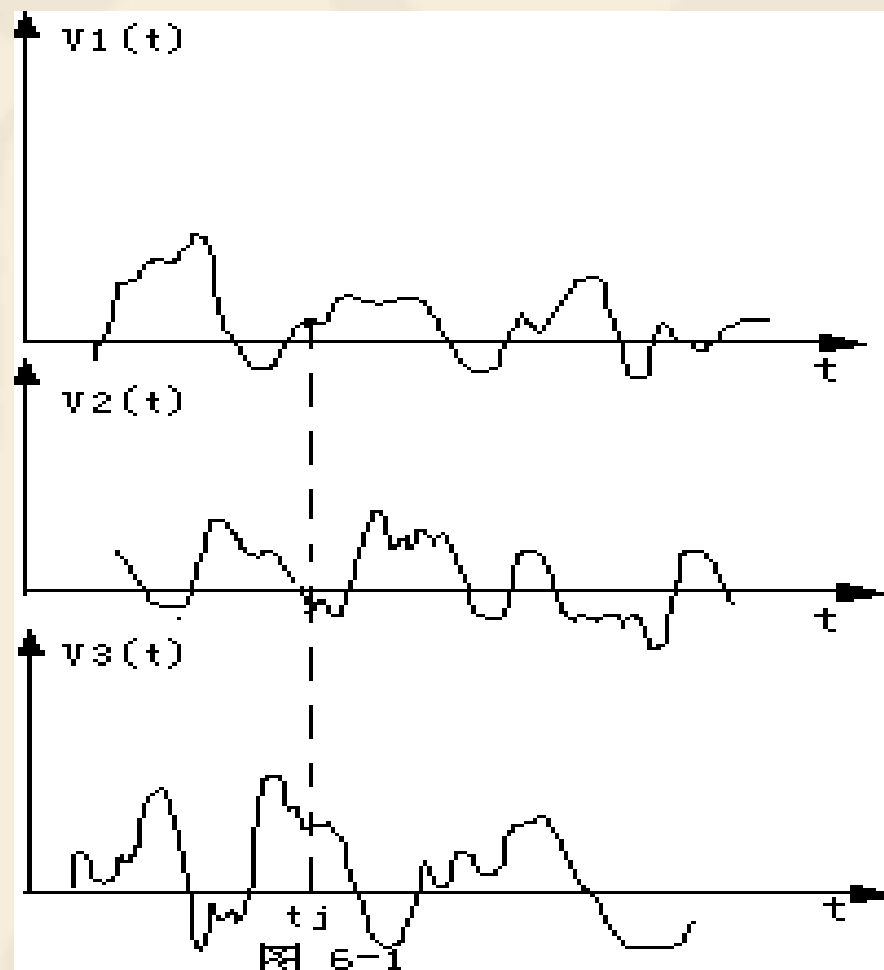
例2: 考虑抛掷一颗骰子的试验, (i) 设 X_n 是第 n 次 ($n \geq 1$) 抛掷的点数, 对于 $n=1, 2, \dots$ 的不同值, X_n 是不同的随机变量, 因而 $\{X_n, n \geq 1\}$ 构成一随机过程, 称为伯努利过程或贝努利随机序列, (ii) 设 X_n 是前 n 次抛掷中出现的最大点数, $\{X_n, n \geq 1\}$ 也是一随机过程。

例3：从一批长为 l 的圆木中任取一根，用 $A(x)$ 表示从左端算起它在 x 处的截面积，那么 $\{A(x), 0 \leq x \leq l\}$ 是一随机过程，它的参数集为 $T=[0, l]$ ，参数 x 不是时间。

随机过程 $\{X_t\}, t \in T$ 中参数 t 通常解释为时间集，便于理解，符合实际。但参数 t 可以表示为其它的量，例如序号，距离等等。

例4：某寻呼台在时间段 $[0, t]$ 内接到的呼唤次数是与 t 有关的随机变量 $X(t)$ ，对于固定的 t ， $X(t)$ 是一个取非负整数的随机变量，故 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是随机过程。

例5: (热噪声电压) 电子元件或器件由于内部微观粒子 (如电子) 的随机热骚动所引起的端电压称为热噪声电压, 在无线电通讯技术中, 接收机在接收信号时, 机内的热噪声电压要对信号产生持续的干扰, 为要消除这种干扰 (假设没有其他干扰因素), 就必须考虑热噪声电压随时间变化的过程, 现以电阻的热噪声电压为例说明这种变化过程的描述方法, 我们通过某种装置对电阻两端的热噪声电压进行长时间的测量, 并把结果记录下来, 作为一次试验结果, 便得到一个电压-时间函数 (即电压关于时间 t 的函数) $V_1(t)$, 如图.



