1、设随机变量 X_n 服从几何分布，参数 $p=\lambda/n$.试证明: $\frac{X_n}{n}$ 依分布收敛于 Z，其中 Z 服从参数是 λ 的指数分布.

2、设 $X_1,...,X_n$ 为一列相互独立的随机变量， $X_i \sim N(\mu_i,1)$.令 $K=X_1^2+...+X_n^2$.试证明:

$E\exp(itK)=\frac{1}{(1-2it)^{n/2}}\exp\left(\frac{it\delta}{1-2it}\right)$.其中 $\delta=\mu_1^2+...+\mu_n^2$.

3、取 n 个独立随机变量 $X_1,...,X_n$，服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.设 $X_{(1)}=\min\{X_1,...,X_n\}$，

$X_{(n)}=\max\{X_1,...,X_n\}$，求 $Cov(X_{(1)},X_{(n)})$.

4、设随机变量 X 有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{\Gamma(s)}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$.其中 $s>0$ 是参数.给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 服从以 x 为参数的 Poisson 分布. 试计算 $E\exp(itY)$，并证明当 $s\to+\infty$ 时，

$\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$ 依分布收敛于标准正态分布.

5、设 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<x\}$ 上的均匀分布，求相关系数 ρ.

6、设 $X_1,...,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，且总体 X 的三阶中心等于零，四阶矩存在，求样本均值 $\overline{X}=\frac{X_1+...+X_n}{n}$ 与样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}(X_m-\overline{X})^2$ 的相关系数.

7、设 X_1,X_2,X_3 相互独立，分别服从参数是 p_1,p_2,p_3 的几何分布，试证明:

$P(X_1<X_2<X_3)=\frac{p_1p_2q_2q_3^2}{(1-q_2q_3)(1-q_1q_2q_3)}$，其中 $q_i=1-p_i, i=1,2,3.$

8、设随机变量 X,Y 独立，且都服从参数为1的指数分布，证明 $X+Y$ 与 X/Y 独立.

9、证明 Jensen 不等式：假设函数 φ 是凸函数，即 $\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)\geq\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)$ 对所有的 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立. 则对随机变量 X，当 $E|X|<+\infty, E|\varphi(X)|<+\infty$ 时，有 $E(\varphi(X))\geq\varphi(EX)$.

10、设函数 F 单调不减右连续，且 $F(+\infty)=1, F(-\infty)=0$，证明：函数 F 是某个随机变量的分布函数.

参考解答:

1、设随机变量 X_n 服从几何分布，参数 $p=\lambda/n$.试证明: $\frac{X_n}{n}$ 依分布收敛于 Z，其中 Z 服从参数是 λ 的指数分布.

证明：直接按定义验证

$$P\left(\frac{X_n}{n}\le x\right)=P\left(X_n\le nx\right)=\sum_{k=1}^{[nx]}\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}=\frac{\lambda}{n}\frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nx]}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}$$

$$=1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{[nx]}\to 1-e^{-\lambda x}=\int_0^x \lambda e^{-\lambda s}ds=P\left(Z\le x\right).$$

证法二：先计算 X_n 的特征函数 $Ee^{itX_n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}e^{itk}=\frac{\frac{\lambda}{n}e^{it}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)e^{it}}.$

从而，$\frac{X_n}{n}$ 的特征函数为 $Ee^{it\frac{X_n}{n}}=\frac{\frac{\lambda}{n}e^{it/n}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)e^{it/n}}=\frac{\frac{\lambda}{n}e^{it/n}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{it}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\frac{\lambda e^{it/n}}{\lambda-it+o\left(1\right)}$.

当 $n\to\infty$，上式收敛于 $\frac{\lambda}{\lambda-it}=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}e^{itx}dx=Ee^{itZ}$.

根据 Lévy-Cramér 连续性定理，$\frac{X_n}{n}$ 依分布收敛于 Z .

