北京邮电大学 2013——2014 学年第二学期

《工程数学》期末考试试题（B 卷）

可能用到的公式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \quad , \frac{1}{\left(1-2rx+r^2\right)^{1/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)x^n \ (r<1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{J_m(x)}{x^m}\right]=-\frac{J_{m+1}(x)}{x^m}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^m J_m(x)\right]=x^m J_{m-1}(x)$$ ，各递推公式中 $m\geqslant 1$

一、 填空题（每空 4 分，共 20 分）

1、已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=e^x siny$ ，则其虚部为

$\underline{v(x,y)=-e^x cosy+C}$.

2、复数 i 的指数式为 $\underline{e^{i\frac{\pi}{2}}}$.

3、幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} nZ^n$ 的收敛半径 $R=\underline{1}$.

4、$z=0$ 是函数 $(z)=\frac{z-sinz}{z^6}$ 的 $\underline{3}$ 级极点.

5、设 $f(0)=1$ ，$f'(0)=1+i$ ，则 $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-1}{z}$ =$\underline{\boldsymbol{1+i}}$.

二、 计算题（每题 5 分，共 20 分）

1、计算 $\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}$ ，$C:|z-a|=a$ 的正向。

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}=2\pi i Res\left[\frac{1}{z^2-a^2},a\right]=\pi\frac{i}{a}$$

2、把函数 $\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在区域 $1<|z|<2$ 内展开为洛朗级数。

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

3、判断函数$\frac{z+2}{z^2-z}$的所有有限奇点与无穷远奇点∞的类型，并计算每个奇点的留数。

$z=0$ ，一级极点，$Res[f(z),0]=-2$ ；

$z=1$ ，一级极点，$Res[f(z),1]=3$ ；

$z=\infty$ ，可去奇点，$Res[f(z),\infty]=-1$ 。

4、计算函数$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+cosx}$ 的定积分。

令$z=e^{ix}$，则$cosx=\frac{z^2+1}{2z}$ $,dz=izdx$，所以：

$$ans=\oint_{|z|=1}\frac{2zdz}{iz\left(4z+z^2+1\right)}=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{4z+z^2+1}$$
$$=-2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)}$$

所以：

$$ans=-2i\cdot 2\pi i\cdot Res\left[\frac{1}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)},-2+\sqrt{3}\right]=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

三、（10 分）利用分离变量法解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} (0 < x < l, t > 0), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = bx(l-x) \big/ l^2. \end{cases}$$

设$u(x,t) = T(t)X(x)$，可得：

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$，而易知：$X(0) = X(l) = 0$

当$\lambda \leqslant 0, X''(x) + \lambda X(x) = 0$，方程只有零解，舍去

当$\lambda > 0$，设$\lambda = \beta^2$，带入解得$X(x) = Csin\beta x + Dcos\beta x$，而$X(0) = X(l) = 0$

所以有：$\mathrm{D} = 0, \beta = \frac{n\pi}{l}$，令$\beta_n = \frac{n\pi}{l}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$，$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$，

$\lambda_n = \beta_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$，带入解得$T_n(t) = Ce^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$，则有：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

而$\boldsymbol{u(x, 0) = \frac{b}{l^2}x(l-x)}$，所以有：

$$\boldsymbol{C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{b}{l^2}x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \frac{4b\left(1-(-1)^n\right)}{n^3\pi^3}}$$

所以：$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4b\left(1-(-1)^n\right)}{n^3\pi^3} e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t} sin\frac{n\pi}{l}x}$

四、（10分）证明$y=xJ_0(\beta x)$ 是方程$y''-\frac{1}{x}y'+\left(\beta^2+\frac{1}{x^2}\right)y=0$ 的解。

由原方程可以得到：$x\left(y''-\frac{1}{x}y'+\left(\beta^2+\frac{1}{x^2}\right)y\right)=0$

上式与$x^2\left(\frac{y}{x}\right)''+x\left(\frac{y}{x}\right)'+\beta^2x^2\left(\frac{y}{x}\right)=0$ 等价