它在任一确定时刻的值是随机变量.

1.2 随机过程的分类

1. 按状态空间 E 和参数集 T 是可列集还是连续集分类:

- (1). 连续型随机过程: T 是连续集, 且 $\forall t \in T, X(t)$ 是连续型随机变量, 则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为连续型随机过程.
- (2). 离散型随机过程: T 是连续集, 且 $\forall t \in T, X(t)$ 是离散型随机变量, 则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为离散型随机过程.
- (3). 连续型随机序列: T 是可列集, 且 $\forall t \in T, X(t)$ 是连续型随机变量, 则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为连续型随机序列.

(4). 离散型随机序列: T 是可列集, 且 $\forall t \in T$, $X(t)$ 为离散型随机变量, 则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为离散型随机序列。通常 T 取为 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 或 $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 此时随机序列常记成 $\{X_n, n=0, 1, \dots\}$ 或 $\{X_n, n \geq 0\}$ 。

2. 按分布特性分类:

依照过程在**不同时刻**状态的统计**依赖关系**分类。

例如: 独立增量过程, 正态过程, 马尔可夫过程, 平稳过程等。

12.2 随机过程的统计描述

——概率分布和数字特征

2.1. 概率分布

1. n 维分布函数 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是随机过程, 对于任意整数 $n \geq 1$ 及 T 中任意 n 个不同的参数 t_1, t_2, \dots, t_n , 称随机向量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 的分布函数

$$F\{x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n\} = \\ P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的 n 维分布函数.

变化 n 及 t_1, t_2, \dots, t_n 所得到的有限维分布函数的
全体

$$F = \left\{ \begin{array}{l} F\{x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n\}, \\ t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \geq 1 \end{array} \right\}$$

称为 $\{X(t), t \in T\}$ 的**有限维分布函数族**。

当 $n=1$ 时, 得到一维分布函数 $F(x; t) = P\{X(t) \leq x\}$, 一维分布函数的全体 $\{F(x; t), t \in T\}$ 称为一维分布函数族。

例1： 设随机过程 $X(t)=Y+Zt$, $t \in T = (-\infty, +\infty)$, 其中 Y, Z 是相互独立的服从 $N(0, 1)$ 的随机变量, 求 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的一, 二维概率密度。

解： $\forall t \in T$, 由正态分布的性质知 $X(t)$ 服从正态分布：

$$E[X(t)] = E(Y) + tE(Z) = 0,$$

$$D[X(t)] = D(Y) + t^2 D(Z) = 1 + t^2$$

所以一维概率密度为

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}}$$

又由正态分布的性质知，对于任意 $s, t \in T, s \neq t$,
 $(X(s), X(t))$ 服从二维正态分布而

$$E[X(s)] = E[X(t)] = 0; \quad D[X(s)] = 1 + s^2, D[X(t)] = 1 + t^2$$

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = E[(Y + Zs)(Y + Zt)] = 1 + st$$

$$\rho_X(s, t) = \frac{1 + st}{\sqrt{(1 + s^2)(1 + t^2)}}$$

所以二维概率密度为

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+t_1^2} - 2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}} + \frac{x_2^2}{1+t_2^2}\right]\right)$$

其中 $\rho=\rho_x(t_1, t_2)$.

一维分布函数刻划了随机过程在各个个别时刻的统计特性。要描述不同时刻状态之间的统计联系，就需要用多维分布函数，而要描述随机过程的全部统计规律就要用有限维分布族。

在实际中，要知道随机过程的全部有限维分布族是不可能的。因此，人们往往用随机过程的某些统计特征来取代分布函数族。其中常用的是下面介绍的随机过程的数字特征。

二阶矩过程定义

$\{X(t), t \in T\}$ 为随机过程, 若对于任意的 $t \in T$, $E[X^2(t)] < \infty$, 则称其为二阶矩过程。

2.2. 随机过程的数字特征

设 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程，定义 $\{X(t)\}$ 的数字特征为：

① 函数 $\mu_X(t) = E[X(t)], t \in T$

为 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数.

② $\psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$ 为 $\{X(t), t \in T\}$ 的均方值函数.

③ $\sigma_X^2(t) = D_X(t) = D[X(t)]$

为 $\{X(t), t \in T\}$ 的方差函数.

$$\textcircled{4} \quad C_X(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t))$$

$$= E\{[X(s) - \mu_X(s)][X(t) - \mu_X(t)]\}$$

为 $\{X(t), t \in T\}$ 的**协方差函数**.

$$\textcircled{5} \quad R_X(s, t) = E[X(s)X(t)]$$

为 $\{X(t), t \in T\}$ 的自相关函数，简称**相关函数**.