2、设 $X_1,\ldots,X_n$ 为一列相互独立的随机变量，$X_i\sim N(\mu_i,1)$.令 $K=X_1^2+\ldots+X_n^2$.试证明:

$E\exp(itK)=\frac{1}{(1-2it)^{n/2}}\exp\left(\frac{it\delta}{1-2it}\right)$.其中 $\delta=\mu_1^2+\ldots+\mu_n^2$.

证明：X_k^2 有特征函数 $E\exp(itX_k^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{M(x)}dx$

其中 $M(x)=itx^2-\frac{(x-\mu_k)^2}{2}=-\frac{(1-2it)}{2}(x-\frac{\mu_k}{1-2it})^2+\frac{i\mu_k^2t}{1-2it}$.

$$E\exp(itX_k^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(1-2it)}{2}(x-\frac{\mu_k}{1-2it})^2+\frac{i\mu_k^2t}{1-2it}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{i\mu_k^2t}{1-2it}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(1-2it)}{2}y^2}dy=\frac{1}{(1-2it)^{1/2}}\exp\left(\frac{it\mu_k^2}{1-2it}\right).$$

进一步，根据 $X_1,\ldots,X_n$ 独立，得到:

$$E\exp(itK)=\prod_{k=1}^{n}E\exp(itX_k^2)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-2it)^{1/2}}\exp\left(\frac{it\mu_k^2}{1-2it}\right)=\frac{1}{(1-2it)^{n/2}}\exp\left(\frac{it\delta}{1-2it}\right).$$

3、取 n 个独立随机变量 $X_1,...,X_n$，服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.设 $X_{(1)}=\min\{X_1,...,X_n\}$，$X_{(n)}=\max\{X_1,...,X_n\}$，求 $Cov(X_{(1)},X_{(n)})$.

解：$X_{(n)}$ 有概率分布函数 $P(X_{(n)}\le x)=\begin{cases}0,x<0\\ x^n,0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$，故 $X_{(n)}$ 有概率密度函数 $f(x)=nx^{n-1}I_{(x\in[0,1])}$，其中 $I_{(\cdot)}$ 是指示函数：

$$EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xnx^{n-1}I_{(x\in[0,1])}dx=\int_0^1 nx^n dx=\frac{n}{n+1}$$

，类似地，$EX_{(1)}=\dfrac{1}{n+1}$，

根据 $X_{(1)},X_{(n)}$ 联合概率密度函数为 $n(n-1)(y-x)^{n-2}I_{(0\le x<y\le 1)}$，得到：

$$\begin{aligned}EX_{(1)}X_{(n)}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyn(n-1)(y-x)^{n-2}I_{(0\le x<y\le 1)}dxdy\\&=\int_0^1\int_0^y xyn(n-1)(y-x)^{n-2}dxdy=n(n-1)\int_0^1 y\left(\int_0^y x(y-x)^{n-2}dx\right)dy\\&\overset{u=x/y}{=}n(n-1)\int_0^1 y^{n+1}\left(\int_0^1 u(1-u)^{n-2}du\right)dy\overset{Fubini}{=}n(n-1)\left(\int_0^1 y^{n+1}dy\right)\left(\int_0^1 u(1-u)^{n-2}du\right)\end{aligned}$$

注意到后一项成为了 Beta-积分,

$$=n(n-1)\frac{1}{n+2}B(2,n-1)=n(n-1)\frac{1}{n+2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+1)}=\frac{1}{n+2}.$$

因此，$Cov(X_{(1)},X_{(n)})=EX_{(1)}X_{(n)}-EX_{(1)}EX_{(n)}=\dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$

