4.1　随机变量的数学期望

分布函数能完整地描述 r.v.的统计特性,但实际应用中并不都需要知道分布函数，而只需知道 r.v.的某些特征.

例如:

判断棉花质量时, 既看纤维的平均长度

又要看 纤维长度与平均长度的偏离程度

平均长度越长,偏离程度越小, 质量就越好;

考察一射手的水平, 既要看他的平均环数是否高, 还要看他弹着点的范围是否小, 即数据的波动是否小.

由上面例子看到，与 r.v. 有关的某些数值，虽不能完整地描述 r.v.但能清晰地描述 r.v.在某些方面的重要特征，这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

本章内容

- r.v.的平均取值 —— 数学期望
- r.v.取值平均偏离均值的情况 —— 方差
- 描述两 r.v.间的某种关系的数 —— 协方差与相关系数

随机变量某方面概率特性可用**数字**来描写

引例　射击问题

设某射击手在同样的条件下，瞄准靶子相继射击90次，(命中的环数是一个随机变量). 射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问：该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times 2+1\times 13+2\times 15+3\times 10+4\times 20+5\times 30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}$$

$$+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y .

$$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$$

随机波动

频率随机波动

“平均射中环数”的稳定值$=?$

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n\text{ 逐渐增大}} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙两个射手, 他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲、乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1) = 8 \times 0.3 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8 \times 0.2 + 9 \times 0.5 + 10 \times 0.3 = 9.1(\text{环}),$$

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数, 而非变量, 它是一种加权平均, 与一般的平均值不同 , 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变 , 之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值, 它不应随可能值的排列次序而改变.

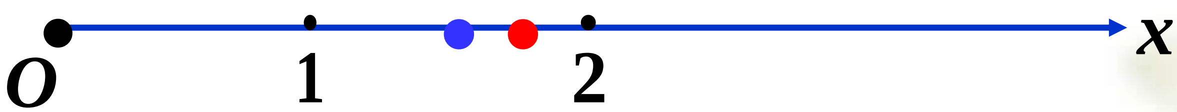
(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X 取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

实例2 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张， 每张2元. 设头等奖1个， 奖金 1万元， 二等奖2个, 奖金各 5 千元; 三等奖 10个， 奖金各1千元； 四等奖100个， 奖金各100元； 五等奖1000个， 奖金各10 元. 每张彩票的成本费为 0.3 元， 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X， 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X)=10000\times\frac{1}{10^5}+5000\times\frac{2}{10^5}+\cdots+0\times p_0$$

$$=0.5(\text{元}),$$

每张彩票平均可赚

$$2-0.5-0.3=1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 **10** 万张彩票的创收利润为

$$100000\times1.2=120000(\text{元}).$$

实例3 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元 ， 失败的机会为70，将损失 2 万元. 若存入银行，同期间的利率为5% ， 问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$$E(X) = 8 \times 0.3 - 2 \times 0.7 = 1(\text{万元}),$$

存入银行的利息：$10 \times 5\% = 0.5\ (\text{万元})$,

故应选择投资.

实例5　分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血, 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去化验, 这就需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验, 如果这混合血液呈阴性反应, 就说明 k 个人的血都呈阴性反应, 这样, 这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性, 则再对这 k 个人的血液分别进行化验, 这样, k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p，且这些人的化验反应是相互独立的. 试说明当 p 较小时，选取适当的 k，按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明 k 取什么值时最适宜.

解 由于血液呈阳性反应的概率为 p，

所以血液呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$，

因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k，

k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$.

设以 k 个人为一组时，组内每人的血化验的次数为 X，

则 X 为一随机变量，且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数为$N\left(1-q^k+\frac{1}{k}\right)$.

因此,只要选择 k 使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1,$$

则 N 个人平均需化验的次数 $< N$.

当 p 固定时,选取 k 使得

$$L=1-q^k+\frac{1}{k}$$ 小于1且取到最小值,

此时可得到最好的分组方法.

实例6 （书）某车站每天8：00~9：00，9：00~10：00都恰好有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者独立，其规律为

第一辆到站时刻	8：10	8：30	8：50
P	1/6	3/6	2/6

第二辆到站时刻	9：10	9：30	9：50
P	1/6	3/6	2/6

一旅客8：20到车站，求他候车时间X的数学期望。

X	10	30	50	70	90
P	3/6	2/6	1/6*1/6	1/6*3/6	1/6*2/6

$$\mathrm{E}(X) = 27.22$$

例1 $X \sim B(n, p)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\overset{(i=k-1)}{=} np\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} p^{i} (1-p)^{(n-1)-i} = np$$

特例 若$Y \sim B(1, p)$, 则 $E(Y)= p$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x .$$

数学期望的本质 —— 加权平均

它是一个数不再是 r. v.