3. 诸数字特征的关系：

$$\psi_X^2(t) = R_X(t, t), \quad C_X(s, t) = R_X(s, t) - \mu_X(s) \cdot \mu_X(t)$$

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t, t) = \psi_X^2(t) - \mu_X^2(t)$$

例2： 设随机过程 $X(t) = Y\cos \omega t + Z\sin \omega t, t \geq 0$, 其中 Y, Z 是相互独立的随机变量, 且 $E(Y) = E(Z) = 0$, $D(Y) = D(Z) = \sigma^2$, 求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 均值函数 $\mu_x(t)$ 和自相关函数 $R_x(s, t)$ 。

$$\begin{aligned}\text{解: } \mu_x(t) &= E[X(t)] = E[Y\cos \omega t + Z\sin \omega t] \\ &= \cos \omega t \cdot E(Y) + \sin \omega t \cdot E(Z) = 0,\end{aligned}$$

因为 Y 与 Z 相互独立, 于是

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= E\{[Y \cos \omega s + Z \sin \omega s][Y \cos \omega t + Z \sin \omega t]\} \\ &= \cos \omega s \cdot \cos \omega t \cdot E(Y^2) + \sin \omega s \cdot \sin \omega t \cdot E(Z^2) \\ &= \sigma^2 \cos \omega(t - s) \end{aligned}$$

例3：考虑随机过程 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$, $t \in (-\infty, +\infty)$

其中 a 和 ω 是常数， Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量，通常称此随机过程为随机相位正弦波，求随机相位余弦波的均值函数，方差函数和自相关函数。

解： Θ 的概率密度为 $f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \theta \in (0, 2\pi) \\ 0 & \theta \notin (0, 2\pi) \end{cases}$

于是 $\mu_X(t) = E[X(t)] = E[a \cos(\omega t + \Theta)]$

$$= \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] = E\{a^2 \cos(\omega s + \Theta) \cos(\omega t + \Theta)\} \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega s + \theta) \cdot \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega(t - s) \\ \sigma_X^2(t) &= R_X(t, t) - \mu_X^2(t) = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

2.3 二维随机过程的分布函数和数字特征

1. 定义:

$X(t)$ 、 $Y(t)$ 为定义在同一样本空间 Ω 和同一参数集 T 上的随机过程, 对于任意 $t \in T$, 若 $(X(t), Y(t))$ 是二维随机变量, 则称 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 为二维随机过程。

2. 有限维分布函数和独立性

- (1) $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 为二维随机过程, 对于任意的正整数 n 和 m , 以及任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m \in T$, 称 $n+m$ 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$$

$$= P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n; Y(t'_1) \leq y_1, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\}$$

为 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 的 $n+m$ 维分布函数，类似的可定义有限维分布函数族。

(2) 若对于任意的正整数 n 和 m ，以及任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m \in T$ ，任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m \in R$ ，有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$$

$$= F_X\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} F_Y\{Y(t'_1) \leq y_1, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\}$$

称 $\{X(t)\}$ 与 $\{Y(t)\}$ 相互独立，其中 F_X , F_Y 分别为 $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ 的有限维分布函数.

3. 二维随机过程的数字特征

对于二维随机过程 $\{X(t), Y(t)\}$ ，如果 $\{X(t), t \in T\}$ $\{Y(t), t \in T\}$ 都是二阶矩过程，则除了它们各自的数字特征外，还有：

- (1) 互相关函数：称 $R_{XY}(s, t) = E[X(s)Y(t)]$
为 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 的互相关函数.

若对于任意的 $s, t \in T$, $R_{XY}(s, t) = 0$, 称 $\{X(t)\}$ 与 $\{Y(t)\}$ 正交.

(2) 互协方差函数:

称 $C_{XY}(s, t) = E\{[X(s) - \mu_X(s)][Y(t) - \mu_Y(t)]\}$

为 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 的互协方差函数.

显然 $C_{XY}(s, t) = R_{XY}(s, t) - \mu_X(s)\mu_Y(t)$

若对于任意的 $s, t \in T$, 有 $C_{XY}(s, t) = 0$, 称 $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ 不相关.