令$m=\frac{y}{x}$，则可以化为：

$x^2m''+xm'+\beta^2x^2m=0$

显然：解为$m=J_0(\beta x)$，即：$\frac{y}{x}=J_0(\beta x)$

所以，$y=xJ_0(\beta x)$ 是方程$y''-\frac{1}{x}y'+\left(\beta^2+\frac{1}{x^2}\right)y=0$ 的解。

五、（10分）已知n次勒让德多项式$P_n(x)$ 满足$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}$，将$x^2+1$ 在区间$[-1,1]$ 的函数展成勒让德级数的形式。

设$x^2+1=aP_0(x)+bP_1(x)+cP_2(x)$

而$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{3\cdot x^2-1}{2}$，

解得：$a=\frac{1}{3},b=0,c=\frac{2}{3}$

所以：$x^2+1=\frac{1}{3}\cdot P_0(x)+\frac{2}{3}\cdot P_2(x)$

六、（15分）在半径为a的球内和球外求解$Laplace$方程$\nabla^2u=0$，使其满足$u|_{r=a}=\cos^2\theta$，即分别求解定解问题：

(1) $\begin{cases}\nabla^2u=0\,(0\leqslant r<a),\\ u|_{r=a}=\cos^2\theta,\\ \left|u|_{r=0}\right|<\infty.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\nabla^2u=0\,(a<r<+\infty),\\ u|_{r=a}=\cos^2\theta,\\ \left|u|_{r=\infty}\right|<\infty.\end{cases}$

（1）得到： $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(cos\theta)$

而：$\left|u|_{r=0}\right|<\infty, B_n=0$

所以：$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(cos\theta)=cos^2\theta=\frac{2}{3}P_2(cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(cos\theta)$

得：$A_0=\frac{1}{3}, A_2=\frac{2}{3\cdot a^2}$, $n=else\ A_n=0$

所以：

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}P_0(cos\theta)+\frac{2}{3\cdot a^2}r^2P_2(cos\theta)=\frac{r^2}{a^2}cos^2\theta-\frac{r^2}{3\cdot a^2}+\frac{1}{3}$$

（2）得到： $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(cos\theta)$

而：$\left|u|_{r=\infty}\right|<\infty, A_n=0$

所以：$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n a^{-(n+1)}P_n(cos\theta)=cos^2\theta=\frac{2}{3}P_2(cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(cos\theta)$

得：$B_0=\frac{a}{3}, B_2=\frac{2\cdot a^3}{3}$, $n=else\ B_n=0$

所以：

$$u(r,\theta)=\frac{2\cdot a^3}{3}\cdot r^{-3}P_2(cos\theta)+\frac{a}{3}\cdot r^{-1}P_0(cos\theta)=\frac{a}{3}r^{-1}+a^3r^{-3}cos^2\theta-\frac{1}{3}a^3r^{-3}$$

七、（15 分）将球坐标系中的 *Helmholtz* 方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0$$

分离变量，即得到各单元函数满足的常微分方程即可。

设解的形式是$u=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，代入并且除以RΘΦ得到：

$$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\Theta sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{r^2sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2=0$$

用$r^2sin^2\theta$遍乘上式，得到：

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+k^2r^2\sin^2\theta=-\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}=m^2$$

得到$\Phi(\phi)+m^2\Phi''(\phi)=0$，以及：

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+k^2r^2=0$$

再次分离，得到：

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-k^2r^2=-l(l+1)$$

有：$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$

即：$r^2R''(r)+2rR'(r)-l(l+1)R(r)+k^2\cdot r^2R(r)=0$

同时：$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0$

令：$x=\cos\theta$，得到：

$$(1-x^2)\Theta''(x)-2x\Theta'(x)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta(x)=0$$

综上：

$$\begin{cases}\Phi(\phi)+m^2\Phi''(\phi)=0\\(1-x^2)\Theta''(x)-2x\Theta'(x)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta(x)=0,x=\cos\theta\\r^2R''(r)+2rR'(r)-l(l+1)R(r)+k^2\cdot r^2R(r)=0\end{cases}$$