法二：也可以用次序统计量 $X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)}$ 的联合概率密度函数 $n!I_{(0\le x_1<x_2<...<x_n\le 1)}$ 直接计算 $EX_{(1)}X_{(n)}$ 如下：

$$\begin{aligned}EX_{(1)}X_{(n)}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_n n!I_{(0\le x_1<x_2<...<x_n\le 1)}dx_1...dx_n\\&=n!\int_0^1\int_0^{x_n}...\int_0^{x_2}x_1x_n dx_1...dx_n=n!\int_0^1\int_0^{x_n}...\int_0^{x_3}\frac{1}{2}x_2^2x_n dx_1...dx_n\\&=n!\int_0^1\int_0^{x_n}...\int_0^{x_4}\frac{1}{3!}x_3^3x_n dx_1...dx_n=...=n!\int_0^1\frac{1}{n!}x_n^n x_n dx_n=\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

法三：这种解法需要一点点概率直观：在给定 $X_{(n)}=y$ 的条件下，$X_{(1)}$ 是服从 $[0,y]$ 上均匀分布的 $n-1$ 个独立随机变量的第一个次序统计量.因此 $E(X_{(1)}\mid X_{(n)}=y)=y/n$.

$$EX_{(1)}X_{(n)}=E(E(X_{(1)}\mid X_{(n)}=y)X_{(n)})=EX_{(n)}^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n+2}.$$

思考题：证明$Cov(X_{(r)}, X_{(s)}) = \dfrac{r(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.

4、设随机变量 X 有概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{s-1}e^{-x}}{\Gamma(s)}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$.其中 $s>0$ 是参数.给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 服从以 x 为参数的 Poisson 分布. 试计算 $E\exp(itY)$，并证明当 $s \to +\infty$ 时，$\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$ 依分布收敛于标准正态分布.

解：条件期望 $E(e^{itY} \mid X=x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} \dfrac{x^n}{x!} e^{-x} = e^{xe^{it}} e^{-x}$.

故 $Ee^{itY} = E(E(e^{itY} \mid X=x)) = \int_0^{+\infty} e^{xe^{it}} e^{-x} \dfrac{x^{s-1}e^{-x}}{\Gamma(s)} dx = \dfrac{1}{(2-e^{it})^s}$.

$$EY = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\Gamma(s)} dx = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = s, EY^2 = \int_0^{+\infty} \left(x^2 + x\right) \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\Gamma(s)} dx = \frac{\Gamma(s+2)+\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = s^2 + 2s.$$

$DY = EY^2 - (EY)^2 = 2s.$

因此，$\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}} = \dfrac{Y-s}{\sqrt{2s}}$ 有特征函数 $Ee^{itY} = \dfrac{e^{-it/\sqrt{s/2}}}{(2-e^{it/\sqrt{2s}})^s}$.

$$\ln Ee^{itY} = -it/\sqrt{s/2} - s\ln(2-e^{it/\sqrt{2s}}) = -it/\sqrt{s/2} + s(-1+e^{it/\sqrt{2s}}) + \frac{s^2}{2}(-1+e^{it/\sqrt{2s}})^2 + \dots$$

而 $-1+e^{it/\sqrt{2s}} = \dfrac{it}{\sqrt{2s}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2}{2s} + o(\dfrac{1}{s})$.故指数可进一步化简为：

$$-it/\sqrt{s/2} + s(\frac{it}{\sqrt{2s}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2s} + o(\frac{1}{s})) + \frac{s^2}{2}(\frac{it}{\sqrt{2s}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2s} + o(\frac{1}{s}))^2 = -\frac{t^2}{2} + o(1) \to -\frac{t^2}{2}$$

即，$s \to +\infty$ 时，$\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$ 的特征函数收敛于标准正态分布的特征函数，由 Lévy-Cramér 连续性定理，$\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$ 依分布收敛于标准正态分布.

5、设 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<x\}$ 上的均匀分布，求相关系数 ρ .