若 $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ 二阶矩存在, 且相互独立, 则 $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ 不相关. (反之未必)

例4：设有两个随机过程 $X(t)=U\cos t+V\sin t$ 和

$Y(t)=U\sin t+V\cos t$ ，其中 U 和 V 独立

， $E(U)=E(V)=0$ ， $E(U^2)=E(V^2)=C^2$ 。

求互相关函数 $R_{XY}(s, t)$ 的表达式。

解： $R_{XY}(s, t) = E[X(s)Y(t)] =$

$$= E[(U \cos s + V \sin s)(U \sin t + V \cos t)]$$

$$= \cos s \times \sin t \times C^2 + [\cos s \cos t + \sin s \sin t]E(UV) + \sin s \times \cos t \times C^2$$

$$= C^2 \sin(s + t)$$

例5： 设 $X(t)$ 为信号过程, $Y(t)$ 为噪声过程, 令

$$W(t) = X(t) + Y(t), \text{ 则}$$

(1) $W(t)$ 的均值函数为 $\mu_W(t) = \mu_X(t) + \mu_Y(t)$.

(2) 其自相关函数为

$$\begin{aligned} R_W(s, t) &= E\{[X(s) + Y(s)][X(t) + Y(t)]\} \\ &= R_X(s, t) + R_{XY}(s, t) + R_{YX}(s, t) + R_Y(s, t) \end{aligned}$$

两个随机过程的之和的自相关函数为各个随机过程的相关函数与它们的互相关函数之和。若两个随机过程的均值函数均恒为零, 且互不相关时, 有

$$R_W(s, t) = R_X(s, t) + R_Y(s, t)$$

2.4. 随机序列的数字特征

① 函数 $\mu_X(n) = E[X(n)],$

为 $\{X(n), n \in T\}$ 的**均值函数**.

② $\psi_X^2(n) = E[X^2(n)]$ 为 $\{X(n), n \in T\}$ 的**均方值函数**.

③ $\sigma_X^2(n) = D_X(n) = D[X(n)]$

为 $\{X(n), n \in T\}$ 的**方差函数**.

④ $C_X(m, n) = \text{Cov}(X(m), X(n))$

$$= E\{[X(m) - \mu_X(m)][X(n) - \mu_X(n)]\}$$

为 $\{X(n), n \in T\}$ 的**协方差函数**.

⑤ $R_x(m, n) = E[X(m)X(n)]$ 为 $\{X(n), n \in T\}$ 的自相关函数，
简称**相关函数**

⑥ **互相关函数** $R_{XY}(m, n) = E[X_m Y_n];$

⑦ **互协方差函数**

$$C_{XY}(m, n) = E\{[X_m - \mu_X(m)][Y_n - \mu_Y(n)]\}.$$

12.3 泊松过程及维纳过程

独立增量过程

1. 定义

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一随机过程, 对于 $0 \leq s < t$, 称随机变量 $X(t) - X(s)$ 为随机过程在区间 $[s, t]$ 上的增量.

若对于任意的正整数 n 及任意的 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, n 个增量

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立, 称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为独立增量过程。

若对于任意的实数 s, t 和 $s+h, t+h$, $X(t+h) - X(s+h)$ 与 $X(t) - X(s)$ 具有相同的分布, 则称增量具有平稳性, 并称相应的独立增量过程为齐次的或时齐的。

2. 独立增量过程的性质

(1) 独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在 $X(0)=0$ 的条件下, $\{X(t)\}$ 的有限维分布函数可以由增量 $X(t) - X(s)$, $0 \leq s < t$ 的分布确定.

证：令 $Y_k = X(t_k) - X(t_{k-1})$, $k=1, 2, \dots, n$. $t_0=0$.

若增量的分布已知，且增量独立，

则 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的联合分布即可确定，

而 $X(t_1) = Y_1$,

$$X(t_2) = Y_1 + Y_2,$$

...

$X(t_n) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, 即 $X(t_k)$ 是 Y_1, \dots, Y_n 的线性函数，

Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的联合分布确定了 $\{X(t)\}$ 的有限维分布函数。

(2) 独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 在 $X(0)=0$ 的条件下, $\{X(t)\}$ 的协方差函数为 $C_X(s, t) = D_X(\min(s, t))$.

证明: 记 $Y(t) = X(t) - \mu_X(t)$, 当 $X(t)$ 具有独立增量时, $Y(t)$ 也具有独立增量; 且 $Y(0)=0, E[Y(t)]=0$, $D_Y(t) = E[Y^2(t)]$. 所以, 当 $0 \leq s < t$ 时, 有

$$\begin{aligned} C_X(s, t) &= E[Y(s)Y(t)] \\ &= E\{[Y(s) - Y(0)][(Y(t) - Y(s)) + Y(s)]\} \\ &= E[Y(s) - Y(0)]E[Y(t) - Y(s)] + E[Y^2(s)] \\ &= D_X(s) \end{aligned}$$