实例7 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X(以分计)服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\,\mathrm{d}x$

$=5$(分钟).

因此，顾客平均等待5分钟就可得到服务.

例2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma+\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

例3 设 $X \sim$ 参数为 p 的几何分布，求 $E(X)$

解 $$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kp(1-p)^{k-1}=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}\right)\Bigg|_{x=1-p}$$

$$=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\right)'\Bigg|_{x=1-p}=p\frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=1-p}=\frac{1}{p}$$

常见 r.v. 的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为p 的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

注意 不是所有的 r.v.都有数学期望

例如：柯西(Cauchy)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

它的数学期望不存在!

2.r.v.函数 $Y = g(X)$ 的数学期望

- 设离散 r.v. X 的概率分布为

$$P(X = x_i) = p_i,\quad i = 1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$$

- 设连续 r.v. 的 d.f. 为$f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛, 则

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

例 设$X \sim \Pi(\lambda)$,求X的数学期望$E(X)$,$E(X^2)$

解

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$= \lambda\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)\frac{\lambda^{n+1}}{n!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

$$= \lambda E(X) + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

例 设X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求E(X),E(X^2)

解

$$E(X)=\int_0^{\infty}x\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{\infty}xd(-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})=\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$E(X^2)=\int_0^{\infty}x^2\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{\infty}x^2d(-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})$$

$$=\int_0^{\infty}x\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\sigma^2$$

- 设离散 r.v. (X, Y) 的概率分布为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots \qquad Z = g(X, Y),$$

若级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$E(Z) = \sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

❑ 设连续 r.v. (X,Y)的联合 d.f. 为

$f(x,y)$，$Z=g(X,Y)$,

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$

绝对收敛，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例3 设 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)$, 求

$$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$$ 的数学期望.

解

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right)d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

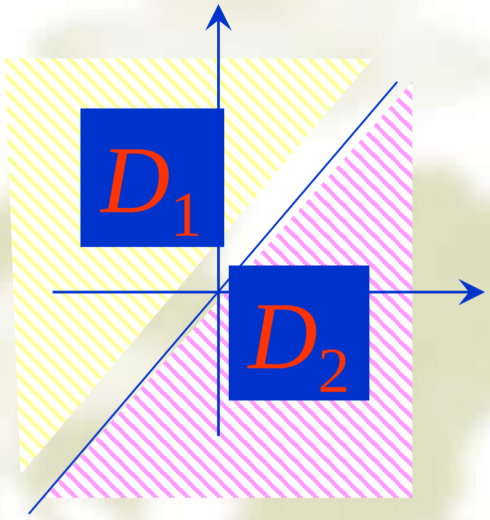
例5 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y 相互独立，求$E(\max(X,Y))$.

解 $$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$E(\max\{X,Y\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$+ \iint_{D_2} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$



$$=\iint_{D_1} y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint_{D_2} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

其中$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ 称为**概率积分**

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr$$

$$= 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \pi$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

一般地，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$相互独立，则

$$E(\max\{X,Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(\min\{X,Y\}) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

- 实例8某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量。他们预测出售一件产品可获利m元，而积压一件产品导致n元的损失，再者，他们预测销售量Y（件）服从指数分布，参数为θ，问若要获利的数学期望最大，应生产多少件产品$(m, n, \theta$均已知$)$?

解 设生产x件，则获利Q是x的函数：

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & Y < x \\ mx, & Y \geq x \end{cases}$$

则

$$\mathrm{E}(Q) = \int_0^{+\infty} Qf_Y(y)dy = \int_0^{x} [my - n(x-y)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy + \int_x^{\infty} mx\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy$$

$$= (\mathrm{m}+n)\theta - (\mathrm{m}+n)\theta e^{-\frac{x}{\theta}} - nx,$$

求导计算可得$x_0 = -\theta ln\frac{n}{m+n}$为最大值点。

实例9(书) 某甲与其他三人参与一个项目的竞拍,价格以千美元计,价格高者获胜.若甲中标,他就将此项目以10千美元转让给他人,可认为其他三人的竞拍家是相互独立的，且都在7~11千美元之间均匀分布。问甲应如何报价才能使获益的数学期望最大（若甲中标必须将此项目以他自己的报价买下）

解 设X_1, X_2, X_3是其他三人的报价，按题意，它们相互独立，且在区间（7，11）上服从均匀分布，其分布函数为

$$F(u) = \begin{cases} 0 & u < 7 \\ \dfrac{u-7}{4} & 7 \le u < 11 \\ 1 & u \ge 11 \end{cases}$$

