

北京邮电大学 2018-2019 学年第一学期

《概率论与数理统计》4 课时

期末考试试题答案 (B)

考试注意事项：学生必须将答题内容写在答题纸上, 写在试题纸上一律无效

一. 填空与选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 已知 10 件产品中有 2 件次品, 从该产品中任意取 3 件, 则恰好取到一件

次品的概率等于 $\frac{7}{15}$.

2. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) > 0$, 则 $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

3. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} Ax^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则常数 $A = \underline{3}$.

4. 设泊松分布随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 且 $P\{X = 0\} = e^{-1}$, 则 $E(X) = \underline{1}$.

5. 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $G: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 上的均匀分布, 则 $P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = \underline{0.25}$.

6. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 都存在, 且有 $E(X) = 10$, $E(X^2) = 109$, 由切比雪夫不等式估计 $P\{|X - 10| \geq 6\} \leq \underline{0.25}$.

7. 设来自总体 $N(0, 1)$ 的样本 X_1, \dots, X_6 , 则常数 $C = \frac{1}{3}$ 使得 $CY \sim \chi^2$ 分布,

其中 $Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$.

8. 设总体 $X \sim N(1, 4)$, x_1, x_2, \dots, x_{10} 为来自该总体的样本, $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i$,

则 $D(\bar{x}) = \underline{0.4}$.

9. 下列函数中可作为随机变量分布函数的是 (C)

$$A. F_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$B. F_2(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$C. F_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$D. F_4(x) = \begin{cases} 0, & 0 < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

10. 设 X_1, X_2 来自任意总体 X 的一个容量为 2 的样本, 则在下列 $E(X)$ 的无偏估计量中, 最有效的估计量是 (D)

$$A. \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \quad B. \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$$

$$C. \frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 \quad D. \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

二 (8 分). 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 求 } Y=X^2 \text{ 的概率密度函数.}$$

解:

$$Y \sim F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + 0 = 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\therefore Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0. \\ 0 & y \leq 0. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

三 (12 分). 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 试确定常数 b , (2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,

(3) 求函数 $U=\max(X, Y)$ 的分布函数。

$$\text{解: (1) } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{+\infty} b e^{-(x+y)} dy dx = b[1 - e^{-1}]$$

$$\therefore b = \frac{1}{1 - e^{-1}} \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \\ \int_0^{+\infty} b e^{-(x+y)} dy = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}, & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx = e^{-y} & y > 0 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) F_U(u) = P\{U \leq u\} = P\{\max(X, Y) \leq u\} = P\{X \leq u, Y \leq u\}$$

$$= F(u, u) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^u f(x, y) dx dy$$

$$u < 0, F_U(u) = 0$$

$$0 \leq u < 1, F_U(u) = \int_0^u \int_0^u b e^{-(x+y)} dx dy = \frac{(1 - e^{-u})^2}{1 - e^{-1}}$$

$$u \geq 1, F_U(u) = \int_0^u \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx dy = 1 - e^{-u} \quad (4 \text{ 分})$$

四 (10 分) 设 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	X		
	1	2	3
−1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 X, Y 的边缘分布律,

- (2) $E(X), E(Y)$,
 (3) 设 $Z=Y/X$, 求 $E(Z)$.

解: (1)由 X, Y 的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
-1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

(4 分)

(2)

$$E(X)=1 \times 0.4+2 \times 0.2+3 \times 0.4=0.4+0.4+1.2=2.$$

$$E(Y)=(-1) \times 0.3+0 \times 0.4+1 \times 0.3=0.$$

(4 分)

(3) Z 的分布律

$Z=Y/X$	-1	-1/2	-1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$$\begin{aligned} E(Z) &= (-1) \times 0.2 + (-0.5) \times 0.1 + (-1/3) \times 0 + 0 \times 0.4 + 1/3 \times 0.1 + 0.5 \times 0.1 + 1 \times 0.1 \\ &= (-1/4) + 1/30 + 1/20 + 1/10 = (-15/60) + 11/60 = -1/15. \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

五(8 分). 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X, Y 相互独立。求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数 (其中 α, β 是不为零的常数)。

解: 由于 X, Y 相互独立

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2)$$

$$= E[(\alpha X + \beta Y)(\alpha X - \beta Y)] - (\alpha E(X) + \beta E(Y))(\alpha E(X) - \beta E(Y))$$

$$= \alpha^2 E(X^2) - \beta^2 E(Y^2) - \alpha^2 (E(X))^2 + \beta^2 (E(Y))^2$$

$$= \alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 - \beta^2) \sigma^2 \quad (4 \text{ 分})$$

$$D(Z_1) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2) \sigma^2, D(Z_2) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2) \sigma^2,$$

$$\text{故 } \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{DZ_1} \sqrt{DZ_2}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (4 \text{ 分})$$

六(12分) 设总体 $X \sim b(1, p)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的样本,

(1) 求 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布律,

(2) 求参数 p 的极大似然估计量,

(3) 求参数 p 的矩估计量, 并判断它是否为无偏估计.

解: (1) 由二项分布可加性 $\sum_{i=1}^n X_i \sim b(n, p)$, 若记 $\sum_{i=1}^n X_i = Y$, 则

分布律为 $P(Y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$. (2分)

(2) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为相应于样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个样本值, X 的分布律为 $P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, 1$,

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p),$$

$$\text{令 } \frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0,$$

$$p \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}. \quad (6 \text{ 分})$$

(3) $E(X) = p$, p 的矩估计量是 \bar{X} .

因为 $E(\bar{X}) = E(X) = p$, 故它是无偏估计. (4分)

七(10分) 某矿砂的 5 个样品中的镍含量, 经测定为 3.25, 3.27, 3.24, 3.26, 3.24 (单位%), 设测定值总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

(1) 求 μ 的置信水平为 0.99 的双侧置信区间?

(2) 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下, 这批矿砂的含镍量的均值 μ 是否为 3.25?

计算可得: 样本均值 $\bar{X} = 3.252, S = 0.01304, \sqrt{5} = 2.236$

附表: $t_{0.005}(5) = 4.0322, t_{0.01}(5) = 3.3649, t_{0.005}(4) = 4.6041, t_{0.01}(4) = 3.7469$

解：（1）测定值总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知时, μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双

侧置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$

$n=5$, $\alpha=0.01$, $t_{0.005}(4)=4.6041$, 计算可得 (3.225, 3.278)。(4 分)

（2）测定值总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知

$$H_0: \mu=3.25; \quad H_1: \mu \neq 3.25$$

$$\text{检验统计量为 } t = \frac{\bar{X} - 3.25}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域为 $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

$n=5$, $\alpha=0.01$, $t_{0.005}(4)=4.6041$,

$$\text{代入样本值有 } |t| = \left| \frac{3.252 - 3.25}{0.01304/\sqrt{5}} \right| = 0.343 < t_{\alpha/2}(n-1)$$

故在 $\alpha=0.01$ 下, 接受假设 H_0 , 认为这批矿砂的含镍量的均值 μ 为 3.25。(6 分)