同理, 当 $0 \leq t < s$ 时, 有 $C_X(s, t) = D_X(t)$

于是可知对于任意的 $s, t \geq 0$, 协方差函数可表示为:

$$C_X(s, t) = D_X(\min(s, t)).$$

泊松过程

❖ 研究对象：

随时间推移，陆续出现在时间轴上的许多质点所构成的随机的质点流。

例如：

到达服务台要求服务的顾客；

到达120急救台的电话呼叫。

1. 定义

定义1. 称随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为**计数过程**, 若 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 时段内 “事件A” 发生的次数。则 $N(t)$ 满足下列条件

- (1) $N(t) \geq 0$;
- (2) $N(t)$ 取整数;
- (3) 若 $0 \leq s < t$, 则 $N(s) \leq N(t)$;
- (4) 当 $s < t$ 时, $N(t) - N(s)$ 等于在间隔 $(s, t]$ 上 “事件A” 发生的次数。

为了建模方便, 我们把 “事件A” 发生一次说成质点出现一个, 于是计数过程 $N(t)$ 看作在时间轴上区间 $(0, t]$ 内质点出现的个数。

定义2: 称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具有参数 $\lambda > 0$ 的泊松过程, 若它满足下列条件

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $N(t)$ 是独立增量过程;
- (3) 对于任意的 $s, t \geq 0$, $N(t+s) - N(s)$ 服从参数为 λt 的泊松分布

$$P\{N(t+s) - N(s) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

从条件 (3): 泊松过程的均值函数为 $\mu_N(t) = \lambda t$

因为 $\frac{E[N(t)]}{t} = \lambda$ 表示单位时间内质点出现的平均个数, 故称 λ 为此过程的强度。

令 $N(s, t) = N(t) - N(s)$, $0 \leq s < t$, 给出泊松过程的另一定义:

定义3. 称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具有参数 $\lambda > 0$ 的泊松过程, 若它满足下列条件

(1) $N(0) = 0$;

(2) $N(t)$ 是独立增量过程;

(3) $N(t)$ 满足:

$$P\{N(t, t + \Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$
$$P\{N(t, t + \Delta t) \geq 2\} = o(\Delta t)$$

(3) 说明在充分小的时间间隔内, 最多有一个质点出现, 而出现2个或2个以上的质点的概率很小, 可以忽略不计。

定理: 定义2与定义3是等价的。

2. 泊松过程的数字特征

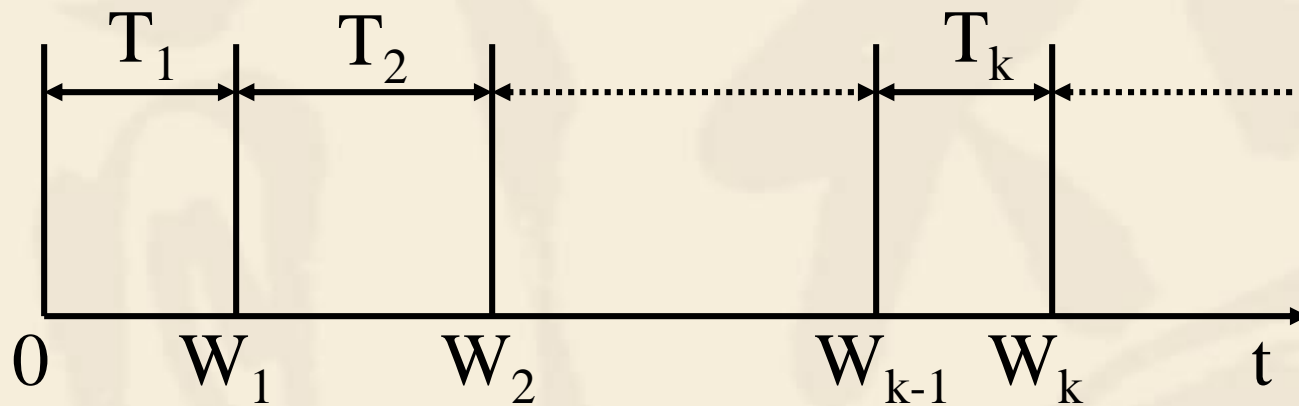
设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程, 则

$$E[N(t)] = \lambda t; \quad D_N(t) = \lambda t;$$

$$C_N(s, t) = \lambda \min(s, t).$$

3. 泊松过程的定理

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为泊松过程, $N(t)$ 表示到 t 时刻时质点出现的个数, W_1, W_2, \dots 分别表示第一个, 第二个, ... 质点出现的时间, $T_n (n \geq 1)$ 表示从第 $n-1$ 个质点出现到第 n 个质点出现的时间间隔.