以Y记三人最大出价，则$Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$,Y的分布函数为

$$F_Y(u)=\begin{cases}0 & u<7\\ \left(\frac{u-7}{4}\right)^3 & 7\le u<11\\ 1 & u\ge 11\end{cases}$$

若甲的报价为x，按题意$7\le x\le 11$,知甲能赢得这一项目的概率为

$$p=P\{Y\le x\}=F_Y(x)=\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$$

以G(x)记甲赚钱数，这是一个随机变量，它的分布率为

G(x)	10-x	0
P	$\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$	1-$\left(\frac{x-7}{4}\right)^3$

于是甲赚钱数的数学期望为

$$\boldsymbol{E(G(x)) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x)}$$

求导可判断x=37/4千美元时甲赚钱数期望达到最大值。

3.数学期望的性质

- $E(C)=C$ —— 常数
- $E(CX)=CE(X)$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+C\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)+C$$

- 当X,Y独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$.
- 若存在数 a 使 $P(X\geq a)=1$, 则 $E(X)\geq a$;
  若存在数 b 使 $P(X\leq b)=1$, 则 $E(X)\leq b$.

注 性质 4 的逆命题不成立，即

若$E(XY) = E(X)E(Y)$，X, Y不一定独立

反例见附录 1

性质 5推论：

- 当$X \geq 0$，则$E(X) \geq 0$.
- 当$X \leq Y$时，则$E(X) \leq E(Y)$.
- $|E(X)| \leq E(|X|)$.

证 **性质5**

设 X 连续， d.f. 为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 则

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$$

$$\Longrightarrow 1 - F(a) = 1 \Longrightarrow F(a) = 0$$

$$\Longrightarrow F(x) = 0, \quad x \leq a$$

$$\Longrightarrow f(x) = 0, \quad x \leq a$$

故 $E(X) = \int_a^{+\infty} x f(x) dx \geq \int_a^{+\infty} a f(x) dx = a$

例7 设二维 r.v. (X,Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $E(XY)$, $E(Y/X)$

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

由数学期望性质

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(XY)\overset{\boxed{X,Y\text{独立}}}{=}E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$$

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y}{x}\right)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}dx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}\neq\frac{15}{32}=\frac{E(Y)}{E(X)}$$

例8 某人n把钥匙，其中只有1把能打开房门，今任取一把试开，不能打开除去，再试开另一把，求打开房门所需试开次数的期望。

解 令 $X_k = \begin{cases} 1, & \text{前}k\text{次试开失败} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$

则 $$X = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k,$$

而 $$P\{X_k = 1\} = \frac{n-k}{n},$$

进一步 $$E(X_k) = \frac{n-k}{n}$$

$$E(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} E(X_k) = \frac{n+1}{2}$$

例 一民航送客车载有20位旅客自机场开出,旅客有10个车站可以下车.如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以X表示停车的次数,求E(X) (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各位旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{在第i站没人下车} \\ 1 & \text{在第i站有人下车} \end{cases}, i = 1, 2, \cdots, 10$$

则

$$\mathrm{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

按题意,任一旅客在第i站下车的概率为9/10,因此20位旅客都不在i站下车的概率为$(\frac{9}{10})^{20}$,

在第i站有人下车的概率为$1-(\frac{9}{10})^{20}$,也就是

$$\mathrm{P}\{X_i=0\}=(\frac{9}{10})^{20},\mathrm{P}\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20},$$

从而$\mathrm{E}(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, i=1,2,\cdots,10$

$$\mathrm{E(X)}=\mathrm{E}(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$$

$$=\mathrm{E}(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})=10[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}]$$

$$=8.784(次)$$

[附录1] 性质 4 的逆命题不成立，即

若$E(XY)=E(X)E(Y)$，X,Y不一定独立

反例 1

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
$p_{i\cdot}$	3/8	2/8	3/8	

XY	-1	0	1
P	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X)=E(Y)=0; \qquad E(XY)=0;$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

但 $$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}$$

$$\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

反例2 $(X,Y)\sim U(D),\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$$

但 $$E(X)=\int_{-1}^{1}x\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}=0;$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{1}{\pi}dxdy=0;$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=0$$

柯西-施瓦兹不等式:设$E(X^2)$,$E(Y^2)$存在,则$E(XY)$存在,且

$$[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$$

证明:$|XY| \le X^2 + Y^2$,则$E(XY)$存在.
对于任意的t有

$$E(tX+Y)^2 \ge 0$$

$$t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2) \ge 0$$

关于t的二次方程$t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2) = 0$
或没有实根,或有重根,
因而其判别式

$$\Delta = (2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \le 0$$

不等式得证.