解：该区域的面积 $m(D)=\dfrac{1}{2}$，故 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\dfrac{1}{m(D)}I_{((x,y)\in D)}$，

即 $f(x,y)=2I_{(0<y<x<1)}$，

$$EXY=\iint_D xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{4},EX=\iint_D xf(x,y)dxdy=\frac{2}{3}.$$
$$EY=\iint_D yf(x,y)dxdy=\frac{1}{3},Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{36}.$$

$$EX^2=\iint_D x^2f(x,y)dxdy=\frac{1}{2},DX=EX^2-E^2X=\frac{1}{18}.$$
$$EY^2=\iint_D y^2f(x,y)dxdy=\frac{1}{6},DX=EY^2-E^2Y=\frac{1}{18}.$$

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{2}$$

6、设 $X_1,...,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，且总体 X 的三阶中心矩等于零，四阶矩存在，求样本均值 $\overline{X}=\dfrac{X_1+...+X_n}{n}$ 与样本方差 $S_X^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{m=1}^{n}(X_m-\overline{X})^2$ 的相关系数.

解：设 $EX=\mu,DX=\sigma^2$，引入 $Y_k=X_k-\mu$，则有 $EY_k=EX_k-\mu=0$

记 $\overline{Y}=\dfrac{Y_1+...+Y_n}{n},S_Y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{m=1}^{n}(Y_m-\overline{Y})^2$，

则 $E\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}EY_k=0,D\overline{Y}=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}DY_k=\dfrac{n\sigma^2}{n^2}=D\overline{X}$，

$$S_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}\left[\left(X_m-\mu\right)-\left(\overline{X}-\mu\right)\right]^2=\frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}(Y_m-\overline{Y})^2=S_Y^2,\quad ES_X^2=\sigma^2$$

故 $corr(\overline{X},S_X^2)=\dfrac{E(\overline{X}-\mu)(S_X^2-\sigma^2)}{\sqrt{D\overline{X}}\sqrt{DS_X^2}}=\dfrac{E(\overline{Y})(S_Y^2-\sigma^2)}{\sqrt{D\overline{Y}}\sqrt{DS_Y^2}}=corr(\overline{Y},S_Y^2)$（corr 指相关系数）

因为当 $i=j=k$ 时，$E(Y_iY_jY_k)=E(Y_i^3)=0$，

当 $i\neq j$ 且 $i\neq k$ 时，$E(Y_iY_jY_k)=E(Y_i)E(Y_jY_k)=0$

所以 $E\left(\overline{Y}S_Y^2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\times\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j\right)=\frac{1}{n(n-1)}E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2Y_j\right)$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(Y_i-\overline{Y})^2Y_j=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\left(Y_i^2Y_j-2Y_i\overline{Y}Y_j+\overline{Y}^2Y_j\right)=0$$

所以 $Cov\left(\overline{Y},S_Y^2\right)=E\left(\overline{Y}S_Y^2\right)-E\overline{Y}ES_Y^2=0-0ES_Y^2=0$

所以，$\overline{Y}$ 与 S_Y^2 的相关系数为 0

因此，$\overline{X}$ 与 S_X^2 的相关系数为 0.

7、设 X_1,X_2,X_3 相互独立，分别服从参数是 p_1,p_2,p_3 的几何分布，试证明：

$P(X_1<X_2<X_3)=\dfrac{p_1p_2q_2q_3^2}{(1-q_2q_3)(1-q_1q_2q_3)}$，其中 $q_i=1-p_i,i=1,2,3.$

解：$P(X_1\le n)=\sum_{k=1}^{n}p_1q_1^{k-1}=1-q_1^n.$

由此可得：$P(X_1\le n-1)=1-q_1^{n-1};P(X_3>n)=1-P(X_3\le n)=q_3^n;$

$$P(X_1<X_2<X_3)=\sum_{n=2}^{+\infty}P(X_1<X_2<X_3,X_2=n)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}P(X_1<n)P(X_2=n)P(X_3>n)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}(1-q_1^{n-1})p_2q_2^{n-1}q_3^n=\frac{p_1p_2q_2q_3^2}{(1-q_2q_3)(1-q_1q_2q_3)}$$

8、设随机变量 X,Y 独立，且都服从参数为 1 的指数分布，证明 $X+Y$ 与 X/Y 独立.