通常称 W_n 为第 n 个质点出现的等待时间, T_n 为第 n 个时间间隔, 它们都是随机变量。

定理1. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是具有参数 λ 的泊松过程, $\{T_n, n \geq 1, 2, \dots\}$ 是对应的时间间隔序列, 则随机变量序列 $T_n, n=1, 2, \dots$ 为独立的且均服从参数为 λ 的指数分布。

定理2. 设 $\{W_n, n=1, 2, \dots\}$ 是与泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 对应的一等待时间序列, 则 W_n 服从参数为 n 与 λ 的 Γ 分布, 其概率密度为

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

注意, 定理1的逆命题也成立

定理3. 如果相继出现的两个质点的时间间隔是相互独立, 且服从同一指数分布, 则质点流构成了强度为 λ 的泊松过程。

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，则

$$P\{N(2) = 2, N(4) = 3 | N(1) = 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2\lambda^2 e^{-3\lambda}$$

例. 设 $\{X(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 定义 $Y(t) = X(t+L) - X(t)$, 其中 $L > 0$ 为常数, 求 $\mu_Y(t)$, $R_Y(s, t)$.

解: $\mu_Y(t) = E[Y(t)] = E[X(t+L) - X(t)] = \lambda(t+L) - \lambda t = \lambda L;$

$$R_Y(s, t) = C_Y(s, t) + \mu_Y(s)\mu_Y(t),$$

对任意 $0 \leq s < t$, 有

$$\begin{aligned} C_Y(s, t) &= \text{Cov}(Y(s), Y(t)) \\ &= \text{Cov}(X(s+L) - X(s), X(t+L) - X(t)) \\ &= \text{Cov}(X(s+L), X(t+L)) - \text{Cov}(X(s), X(t+L)) \\ &\quad - \text{Cov}(X(s+L), X(t)) + \text{Cov}(X(s), X(t)) \\ &= \lambda [\min\{s+L, t+L\} - \min\{s, t+L\} - \min\{s+L, t\} + \min\{s, t\}] \end{aligned}$$

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ y - x, & y \geq x \end{cases} \quad \begin{matrix} (x + y) - 2y \\ (x + y) - 2x \end{matrix}$$

$$\therefore |x - y| = (x + y) - 2\min\{x, y\}$$

$$\therefore \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left[\frac{s+t+2L-|s-t|}{2} - \frac{s+t+L-|s-t-L|}{2} - \frac{s+t+L-|s+L-t|}{2} \right] \\
&\quad + \frac{s+t-|s-t|}{2} \\
&= \lambda \left[\frac{|s+L-t|+|s-t-L|}{2} - |s-t| \right] \\
&= \lambda \left[\frac{|L+|s-t||+|L-|s-t||}{2} - |s-t| \right] \\
&= \begin{cases} \lambda(L-|s-t|) & |s-t| \leq L \\ 0 & |s-t| > L \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } R_X(s, t) = \begin{cases} \lambda^2 L^2 + \lambda L - \lambda |s-t| & |s-t| \leq L \\ \lambda^2 L^2 & |s-t| > L \end{cases}$$

三、维纳过程

问题背景：维纳过程是布朗运动的数学模型。

1827年左右,苏格兰科学家罗伯特.布朗观察到花粉粒子悬浮在水中时的随机特征,这一现象在物理学中被称为“布朗运动”.具体的讲,所谓布朗运动是指悬浮在由大量轻粒子所组成的介质中的重粒子随时间变化而发生的位移.由于轻粒子在来回迅速移动,它们不时的对重粒子产生撞击,每一次撞击都会对重粒子的位移产生微小的影响,其方向和大小都是随机的,而且是相互独立的,同时,每一次撞击所产生的上述随机特征并不随时间的推移而改变.

记 $W(t)$ 为运动中一微粒从时刻 $t=0$ 到时刻 $t>0$ 的位移的横坐标。

根据爱因斯坦的理论，粒子在 $(s,t]$ 上的位移可以看作是许多微小位移的代数和。

根据中心极限定理，可以假定位移 $W(t)-W(s)$ 服从正态分布。

由于粒子的运动完全是由液体分子的不规则碰撞引起的，在不重叠的时间间隔内是相互独立的。

所以， $W(t)$ 具有独立增量。

粒子在一段时段上的位移的概率分布只依赖于这段时间的长度，与观察的起始无关。

所以， $W(t)$ 具有平稳增量。

1. 维纳过程的定义

给定过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ ，如果它满足

- (1) 具有平稳的独立增量；
- (2) 对任意的 $t > s \geq 0$ ， $W(t) - W(s)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2(t-s))$ ；
- (3) $W(0) = 0$.

则称此过程为**维纳过程**，下图展示了它的一条样本曲线。

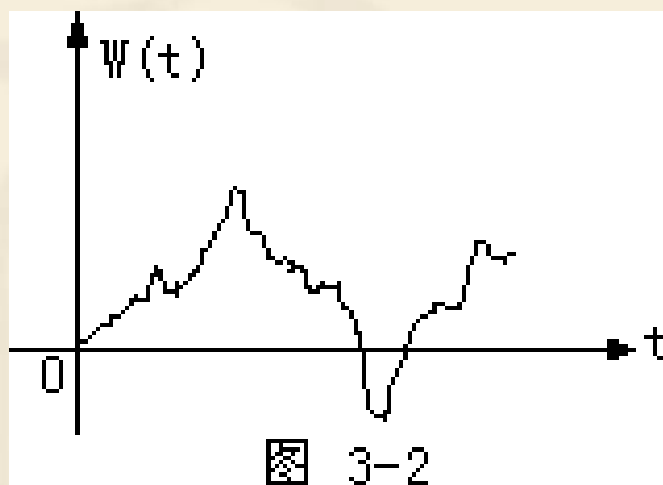


图 3-2

2. 维纳过程的性质

维纳过程的均值函数、自协方差函数、自相关函数分别为

$$\mu_W(t) = 0; R_W(s, t) = C_W(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$$

设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 ($\sigma > 0$) 的维纳过程,

则 $W(2)$ 与 $W(1)$ 的相关系数为 _____.

例 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为维纳过程, 求下列随机过程的自相关函数。

(1) $X(t) = W(t+l) - W(t), t \geq 0$ ($l > 0$ 为常数);

(2) $Y(t) = e^{-\beta t} W(e^{2\beta t}), -\infty < t < \infty$ ($\beta > 0$ 为常数)。

解: (1) $X(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= E\{[W(s+l) - W(s)][W(t+l) - W(t)]\} \\ &= R_W(s+l, t+l) - R_W(s, t+l) - R_W(s+l, t) \\ &\quad + R_W(s, t) \end{aligned}$$

$$R_w(s+l, t+l) = \sigma^2 \min(s+l, t+l)$$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ y-x, & y \geq x \end{cases} \quad \begin{matrix} (x+y)-2y \\ (x+y)-2x \end{matrix}$$

$$\therefore |x-y| = (x+y) - 2\min\{x, y\}$$

$$\therefore \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

$$R_w(s+l, t+l) = \sigma^2 \frac{s+t+2l-|s-t|}{2}$$

$$(1) \quad X(t) = W(t+l) - W(t), \quad t \geq 0$$

$$R_X(s, t) = E[X(s)X(t)]$$

$$\begin{aligned} &= R_W(s+l, t+l) - R_W(s, t+l) - R_W(s+l, t) \\ &\quad + R_W(s, t) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} [|l + (s-t)| + |l - (s-t)| - 2|s-t|]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} [l + |s-t| + |l - |s-t|| - 2|s-t|]$$

$$= \begin{cases} \sigma^2(l - |s-t|), & |s-t| \leq l, \\ 0, & |s-t| > l, \end{cases} \quad s, t \geq 0.$$

$$(2) \ Y(t) = e^{-\beta t} W(e^{2\beta t}), \quad -\infty < t < \infty$$

$$\begin{aligned} R_Y(s, t) &= E[Y(s)Y(t)] \\ &= E\left[e^{-\beta s} W(e^{2\beta s}) e^{-\beta t} W(e^{2\beta t})\right] \\ &= \sigma^2 e^{-\beta(s+t)} e^{2\beta \min(s, t)} \\ &= \sigma^2 e^{-\beta|s-t|}, \quad s, t \geq 0. \end{aligned}$$

高斯过程（正态过程）

一、定义：

设 $\{X(t)\}$ 为随机过程，如果对任意的正整数 n 及任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ， n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 服从 n 维正态分布，则称 $\{X(t)\}$ 为**正态过程**。

正态过程是二阶矩过程。

记其均值函数为 $\mu_X(t)$ ，协方差函数为 $C_X(s, t)$ 。

二、正态过程的性质：

对任意的正整数 n 及任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ， n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 的分布由其相应的均值及协方差矩阵完全确定，所以 $\mu_X(t)$ 和 $C_X(s, t)$ 完全确定了 $\{X(t)\}$ 的有限维分布，也就确定了它的全部统计特性。因而有：