证明：记 $U=X+Y,V=X/Y$，则 $X=\dfrac{UV}{V+1},Y=\dfrac{U}{V+1},$

$$\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{V}{V+1} & \frac{U}{(V+1)^2}\\ \frac{1}{V+1} & -\frac{U}{(V+1)^2}\end{pmatrix}\right|=\frac{U}{(V+1)^2},$$

因此，$X+Y$ 与 X/Y 的联合概率密度函数为：

$f(u,v)=\dfrac{u}{(v+1)^2}e^{-uv/(v+1)}e^{-u/(v+1)}I_{(u>0,v>0)}$ 即 $f(u,v)=ue^{-u}I_{(u>0)}\dfrac{1}{(v+1)^2}I_{(v>0)}$

由于概率密度非零的区域为矩形且联合概率密度函数可分离变量，故 $X+Y$ 与 X/Y 独立.

9、证明 Jensen 不等式：假设函数 φ 是凸函数，即 $\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)\geq\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)$ 对所有的 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立. 则对随机变量 X，当 $E|X|<+\infty, E|\varphi(X)|<+\infty$ 时，有 $E(\varphi(X))\geq\varphi(EX)$.

证明：设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量.由于 $E|X|<+\infty$, 故数学期望 $\mu=EX$ 存在，

设一次函数 $l(x)=ax+b$ 满足 $l(\mu)=\varphi(\mu)$，且 $\varphi(x)\geq l(x),\forall x$

由于 $E|\varphi(X)|<+\infty$，故数学期望 $E\varphi(X)=\int_\Omega\varphi(X)dP$ 存在.

据积分的单调性，可得：

$E\varphi(X)=\int_\Omega\varphi(X)dP\geq\int_\Omega(aX+b)dP=a\int_\Omega XdP+b=a\mu+b=\varphi(\mu)=\varphi(EX).$

证毕.

注解：这样的一次函数 $l(x)$ 是存在的，因为函数 φ 的凸的，这保证了：

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\varphi(c)-\varphi(c-h)}{h}\leq\lim_{h\downarrow 0}\frac{\varphi(c+h)-\varphi(c)}{h}$$

由于单调有界必有极限，故上式中两极限是存在的.取 a 为上式中两极限之间的任意一个值，令 $l(x)=a(x-c)+\varphi(c)$，即可满足要求.

10、设函数 F 单调不减右连续，且 $F(+\infty)=1,F(-\infty)=0$，证明：函数 F 是某个随机变量的分布函数.

证明：令样本空间 $\Omega=[0,1]$，σ -代数 $\mathcal{F}$为（含于 $[0,1]$ 的）Borel 可测集全体，概率测度 P 为 Lebesgue 测度. 取概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量 $X(\omega)=\sup\{y:F(y)<\omega\}$

由于概率测度 P 是 Lebesgue 测度，故 $P(\omega:\omega\leq F(x))=F(x)$，

因此，我们必须且只需证明：$\{\omega:X(\omega)\leq x\}=\{\omega:\omega\leq F(x)\}$

一方面，若 $\omega\leq F(x)$，则 $x\notin\{y:F(y)<\omega\}$，因此，$X(\omega)\leq x$.(上确界是最小的上界，更小的不是上界) 故 $\{\omega:X(\omega)\leq x\}\supseteq\{\omega:\omega\leq F(x)\}$

另一方面, 我们证明 $X(\omega)\leq x\Rightarrow\omega\leq F(x)$, 只需证明其逆否命题: $\omega>F(x)\Rightarrow X(\omega)>x$

假设 $\omega>F(x)$，由于函数 F 右连续，故存在 $\delta>0$ 使 $F(x+\delta)<\omega$，此时必有

$X(\omega)\geq x+\delta>x$ (上确界是上界) 证毕.