1. $\{X(t), t \in T\}$ 为正态过程，其统计特性由 $\mu_X(t)$ 和 $C_X(s, t)$ 确定。

反之，可以证明， $T=[0, +\infty]$ ，给定 $\mu(t)$ 和非负二元函数 $C(s, t)$ ，则存在正态过程 $\{X(t)\}$ ，使 $\mu_X(t) = \mu(t)$ ， $C_X(s, t) = C(s, t)$ 。

定义： 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，且对任意正整数 $n \geq 2$ ，任意 n 个不同的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ，随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 相互独立，则称此过程为**独立随机过程**。

2. 正态过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立随机过程 \Leftrightarrow 对任意的 $s, t, s \neq t$ 时，协方差函数 $C_X(s, t) = 0$ 。

证明: “ \Rightarrow ”

$\forall n \geq 2$, 因为 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 相互独立的正态随机变量, 而正态随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 相互独立 \Leftrightarrow 其两两互不相关, 即: $C_X(s, t) = 0, s \neq t$.

“ \Leftarrow ”因 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 为 n 维正态随机变量, 于是 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 为正态随机变量, 又 $C_X(s, t) = 0, s \neq t$, 所以 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 相互独立。

3. $\{X(t)\}$ 为正态过程 \Leftrightarrow 它的任意有限多个随机变量的任意线性组合是正态随机变量。

事实上, 由正态的性质, n 维正态随机变量的充要条件是其任意一维线性组合为一维正态随机变量, 显然成立。

例：证明维纳过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为正态过程（每一个有限维分布均为正态分布）。

证明：对于任意正整数 n 和任意时刻

$t_1, t_2, \dots, t_n (0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n)$ 以及任意实数 $u_1, u_2, \dots,$

u_n ，记
$$a_k = \sum_{i=k}^n u_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$
 则

$$\sum_{k=1}^n u_k w(t_k)$$

$$= a_1 w(t_1) - a_2 w(t_1) + a_2 w(t_2) - a_3 w(t_2) + \cdots + a_{n-1} w(t_{n-1}) - a_n w(t_{n-1}) + a_n w(t_n)$$

$$= a_1 w(t_1) + \sum_{k=2}^n a_k [w(t_k) - w(t_{k-1})]$$

它是独立正态随机变量之和，所以它是正态随机变量，由正态分布的性质知 $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))$ 服从 n 维正态分布，因此 $W(t)$ 为正态过程。

例：设随机过程 $X(t) = U\cos\omega_0 t + V\sin\omega_0 t$, $t \geq 0$. ω_0 为常数, U, V 是两个相互独立的正态随机变量, 且 $E(U) = E(V) = 0$, $E(U^2) = E(V^2) = \sigma^2$. 试证: $\{X(t)\}$ 为正态过程, 并求其一、二维概率密度.

解: (1) 证 $\{X(t)\}$ 为正态过程: 只须证 $\{X(t)\}$ 的任意有限多个随机变量的任意线性组合是一维正态随机变量.

对任意正整数 n , $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 及任意 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$W = \sum_{i=1}^n a_i X(t_i) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \cos \omega_0 t_i \right) U + \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin \omega_0 t_i \right) V = AU + BV.$$

即: W 是两相互独立的正态随机变量的线性组合, 所以 W 是一维正态随机变量, 于是 $\{X(t)\}$ 为正态过程.

(2) 求一维概率密度.

对确定的 $t \geq 0$, $X(t)$ 为正态随机变量且

$$E[X(t)] = E(V) \cos \omega_0 t + E(V) \sin \omega_0 t = 0,$$

$$D[X(t)] = D(V) \cos^2 \omega_0 t + D(V) \sin^2 \omega_0 t = \sigma^2,$$

于是 $\{X(t)\}$ 的一维概率密度为:
$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

(3) 求二维概率密度.

$$\forall t_1, t_2 \geq 0, E[X(t_1)] = E[X(t_2)] = 0,$$

$$\text{cov}(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= E[(U \cos \omega_0 t_1 + V \sin \omega_0 t_1)(U \cos \omega_0 t_2 + V \sin \omega_0 t_2)]$$

$$= E(U^2 \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2) + E(V^2 \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t_2) + 0$$

$$= \sigma^2 \cos \omega_0(t_1 - t_2),$$

于是, 二维正态随机变量 $(X(t_1), X(t_2))$ 的均值和协方差矩阵分别为:

$$\mu = (0, 0)'$$

$$C = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \cos \omega_0 \tau \\ \sigma^2 \cos \omega_0 \tau & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = t_2 - t_1$$

$$\text{所以 } f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi |C|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}x'C^{-1}x}, \quad x = (x_1, x_2)' \quad x \text{ 是列向量}$$